

# Implementación del modelo neuronal Integrate-and-Fire

Martín Trucco<sup>1</sup>

*Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba  
Av. Medina Allende N°2144, Ciudad Universitaria X5016LAE, Córdoba, Argentina  
martintrucco@mi.unc.edu.ar<sup>1</sup>*

11 de Octubre, 2022

En el presente trabajo se estudió el funcionamiento de una neurona mediante el modelo Integrate-and-Fire, observando el desempeño del mismo al variar la corriente de un circuito  $RC$ . Además se analizó numérica y analíticamente la frecuencia de disparo para valores de corriente independiente del tiempo.

*Descriptores: modelo Integrate-and-Fire, neuronas, frecuencia de disparo.*

In the present work, the behavior of a neuron was studied using the Integrate-and-Fire model, observing its performance by varying the current of an  $RC$  circuit. In addition, the firing rate for time independent values of current was analyzed numerically and analytically.

*Keywords: Integrate-and-Fire model, neurons, firing rate.*

## Introducción

Las neuronas son células y componente principal del sistema nervioso, cuya función es recibir, procesar y transferir información a través de señales químicas y eléctricas gracias a la excitabilidad de su membrana plasmática. Se especializan en la recepción de estímulos y conducción del impulso nervioso entre ellas (en forma de potencial de acción) mediante conexiones llamadas *sinapsis* o con otras células (por ejemplo fibras musculares de la placa motora) [1].

Transmiten ondas eléctricas originadas por un cambio transitorio de la permeabilidad en la membrana plasmática. Su propagación se debe a la existencia de un *potencial de membrana* (diferencia de potencial entre el interior y exterior de la membrana neuronal) de aproximadamente -70 mV. La carga de una célula inactiva se mantiene oscilando en valores alrededor de este, sin embargo, cuando el potencial de membrana de una célula excitable se despolariza más allá de un cierto umbral, la célula genera (o dispara) un *potencial de acción*, esto es, un brusco cambio en la polaridad de la membrana; de negativo a positivo (despolarización) y nuevamente a negativo (repolarización). Inmediatamente después de este pico la neurona es menos excitable y entra en un periodo refractario (hiperpolarización) hasta regresar al potencial de reposo, en un ciclo que dura unos milisegundos [1][2]. Este proceso se esquematiza en la figura 1(a).

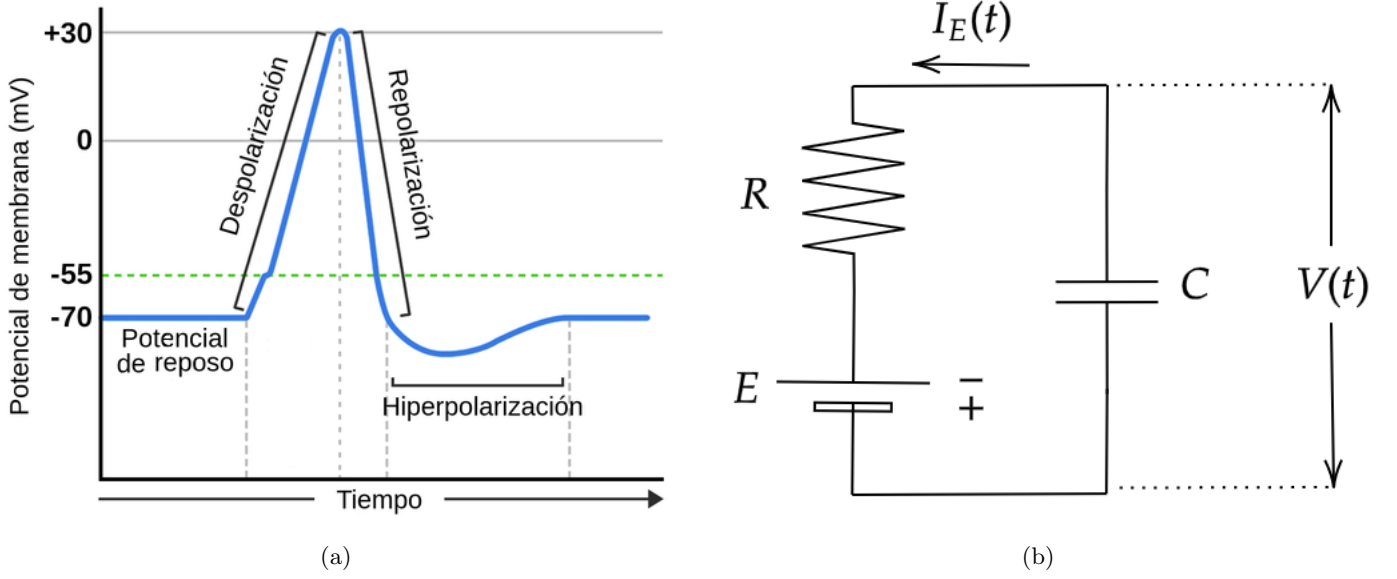
En 1907 el neurocientífico francés Louis Lapicque (Épinal, 1866 - París, 1952) introdujo un simple modelo conocido como Integrate-and-Fire (I&F) que describe matemáticamente el potencial de membrana en términos de un circuito eléctrico mediante un resistor y un capacitor puestos en paralelo. El resistor representa la fuga de carga mientras que el capacitor modela la capacidad de acumular carga.

Este modelo puede dividirse en dos partes: [3] por debajo del umbral la membrana se comporta pasivamente y actúa como un capacitor con fugas cuyo voltaje, en ausencia de corriente, decae a un nivel de reposo. Cuando el voltaje alcanza un potencial umbral (debido a corrientes inyectadas) se asume que este voltaje aumenta rápidamente produciendo un pico, y se restablece al instante a un nivel hiperpolarizado.

En este trabajo se estudia el I&F sin activar el mecanismo de disparo y activando el mismo, analizando en cada caso su comportamiento al modificar los parámetros iniciales, como así también un estudio geométrico de la dinámica del modelo para tiempos suficientemente grandes.

## 1 Marco Teórico

Considerando el circuito eléctrico  $RC$  de la figura 1(b) donde  $R$  es la resistencia,  $C$  el capacitor,  $E$  el potencial en reposo y  $\tau = RC$  el tiempo característico de la membrana, la ecuación para el voltaje de la



**Figura 1:** (a) Ilustración del potencial de membrana para una neurona. Figura adaptada de [4]. (b) Circuito  $RC$  para modelar las neuronas (I&F).  $E$  es el potencial en reposo y  $V(t)$  la diferencia de potencial al aplicar una corriente  $I_e(t)$ .

neurona  $V(t)$  al aplicarle una corriente  $I_e(t)$  puede ser expresada como [5]

$$\dot{V}(t) \equiv \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}(E - V(t) + RI_e(t)) \quad (1)$$

La solución a (1) está dada por

$$V(t) = e^{-(t-t_0)/\tau} \left\{ V_0 + \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t [E + RI(t')] e^{(t'-t_0)/\tau} dt' \right\} \quad (2)$$

con  $V_0 = V(t_0)$  el valor del potencial a tiempo  $t = t_0$ . Particularizando para  $t = 0$ , (2) se reduce a

$$V(t) = e^{-t/\tau} \left\{ V_0 + \frac{1}{\tau} \int_0^t [E + RI(t')] e^{t'/\tau} dt' \right\} \quad (3)$$

### 1.1 Periodo y frecuencia de disparo

Cuando se activa el mecanismo de disparo, el tiempo  $t$  para el cual el potencial  $V(t)$  alcanza el potencial umbral  $V_u$  partiendo de los valores iniciales  $V(t=0) = E$  e  $I_e(t=0) = I_0$  se lo conoce como *periodo de disparo* y está determinado por [5]

$$t_d = \tau \ln \left( \frac{RI_0}{E + RI_0 - V_u} \right) \quad (4)$$

de donde se deriva la condición  $E + RI_0 > V_u$ . Esto es, existe una corriente crítica  $I_c$  tal que el ln en (4) no está definido, y cuyo valor es

$$I_c = \frac{V_u - E}{R} \quad (5)$$

Por otra parte, si se elige un periodo de tiempo comprendido entre la ocurrencia de un pico y el siguiente, llamado *intervalo entre picos*, la tasa de disparo correspondiente o *frecuencia de disparo* se define como [3]

$$f_d := \frac{1}{t_d} \quad (6)$$

## 2 Procedimiento

### 2.1 Mecanismo de disparo desactivado

En primer lugar se realiza un análisis geométrico de la dinámica de la ecuación (1) cuando  $I_e(t) = 0$  nA e  $I_e(t) = 2$  nA a tiempos largos ( $t \rightarrow \infty$ ).

Luego, fijando  $I_e(t) = 2$  nA en un dado intervalo  $t$  y parámetros previamente seleccionados, se utiliza el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para estimar (3) y se compara gráficamente con la solución exacta.

### 2.2 Mecanismo de disparo activado

Empleando los mismos valores que en la sección anterior se calcula numéricamente (3) considerando la presencia de un  $V_u$ . Este procedimiento se repite modificando  $I_e(t)$  y se grafican los resultados.

Finalmente, para diferentes valores de  $I_e(t) = I_e$  se calcula (6) en forma analítica ( $f_d^a$ ) y a través de una aproximación numérica ( $f_d^n$ ).

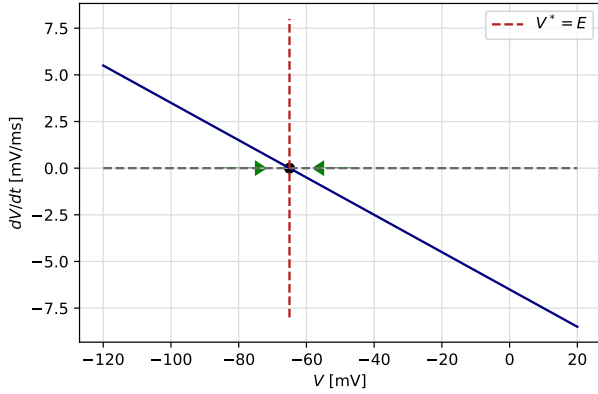
### 3 Resultados y Discusión

#### 3.1 Mecanismo de disparo desactivado

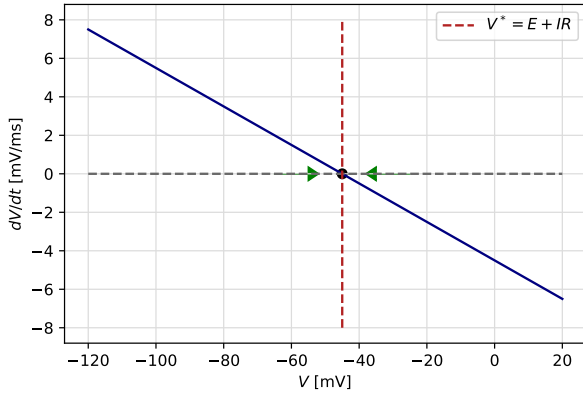
El análisis geométrico se realiza a partir de los puntos fijos  $V^*$  de la ecuación (1), por lo cual  $V^* = E + RI_e(t)$ . Para  $I_e(t) = 0$  nA se tiene que  $V^* = -65$  mV y para  $I_e(t) = 2$  nA,  $V^* = -45$  mV. Como  $\dot{f}(V^*) = -1/\tau < 0$  en ambos casos,  $V^*$  es un punto fijo estable (atractor) y para  $t \rightarrow \infty$  la función  $V(t)$  tenderá al correspondiente valor de  $V^*$ .

Las figuras 2(a) y 2(b) ilustran la solución de la ecuación (1) para  $I_e(t) = 0$  nA e  $I_e(t) = 2$  nA respectivamente.

Notar que la pendiente de las gráficas son negativas, en concordancia con lo mencionado anteriormente.



(a)



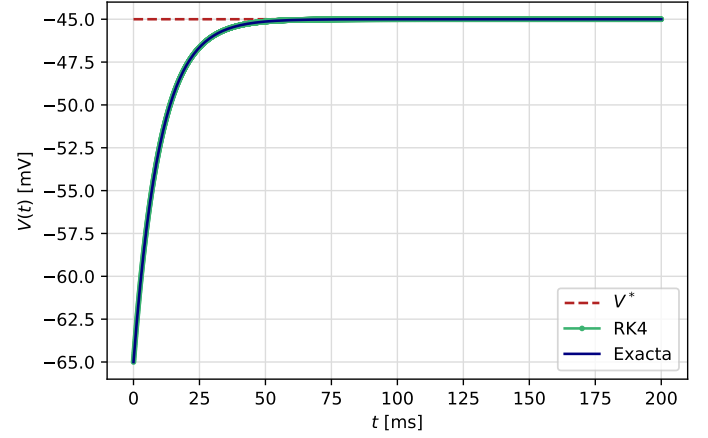
(b)

**Figura 2:** Gráficos de la ecuación (1) para corrientes (a)  $I_e(t) = 0$  nA y (b)  $I_e(t) = 2$  nA. Las flechas verdes apuntan hacia el punto fijo en  $V^*$  indicando que ambos son atractores.

Por otro lado, usando los parámetros de la tabla 1 y un intervalo de tiempo  $t \in [0, 200]$  ms, la aproximación con RK4 a (3) y la solución exacta obtenidas son presentadas en la figura 3.

$\tau$ [ms]	$V(0 \text{ ms})$ [mV]	$E$ [mV]	$R$ [M $\Omega$ ]	$h$ [ms]
10	-65	-65	10	0,05

**Tabla 1:** Parámetros utilizados para graficar 3 con  $h$  el paso empleado en RK4.

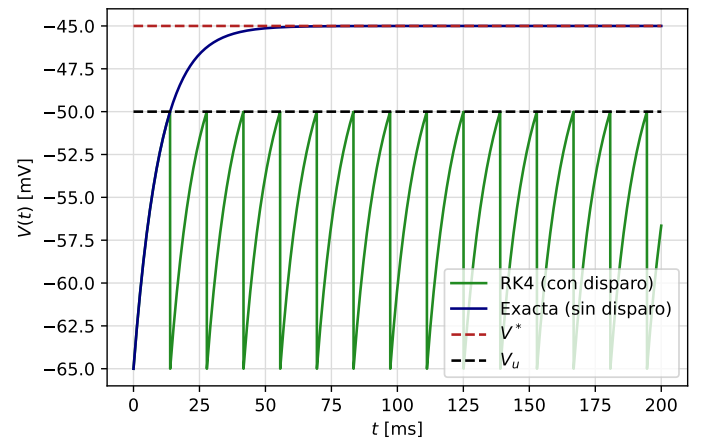


**Figura 3:** Solución exacta y aproximada con RK4 a la ecuación (3) para los valores de la tabla 1.

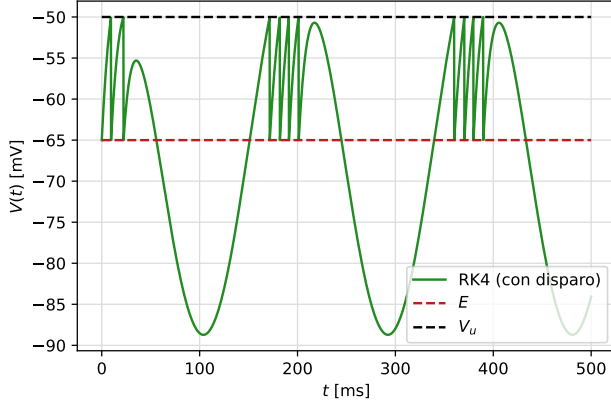
Como se puede observar, la curva de RK4 coincide con la solución exacta y tienden al valor del punto fijo relativo a  $I_e(t) = 2$  nA,  $V^* = -45$  mV.

#### 3.2 Mecanismo de disparo activado

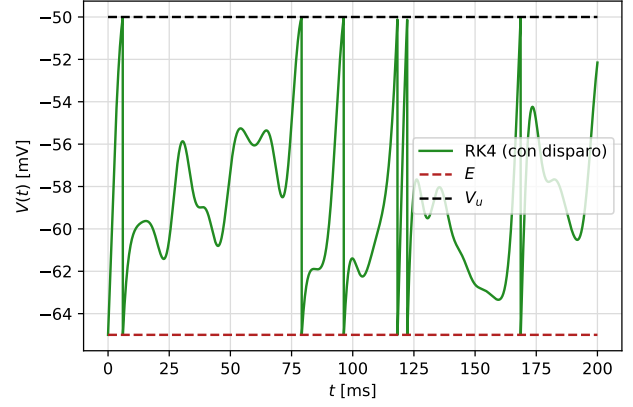
Al activarse el mecanismo de disparo se agrega un potencial umbral a los valores de la tabla 1,  $V_u = -50$  mV. Tomando el mismo intervalo de tiempo de la sección anterior, para  $I_e^1(t) = 2$  nA la aproximación a (3) se expone en la figura 4. Cambiando esta por  $I_e^2(t) = 2,5 \cos(t/30 \text{ ms})$  nA y luego por  $I_e^3(t) = 0,35 [\cos(t/3 \text{ ms}) + \sin(t/5 \text{ ms}) + \cos(t/7 \text{ ms}) + \sin(t/11 \text{ ms}) + \cos(t/13 \text{ ms})]$  nA, se tienen las figuras 5(a) y 5(b) respectivamente.



**Figura 4:** Aproximación a (3) para  $I_e^1(t)$  con el disparo activado, y la solución exacta con el disparo desactivado.



(a)



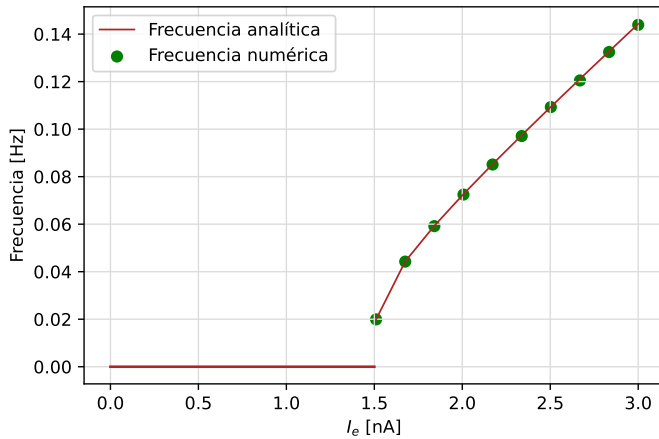
(b)

**Figura 5:** Aproximación a (3) usando RK4 y corrientes (a)  $I_e(t) = I_e^2(t)$  y (b)  $I_e(t) = I_e^3(t)$ .

La figura 4 exhibe un comportamiento oscilatorio cuando se activa el mecanismo de disparo causado por un potencial creciente hasta alcanzar  $V_u = -50$  mV, para luego reiniciarse a  $E = -65$  mV, comenzando otro ciclo. En contraste, cuando el disparo está inactivo, el potencial tiende asintóticamente al atractor  $V^* = -45$  mV como se mencionó en 3.1.

Por su parte, en la figura 5(a) se puede advertir una curva cosenoidal debida a la forma de  $I_e^2(t)$ , la cual tiene un máximo en -25 mV que no puede ser alcanzado por la presencia del  $V_u$ . En (b), como  $I_e^3(t)$  es más irregular que las anteriores, su potencial también lo es, sin embargo tampoco es capaz de superar  $V_u$  y su valor se restablece a -65 mV para comenzar un nuevo ciclo.

Finalmente, fijando  $I_e(t) = 2$  nA y usando (4) y (6) se deduce  $f_d^a \approx 0.0721$  ms<sup>-1</sup> mientras que numéricamente se tiene  $f_d^n \approx 0.0725$  ms<sup>-1</sup>, por lo que difieren porcentualmente en  $\approx 0,6\%$ .



**Figura 6:** Gráfica de  $f_d$  vs  $I_e$ . Notar que  $f_d^n$  está restringida a valores  $I_e(t) > I_c = 1,5$  nA por (5).

Graficando las frecuencias para distintas  $I_e(t) = I_e$  se obtiene la figura 6, donde es apreciable una relación lineal entre ambas variables si  $I_e > I_c = 1,5$  nA.

## 4 Conclusión

Para el mecanismo de disparo desactivado se verificó que el potencial tiende a los puntos fijos estables cuando los tiempos son suficientemente largos. Además se aproximó la solución a (3) usando RK4 y se comparó con la solución exacta, resultando ambas equiparables.

Por otra parte, activando el mecanismo de disparo se observó un cambio en el comportamiento del mismo al utilizar diferentes valores de  $I_e(t)$ . Para una de estas corrientes se calculó también la frecuencia de disparo, destacando una relación lineal entre ambos parámetros.

## Bibliografía

- [1] Colaboradores de Wikipedia. “Neurona”. *Wikipedia, La Enciclopedia Libre*, 30 Sept. 2022, es.wikipedia.org/wiki/Neurona
- [2] Izhikevich, Eugene. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting (Computational Neuroscience)* by Izhikevich, Eugene M. (2010) Paperback (Computational Neuroscience Series). 24383rd ed., The MIT Press, 2010.
- [3] “The Integrate-and-Fire model”. *Goldman Lab Computational Neuroscience at UC Davis*, Jul. 2016, goldmanlab.faculty.ucdavis.edu/wp-content/uploads/sites/263/2016/07/IntegrateFire.pdf

- [4] [www.django-wiki.org](http://www.django-wiki.org). *Potenciales De Umbral - Labster Theory*, [theory.labster.com/threshold-potential-es/](http://theory.labster.com/threshold-potential-es/). Accessed 9 Oct. 2022.
- [5] “Práctico 1”. *Redes Neuronales 2022*, FaMAF. Accessed 9 Oct. 2022.