PUNTOS PROPUESTOS – PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL
EXAMEN FINAL – 2022 II
BOSQUEJO SOLUCIÓN

1. *"La tarifa dinámica, entendida como el incremento del precio de un viaje en función de horarios y zonas de alta demanda, tiene como objetivo equilibrar el mercado."* (DPLNEWS, 2021) ABER y DoDo son las dos plataformas móviles de transporte más grandes del país y ambas hacen uso de la tarifa dinámica cuando la demanda en una zona excede la cantidad de conductores disponibles. Para establecer cuál de las dos aplicaciones resulta más económica al momento de solicitar un servicio en horas de tarifa dinámica, un usuario promedio de ambas aplicaciones hizo el ejercicio de solicitar sus últimos 20 viajes en dichas horas por ambas apps y anotar el monto que cada una le cobraba. Para los servicios en ABER se obtuvo un promedio de 18.700 COP con desviación de 2.500 COP mientras que los mismos viajes en DoDo promediaron un valor de 13.500 COP con desviación de 3.600 COP. La hipótesis de normalidad tanto en los precios de ABER como en los de DoDo se encuentra plenamente sustentada. Asuma que existe independencia entre los precios dados por cada app.
   a. Usando un intervalo de confianza al 95% establezca si la variabilidad de los precios en ambas aplicaciones es igual. Justifique.
   b. Empleando una prueba de hipótesis al 5% de significancia determine si los datos sugieren que el costo promedio de los viajes en ABER con tarifa dinámica excede en más de 2000 COP el costo promedio de los mismos viajes en DoDo. Analice, además, si el resultado de la prueba de hipótesis es suficiente para preferir una de las dos aplicaciones en horas de tarifa dinámica. Explique.

Solución

Definimos las variables aleatorias X y Y como el costo, en COP, por viaje en tarifa dinámica con las apps ABER y DoDo, respectivamente. Del enunciado tenemos:

$$n_X = n_Y = 20 \qquad \bar{X} = 18.700 \qquad \bar{Y} = 13.500 \qquad s_X = 2.500 \qquad s_Y = 3.600$$

Además, X y Y son independientes y se distribuyen normalmente.

a. Como hay normalidad e independencia entonces se emplea la distribución F para estimar el intervalo de confianza de la razón de varianzas:

$$IC\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\right) = \left(F_{\alpha/2;n_Y-1,n_X-1}\cdot\frac{S_X^2}{S_Y^2},\ F_{1-\alpha/2;n_Y-1,n_X-1}\cdot\frac{S_X^2}{S_Y^2}\right)$$

Tenemos $1-\alpha = 0,95 \quad\rightarrow\quad \alpha = 0,05 \quad\rightarrow\quad \frac{\alpha}{2} = 0,025 \quad\rightarrow\quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$ y así

- $F_{\frac{\alpha}{2};n_Y-1,n_X-1} = F_{0,025;19,19} = 0,3958$
- $F_{1-\frac{\alpha}{2};n_Y-1,n_X-1} = F_{0,975;19,19} = 2,5264$

Reemplazando en la fórmula se obtiene el intervalo de confianza deseado

$$IC\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\right)_{95\%} = (0,1908\ ;\ 1,2184)$$

Análisis: Con una probabilidad de 0.95 el intervalo entre 0,1908 y 1,2184 contiene el cociente poblacional de varianzas σ_X^2/σ_Y^2. Además, como $1 \in IC(\sigma_X^2/\sigma_Y^2)_{95\%}$entonces con una confianza del 95% se concluye que la variabilidad en los cobros de ambas aplicaciones es igual, es decir, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

b. Con $\alpha = 0{,}05$ se desean contrastar las hipótesis:

$$H_0: \mu_X - \mu_Y \leq 2.000 \qquad vs \qquad H_1: \mu_X - \mu_Y > 2.000$$

Tenemos una PH para la diferencia de medias poblacionales $(\mu_X - \mu_Y)$ de cola derecha. Como ambas poblaciones son normales, independientes, se desconocen las varianzas poblacionales, pero se estableció en el punto anterior que son iguales entonces se emplea el CASO 2 para la diferencia de medias muestrales $\bar{X} - \bar{Y}$:

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}} \sim t_{(n_X+n_Y-2)} \quad \text{donde} \quad S_p = \sqrt{\frac{(n_X-1)S_X^2+(n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}}$$

Así, la PH se resuelve sobre la curva $t_{20+20-2} = t_{38}$.

<u>Método del valor crítico</u>

- El valor crítico se halla como el percentil de la distribución t_{38} que deja $0{,}05$ en la cola de rechazo (cola derecha):

$$t_c = t_{0{,}95;38} = 1{,}686$$

- El valor de prueba se halla suponiendo H_0 cierta $(\mu_X - \mu_Y = 2.000)$ y reemplazando la evidencia muestral en el estadístico de CASO 2:

$$t_p = \frac{(18.700 - 13.500) - 2.000}{3.099{,}19 \cdot \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}}} = 3{,}26$$

Análisis: Como $t_p = 3{,}26 > 1{,}686 = t_c$ y la prueba es de cola derecha entonces con una significancia del 5% **se rechaza $\boldsymbol{H_0}$** y se concluye que el monto promedio por viaje en ABER en horas de tarifa dinámica SÍ supera en más de 2.000 COP a su equivalente en la app DoDo.

<u>Método del p-valor</u>

Bajo H_0 cierta $(\mu_X - \mu_Y = 2.000)$ se calcula el p-valor como la probabilidad en la cola de rechazo (derecha) que deja la evidencia muestral recolectada por el usuario:

$$\begin{aligned} p - valor &= P(\bar{X} - \bar{Y} > 18.700 - 13.500) \\ &= P\left(\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} > \frac{(18.700 - 13.500) - 2.000}{3.099{,}19 \cdot \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}}}\right) \\ &= P(t_{38} > 3{,}26) = 0{,}0012 \end{aligned}$$

Análisis: Como $p - valor = 0{,}0012 < 0{,}05 = \alpha$ entonces con una significancia del 5% **se rechaza $\boldsymbol{H_0}$** y se concluye que el monto promedio por viaje en ABER en horas de tarifa dinámica SÍ supera en más de 2.000 COP a su equivalente en la app DoDo. Además, el rechazo es contundente dado que $p - valor$ es muy pequeño.

Análisis general: Si el criterio de decisión solo depende de si, en promedio, viajar en DoDo genera un ahorro de mínimo 2.000 COP con respecto a viajar en ABER pues la conclusión del ejercicio sí sería suficiente para preferir DODO en horas de tarifa dinámica. Ahora, si se consideran otros aspectos como el afán del cliente y, por tanto, el tiempo que tarda el servicio en llegar pues sería necesario recoger datos al respecto y hacer un análisis que nos proporcione más herramientas para escoger la mejor app en horas de tarifa dinámica.

2. En las carreras de velocidad el tiempo de reacción durante la partida es un elemento importante para el resultado final. Según varios autores, el tiempo óptimo para la salida se establece entre 1 y 1,5 segundos entre la orden de aviso y la ejecución de la arrancada. Un entrenador de atletas de élite ya ha logrado que su equipo reaccione, en promedio, dentro de los tiempos establecidos en la literatura científica; sin embargo, aún los tiempos de salida de sus deportistas difieren mucho entre sí. Para reducir dicha variabilidad implementó un nuevo protocolo de entrenamiento y registró el tiempo de salida, en segundos, de sus 11 competidores en un entrenamiento regular y obtuvo:

1,2	1,1	1,05	1,46	1,03	1,2	1,51	1,23	1,07	1,43	0,95

Si los registros de todos los entrenamientos del año pasado para los pupilos del entrenador tuvieron una desviación de 0,25 segundos y suponiendo que los tiempos de salida siguen una distribución normal, establezca, con una significancia del 2%, si el nuevo protocolo de entrenamiento logró el objetivo del entrenador. Explique.

Solución

Sea X el tiempo, en segundos, que le toma a un deportista del equipo arrancar luego de la orden de aviso. Del enunciado se tiene que $X \sim N$, $n = 11$ y $\alpha = 0{,}02$. Además, históricamente se estableció que $\sigma = 0{,}25$.

De los datos obtenemos

$$\bar{X} = 1{,}2027 \qquad s = 0{,}1893$$

Como el interés recae en analizar si el nuevo protocolo reduce la variabilidad de los tiempos de salida entonces se desean contrastar las hipótesis

$$H_0 : \sigma = 0{,}25 \quad vs \quad H_1 : \sigma < 0{,}25$$

Que son equivalentes a

$$H_0 : \sigma^2 = 0{,}0625 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 < 0{,}0625$$

Tenemos una PH para la varianza poblacional de cola izquierda.

Como la variable aleatoria X es normal entonces $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ y la hipótesis se resuelve sobre la curva χ^2_{10}.

Método del valor crítico

El valor crítico corresponde al percentil $\alpha = 0{,}02$ de la distribución χ^2_{10}:

$$\chi^2_c = \chi^2_{0{,}02;10} = 3{,}059$$

El valor de prueba se halla reemplazando en el estadístico la evidencia muestral y asumiendo H_0 como cierta ($\sigma^2 = 0{,}0625$).

$$\chi^2_p = \frac{(11-1)(0{,}1893^2)}{0{,}0625} = 5{,}734$$

Como $\chi^2_p = 5{,}374 > 3{,}059 = \chi^2_c$ y la prueba es de cola izquierda entonces χ^2_p cae en zona de no rechazo y, con una significancia del 2%, **no se rechaza H_0** y se concluye que la desviación del tiempo de salida del equipo sigue siendo igual a $0{,}25$ segundos, es decir, el protocolo implementado por el entrenador no funcionó para reducir la variabilidad.

Método del p-valor

Suponiendo H_0 cierta ($\sigma^2 = 0{,}0625$) calculamos la probabilidad sobre la evidencia muestral:

$$p - valor = P(s^2 < 0{,}1893^2) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \frac{(11-1)(0{,}1893^2)}{0{,}0625}\right) = P(\chi^2_{10} < 5{,}734) = 0{,}1629$$

Como $p - valor = 0{,}1629 > 0{,}02 = \alpha$ entonces, con una significancia del 2%, **no se rechaza H_0** y se concluye que la desviación del tiempo de salida del equipo sigue siendo igual a $0{,}25$ segundos, es decir, el protocolo implementado por el entrenador no funcionó para reducir la variabilidad.

3. Los analistas financieros de la empresa FiFi, que presta servicios de transporte a través de una plataforma electrónica, están considerando incrementar el precio de la tarifa mínima para servicios de recorridos cortos en cierto sector de la ciudad, pues consideran que, aunque el gasto de combustible es moderado, los tiempos que gastan los socios en prestar el servicio son elevados a causa de la congestión vehicular. Sin embargo, deben tener en cuenta los precios que maneja la competencia, pues este es un factor diferenciador para que el cliente escoja o no cada plataforma. Se conoce que la competencia cobra una tarifa mínima de COP$5.000 y que el tiempo promedio de recorrido es de 16,5 minutos.

   Para evaluar la decisión, se tomó un piloto de 18 servicios de tarifa mínima en el sector, cuyos tiempos (en minutos) de recorrido se presentan a continuación:

13,7	14,8	21,4	22,0	16,6	18,1	19,7	20,4	16,7
14,5	15,5	20,3	22,9	24,0	12,7	11,9	16,3	16,6

   Si, a partir de la muestra, se comprueba que la media del tiempo excede en más del 10 % al tiempo promedio de la competencia, se hará un ajuste a la tarifa. De lo contrario, se mantendrá la tarifa actual. Suponiendo que los tiempos de duración de los servicios se pueden asumir con comportamiento normal, estime con una confianza del 98 % el tiempo medio y determine cuál debe ser la decisión.

Solución

Sea X la duración, en minutos, de los recorridos. Del enunciado tenemos que $X \sim N$, mientras que de los datos obtenemos

$$n = 18 \qquad \bar{X} = 17{,}672 \qquad s_X = 3{,}602$$

Como hay normalidad, no se conoce σ_X, de los datos calculamos s_X y $n = 18 < 30$ entonces empleamos la distribución $t_{n-1} = t_{17}$ para el intervalo de confianza de μ.

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \quad t_{0,99;17} = 2{,}567$$

$$IC(\mu)_{98\%} = \left[\bar{X} \mp t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[17{,}672 \mp 2{,}567 \times \frac{3{,}602}{\sqrt{18}}\right] = [15{,}493\,;19{,}851]\text{ minutos}$$

Con una probabilidad de 0,98 el intervalo entre $15{,}493$ y $19{,}851$ minutos contiene la duración media de todos los recorridos cortos en la empresa FiFi. Para elevar la tarifa, el intervalo debería estar por encima de $16{,}5 \times 1{,}1 = 18{,}15$. Al no cumplir el requisito, la decisión debe ser mantener la tarifa actual.

4. Una reconocida empresa requiere para su área de analítica la vinculación de un ingeniero que desarrolle modelos de *Machine Learning*. Al proceso se han presentado decenas de aspirantes, pero la mayoría han sido descartados en las diferentes fases de selección. Para la última fase del proceso de contratación, se les ha pedido a los dos ingenieros que siguen opcionados para la vacante desarrollar un modelo de clasificación a partir de una base de entrenamiento. Para validar el desempeño de los dos modelos presentados, el jefe dispone de dos bases de datos diferentes e independientes: de la primera seleccionó al azar un conjunto de 1400 registros de los cuales, el modelo 1, clasificó correctamente 1297; mientras que, de la segunda, escogió aleatoriamente 1350 registros de los cuales 1204 fueron clasificados correctamente por el segundo modelo. La medida de desempeño de los modelos es el porcentaje de registros bien clasificados.

   Si se va a contratar al ingeniero que desarrolle el modelo con la mejor medida de desempeño (el que la maximice), o de lo contrario se hará otra prueba ¿cuál es la decisión de contratación y por qué? Utilice una estimación al 96 % de confianza para concluir.

Solución

Sean π_1 y π_2 las proporciones poblacionales de registros bien clasificados por los modelos 1 y 2, respectivamente. Del enunciado:

$$n_1 = 1400 \qquad n_2 = 1350 \qquad X_1 = 1297 \qquad X_2 = 1204$$

Y, así

$$\hat{p}_1 = \frac{1297}{1400} = 0{,}926 \qquad \hat{p}_2 = \frac{1204}{1350} = 0{,}892$$

Como n_1 y n_2 son lo suficientemente grandes entonces se puede emplear la distribución normal para estimar la diferencia de proporciones:

$$1 - \alpha = 0{,}96 \rightarrow \ z_{0,98} = 2{,}054$$

Reemplazando en la fórmula:

$$IC(\pi_1 - \pi_2)_{96\%} = \left[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right]$$

$$= \left[(0{,}926 - 0{,}892) \mp \ 2{,}054 \times \sqrt{\frac{0{,}926(1-0{,}926)}{1400} + \frac{0{,}892(1-0{,}892)}{1350}}\right] = [0{,}012 \,;\, 0{,}057]$$

La probabilidad de que el intervalo entre $0{,}012$ y $0{,}057$ contenga la diferencia real de proporciones de aciertos de clasificación entre los modelos 1 y 2 es 0,96. Además, como todo el intervalo de confianza es mayor a cero, con una confianza del 96% se puede concluir que $\pi_1 > \pi_2$, es decir, el modelo 1 tiene mejor desempeño que el modelo 2 y, por tanto, el ingeniero 1 es quien debe ser contratado.

5. Una compañía que elabora bloques de hormigón, elabora una viga reforzada de soporte (el modelo de viga T45-G). Dicha referencia de vigas se utiliza en la elaboración de viviendas prefabricadas en ciertas zonas de la ciudad. Un usuario de la viga T45-G sospecha que la desviación estándar de su ruptura, (medida en kg f/cm2), es diferente del valor de 0,75 especificado por el fabricante acorde a la norma NSR-10. En consecuencia, el usuario prueba la resistencia a la ruptura de cada una de las 9 vigas T45-G de una muestra y obtiene los siguientes resultados:

73,4	75,4	72,1	73,5	72,8	76,1	75,0	74,1	74,5

Suponiendo que la resistencia a la ruptura se distribuye normalmente, pruebe con un nivel de significancia del 10%, la especificación del fabricante.

Solución

Sea X la resistencia a la ruptura de las vigas T45-G (medida en kg f/cm^2). Del enunciado tenemos que $X \sim N$ y que el fabricante afirma $\sigma = 0{,}75$. De los datos: $n = 9$ $\quad s = 1{,}2845$ $\quad s^2 = 1{,}65$

Con una significancia del 10% se desean contrastar las hipótesis:

$$H_0: \sigma = 0{,}75 \quad vs \quad H_1: \sigma \neq 0{,}75$$

Que son equivalentes a

$$H_0: \sigma^2 = 0{,}5625 \quad vs \quad H_1: \sigma^2 \neq 0{,}5625$$

Esta es una prueba de hipótesis a dos colas para la varianza poblacional, σ^2.

Como hay normalidad en la población entonces $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ y la prueba se resuelve sobre la curva χ^2_8.

Método del valor crítico

Se hallan los dos valores críticos como percentiles de la distribución:

$$\chi^2_{c1} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1} = \chi^2_{0,05;8} = 2{,}733 \qquad \text{y} \quad \chi^2_{c2} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = \chi^2_{0,95;8} = 15{,}507$$

El valor de prueba se halla reemplazando la evidencia muestral en el estadístico de la varianza muestral y suponiendo H_0 como cierta

$$\chi^2_p = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(9-1)\cdot 1{,}65}{0{,}5625} = \frac{13{,}2}{0{,}5625} = 23{,}47$$

Como $\chi^2_p = 23{,}47 > \chi^2_{c2} = 15{,}507$ y la prueba es a dos colas entonces se **rechaza H_0** con una significancia del 10% y se concluye que la evidencia muestral respalda la sospecha del usuario pues la especificación para la desviación de la ruptura de las vigas no se está cumpliendo.

Método del p-valor

La evidencia muestral, $s^2 = 1{,}65 > 0{,}5625$ entonces se satisface la hipótesis $H_1: \sigma^2 > 0{,}5625$ y, así, el p-valor se calcula sobre la evidencia suponiendo H_0 cierta

$$p - valor = 2 \times P(s^2 > 1{,}65) = 2 \times P(\chi^2_8 > 23{,}47) = 2 \times 0{,}0028 = 0{,}0056$$

Como $p - valor = 0{,}0056 < 0{,}10 = \alpha$ entonces con una significancia del 10% se **rechaza H_0** y se concluye que la evidencia muestral respalda la sospecha del usuario pues la especificación para la desviación de la ruptura de las vigas no se está cumpliendo.

6. Un fabricante de fibras textiles está investigando y desarrollando una nueva fibra de neopreno para la elaboración de trajes para buceadores profesionales. Según la compañía esta fibra tiene un alargamiento promedio de 12 cm por metro lineal con una desviación estándar de 1,5 cm. La empresa desea testear el valor referencial de alargamiento promedio considerando un nivel de significancia del 0,01 y, para ello, selecciona una muestra aleatoria de 50 rollos del nuevo producto, y los resultados indicaron que la media de alargamiento en la muestra de la nueva fibra fue de 11,5 cm por metro lineal. Con base en lo anterior, determine si se puede concluir que el nuevo producto cumple con las especificaciones de diseño.

Solución

Sea X la variable que cuantifica el alargamiento por metro lineal de la fibra de neopreno, medido en cm. Tenemos

$$n = 50 \qquad \mu = 12 \qquad \sigma = 1{,}5 \qquad \bar{X} = 11{,}5$$

Y, con una significancia de $0{,}01$ se desean testear las hipótesis

$$H_0: \mu = 12 \quad vs \quad H_1: \mu \neq 12$$

Prueba de hipótesis para μ a dos colas. Como $n = 50 \geq 30$ y se conoce σ entonces, aplicando TLC,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Y la hipótesis se resuelve sobre la curva normal estándar, Z.

Método del valor crítico

Se hallan los dos valores críticos como percentiles de la distribución:

$$z_{c1} = z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = -2{,}576 \quad \text{y} \quad z_{c2} = z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}995} = 2{,}576$$

El valor de prueba se halla estandarizando la evidencia muestral bajo H_0 cierta:

$$z_p = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{11{,}5 - 12}{1{,}5/\sqrt{50}} = -2{,}357$$

Como $z_{c1} < z_p = -2{,}357 < z_{c2}$ y la PH es a dos colas entonces con una significancia del 1% **NO se rechaza H_0** y se concluye que la especificación en cuanto al alargamiento promedio por metro lineal del neopreno desarrollado sí se cumple.

Método del p-valor

La evidencia muestral, $\bar{X} = 11{,}5 < 12$ entonces se satisface la hipótesis $H_1: \mu < 12$ y, así, el p-valor se calcula sobre la evidencia suponiendo H_0 cierta

$$p - valor = 2 \times P(\bar{X} < 11{,}5) = 2 \times P(Z < -2{,}357) = 2 \times 0{,}0092 = 0{,}0184$$

Como $p - valor = 0{,}0184 > 0{,}01 = \alpha$ entonces con una significancia del 1% **NO se rechaza H_0** y se concluye que la especificación en cuanto al alargamiento promedio por metro lineal del neopreno desarrollado sí se cumple.

7. Cada semana en una tienda de ropa se lleva a cabo el inventario y se calculan las pérdidas por motivo de robos. El gerente de la tienda quisiera reducir estas pérdidas considerando dos opciones. La primera es contratar un vigilante; la segunda es instalar cámaras de seguridad. Para decidir entre las dos opciones, el gerente primero contrató un vigilante por un periodo de prueba de seis semanas. Luego, para las siguientes seis semanas, instaló cámaras en la tienda. Al final de cada semana cuantificó las pérdidas, obteniendo (en miles de pesos) para el tiempo con vigilante un promedio de 361,5 y una varianza de 6767,5, mientras que, los registros para las semanas con cámara de seguridad fueron:

486	303	270	386	411	435

Es válido asumir independencia y normalidad en las pérdidas semanales de ambos métodos de vigilancia. Establezca si, según los resultados de las muestras, el gerente de la tienda debe contratar un vigilante dado que son mayores las pérdidas promedio con cámara de seguridad. Construya una prueba de hipótesis con un nivel de significancia del 5% para responder a esta pregunta. Para determinar la igualdad o no de las varianzas poblaciones construya un intervalo de confianza al 95%.

Solución

Sean las variables aleatorias X y Y las pérdidas (en miles de pesos) por robos en una semana cuando hay vigilante y cuando hay cámaras de seguridad, respectivamente. Del enunciado tenemos que $X \sim N$, $Y \sim N$, X y Y independientes. Además,

$$n_X = n_Y = 6 \qquad \bar{X} = 361{,}5 \qquad s_X^2 = 6767{,}5 \;\rightarrow\; s_X = 82{,}26$$

De los datos

$$\bar{Y} = 381{,}33 \qquad s_Y = 81{,}57 \;\rightarrow\; s_Y^2 = 6653{,}37$$

Se desean probas las hipótesis

$$H_0: \mu_X \geq \mu_Y \quad vs \quad H_1: \mu_X < \mu_Y$$

Que son equivalentes a

$$H_0: \mu_X - \mu_Y \geq 0 \quad vs \quad H_1: \mu_X - \mu_Y < 0$$

Tenemos prueba de hipótesis para la diferencia de medias $\mu_X - \mu_Y$ de cola izquierda. Para discernir la curva sobre la que se resuelve es necesario establecer la relación entre las varianzas poblacionales (que se desconocen). Para ello, teniendo en cuenta que hay normalidad e independencia en ambas variables, se aplica la distribución F y se construye el intervalo de confianza al 95%:

$$F_{0,025;n_Y-1,n_X-1} = F_{0,025;5;5} = 0{,}1399 \qquad F_{0,975;n_Y-1,n_X-1} = F_{0,975;5;5} = 7{,}1463$$

$$IC\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\right)_{95} = \left(F_{0,025;5;5} \times \frac{s_X^2}{s_Y^2}, F_{0,975;5;5} \times \frac{s_X^2}{s_Y^2}\right) = \left(0{,}1399 \times \frac{6767{,}5}{6653{,}37}; 7{,}1463 \times \frac{6767{,}5}{6653{,}37}\right) = (0{,}142; 7{,}268)$$

Con una confianza del 95% el intervalo entre 0,142 y 7,268 contiene el cociente real entre las varianzas de las pérdidas por robos y, como $1 \in IC$ entonces, con una confianza del 95%, se concluye que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

Así, al tener normalidad, independencia, varianzas poblacionales desconocidas pero iguales (probado con el IC) se usa CASO 2 para la distribución de $\bar{X} - \bar{Y}$ y la prueba de hipótesis de diferencia de medias se decide sobre la curva $t_{n_X+n_Y-2} = t_{10}$.

<u>Método del valor crítico</u>

Para $\alpha = 0.05$ el valor crítico es el percentil que deja 5% en la cola izquierda (cola de rechazo) de la curva:

$$t_c = t_{0,05;10} = -1{,}812$$

El valor de prueba se halla reemplazando la evidencia muestral en el estadístico y suponiendo H_0 cierta:

$$S_p = 81{,}92$$

$$t_p = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = -0{,}4193$$

Como $t_p = -0{,}4193 > -1{,}812 = t_c$ y la PH es de cola izquierda entonces, con una significancia del 5% No se rechaza $\boldsymbol{H_0}$ y se concluye que, en promedio, las pérdidas por robos cuando hay vigilante son mayores o iguales a cuando hay cámara de seguridad; es decir, la decisión no debería ser contratar al vigilante.

<u>Método del p-valor</u>

Suponiendo H_0 cierta se calcula sobre la evidencia muestral:

$$p - valor = P(\bar{X} - \bar{Y} < 361{,}5 - 381{,}33) = P(t_{10} < -0{,}4193) = 0{,}3419$$

Como $p - valor = 0{,}3419 > 0{,}05 = \alpha$ entonces, con una significancia del 5% No se rechaza $\boldsymbol{H_0}$ y se concluye que, en promedio, las pérdidas por robos cuando hay vigilante son mayores o iguales a cuando hay cámara de seguridad; es decir, la decisión no debería ser contratar al vigilante.

8. Los clientes de los supermercados "Los Tres Amigos" tienen dos opciones al pagar por sus compras. Pueden pagar en una caja registradora normal operada por un cajero, o emplear el nuevo procedimiento *U-Scan*. En el procedimiento tradicional, un empleado registra cada artículo, lo pone en una banda transportadora pequeña de donde otro empleado lo toma y lo pone en una bolsa, y después en el carrito de víveres. En el procedimiento *U-Scan*, es el cliente quien registra cada artículo, lo pone en una bolsa y coloca las bolsas en el carrito. Este procedimiento está diseñado para reducir el tiempo que un cliente pasa en la fila de la caja. El aparato *U-Scan* se acaba de instalar en la sucursal del norte. La gerente de la tienda desea saber si el tiempo medio del pago con el método tradicional es mayor que con *U-Scan*, para lo cual reunió la siguiente información sobre dos muestras. El tiempo se mide desde el momento en que el cliente ingresa a la fila hasta que sus bolsas están en el carrito.

Procedimiento	Promedio	Desviación estándar de la población	Tamaño muestra
Tradicional	5,50 minutos	0,40 minutos	50 clientes
U-Scan	5,30 minutos	0,30 minutos	100 clientes

Empleando un intervalo de confianza al 95% establezca si existe evidencia de disminución de los tiempos promedio de pago usando *U-Scan*.

Solución

Sean X = "tiempo que destina el cliente desde que ingresa a la fila hasta que sus bolsas están en el carrito usando el método tradicional" y Y = "tiempo que destina el cliente desde que ingresa a la fila hasta que sus bolsas están en el carrito usando el método U-Scan".

Tenemos

$$n_X = 50 \quad n_Y = 100 \quad \bar{X} = 5{,}5 \quad \bar{Y} = 5{,}3 \quad \sigma_X = 0{,}4 \quad \sigma_Y = 0{,}3$$

Se desea estimar la diferencia de medias $\mu_X - \mu_Y$ con una confianza del 95%.

Como las muestras son de poblacionales independientes de distribución desconocida y se conocen las desviaciones estándar poblacionales para cada tipo de procedimiento, al usar muestras grandes $n_1, n_2 \geq 30$, se puede aplicar el **CASO 1** para la distribución de $\bar{X} - \bar{Y}$ y empleamos la distribución Z para construir el intervalo:

$$\backslash 1 - \alpha = 0.95 \quad \rightarrow \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}96$$

$$IC(\mu_X - \mu_Y)_{95\%} = \left((\bar{X} - \bar{Y}) \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} \right) = \left((5{,}5 - 5{,}3) \mp 1{,}96 \sqrt{\frac{0,4^2}{50} + \frac{0,3^2}{100}} \right) = (0{,}074; 0{,}325)$$

Así, con una confianza del 95% el intervalo entre 0,074 y 0,325 contiene la diferencia entre el tiempo medio de servicio con el método tradicional y el tiempo medio de servicio con el sistema U-Scan. Además, como $IC(\mu_X - \mu_Y) > 0$ entonces, con la misma confianza, se concluye que $\mu_X > \mu_Y$; es decir, el tiempo promedio de servicio con el método tradicional es mayor que con el nuevo sistema lo cual evidencia una disminución en el tiempo promedio de pago con el uso de U-Scan.

9. Un fabricante de artículos deportivos surte los balones de futbol a la liga sudamericana y confirma que máximo el 2% de estos balones podrían tener algún defecto de fábrica. La junta directiva de la liga de futbol ha identificado que en el último torneo se han presentado algunos inconvenientes con los balones durante los partidos, y eso ha generado la posibilidad del cambio de proveedor. Para ello, el fabricante decide seleccionar de su inventario 200 balones y los somete a pruebas rigurosas en campo, encontrando que 6 balones tienen algún defecto. Con esta información, se quiere saber si la verdadera proporción de balones defectuosos supera la información previa del fabricante. Use un nivel de significancia del 5%.

Solución

Definimos π como la proporción de balones de fútbol defectuosos en toda la producción. Del enunciado se tiene

$$n = 200 \qquad X = 6 \quad \rightarrow \quad \hat{p} = \frac{6}{200} = 0{,}03$$

La prueba de hipótesis a contrastar es

$$H_0: \pi \leq 0{,}02 \quad vs \quad H_1: \pi > 0{,}02$$

La cual es PH para π de cola derecha y se prueba sobre la curva Z.

Método del valor crítico

El valor crítico se halla como el percentil 95 de la distribución:

$$z_c = z_{0{,}95} = 1{,}645$$

El valor de prueba se calcula estandarizando (bajo H_0 cierta) la evidencia muestral, $\hat{p}$:

$$z_p = \frac{\hat{p} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{0{,}03 - 0{,}02}{\sqrt{\frac{0{,}02 * (1 - 0{,}02)}{200}}} = 1{,}01$$

Como $z_p < z_c$ y la PH es de cola derecha entonces con una significancia del 5% **no se rechaza H_0** y se concluye que la proporción de balones defectuosos producidos por el fabricante no excede el 2%. La evidencia no permite dudar de la afirmación del proveedor.

Método del p-valor

Sobre la evidencia muestral y suponiendo que se cumple H_0 se calcula:

$$p - valor = P(\hat{p} > 0{,}03) = P(Z > 1{,}01) = 0{,}1562$$

Como $p - valor = 0{,}1562 > 0{,}05 = \alpha$ entonces con una significancia del 5% **no se rechaza H_0** y se concluye que la proporción de balones defectuosos producidos por el fabricante no excede el 2%. La evidencia no permite dudar de la afirmación del proveedor.

10. Una compañía que elabora bebidas gaseosas está en un proceso de modernización de una de sus plantas. Uno de los procesos más importantes que se realiza en esta plantan es el llenado de las botellas con la bebida, medida en onzas. En este sentido, se adquirió un sistema nuevo de llenado cuya expectativa es una menor velocidad (tiempo de llenado en milésimas de segundos) de llenado manteniendo la medida adecuada de las botellas. Para ello se instaló el nuevo equipo y se puso en funcionamiento de manera paralela e independiente del equipo clásico, generando estos datos.

Resultados muestrales			
Tecnología	**Tamaño de muestra**	**Promedio**	**Desviación estándar**
Equipo clásico	10	1,00 milésima de segundo	0,02 milésima de segundo
Equipo nuevo	15	0,90 milésima de segundo	0,01 milésima de segundo

Si la compañía tiene que elegir uno de estos sistemas de llenado, teniendo en cuenta que lo que se quiere es reducir el tiempo de llenado de las botellas, ¿cuál deberá seleccionar, basado en el rango de las diferencias de medias? Asuma que los datos provienen de muestras aleatorias normales y use un nivel de significancia del 1% para concluir.

Solución

Sean las variables aleatorias

$$X\text{: tiempo de llenado de botellas con el equipo clásico}$$
$$Y\text{: tiempo de llenado de botellas con el equipo nuevo}$$

Tenemos que $X \sim N$ y $Y \sim N$. Además, de la tabla

$$n_X = 10 \qquad \bar{X} = 1 \qquad s_X = 0{,}02 \qquad n_Y = 15 \qquad \bar{Y} = 0{,}9 \qquad s_Y = 0{,}01$$

Se desea establecer si $\mu_X > \mu_Y$ mediante una prueba de hipótesis al 1% de significancia. Para hacerlo, primero contrastamos si hay o no igualdad de varianzas poblacionales (pues no las conocemos):

Prueba de hipótesis:

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad vs \quad H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Como hay normalidad e independencia en las poblaciones entonces se emplea la distribución F para resolver la hipótesis. Tenemos PH a dos colas para la razón de varianzas.

Método del valor crítico

Los valores críticos:

$$F_{c1} = F_{0{,}005;n_X-1,n_Y-1} = F_{0{,}005;9{,}14} = 0{,}1642$$

$$F_{c2} = F_{0{,}995;n_X-1,n_Y-1} = F_{0{,}995;9{,}14} = 4{,}7173$$

El valor de prueba se halla suponiendo H_0 cierta:

$$F_p = \frac{s_X^2}{s_Y^2} \times \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} = \frac{0{,}02^2}{0{,}01^2} \times 1 = 4$$

Como $F_{c1} < F_p < F_{c2}$ y la PH es a dos colas entonces con una significancia del 1% **no se rechaza $\boldsymbol{H_0}$** y se concluye $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

Así, la prueba de hipótesis para la diferencia de medias es

$$H_0: \mu_X \leq \mu_Y \quad vs \quad H_1: \mu_X > \mu_Y$$

Equivalente a

$$H_0: \mu_X - \mu_Y \leq 0 \quad vs \quad H_1: \mu_X - \mu_Y > 0$$

Es una PH para diferencia de medias de cola derecha. Como tenemos normalidad en ambas poblaciones, no conocemos las varianzas poblacionales, pero establecimos que son iguales entonces se emplea CASO 2 para la distribución de $\bar{X} - \bar{Y}$ y la prueba de hipótesis se decide sobre la curva $t_{n_X+n_Y-2} = t_{23}$.

<u>Método del valor crítico</u>

Para $\alpha = 0.01$ el valor crítico es el percentil que deja 5% en la cola derecha (cola de rechazo) de la curva:

$$t_c = t_{0,99;23} = 2{,}4998$$

El valor de prueba se halla reemplazando la evidencia muestral en el estadístico y suponiendo H_0 cierta:

$$S_p = 0{,}0147$$

$$t_p = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = 16{,}61$$

Como $t_p = 16{,}61 > 2{,}4998 = t_c$ y la PH es de cola derecha entonces, con una significancia del 1% se rechaza H_0 y se concluye que, en promedio, el equipo clásico tiene un tiempo de llenado mayor al del equipo nuevo; es decir, el equipo nuevo reduce el tiempo promedio de llenado y, por tanto, debe cambiarse a esta nueva referencia de dispositivo.

<u>Método del p-valor</u>

Suponiendo H_0 cierta se calcula sobre la evidencia muestral:

$$p - valor = P(\bar{X} - \bar{Y} > 1 - 0{,}9) = P(t_{23} > 16{,}61) = 1{,}32 \times 10^{-14} \approx 0$$

Como $p - valor \approx 0 < 0{,}01 = \alpha$ entonces con una significancia del 1% se rechaza H_0 y se concluye que, en promedio, el equipo clásico tiene un tiempo de llenado mayor al del equipo nuevo; es decir, el equipo nuevo reduce el tiempo promedio de llenado y, por tanto, debe cambiarse a esta nueva referencia de dispositivo.

11. INITELLIGENT THINGS es una empresa que fabrica sensores inteligentes para ser instalados en plantas industriales. Estos sensores pueden trabajar a altas temperaturas, para cada lote de producción se garantiza un valor promedio de temperatura de 92 grados centígrados antes de fallar, con una desviación estándar máximo de 2,5 grados centígrados. Para verificar que la variabilidad de la temperatura está controlada, se ha decidido que, si al tomar una muestra aleatoria de un lote, la desviación estándar de esta llega a exceder el valor referencial en más del 10%, los sensores del lote completo deben ser recalibrados. Suponga que se toma una muestra representativa de 16 sensores del más reciente lote producido, calcule la probabilidad de que todos los sensores del lote deban ser recalibrados. Asuma que la temperatura en este contexto sigue una distribución normal.

Solución

Sea la variable aleatoria: X = temperatura a la que falla un sensor. Del enunciado tenemos

$$\mu = 92 \qquad \sigma \leq 2,5 \qquad n = 16 \qquad X \sim N$$

Como hay normalidad sobre X entonces se puede emplear la distribución chi cuadrado para calcular la probabilidad deseada

$$P(s > 2,5 \times 1,1) = P(s > 2,75) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \frac{(16-1)2,75^2}{2,5^2}\right) = P(\chi^2_{16-1} > 18,15) = P(\chi^2_{15} > 18,15)$$
$$= 0,2549$$

Existe una probabilidad de 0,2549 de que el más reciente lote deba ser recalibrado.

12. La empresa desarrolladora de software TECH UNLIMITED desea escoger un programador de Python entre Pablo y Pedro, los dos ingenieros de sistemas que llegaron a la fase final de un proceso de selección. Por tal motivo, el Comité de selección preparó varios archivos con datos de entrada diferentes, y pidió a cada ingeniero que desarrollara un programa que pueda procesar dichos datos minimizando la cantidad de errores en los resultados. Los números de errores obtenidos por cada ingeniero en los archivos de datos asignados son:

Pablo	
Cantidad de errores	Número de archivos
0	48
1	62
2	30
3	15
4	0
5	20

Pedro	
Cantidad de errores	Número de archivos
0	53
1	91
2	23
3	50
4	3
5	30

Asuma que la ejecución con cada archivo es independiente de las ejecuciones con los demás archivos, y que el estilo de programación de Pablo es independiente del estilo de Pedro. Si el número de errores en un archivo es menor o igual a 2 se califica como ejecución exitosa. El Comité propone contratar a Pablo basándose en que la proporción de sus ejecuciones exitosas es mayor que las de Pedro. Proponga una prueba de hipótesis apropiada que sirva para validar estadísticamente si la propuesta del Comité es correcta o no. Utilice un nivel de significancia del 5%.

Solución

Definimos π_1 y π_2 como las proporciones poblacionales de ejecuciones exitosas de Pablo y Pedro, respectivamente. De las tablas tenemos

$$n_1 = 175 \qquad n_2 = 250$$

Calculamos las proporciones de éxito de Pablo y Pedro, respectivamente, en las muestras correspondientes:

$$\widehat{p_1} = \frac{48+62+30}{48+62+30+15+0+20} = \frac{140}{175} = 0{,}8 \qquad \widehat{p_2} = \frac{53+91+23}{53+91+23+50+3+30} = \frac{167}{250} = 0{,}668$$

Planteamiento de hipótesis: $H_o\colon \pi_1 - \pi_2 = 0 \quad vs \quad H_1\colon \pi_1 - \pi_2 > 0$

Prueba de hipótesis para $\pi_1 - \pi_2$ de cola derecha. Como n_1 y n_2 son lo suficientemente grandes y las hipótesis están contrastadas con el valor cero entonces se emplea la distribución normal para resolver la hipótesis.

Método del valor crítico

Para una significancia del 5% el valor crítico es $z_c = z_{0,95} = 1{,}645$.

Para el estadístico de prueba hallamos la proporción ponderada, $\hat{p}$:

$$\hat{p} = \frac{n_1 \cdot \widehat{p_1} + n_2 \cdot \widehat{p_2}}{n_1 + n_2} = \frac{175 \cdot 0{,}8 + 250 \cdot 0{,}668}{175 + 250} = 0{,}7224$$

Estandarizamos la evidencia muestral

$$Z_p = \frac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0{,}8 - 0{,}668) - 0}{\sqrt{0{,}7224(1-0{,}7224)\left(\frac{1}{175} + \frac{1}{250}\right)}} = 2{,}9905$$

Como $z_p > z_c$ y la prueba es de cola derecha entonces **se rechaza $\boldsymbol{H_0}$** con una significancia del 5% y se concluye que SÍ es mayor la proporción de ejecuciones exitosas de Pablo que las de Pedro y, por tanto, es correcto contratarlo.

Método del p-valor

Sobre la evidencia de las muestras y suponiendo la hipótesis nula como cierta:

$$p - valor = P(\widehat{p_1} - \widehat{p_2} > 0{,}8 - 0{,}668) = P(Z > 2{,}9905) = 0{,}0014$$

Como $p - valor = 0.0014 < \alpha = 0.05$ entonces **se rechaza $\boldsymbol{H_0}$** con una significancia del 5% y se concluye que SÍ es mayor la proporción de ejecuciones exitosas de Pablo que las de Pedro y, por tanto, es correcto contratarlo.