第五章　函　数

1

第5章 函数

- 5.1 函数定义及其性质
- 5.2 函数的复合与反函数

2

5.1 函数定义及其性质

- 5.1.1 函数的定义
  - 函数定义
  - 从A到B的函数
- 5.1.2 函数的像与完全原像
- 5.1.3 函数的性质
  - 函数的单射、满射、双射性
  - 构造双射函数

3

函数定义

定义5.1 设 f 为二元关系, 若 $\forall x\in \mathrm{dom}f$ 都存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}f$ 使 $x f y$ 成立, 则称 f为函数. 对于函数f, 如果有 $x f y$, 则记作 $y=f(x)$, 并称 y 为 f 在 x 的值.

例如　$f_1=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\langle x_3,y_2\rangle\}$

　　　$f_2=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_2\rangle\}$

f_1是函数, f_2不是函数

4

函数相等

定义5.2 设f, g为函数, 则

$$f=g \Leftrightarrow f\subseteq g \land g\subseteq f$$

如果两个函数 f 和 g 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}f = \mathrm{dom}g$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}f = \mathrm{dom}g$ 都有 $f(x) = g(x)$

实例　函数

$f(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $g(x)=x-1$

不相等, 因为 $\mathrm{dom}f\subset \mathrm{dom}g$.

5

从A到B的函数

定义5.3 设A, B为集合, 如果

(1) f 为函数

(2) $\mathrm{dom}f = A$

(3) $\mathrm{ran}f \subseteq B$,

则称 f 为从A到B的函数, 记作 $f : A\rightarrow B$.

实例

$f : \mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$, $f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数

$g : \mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$, $g(x)=2$也是从 N 到 N 的函数

6

B上A

定义5.4 所有从A到B的函数的集合记作B^A, 读作"B上A"
符号化表示为

$B^A=\{ f \mid f : A\to B \}$

计数：设 $|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$,

$|B^A|=n^m$.

$A=\varnothing$, 则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

7

7

实例

例1 设$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求B^A.

解 $B^A = \{ f_0, f_1, \ldots , f_7 \}$, 其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$
$f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$
$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$
$f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$
$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$
$f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$
$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$
$f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

8

8

重要函数的定义

定义5.5

(1) 设f: $A\to B$, 如果存在 $c\in B$ 使得对所有的 $x\in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 $f : A\to B$是**常函数**.

(2) 称 A 上的恒等关系 I_A为 A 上的**恒等函数**, 对所有的 $x\in A$ 都有 $I_A(x)=x$.

(3) 设$<A, \preccurlyeq>$, $<B, \preccurlyeq>$为偏序集，$f : A\to B$，如果对任意的 $x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为**单调递增**的； 如果对任意的 $x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为**严格单调递增**的.

类似的也可以定义**单调递减**和**严格单调递减**的函数.

9

9

重要函数的定义(续)

(4) 设 A 为集合, 对于任意的 $A'\subseteq A$, **A' 的特征函数** $\chi_{A'} : A\to\{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a)=\begin{cases}1, & a\in A'\\ 0, & a\in A-A'\end{cases}$$

实例：设$A=\{a,b,c\}$, A的每一个子集 A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 如

$\chi_{\varnothing} = \{<a,0>,<b,0>,<c,0>\}$,

$\chi_{\{a,b\}} = \{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$.

10

10

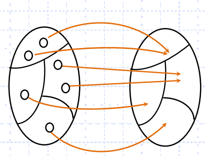
重要函数的定义(续)

(5) 设 R 是 A 上的等价关系, 令

$g : A\to A/R$

$g(a) = [a]$, $\forall a\in A$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的**自然映射**.



11

11

实例

给定集合 A 和 A 上的等价关系 R, 就可以确定一个自然映射 $g : A\to A/R$. 不同的等价关系确定不同的自然映射, 其中恒等关系所确定的自然映射是双射, 而其他的自然映射一般来说只是满射.

例如： $A=\{1, 2, 3\}$,

等价关系：$R_1=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

自然映射：$g_1(1) = g_1(2) = \{1,2\}$, $g_1(3) = \{3\}$

等价关系：I_A

自然映射：$g_2(1)=\{1\}$, $g_2(2)=\{2\}$, $g_2(3)=\{3\}$

12

12

函数的像与完全原像

定义5.6 设函数 $f: A\to B$, $A_1\subseteq A$, $B_1\subseteq B$,称

$$f(A_1) = \{ f(x) \mid x\in A_1 \}$$

为A_1在 f 下的像，$f(A)$ 称为函数的像.

$$f^{-1}(B_1)=\{ x \mid x\in A \wedge f(x)\in B_1\}$$

为B_1在 f 下的完全原像

注意:

函数的像与值的区别：函数值 $f(x)\in B$, 像 $f(A_1)\subseteq B$.

13

13

实例

例1. 设 $f: N\to N$, 且

$$f(x)=\begin{cases} x/2 & 若x为偶数 \\ x+1 & 若x为奇数 \end{cases}$$

令$A_1=\{0,1\}$, $A_2=\{2\}$, 求A_1和A_2的像。

$f(A_1) = f(\{0,1\}) = \{ f(0), f(1) \}=\{ 0, 2 \}$

$f(A_2) = \{ f(2) \} = \{ 1 \}$

注意：$A\subseteq f^{-1}(f(A))$

$A_1 =\{0,1\}$, $f^{-1}(f(A_1)) =f^{-1}(\{0,2\}) =\{0,1,4\}$

14

14

实例

例 2. $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$, $f=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$，求$B_1=\{a,b\}$和$B_2=\{b,c\}$的原像。

$f^{-1}(B_1) =f^{-1}(\{a,b\}) =\{1,2,3\}$,

$f^{-1}(B_2) =f^{-1}(\{b,c\}) =\{3\}$,

注意： $f(f^{-1}(B))\subseteq B$.

$B_2= \{b,c\}$， $f(f^{-1}(B_2)) =f(\{3\}) =\{b\} \subseteq \{b,c\}$

15

15

函数的性质

定义5.7 设 $f: A\to B$,

（1）若$\mathrm{ran}f = B$, 则称 $f: A\to B$是满射的.

（2）若 $\forall y\in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x\in A$使得 $f(x)=y$, 则称 $f: A\to B$是单射的.

（3）若 $f: A\to B$既是满射又是单射的, 则称 $f: A\to B$ 是双射的

f 满射意味着：$\forall y \in B$, 都存在 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$.

f 单射意味着：$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

16

16

实例

例2

判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

（1）$f: R\to R$, $f(x)= -x^2+2x-1$

（2）$f: Z^+\to R$, $f(x)=\ln x$, Z^+为正整数集

（3）$f: R\to Z$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

（4）$f: R\to R$, $f(x)=2x+1$

（5）$f: R^+\to R^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

17

17

实例(续)

解 (1) $f: R\to R$, $f(x)= -x^2+2x-1$

在$x=1$取得极大值0. 既不是单射也不是满射的.

(2) $f: Z^+\to R$, $f(x)=\ln x$

单调上升, 是单射的. 但不满射, $\mathrm{ran}f=\{\ln 1, \ln 2, \ldots\}$.

(3) $f: R\to Z$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) $f: R\to R$, $f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且$\mathrm{ran}f=R$.

(5) $f: R^+\to R^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值$f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的.

18

18

构造从*A*到*B*的双射函数

有穷集之间的构造

例3 $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 $f: A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

19

19

构造从*A*到*B*的双射函数(续)

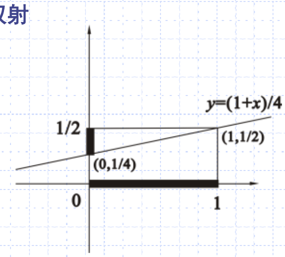
实数区间之间构造双射

构造方法：直线方程

例4 $A=[0,1]$

$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f: A\to B$



解

令 $f: [0,1]\to[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$

20

20

构造从A到B的双射函数(续)

A与自然数集合之间构造双射

方法：将A中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始按照次序与自然数对应

例5 $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{N}$，构造双射 $f: A\to B$

$$f: \mathbf{Z}\to\mathbf{N},\ f(x)=\begin{cases} 2x & x\ge 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

21

21

5.2 函数的复合与反函数

- **5.2.1** 函数的复合
  - 函数复合的基本定理及其推论
  - 函数复合的性质
- **5.2.2** 反函数
  - 反函数存在的条件
  - 反函数的性质

22

22

函数复合的基本定理

定理5.1 设f, g是函数, 则$f\circ g$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x \mid x\in \mathrm{dom}f \wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(f\circ g)$ 有 $f\circ g(x)=g(f(x))$

证 先证明 $f\circ g$ 是函数.

因为 f, g 是关系, 所以 $f\circ g$ 也是关系.

若对某个 $x\in \mathrm{dom}(f\circ g)$，$xf\circ gy_1$和 $xf\circ gy_2$, 则

$<x,y_1>\in f\circ g \wedge <x,y_2>\in f\circ g$

$\Rightarrow \exists t_1(<x,t_1>\in f\wedge <t_1,y_1>\in g)$

$\wedge \exists t_2(<x,t_2>\in f\wedge <t_2,y_2>\in g)$

$\Rightarrow \exists t_1\exists t_2 (t_1=t_2\wedge <t_1,y_1>\in g\wedge <t_2,y_2>\in g)$

$\Rightarrow y_1=y_2$

所以 $f\circ g$ 为函数.

23

23

证明

再证明结论 (1) 和 (2) . 任取x,

$x\in \mathrm{dom}(f\circ g)$

$\Rightarrow \exists t\,\exists y\,(<x,t>\in f\wedge <t,y>\in g)$

$\Rightarrow \exists t\,(x\in \mathrm{dom}f \wedge t=f(x) \wedge t\in \mathrm{dom}g)$

$\Rightarrow x\in\{x \mid x\in \mathrm{dom}f \wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}$

任取x,

$x\in \mathrm{dom}f \wedge f(x)\in \mathrm{dom}g$

$\Rightarrow <x, f(x)>\in f \wedge <f(x), g(f(x))>\in g$

$\Rightarrow <x, g(f(x))>\in f\circ g$

$\Rightarrow x\in \mathrm{dom}(f\circ g)\wedge f\circ g(x)=g(f(x))$

所以(1) 和 (2) 得证.

24

24

推论

推论1 设f, g, h为函数, 则$(f\circ g)\circ h$ 和 $f\circ(g\circ h)$都是函数, 且

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$$

证 由上述定理和关系合成运算的可结合性得证.

推论2 设$f : A\to B, g : B\to C$, 则 $f\circ g : A\to C$, 且$\forall x\in A$都有

$$f\circ g(x) = g(f(x)).$$

证 由上述定理知 $f\circ g$是函数, 且

$$\mathrm{dom}(f\circ g) = \{ x \mid x\in \mathrm{dom}f \wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}$$
$$=\{ x \mid x\in A \wedge f(x)\in B\} = A$$
$$\mathrm{ran}(f\circ g) \subseteq \mathrm{ran}g \subseteq C$$

因此 $f\circ g : A\to C$, 且$\forall x\in A$ 有 $f\circ g(x) = g(f(x))$.

25

25

函数复合的性质

定理5.2 设 $f : A\to B, g : B\to C$.

(1) 如果 $f : A\to B, g : B\to C$都是满射的, 则 $f\circ g : A\to C$也是满射的.

(2) 如果 $f : A\to B, g : B\to C$都是单射的, 则 $f\circ g : A\to C$也是单射的.

(3) 如果 $f : A\to B, g : B\to C$都是双射的, 则 $f\circ g : A\to C$也是双射的.

26

26

证明

定理5.2 设 $f : A\to B, g : B\to C$.

(1) 如果 $f : A\to B, g : B\to C$都是满射的, 则 $f\circ g : A\to C$也是满射的.

证明: (1) 任取 $c\in C$, 由$g : B\to C$的满射性, $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$.

对于这个b, 由 $f : A\to B$ 的满射性, $\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 由定理5.1 有

$$f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了$f\circ g : A\to C$是满射的.

27

27

证明

定理5.2 设 $f : A\to B, g : B\to C$.

(2) 如果 $f : A\to B, g : B\to C$都是单射的, 则 $f\circ g : A\to C$也是单射的.

证明: (2) 假设存在 $x_1, x_2\in A$使得

$$f\circ g(x_1) = f\circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

因为 $g : B\to C$是单射的, 故 $f(x_1) = f(x_2)$. 又由于 $f : A\to B$ 也是单射的, 所以 $x_1=x_2$. 从而证明$f\circ g : A\to C$是单射的.

28

28

函数复合的性质(续)

定理5.3 设 $f : A\to B$, 则

$$f = f \circ I_B=I_A\circ f$$

定理5.3 的证明可以采用集合相等的证明方法

29

29

反函数的存在条件及定义

不是所有的函数都存在反函数。

例 $f=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_1>\}$, f^{-1}不是函数。

一般地，双射函数存在反函数。

30

30

反函数的存在条件及定义

定理5.4 设 $f:A\to B$是双射的, 则$f^{-1}:B\to A$也是双射的.

证明： 首先证明 f^{-1}是从B到A的函数：

因为 f 是函数, 所以 f^{-1}是关系, 且

$\text{dom } f^{-1}=\text{ran} f=B$， $\text{ran } f^{-1}=\text{dom} f=A$,

下证 f^{-1}是函数:

对于任意的 $x\in B$, 假设有 $y_1, y_2\in A$ 使得

$\langle x,y_1\rangle\in f^{-1}\wedge\langle x,y_2\rangle\in f^{-1}$ 成立, 则由逆的定义有

$\langle y_1,x\rangle\in f\wedge\langle y_2,x\rangle\in f$. 根据 f 的单射性可得 $y_1=y_2$, 从而证明了f^{-1}是函数，

对于双射函数$f:A\to B$, 称$f^{-1}:B\to A$是它的反函数.

31

31

反函数的存在条件及定义

定理5.4 设 $f:A\to B$是双射的, 则$f^{-1}:B\to A$也是双射的.

因为 $\text{ran } f^{-1}=A$, 所以f^{-1}是满射的.

下证 f^{-1}是单射的:

若存在 $x_1, x_2\in B$使得 $f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_2)=y$, 从而有

$\langle x_1,y\rangle\in f^{-1}\wedge\langle x_2,y\rangle\in f^{-1}$

$\Rightarrow\langle y,x_1\rangle\in f\wedge\langle y,x_2\rangle\in f\Rightarrow x_1=x_2$ 因为 f 是函数）

从而证明了f^{-1}的单射性.

32

32

实例

例1 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 3\\ -2 & x<3\end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$, $g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解 $f\circ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $\quad$ $g\circ f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f\circ g(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\ge 3\\ 0 & x<3\end{cases}\qquad g\circ f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & x\ge 1\\ -2 & x<1\end{cases}$$

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$不存在反函数; $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$的反函数是

$g^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g^{-1}(x)=x-2$

33

33

关于反函数的定理

定理5.5 设 $f:A\to B$是双射的, 则

$f^{-1}\circ f=I_B$, $f\circ f^{-1}=I_A$

证 根据定理5.4可知 $f^{-1}:B\to A$也是双射的.

由定理5.1 可知 $f^{-1}\circ f:B\to B$, $f\circ f^{-1}:A\to A$，且它们都是恒等函数.

对于双射函数 $f:A\to A$, 根据上述定理有

$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A$.

34

34

关系代数

数据库存的数据看作关系，关系是若干元组的集合，元组$\langle A_1,A_2,\ldots,A_n\rangle$代表该关系有$n$个属性. 实例：

<编号,姓名,年龄,地址,手机,Email>

设R与S是具有相同属性的m元关系，其中的m个属性记作$A_1,A_2,\ldots,A_m$，基本操作如下：

$R\cup S$的元组既含有R的元组，也含有S的元组；

$R\cap S$的元组是同时存在于R和S中的元组；

$R-S$的元组只在R中但不在S中.

投影 $\pi_{A_{i_1},A_{i_2},\ldots,A_{i_n}}(R)$ 只选取R中属性为$A_{i_1},A_{i_2},\ldots,A_{i_n}$ 的列

35

35

实例

编号	姓名	年龄	地址	手机	Email
1	张晓光	34	科斯公司市场部	13520145678	zhxg@gmail.com.cn
2	李明	50	融创大厦A座502	13341556347	liming@hotmail.com.cn
3	王恒	43	求实中学	13124567336	wheng@qq.com.cn
4	石海生	27	大华公司网络中心	13822253689	shihs@hotmail.com.cn

$\pi_{\text{姓名, 手机, Email}}(R)$的查询结果是选取姓名, 手机, Email的列

姓名	手机	Email
张晓光	13520145678	zhxg@gmail.com.cn
李明	13341556347	liming@hotmail.com.cn
王恒	13124567336	wheng@qq.com.cn
石海生	13822253689	shihs@hotmail.com.cn

36

36

笛卡儿积

笛卡儿积$R\times S$是由$m\times n$个形如$<A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n>$的$m+n$元组构成的集合.

R={<1,abc>,<2,cabel>},

S={<cabel,300,25>,<sin,190,15>,<cod,60,5>},

R×S={<1,abc,cabel,300,25>,<1,abc,sin,190,15>,
<1,abc,cod,60,5>,<2,cabel,cabel,300,25>,
<2,cabel,sin,190,15>,<2,cabel,cod,60,5>}

作业

- **5,17,21**