

讨论题2

- ◆ 甲手里有一个围棋子，要乙来猜棋子的颜色是白的还是黑的。条件是：只允许乙问一个只能回答“是”或“否”的问题，但甲可以说真话，也可以说假话。问：乙可以向甲提出一个什么问题，然后从甲回答“是”或“否”中就能判断出甲手中棋子的颜色？

2020年2月19日10时18分

1

第二章 命题逻辑（第2讲）

2

- ◆ 命题逻辑基本概念
- ◆ 命题逻辑等值演算
- ◆ 范式
- ◆ 推理

2020年2月19日10时19分

3

§ 2.3 范式

- ◆ 每种数字标准形都能提供很多信息，如代数式的因式分解可判断代数式的根情况。逻辑公式在等值演算下也有标准形--**范式**
- ◆ 范式有两种
 - 析取范式
 - 合取范式

2020年2月19日10时19分

4

®

2.3.1 析取范式和合取范式

定义2.15

命题变项及其否定统称作**文字 (letters)**。
仅由有限个文字构成的析取式称作**简单析取式**。

仅由有限个文字构成的合取式称作**简单合取式**。

- ◆ 简单析取式举例：
 $p, \neg q, p \vee \neg p, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q \vee r, p \vee \neg q \vee r$
- ◆ 简单合取式举例：
 $\neg p, q, \neg p \wedge p, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge \neg r, \neg p \wedge p \wedge q$

说明

□ 一个文字既是简单析取式，又是简单合取式。

2020年2月19日10时19分

5

- ◆ 为讨论方便，有时用 A_1, A_2, \dots, A_s 表示 s 个简单析取式或 s 个简单合取式。
- ◆ 设 A_i 是含 n 个文字的简单析取式，若 A_i 中既含某个命题变项 p_j ，又含它的否定式 $\neg p_j$ ，即 $p_j \vee \neg p_j$ ，则 A_i 为重言式。
- ◆ 反之，若 A_i 为重言式，则它必同时含某个命题变项和它的否定式。
- ◆ 类似的讨论可知，若 A_i 是含 n 个命题变项的简单合取式，且 A_i 为矛盾式，则 A_i 中必同时含某个命题变项及它的否定式，反之亦然。

2020年2月19日10时19分

6

定理2.3

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式。

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式。

2020年2月19日10时19分

7

析取范式

定义2.16

(1) 由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式 (disjunctive normal form) 。

◆ 设 $A_i (i=1, 2, \dots, s)$ 为简单合取式，则 $A=A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_s$ 为析取范式。例如， $A_1=p \wedge \neg q$ ， $A_2=\neg q \wedge \neg r$ ， $A_3=p$ ，则由 A_1, A_2, A_3 构造的析取范式为 $A=A_1 \vee A_2 \vee A_3=(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee p$

2020年2月19日10时19分

8

合取范式

定义2.16

(2) 由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式 (conjunctive normal form) 。

(3) 析取范式与合取范式统称为范式。

◆ 设 $A_i (i=1, 2, \dots, s)$ 为简单析取式，则 $A=A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_s$ 为合取范式。例如，取 $A_1=p \vee q \vee r$ ， $A_2=\neg p \vee \neg q$ ， $A_3=r$ ，则由 A_1, A_2, A_3 组成的合取范式为 $A=A_1 \wedge A_2 \wedge A_3=(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r$

2020年2月19日10时19分

9

说明

□ 形如 $\neg p \wedge q \wedge r$ 的公式既是一个简单合取式构成的析取范式，又是由三个简单析取式构成的合取范式。

□ 形如 $p \vee \neg q \vee r$ 的公式既是含三个简单合取式的析取范式，又是含一个简单析取式的合取范式。

2020年2月19日10时19分

10

析取范式和合取范式的性质

定理2.4

(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

说明

□ 研究范式的目的在于，将给定公式化成与之等值的析取范式或合取范式，进而将公式化成与之等值的主析取范式或主合取范式。

2020年2月19日10时19分

11

范式存在的讨论

◆ 在范式中不会出现联结词 \rightarrow 与 \leftrightarrow ，否则可使用等值式消除 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

◆ 在范式中不会出现形如 $\neg \neg A, \neg (A \wedge B), \neg (A \vee B)$ 的公式： $\neg \neg A \Leftrightarrow A$
 $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

◆ 在析取范式中不会出现形如 $A \wedge (B \vee C)$ 的公式： $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

◆ 在合取范式中不出现形如 $A \vee (B \wedge C)$ 的公式： $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

◆ 定理2.5 (范式存在定理)
任一命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式。

2020年2月19日10时19分

12

求给定公式范式的步骤

- (1) 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$ (若存在)。
 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
- (2) 否定号的消去 (利用双重否定律) 或内移 (利用德摩根律)。
 $\neg \neg A \Leftrightarrow A$
 $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
 $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- (3) 利用分配律: 利用 \wedge 对 \vee 的分配律求析取范式,
 \vee 对 \wedge 的分配律求合取范式。
 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

例题

例: 求下面公式的析取范式与合取范式:
 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$

解答

- 1) 求合取范式
- $$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$$
- $$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow r \quad (\text{消去} \rightarrow)$$
- $$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (\neg p \vee q)) \quad (\text{消去} \leftrightarrow)$$
- $$\Leftrightarrow (\neg (\neg p \vee q) \vee r) \wedge (r \vee \neg (\neg p \vee q)) \quad (\text{消去} \rightarrow)$$
- $$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (r \vee \neg (\neg p \vee q)) \quad (\text{否定号内移})$$
- $$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (r \vee \neg (\neg p \vee q)) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{分配律})$$

(2) 求析取范式

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$$
$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$
$$\vee (r \wedge \neg p) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge \neg r)$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

说明

- 由此例可知, 命题公式的析取范式不唯一。
- 同样, 合取范式也是不唯一的。

范式的规范化形式

◆ 定义2.17 (极小项) 在含有 n 个命题变项的简单合取式中, 若每个命题变项和它的否定式不同时出现, 而且二者之一必出现且仅出现一次, 且第 i 个命题变项或它的否定式出现在从左算起的第 i 位上 (若命题变项无角标, 就按字典顺序排列), 称这样的简单合取式为极小项。

◆ p, q形成的极小项

极小项		
公式	成真赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2
$p \wedge q$	1 1	m_3

◆ p, q, r形成的极小项

极小项		
公式	成真赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7

◆ n 个命题变项共产生 2^n 个不同的极小项。其中每个极小项都有且仅有一个成真赋值。若成真赋值所对应的二进制数转换为十进制数 i , 就将所对应极小项记作 m_i 。

范式的规范化形式

◆ 定义2.17 (极大项) 在含有n个命题变项的简单析取式中, 若每个命题变项和它的否定式不同时出现, 而且二者之一必出现且仅出现一次, 且第i个命题变项或它的否定式出现在从左算起的第i位上(若命题变项无角标, 就按字典顺序排列), 称这样的简单析取式为极大项。

2020年2月19日10时19分

19

19

◆ p, q形成的极大项

极大项		
公式	成假赋值	名称
$p \vee q$	0 0	M_0
$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

2020年2月19日10时19分

20

20

◆ p, q, r形成的极大项

极大项		
公式	成假赋值	名称
$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

◆ n个命题变项共可产生 2^n 个极大项, 每个极大项只有一个成假赋值, 将其对应的十进制数i做极大项的角标, 记作 M_i 。

2020年2月19日10时19分

21

®

21

◆ p, q形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

2020年2月19日10时19分

22

22

◆ p, q, r形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

定理2.6 设 m_i 与 M_i 是命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 形成的极小项和极大项, 则 $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

2020年2月19日10时19分

23

®

23

◆ n个命题变项共可产生 2^n 个不同的极小项。其中每个极小项都有且仅有一个成真赋值。若成真赋值所对应的二进制数转换为十进制数i, 就将所对应极小项记作 m_i 。

◆ 类似地, n个命题变项共可产生 2^n 个极大项, 每个极大项只有一个成假赋值, 将其对应的十进制数i做极大项的角标, 记作 M_i 。

定理2.6 设 m_i 与 M_i 是命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 形成的极小项和极大项, 则

$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

2020年2月19日10时19分

24

24

主析取范式与主合取范式

定义2.18 设由n个命题变项构成的析取范式（合取范式）中所有的简单合取式（简单析取式）都是极小项（极大项），则称该析取范式（合取范式）为主析取范式（主合取范式）。

定理2.7 任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。

定理2.7的证明

(只证主析取范式的存在和唯一性)

(1)证明存在性。

设A是任一含n个命题变项的公式。

由定理2.5可知，存在与A等值的析取范式A'，即 $A \Leftrightarrow A'$ ，

若A'的某个简单合取式 A_i 中既不含命题变项 p_j ，也不含它的否定式 $\neg p_j$ ，

则将 A_i 展成如下形式：

$$A_i \Leftrightarrow A_i \wedge 1 \Leftrightarrow A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j)$$

继续这个过程，直到所有的简单合取式都含任意命题变项或它的否定式。

若在演算过程中出现重复的命题变项以及极小项和矛盾式时，都应“消去”：如用p代替 $p \wedge p$ ， m_i 代替 $m_i \vee m_i$ ，0代替矛盾式等。最后就将A化成与之等值的主析取范式A''。

(2)证明唯一性。

假设某一命题公式A存在两个与之等值的主析取范式B和C，即 $A \Leftrightarrow B$ 且 $A \Leftrightarrow C$ ，则 $B \Leftrightarrow C$ 。由于B和C是不同的主析取范式，不妨设极小项 m_i 只出现在B中而不出现在C中。于是，角标i的二进制表示为B的成真赋值，而为C的成假赋值。这与 $B \Leftrightarrow C$ 矛盾，因而B与C必相同。

求公式A的主析取范式的方法与步骤

◆ 方法一、等值演算法

(1)化归为析取范式。

(2)除去析取范式中所有永假的析取项。

(3)将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并。

(4)对合取项补入没有出现的命题变元，即添加如 $(p \vee \neg p)$ 式，然后应用分配律展开公式。

◆ 方法二、真值表法

(1)写出A的真值表。

(2)找出A的成真赋值。

(3)求出每个成真赋值对应的极小项（用名称表示），按角标从小到大顺序析取。

求公式A的主合取范式的方法与步骤

◆ 方法一、等值演算法

(1)化归为合取范式。

(2)除去合取范式中所有永真的合取项。

(3)将合取式中重复出现的析取项和相同的变元合并。

(4)对析取项补入没有出现的命题变元，即添加如 $(p \wedge \neg p)$ 式，然后应用分配律展开公式。

◆ 方法二、真值表法

(1)写出A的真值表。

(2)找出A的成假赋值。

(3)求出每个成假赋值对应的极大项（用名称表示），按角标从小到大顺序合取。

例题

例 求命题公式 $p \rightarrow q$ 的主析取范式和主合取范式。

解答

(1)求主合取范式

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow M_2$$

(2)求主析取范式

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例：求 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。

(1)求主析取范式

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$$p \wedge \neg q \wedge \neg r \Leftrightarrow m_4$$

$$\neg p \wedge r \Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3$$

$$q \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge q \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_3 \vee m_7$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$$

2020年2月19日10时19分

31

31

(2)求主合取范式

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

$$\neg p \vee q \vee \neg r \Leftrightarrow M_5$$

$$p \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2$$

$$\neg q \vee r \Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_6$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \wedge M_6$$

真值表法：（略）

2020年2月19日10时19分

32

32

主析取范式的用途

- 求公式的成真赋值与成假赋值
- 判断公式的类型
- 判断两个命题公式是否等值
- 分析和解决实际问题

2020年2月19日10时19分

33

33

求公式的成真赋值与成假赋值

- ◆ 若公式A中含n个命题变项，A的主析取范式含s ($0 \leq s \leq 2^n$)个极小项，则A有s个成真赋值，它们是所含极小项角标的二进制表示，其余 $2^n - s$ 个赋值都是成假赋值。
- ◆ 在例2.8中， $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$ ，各极小项均含三个文字，因而各极小项的角标均为长为3的二进制数，它们分别是001，011，100，111，这四个赋值为该公式的成真赋值，其余的为成假赋值。
- ◆ 在例2.9中， $p \rightarrow q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$ ，这三个极小项均含两个文字，它们的角标的二进制表示00，01，11为该公式的成真赋值，10是它的成假赋值。

2020年2月19日10时19分

34

34

判断公式的类型

- A为重言式当且仅当A的主析取范式含全部 2^n 个极小项
- A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极小项，此时，记A的主析取范式为0
- A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项

2020年2月19日10时19分

35

35

例2.10 用公式的主析取范式判断公式的类型：

$$(1) \neg(p \rightarrow q) \wedge q$$

$$(2) p \rightarrow (p \vee q)$$

$$(3) (p \vee q) \rightarrow r$$

解答

$$(1) \neg(p \rightarrow q) \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$$

$$(2) p \rightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$

$$(3) (p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$$

矛盾式

重言式

可满足式

2020年2月19日10时19分

36

36

判断两个命题公式是否等值

◆ 设公式A,B共含有n个命题变项, 按n个命题变项求出A与B的主析取范式A'与B'。若A'=B',则A⇔B; 否则, A与B不等值。

例: 判断下面两组公式是否等值:

- (1) p与(p∧q)∨(p∧¬q)
- (2) (p→q)→r与(p∧q)→r

解答

- (1) $p \Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow m_2 \vee m_3$
 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow m_2 \vee m_3$ 两公式等值。
- (2) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$
 $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$ 两公式不等值

2020年2月19日10时19分

37

37

应用主析取范式分析和解决实际问题

例2.12 某科研所要挑3名科研骨干A,B,C中挑选1~2名出国进修。由于工作原因, 选派时要满足以下条件:

- (1)若A去, 则C同去。
 - (2)若B去, 则C不能去。
 - (3)若C不去, 则A或B可以去。
- 问应如何选派他们去?

分析:

- (1) 将简单命题符号化
- (2) 写出各复合命题
- (3) 写出由(2)中复合命题组成的合取式 (前提)
- (4) 将(3)中公式化成析取式 (最好是主析取范式)
- (5) 这样每个小项就是一种可能产生的结果。去掉不符合题意的小项, 即得结论。

2020年2月19日10时19分

38

38

解答 设 p:派A去, q:派B去, r:派C去
由已知条件可得公式

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q))$$

经过演算可得

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_5$$

由于 $m_1 \neg p \wedge \neg q \wedge r$, $m_2 \neg p \wedge q \wedge \neg r$, $m_5 = p \wedge \neg q \wedge r$
可知, 选派方案有3种:

- (a)C去, 而A,B都不去。
- (b)B去, 而A,C都不去。
- (c)A,C去, 而B不去。

2020年2月19日10时19分

39

39

由公式的主析取范式求主合取范式

设公式A含n个命题变项。

A的主析取范式含s (0<s<2^n) 个极小项, 即

$$A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s}, 0 \leq i_j \leq 2^n - 1, j = 1, 2, \cdots, s$$

没有出现的极小项设为 $m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_{2^n-s}}$

它们的角标的二进制表示为¬A的成真赋值, 因而¬A的主析取范式为

$$\begin{aligned} \neg A &= m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-s}} \\ A &\Leftrightarrow \neg \neg A \Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-s}}) \\ &\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{j_{2^n-s}} \\ &\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n-s}} \end{aligned}$$

2020年2月19日10时19分

40

40

例2.13 由公式的主析取范式, 求主合取范式:

- (1) $A \Leftrightarrow m_1 \vee m_2$ (A中含2个命题变项p,q)
- (2) $B \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_3$ (B中含3个命题变项p,q,r)

解答

- (1) $A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_3$
- (2) $B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$

2020年2月19日10时19分

41

41

重言式与矛盾式的主合取范式

设n为公式中命题变项个数

- 矛盾式无成真赋值, 因而矛盾式的主合取范式含2^n个极大项。
- 重言式无成假赋值, 因而主合取范式不含任何极大项。
- 将重言式的主合取范式记为1。
- 可满足式的主合取范式中极大项的个数一定小于2^n。

2020年2月19日10时19分

42

42

真值表与范式的关系

n个命题变项共可产生 2^n 个极小项（极大项）
可以产生的主析取范式（主合取范式）数目为：

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + \cdots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$$

- ◆ $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当A与B有相同的真值表，又当且仅当A与B有相同的主析取范式（主合取范式）。
- ◆ 真值表与主析取范式（主合取范式）是描述命题公式标准形式的两种不同的等价形式。

2020年2月19日10时19分

43



作业

- ◆ 28,30,31

2020年2月19日10时19分

44