第四章 关 系

1

第四章 关 系

2

4.1 关系的定义及其表示

3

有序对

定义4.1 由两个元素，如x和y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作 $<x,y>$

实例：点的直角坐标 $<3,-4>$

有序对的性质

有序性 $<x,y>\neq<y,x>$ （当$x\neq y$时）

$<x,y>$与$<u,v>$相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$$

例1 $<2,x+5>=<3y-4,y>$，求 x, y.

解 $3y-4=2, x+5=y \Rightarrow y=2, x=-3$

4

笛卡儿积

定义4.2 设A, B为集合，A与B 的笛卡儿积记作$A\times B$，

$$A\times B = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \}.$$

例2 $A=\{0, 1\}, B=\{a, b, c\}$

$A\times B=$

$B\times A =$

$A = \{\varnothing\}, B = \varnothing$

$P(A)\times A =$

$P(A)\times B =$

5

笛卡儿积

定义4.2 设A, B为集合，A与B 的笛卡儿积记作$A\times B$，

$$A\times B = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \}.$$

例2 $A=\{0, 1\}, B=\{a, b, c\}$

$A\times B=\{<0,a>,<0,b>,<0,c>,<1,a>,<1,b>,<1,c>\}$

$B\times A =\{<a,0>,<b,0>,<c,0>,<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$

$A = \{\varnothing\}, B = \varnothing$

$P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$P(A)\times B = \varnothing$

6

笛卡儿积的性质

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$

不适合交换律

$A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B, A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

不适合结合律

$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing, B\neq\varnothing, C\neq\varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

若$|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A\times B|=mn$

7

7

有序 *n* 元组和 *n* 阶笛卡尔积

定义4.3

(1) 由 n 个元素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$按照一定的顺序排列构成有序 n 元组，记作 $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$

(2) 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为集合，称

$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{<x_1, x_2, \ldots, x_n> \mid x_i\in A_i, i=1,2, \ldots,n\}$

为 n 阶笛卡儿积.

实例

(1,1,0)为空间直角坐标，(1,1,0)∈R ×R ×R

8

8

二元关系的定义

定义4.4

如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空, 且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如$<x,y>\in R$, 可记作 xRy；如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x \not R\, y$

实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, $a\not R c$等.

9

9

实例

例3

(1) $R=\{<x,y> \mid x,y\in N, x+y<3\}$

$=\{<0,0>, <0,1>, <0,2>, <1,0>, <1,1>, <2,0>\}$

(2) $C=\{<x,y> \mid x,y\in R, x^2+y^2=1\}$，其中R代表实数集合，$C$是直角坐标平面上点的横、纵坐标之间的关系，$C$中的所有的点恰好构成坐标平面上的单位圆.

(3) $R=\{<x,y,z> \mid x,y,z\in R, x+2y+z=3\}$，$R$代表了空间直角坐标系中的一个平面.

10

10

5元关系的实例—数据库实体模型

员工号	姓名	年龄	性别	工资
301	张　林	50	男	1600
302	王晓云	43	女	1250
303	李鹏宇	47	男	1500
304	赵　辉	21	男	900
…	…	…	…	…

5元组：

<301,张林,50,男,1600>，<302,王晓云,43,女,1250>

11

11

从A到B的关系与A上的关系

定义4.5 设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从 A 到 B 的二元关系, 当 $A=B$ 时则叫做 A上的二元关系.

例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$,

$R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$,

从A到B的关系: R_1, R_2, R_3, R_4, A上的关系R_3和R_4.

12

12

从A到B的关系与A上的关系

定义4.5 设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做A上的二元关系.

例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$,
$R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$,
从A到B的关系: R_1, R_2, R_3, R_4, A上的关系R_3和R_4.

计数：
$|A|=n$, $|B|=m$, $|A\times B|=nm$, $A\times B$的子集有2^{nm}个. 所以从A到B有2^{nm} 个不同的二元关系. $|A|=n$, A上有 2^{n^2} 不同的二元关系.
例如 $|A|=3$, 则 A上有512个不同的二元关系.

13

13

A上重要关系的实例

设A为任意集合，
$\varnothing$是A上的关系，称为空关系
定义 4.6 E_A, I_A分别称为全域关系与恒等关系，其中

$E_A=\{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in A\}=A\times A$

$I_A=\{<x,x> \mid x\in A\}$

例如, $A=\{1,2\}$, 则

$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$

14

14

A上重要关系的实例（续）

小于等于关系L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义如下：
定义4.7

$L_A=\{<x,y> \mid x,y\in A \wedge x\le y\}$, 这里$A\subseteq \mathbf{R}$，$\mathbf{R}$为实数集合

$D_B=\{<x,y> \mid x,y\in B \wedge x\text{整除}y\}$, $B\subseteq Z^*$, Z^*为非0整数集

$R_{\subseteq}=\{<x,y> \mid x,y\in A \wedge x\subseteq y\}$, 这里$A$是集合族.

例如 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 则

$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$C=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则$C$上的包含关系是

$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

15

15

关系的表示

表示方式：关系的集合表达式、关系矩阵、关系图

定义4.8 关系矩阵 若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵

$M_R = [\, r_{ij}\,]_{m\times n}$, 其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow <x_i, y_j> \in R$.

定义4.9 关系图 若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$, 其中$A$为结点集，$R$为边集.如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：设A, B为有穷集
关系矩阵适合于表示从A到B的关系或者A上的关系
关系图适合于表示A上的关系

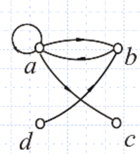
16

16

实例

例5 $A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{<a, a>,<a, b>,<a, c>,<b, a>,<d, b>\}$, R的关系矩阵 M_R 和关系图 G_R 如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



17

17

4.2 关系运算

- 4.2.1 关系的基本运算
  - 定义域、值域、域、逆、合成
  - 基本运算的性质
- 4.2.2 关系的幂运算
  - 幂运算的定义
  - 幂运算的方法
  - 幂运算的性质

18

18

关系的基本运算

定义4.10 定义域、值域 和 域

$\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y (\langle x,y\rangle \in R)\}$

$\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x (\langle x,y\rangle \in R)\}$

$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

例1

$R=\{\langle a,\{b\}\rangle, \langle c,d\rangle, \langle \{a\},\{d\}\rangle, \langle d,\{d\}\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R = \{ a, c, \{a\}, d \}$

$\mathrm{ran}R = \{\{b\}, d, \{d\}\}$

$\mathrm{fld}R = \{ a, c, \{a\}, d, \{b\}, \{d\}\}$

19

19

定义4.11 R 的逆

$R^{-1} = \{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}$

定义4.12 R与S的合成

$R\circ S = \{\langle x,z\rangle \mid \exists y (\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)\}$

例2 $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R\circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

20

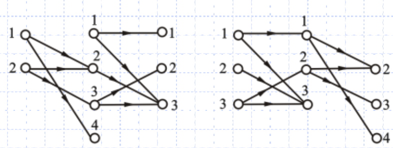
20

合成运算的图示方法

例2 $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

利用图示（不是关系图）方法求合成



$R\circ S$　　　　$S\circ R$

$R\circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

21

21

合成运算的矩阵方法

例2 $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

利用矩阵方法求合成

$$M_{R\circ S} = M_R M_S$$

$R\circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

22

22

基本运算的性质

定理4.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$\langle x,y\rangle$, 由逆的定义有:

$\langle x,y\rangle \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in F^{-1} \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x,

$x \in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists y(\langle y,x\rangle \in F) \Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}F$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$.

23

23

基本运算的性质（续）

定理4.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in (F\circ G)\circ H$

$\Leftrightarrow \exists t (\langle x,t\rangle \in F\circ G \wedge \langle t,y\rangle \in H)$

$\Leftrightarrow \exists t (\exists s (\langle x,s\rangle \in F \wedge \langle s,t\rangle \in G) \wedge \langle t,y\rangle \in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\, \exists s (\langle x,s\rangle \in F \wedge \langle s,t\rangle \in G \wedge \langle t,y\rangle \in H)$

$\Leftrightarrow \exists s (\langle x,s\rangle \in F \wedge \exists t (\langle s,t\rangle \in G \wedge \langle t,y\rangle \in H))$

$\Leftrightarrow \exists s (\langle x,s\rangle \in F \wedge \langle s,y\rangle \in G\circ H)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F\circ(G\circ H)$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

24

24

基本运算的性质（续）

(2) 任取$<x, y>$,

$<x, y> \in (F \circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x> \in F \circ G$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<y, t> \in F \wedge (t, x) \in G)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t> \in G^{-1} \wedge (t, y) \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow <x, y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

25

25

基本运算的性质（续）

定理4.3 设 R 为 A上的关系, 则

$R \circ I_A = I_A \circ R = R$

证明：任取$<x, y>$

$<x, y> \in R \circ I_A$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t> \in R \wedge <t, y> \in I_A)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t> \in R \wedge t=y \wedge y \in A)$

$\Leftrightarrow <x, y> \in R$

从而有 $R \circ I_A = R$.

同理可证 $I_A \circ R = R$..

26

26

A上关系的幂运算定义

定义4.13 设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 n次幂是

(1) $R^0 = \{<x,x> \mid x \in A\} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意：

对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$R_1^{\,0} = R_2^{\,0} = I_A$

对于A上的任何关系 R 都有

$R^1 = R$

27

27

幂运算的方法

计算R^n 就是 n 个 R 合成 .

矩阵表示的关系就是矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加.

例3 设$A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,

求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R与R^2的关系矩阵分别为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

28

28

幂运算的方法（续）

同理R^3和R^4的矩阵是:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此$M^4 = M^2$, 即$R^4 = R^2$. 因此可以得到

$R^2 = R^4 = R^6 = \ldots$, $R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$

而$R^0 = I_A$的关系矩阵

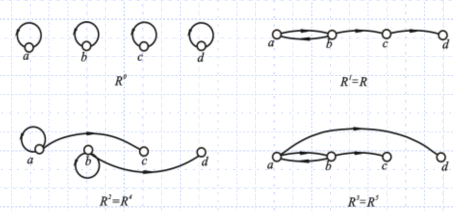
$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29

29

幂运算的方法（续）

用关系图的方法得到R^0, R^1, R^2, R^3,...的关系图如下图所示



30

30

幂运算的性质

定理4.4 设 A 为 n 元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

31

31

幂运算的性质

定理4.4 设 A 为 n 元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系，由于$|A| = n$, A上的不同关系只有 2^{n^2} 个. 当列出 R 的各次幂

$R^0, R^1, R^2, \ldots, , \ldots,$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$.

32

32

幂运算的性质（续）

定理4.5 设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathrm{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m \in \mathrm{N}$, 施归纳于 n.

若n=0, 则有

$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1}$,

所以对一切 $m, n \in \mathrm{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

33

33

幂运算的性质（续）

(2) 对于任意给定的 $m \in \mathrm{N}$, 施归纳于 n.

若 $n = 0$, 则有

$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$

所以对一切 $m, n \in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

34

34

幂运算的性质（续）

定理4.6 设R 是A上的关系, 若存在自然数 s, t ($s<t$) 使得 $R^s = R^t$, 则

(1) 对任何 $k \in \mathrm{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i \in \mathrm{N}$ 有$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$

(3) 令$S=\{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q \in \mathrm{N}$有 $R^q \in S$

证明 (1) $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$

（2）对 k 归纳. 若k=0, 则有

$R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$,

$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p$

$= R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$

由归纳法命题得证.

35

35

幂运算的性质（续）

(3) 任取 $q \in \mathrm{N}$, 若$q<t$, 显然有 $R^q \in S$.

若 $q \geq t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$q = s+kp+i$，其中$0 \leq i \leq p-1$.

于是

$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$

而 $s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$

这就证明了 $R^q \in S$.

36

36

作业

- **9,10,11**

2020年2月19日10时
16分

37

37