集合论

集合论是数学的基础，也是离散数学的基础，它研究数学中学科分支的关注对象与内容的一般性规则。其中：

- 集合研究数学中各学科分支所关注对象的一般性规则；（第1章）
- 关系研究数学中各学科分支所研究内容要素的一般性规则；（第4章）
- 函数则是一种规范、标准的关系，它研究这种特殊关系的一般性规则。（第5章）

1

1

第1章 数学语言与证明方法

- 1.1 常用的数学符号
- **1.2 集合及其运算**
- 1.3 证明方法概述（自学）
- 1.4 递归定义（自学）

2

2

集合的概念

集合是数学中最基本的概念,没有严格的定义

理解成某些个体组成的Collection, 常用A,B,C等表示

元素:集合中的个体

$x\in A$(x属于A): x是A的元素

$x\notin A$(x不属于A): x不是A的元素

无穷集:元素个数无限的集合

有穷集(有限集):元素个数有限的集合. $|A|$:A中元素个数

k元集:k个元素的集合, $k\geq 0$

3

3

集合的表示法

列举法　如 $A=\{a, b, c, d\}$, N={0,1,2,…}

描述法$\{x \mid P(x)\}$　如N={ x | x是自然数 }

说明: (1) 集合中的元素各不相同. 如, {1,2,3}={1,1,2,3}

(2) 集合中的元素没有次序. 如, {1,2,3}={3,1,2}={1,3,1,2,2}

(3) 有时两种方法都适用, 可根据需要选用.

常用集合:

自然数集N, 整数集Z, 正整数集Z^+, 有理数集Q,

非零有理数集Q^*, 实数集R, 非零实数集R^*, 复数集C,

区间$[a,b]$,(a,b)等

4

4

集合之间的包含与相等

包含(子集)　$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \rightarrow x\in B)$

不包含　$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x\in A \wedge x\notin B)$

相等　$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$

不相等　$A\neq B \Leftrightarrow A\nsubseteq B \vee B\nsubseteq A$

真包含(真子集)　$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge A\neq B$

例如, A={1,2,3}, B={ x | $x\in$R$\wedge|x|\leq 1$ }, C={ x | $x\in$R$\wedge x^2=1$ },

D={-1,1},

$C\subseteq B$, $C\subset B$, $C\nsubseteq A$, $A\nsubseteq B$, $B\nsubseteq A$, $C=D$

性质 (1) $A\subseteq A$

(2) $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$

5

5

空集与全集

空集$\varnothing$: 不含任何元素的集合

例如, $\{x \mid x^2<0\wedge x\in R\}=\varnothing$

定理1.1　空集是任何集合的子集

证 用归谬法. 假设不然, 则存在集合A, 使得$\varnothing\nsubseteq A$,

即存在x, $x\in\varnothing$且$x\notin A$, 矛盾.

推论 空集是唯一的.

证 假设存在$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，则$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$且$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，因此$\varnothing_1=\varnothing_2$

全集E:限定所讨论的集合都是E的子集.　相对性

6

6

幂 集

幂集$P(A)$: A的所有子集组成的集合, 即

$P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

例如, 设$A=\{a,b,c\}$

A的0元子集: $\varnothing$ A的1元子集: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

A的2元子集:$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$ A的3元子集: $\{a,b,c\}$

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

定理1.2 如果 $|A| = n$，则 $|P(A)| = 2^n$

证 $|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$

$= (1+1)^n = 2^n$

7

7

集合论创始人---康托尔

- 格奥尔格·康托尔（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp，1845 -1918）集合论的创始人。生于俄国列宁格勒（今俄罗斯圣彼得堡）。父亲是犹太血统的丹麦商人，母亲出身艺术世家。1856年全家迁居德国的法兰克福。
- 集合论一诞生就遭到了许多数学家的激烈反对，在猛烈的攻击下与过度的用脑思考中，康托尔得了精神分裂症，几次陷于精神崩溃。
- 最伟大的成就----集合论与超穷数理论。

8

8

康托尔集合的定义及罗素悖论

- 康托尔的定义：满足某些性质的个体放在一起组成集合。A={ x | P(x) }
- 英国哲学家罗素(Russell) 经过三年的苦思冥想，于1902年提出了著名的“罗素悖论”。
- 设R是一切不属于自身的集合所组成的集合。

 R= {集合x | P(x)： x ∉ x }，

 问R是否属于R?

- ✓ 如果R属于R，则R应满足性质P(x)，即R不属于R;
- ✓ 另一方面，如果R不属于R，则R满足了性质P(x)，因此R应属于集合R，即R属于R。
- ✓ 这样，不论何种情况都存在着矛盾。

9

9

理发师悖论

- 为了使罗素悖论更加通俗易懂，罗素本人在1919年将其改写为“理发师悖论”。
- 一天，萨维尔村理发师挂出一块招牌：“村里所有不自己理发的男人都由我给他们理发，我也只给这些人理发。”于是有人问他：“您的头发由谁理呢?”理发师顿时哑口无言。
- 罗素悖论提出了一个更加广泛得多的问题不好解决。什么样的{ x | P(x) }可以算集合。

10

10

集合论的重要性

- 集合论是用公理化或朴素直观的方法研究集合性质的一个数学分支。
- 整个纯粹数学的其它分支几乎都可建立在满足各种不同条件的集合之上，都可以在集合论的范围内形式地加以定义；集合论的许多基本思想、方法、定理、符号已广泛地渗透到数学的各个领域；许多涉及数学基础的根本性问题都可以归结为集合论的问题，因此法国布尔巴基学派把集合论称为“数学的基础结构”。
- 罗素称赞他的工作“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作。”

11

11

集合运算

并 $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

交 $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

相对补 $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

对称差 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

绝对补 $\sim A = E - A = \{ x \mid x \notin A \}$

例如 设$E=\{0,1, \ldots ,9\}$, $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$,

12

12

集合运算

例如　设$E=\{0,1,\ldots,9\}$, $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$,
求$A\cup B$， $A\cap B$, $A-B$, $B-A$， $A\oplus B$, $\sim A$, $\sim B$

$A\cup B=\{0,1,2,3,5,7,9\}$

$A\cap B=\{1,3\}$

$A-B=\{0,2\}$,

$B-A=\{5,7,9\}$,

$A\oplus B=\{0,2,5,7,9\}$,

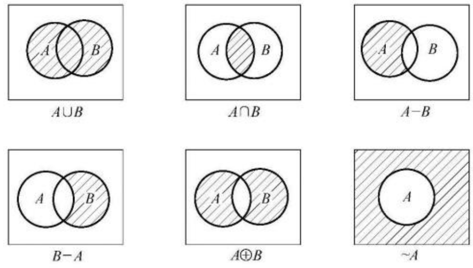
$\sim A=\{4,5,6,7,8,9\}$,

$\sim B=\{0,2,4,6,8\}$

13

13

文氏图表示



14

14

实　例

例1 设E是某中学高中一年级学生集合，A,B是E的子集,且
A= { x | x是男生},　　B= { x | x是校足球队员},
试用描述法表示$A\cup B$， $A\cap B$, $A-B$, $B-A$， $A\oplus B$, $\sim A$, $\sim B$:

$A\cup B$ = { x | x是男生或是足球队员},

$A\cap B$ = { x | x是男生且是足球队员},

$A-B$ = { x | x是男生，但不是足球队员}= { x | x是非足球队员的男生}

$B-A$= { x | x是足球队员，但不是男生}= { x | x是女生中的足球队员}

$A\oplus B$= { x | x是非足球队员的男生或是女生中的足球队员}

$\sim A$ = { x | x是女生},

$\sim B$ ={ x | x不是校足球队员},

15

15

集合运算(续)

并和交运算可以推广到有穷个集合上

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\{x \mid x\in A_1 \vee x\in A_2 \vee\ldots\vee x\in A_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\{x \mid x\in A_1 \wedge x\in A_2 \wedge\ldots\wedge x\in A_n\}$$

并和交运算还可以推广到可数无穷个集合上

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots=\{x \mid \exists i\ (i=1,2,\ldots)\ x\in A_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cap A_2\cap\ldots=\{x \mid \forall i\ (i=1,2,\ldots)\ x\in A_i\}$$

16

16

实　例

例2　设$A_i=[0, 1/i)$, $B_i=(0, i)$, $i=1,2,\ldots$, 则

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i =$　　　$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i =$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i =$　　　$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i =$

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i =$　　　$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i =$

$\bigcap_{i=1}^{n} B_i =$　　　$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i =$

17

17

实　例

例2　设$A_i=[0, 1/i)$, $B_i=(0, i)$, $i=1,2,\ldots$, 则

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = [0, 1)$　　　$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1)$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = [0, 1/n)$　　　$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = (0, n)$　　　$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = (0, +\infty)$

$\bigcap_{i=1}^{n} B_i = (0, 1)$　　　$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = (0, 1)$

18

18

实 例

例3 设$E=\{x \mid x$是上海大学学生$\}$, A,B,C,D是E的子集,
$A=\{x \mid x$是上海人$\}$, $B=\{x \mid x$是走读生$\}$,
$C=\{x \mid x$是数学系学生$\}$, $D=\{x \mid x$是喜欢听音乐的学生$\}$.
试描述下列各集合中学生的特征:

$(A\cup D)\cap{\sim}C=\{x \mid x$是上海人或喜欢听音乐, 但不是数学系学生$\}$

${\sim}A\cap B=\{x \mid x$是外地走读生$\}$

$(A-B)\cap D=\{x \mid x$是上海住校生, 并且喜欢听音乐$\}$

${\sim}D\cap{\sim}B=\{x \mid x$是不喜欢听音乐的住校生$\}$

说明:1. 只使用圆括号
2. 运算顺序: 优先级别为(1)括号, (2)~和幂集, (3)其它.
同级别的按从左到右运算

19

19

基本集合恒等式

1. 幂等律 $A\cup A=A$, $A\cap A=A$
2. 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$
3. 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
   $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

20

20

基本集合恒等式

4. 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

5. 德摩根律

绝对形式 ${\sim}(B\cup C)={\sim}B\cap{\sim}C$
${\sim}(B\cap C)={\sim}B\cup{\sim}C$

相对形式 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

21

21

基本集合恒等式

6. 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$
7. 零律 $A\cup E=E$, $A\cap\varnothing=\varnothing$
8. 同一律 $A\cup\varnothing=A$, $A\cap E=A$
9. 排中律 $A\cup{\sim}A=E$
10. 矛盾律 $A\cap{\sim}A=\varnothing$
11. 余补律 ${\sim}\varnothing=E$, ${\sim}E=\varnothing$
12. 双重否定律 ${\sim}{\sim}A=A$
13. 补交转换律 $A-B=A\cap{\sim}B$

22

22

基本集合恒等式

14. 关于对称差的恒等式

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$ （证明）

(1) 交换律 $A\oplus B=B\oplus A$

(2) 结合律 $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$ （文氏图）

(3) $\cap$对$\oplus$的分配律 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$ （证明）

(4) $A\oplus\varnothing=A$, $A\oplus E={\sim}A$

(5) $A\oplus A=\varnothing$, $A\oplus{\sim}A=E$

注意: $\cup$对$\oplus$没有分配律。

反例如下：$A=\{a,b,c\}$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$

$A\cup(B\oplus C)=\{a,b,c\}\cup\{1,2\}=\{a,b,c,1,2\}$

$(A\cup B)\oplus(A\cup C)=\{a,b,c,1\}\oplus\{a,b,c,2\}=\{1,2\}$, 两者不等

23

23

实 例

例1：证明 $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$.

证 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$ （定义）
$=(A\cap{\sim}B)\cup({\sim}A\cap B)$ （补交转换律）
$=(A\cup{\sim}A)\cap(A\cup B)\cap({\sim}B\cup{\sim}A)\cap({\sim}B\cup B)$ （分配律）
$=(A\cup B)\cap({\sim}B\cup{\sim}A)$ （排中律、同一律）
$=(A\cup B)\cap{\sim}(A\cap B)$ （德摩根律）
$=(A\cup B)-(A\cap B)$. （补交转换律）

Return

24

24

实　例

例2：证明 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

分析：利用⊕的定义，将左右两边的⊕运算为相对补运算；利用补交转换律将相对补运算转化为交运算。

Return

25

25

基本集合恒等式(续)

15. $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$.

16. $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$.

17. $A-B\subseteq A$.

18. $A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$.（订正教材）

19. $A\oplus B=A\oplus C \Rightarrow B=C$, 即⊕有消去律.（订正教材）

26

26

实　例

例3 证明 $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

证　$(A-C)-(B-C)$

$= (A\cap\sim C)\cap\sim(B\cap\sim C)$　(补交转换律)

$= (A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup\sim\sim C)$　(德摩根律)

$= (A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup C)$　(双重否定律)

$= (A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C\cap C)$　(分配律)

$= (A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\varnothing)$　(矛盾律)

$= A\cap\sim C\cap\sim B$　(零律,同一律)

$= (A\cap\sim B)\cap\sim C$　(交换律,结合律)

$= (A-B)-C$　(补交转换律)

27

27

实　例

例4　证明 $(A\cup B)\oplus(A\cup C)=(B\oplus C)-A$

证　$(A\cup B)\oplus(A\cup C)$

$=((A\cup B)-(A\cup C))\cup((A\cup C)-(A\cup B))$

$=((A\cup B)\cap\sim A\cap\sim C)\cup((A\cup C)\cap\sim A\cap\sim B)$

$=(B\cap\sim A\cap\sim C)\cup(C\cap\sim A\cap\sim B)$

$=((B\cap\sim C)\cup(C\cap\sim B))\cap\sim A$

$=((B-C)\cup(C-B))\cap\sim A$

$=(B\oplus C)-A$

28

28

证明集合包含或相等

方法一. 根据定义证明

方法二. 利用已知集合等式或包含式, 通过集合演算证明

例5 证明: $A\cup B=B\cup A$ (交换律)

证 $\forall x$　$x\in A\cup B$

$\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B$, 自然有 $x\in B$ 或 $x\in A$

$\Rightarrow x\in B\cup A$

得证 $A\cup B\subseteq B\cup A$.

同理可证 $B\cup A\subseteq A\cup B$.

所以，$A\cup B=B\cup A$

29

29

实　例

例6 设A,B为任意集合, 证明:

若$A\subseteq B$, 则$P(A)\subseteq P(B)$

证 $\forall x$　$x\in P(A) \Leftrightarrow x\subseteq A$

$\Rightarrow x\subseteq B$　(已知$A\subseteq B$)

$\Leftrightarrow x\in P(B)$

所以，$P(A)\subseteq P(B)$。

30

30

1.3 证明方法概述

- 直接证明法
- 间接证明法
- 归谬法(反证法)
- 数学归纳法
- 穷举法
- 构造证明法
- 空证明法
- 平凡证明法
- 举反例——命题为假的证明

31

31

待证明的命题的形式

形式1. 若A, 则B $A \rightarrow B$

形式2. A当且仅当B $A \leftrightarrow B$

形式3. 证明B B

都可归结为形式1

32

32

直接证明法

做法 假设A为真, 证明B为真.

例1 若n是奇数, 则n^2也是奇数.

证 假设n是奇数, 则存在$k \in Z$, $n=2k+1$. 于是,

$$n^2 = (2k+1)^2$$
$$= 2(2k^2+2k)+1$$

得证n^2是奇数.

33

33

间接证明法

做法 证明"若B不成立, 则A不成立, 即 $\neg B \rightarrow \neg A$"

例2 若n^2是奇数, 则n也是奇数.

证 用间接证明法. 只要证:若n是偶数, 则n^2也是偶数.

假设n是偶数, 则存在$k \in N$, $n=2k$. 于是,

$$n^2 = (2k)^2$$
$$= 2(2k^2)$$

得证n^2是偶数.

34

34

归谬法(反证法)

做法 设A成立, 假设B不成立, 推出矛盾.

例3 若$A-B=A$, 则$A \cap B=\varnothing$

证 用归谬法, 假设$A \cap B \neq \varnothing$, 则存在$x$,使得

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$且$x \in B$

$\Rightarrow x \in A-B$且$x \in B$ $(A-B=A)$

$\Leftrightarrow (x \in A$且$x \notin B)$且$x \in B$

$\Rightarrow x \notin B$且$x \in B$, 矛盾

35

35

归谬法(续)

例4 证明$\sqrt{2}$ 是无理数

证 假设$\sqrt{2}$ 是有理数, 存在正整数n,m, 使得$\sqrt{2}$ $=m/n$,

不妨设m/n为既约分数. 于是$m=n\sqrt{2}$, $m^2=2n^2$, m^2是偶数,

从而m是偶数. 设$m=2k$, 得 $(2k)^2=2n^2$, $n^2=2k^2$, 这又得到n也是偶数, 与m/n为既约分数矛盾.

间接证明法是归谬法的特殊形式: 由B不成立推出A不成立, 与前提A成立矛盾.

36

36

穷举法(分情况证明法)

待证明的命题形式为$A \to B$，其中$A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$，

做法 证明$A_1 \to B, A_2 \to B, \ldots, A_k \to B$ 均为真

例5 证明:$\max(a, \max(b,c)) = \max(\max(a,b),c)$

证

情况	$u=\max(b,c)$	$\max(a,u)$	$v=\max(a,b)$	$\max(v,c)$
$a \le b \le c$	c	c	b	c
$a \le c \le b$	b	b	b	b
$b \le a \le c$	c	c	a	c
$b \le c \le a$	c	a	a	a
$c \le a \le b$	b	b	b	b
$c \le b \le a$	b	a	a	a

37

37

构造性证明法

要证明存在具有某种性质的客体

做法 在A为真的条件下, 构造出具有这种性质的客体

例6 对于每个正整数n, 存在n个连续的正合数.

证 令$x=(n+1)!$

则 $x+2, x+3, \ldots, x+n+1$是n个连续的正合数:

$i \mid x+i, \quad i=2,3,\ldots,n+1$

38

38

非构造性证明

例7 对于每个正整数n, 存在大于n的素数.

证 令x等于所有小于等于n的素数的乘积加1,

则 x不能被所有小于等于n的素数整除.

于是, x或者是素数, 或者能被大于n的素数整除.

因此,存在大于n的素数.

39

39

空证明法与平凡证明法

空证明法(前件假证明法)

做法 证明A恒为假

例如 设$n \in \mathbf{N}$，记$P(n)$: 若$n>1$，则$n^2>1$. 试证明$P(0)$为真.

$P(0)$: 若$0>1$，则$0^2>1$.

平凡证明法(后件真证明法)

做法 证明B恒为真, 而不需要假设A为真.

例如 若$a \le b$, 则$a^0 \le b^0$.

常在归纳证明的归纳基础中出现

40

40

归纳与猜想——数学研究的方法

命题的提出

例如, 观察

$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

… …

猜想: 前n个奇数之和等于n^2, 即

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

41

41

数学归纳法的步骤

命题形式: $\forall x(x \in \mathbf{N} \wedge x \ge n_0), P(x)$

(1)归纳基础 证$P(n_0)$为真

(2)归纳步骤 $\forall x(x \ge n_0)$, 假设$P(x)$为真, 证$P(x+1)$为真.

称“$P(x)$为真”为归纳假设

例8 证明:对所有$n \ge 1$, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

证 归纳基础. 当$n=1$时, $1=1^2$, 结论成立.

归纳步骤. 假设对$n \ge 1$结论成立, 则有

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

得证当$n+1$时结论也成立.

42

42

数学归纳法的步骤(续)

注意: 归纳基础与归纳步骤两者缺一不可

反例1 命题 $\forall n\geq 1$, $2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}$

假设$\forall n\geq 1$, 结论成立, 则

$2^1+2^2+\cdots+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}+2^{n+1}=2^{n+2}$

对$n+1$结论成立.

无归纳基础。

43

43

第二数学归纳法

归纳基础 证明$P(n_0)$为真

归纳步骤 $\forall x(x\geq n_0)$, 假设$P(n_0),P(n_0+1),\ldots,P(x)$为真, 证$P(x+1)$为真.

归纳假设 $\forall y(n_0\leq y\leq x)$, $P(y)$为真

例9 任何大于等于2的整数均可表成素数的乘积

证 归纳基础. 对于2, 结论显然成立.

归纳步骤. 假设对所有的$k(2\leq k\leq n)$结论成立, 要证结论对$n+1$也成立. 若$n+1$是素数, 则结论成立; 否则$n+1=ab$, $2\leq a,b<n$. 由归纳假设, a,b均可表成素数的乘积, 从而$n+1$也可表成素数的乘积. 得证结论对$n+1$成立.

44

44

注　释

归纳基础 证$P(n_0),P(n_0+1),\ldots,P(n_1)$为真, $n_0\leq n_1$.

例10 可用4分和5分邮票组成n分邮资, $n\geq 12$.

证 归纳基础. $12=3\times 4$, $13=2\times 4+5$, $14=2\times 5+4$, $15=3\times 5$, 得证对$n=12,13,14,15$时结论成立.

归纳步骤. 设$n\geq 15$, 假设对$12,13,\ldots,n$结论成立, 由$12\leq n-3<n$和归纳假设, $n-3$分邮资可用4分和5分邮票组成, 再加一张4分邮票即可得到$n+1$分邮资, 得证结论对$n+1$也成立.

45

45

命题为假的证明——举反例

例11 证明下述命题不成立:

若$A\cap B=A\cap C$, 则$B=C$.

证明 反例: 取$A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{a,b,d\}$, 有

$A\cap B=A\cap C=\{a,b\}$

但$B\neq C$, 故命题不成立.

46

46

1.4 递归定义

递归定义(归纳定义) 用自身定义自身

例如, a^n可以递归定义如下:

$a^0=1$

$a^n=a^{n-1}\cdot a$, $n=1,2,\ldots$

例1.12 菲波那契数列$\{f_n\}$递归定义如下:

$f_0=1$, $f_1=1$

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, $n=2,3,\ldots$

$f_0=1, f_1=1, f_2=2, f_3=3, f_4=5, f_5=8, f_6=13, \ldots$

47

47

实　例

例1.13 集合A的递归定义如下:

(1) $3\in A$,

(2) 若$x, y\in A$, 则$x+y\in A$,

(3) 只有有限次使用(1)和(2)得到的数属于A.

$A=\{3n \mid n\in Z^+\}$

48

48

实　例

例1.14 算术表达式的归纳定义如下:

(1) 任何实数和变量都是算术表达式,

(2) 如果f, g是算术表达式, 则$(f+g)$, $(f-g)$, $(f*g)$是算术表达式,

(3) 如果f, g是算术表达式且$g\neq 0$, 则(f/g)是算术表达式,

(4) 如果f是算术表达式, 则$\forall n\in Z^+$, $(f\uparrow n)$是算术表达式,

(5) 只有有限次使用(1)~(4)得到的式子是算术表达式.

如, $((3*x)-1)$, $(((2*(x\uparrow 2))+(5*x))-4)$, $(((x+y)-z)/(5+x))$

49

49

作　业

◈6,11,13,19

2020年2月19日10时37分

50

50