第四章　关 系

1

2

4.4 等价关系与偏序关系

3

等价关系的定义与实例

定义4.18 设R为非空集合上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的**等价关系**. 设 R 是一个等价关系, 若$<x,y>\in R$, 称 **x等价于y**, 记做$x\sim y$.

例1 设 $A=\{1, 2, \ldots, 7\}$, 如下定义 A上的关系R:

$R=\{<x,y>| x,y\in A\wedge x\equiv y \pmod 3\}$

其中 $x\equiv y \pmod 3$ 叫做 x与y **模3相等**, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

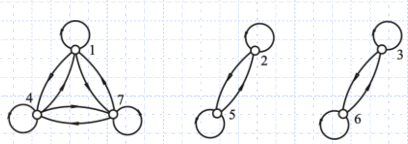
4

模3等价关系的关系图

设 $A=\{1, 2, \ldots, 7\}$,

$R=\{ <x,y>| x,y\in A\wedge x\equiv y \pmod 3) \}$

R 的关系图如下:



5

等价类

定义4.19 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x\in A$, 令

$[x]_R = \{ y \mid y\in A\wedge xRy \}$

称 $[x]_R$ 为x关于R 的**等价类**, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$.

实例　A={ 1, 2, … , 7 }上模 3 等价关系的等价类:

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=\{2,5\}$

$[3]=[6]=\{3,6\}$

6

等价类的性质

定理4.8 设R是非空集合A上的等价关系，则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是A的非空子集.

(2) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy, 则 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交.

(4) $\bigcup_{x\in A}[x]=A$，即所有等价类的并集就是A.

7

7

性质的证明

（1）由等价类定义可知, $\forall x \in A$有$[x] \subseteq A$. 由自反性有xRx，因此$x \in [x]$, 即$[x]$非空.

（2）任取z, 则有

$$z \in [x] \Rightarrow <x,z> \in R \Rightarrow <z,x> \in R$$

$$<z,x> \in R \land <x,y> \in R \Rightarrow <z,y> \in R \Rightarrow <y,z> \in R$$

从而证明了$z \in [y]$. 综上所述必有$[x] \subseteq [y]$.

同理可证$[y] \subseteq [x]$. 这就得到了$[x]=[y]$.

(3) 假设$[x] \cap [y] \neq \varnothing$, 则存在$z \in [x] \cap [y]$, 从而有

$z \in [x] \land z \in [y]$, 即$<x,z> \in R \land <y,z> \in R$ 成立.

根据R 的对称性和传递性必有$<x,y> \in R$, 与$x \not R y$矛盾

8

8

(4) 先证 $\bigcup_{x\in A}[x] \subseteq A$ 任取y,

$$y \in \bigcup_{x\in A}[x] \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \land y \in [x])$$

$$\Rightarrow y \in [x] \land [x] \subseteq A \Rightarrow y \in A$$

从而有 $\bigcup_{x\in A}[x] \subseteq A$.

再证$A \subseteq \bigcup_{x\in A}[x]$. 任取$y$,

$$y \in A \Rightarrow y \in [y] \land y \in A \Rightarrow y \in \bigcup_{x\in A}[x]$$

从而有$A \subseteq \bigcup_{x\in A}[x]$成立. 综上所述得 $\bigcup_{x\in A}[x] \subseteq A$

9

9

商集

定义4.20 设R 为非空集合A 上的等价关系, 以R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R 的**商集**, 记做 A/R,

$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

例2

令$A=\{1, 2, \ldots, 7\}$，A关于模 3 等价关系R 的商集为

$$A/R = \{ \{1, 4,7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\} \}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{ \{1\},\{2\}, \ldots ,\{7\}\}$$

$$A/E_A = \{ \{1, 2, \ldots ,7\} \}$$

10

10

集合的划分

定义4.21 设A为非空集合, 若A的子集族π($\pi \subseteq P(A)$) 满足下面条件:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y\,(x,y \in \pi \land x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup_{x\in\pi}\, x = A$

则称π是A的一个**划分**, 称π 中的元素为A的**划分块**.

例3 设$A=\{a, b, c, d\}$, 给定$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下:

$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$， $\pi_2=\{\{a, b\},\{c\},\{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\},\{a, b, c, d\}\}$， $\pi_4=\{\{a, b\},\{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\},\{c, d\}\}$， $\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b, c, d\}\}$

请问哪些是划分？

11

11

等价关系与划分的一一对应

商集 A/R 就是A 的一个划分,

不同的商集对应于不同的划分。

任给A 的一个划分π, 如下定义A 上的关系 R:

$$R =\{<x,y> \mid x,y \in A \land x 与 y 在\pi的同一划分块中 \}$$

则R 为A上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是π.

12

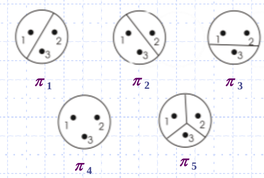
12

实例

例 4 给出$A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

实例

例 4 给出$A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系



A上的等价关系与划分之间的对应：

π_4对应于全域关系E_A

π_5对应于恒等关系I_A

π_1, π_2和π_3分别对应于等价关系 R_1, R_2和R_3. 其中

$R_1=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$

$R_2=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$

$R_3=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

实例

例5 设$A=\{1,2,3,4\}$，在$A\times A$上定义二元关系 R：

$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y=u+v$,

求R 导出的划分.

解 $A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>,$
$<2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>,$
$<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>,$
$<4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\}$

根据有序对$<x,y>$的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将$A\times A$划分.

$(A\times A)/R=\{\{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\},$
$\{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\}, \{<2,4>, <3,3>, <4,2>\},$
$\{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\}\}$

偏序关系

定义4.22 非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作≼. 设≼为偏序关系, 如果$<x,y>\in$≼, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x"小于或等于" y.

实例

集合A上的恒等关系 I_A 是A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

定义4.23 x与y可比 设R为非空集合A上的偏序关系,

$x, y\in A$, x与y 可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

定义4.25 全序 R为非空集合A上的偏序, $\forall x, y\in A$, x与y都可比，则称R为全序.

定义4.26 覆盖 $x,y\in A$, 如果$x \prec y$且不存在 $z\in A$使得$x \prec z \prec y$, 则称 y覆盖x.

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

{1, 2, 4, 6}集合上的整除关系, 2覆盖1, 4 和 6 覆盖2.

但4不覆盖1.

偏序集与哈斯图

定义4.27 集合A和A上的偏序关系≼一起叫做偏序集, 记作$<A,\preccurlyeq>$。

实例：整数集和数的小于等于关系构成偏序集$<Z,\leq>$

幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$<P(A),R_{\subseteq}>$.

哈斯图：利用偏序关系的自反性、反对称性、传递性简化的关系图。

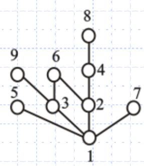
特点：

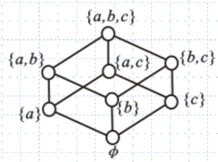
- 每个结点没有环；
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前；
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边。

哈斯图实例

例6 画出下列偏序关系的哈斯图：

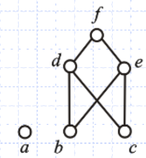
$<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{整除}>$　　$<P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq}>$





哈斯图实例（续）

例7
已知偏序集$<A,R>$
的哈斯图如下图所示，
试求出集合A和关系
R的表达式.



$A=\{a, b, c, d, e, f\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,\}\cup I_A$

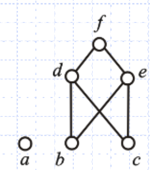
偏序集的特定元素

定义4.28　设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.
(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为 B 的最小元.
(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为 B 的最大元.
(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极小元.
(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极大元.

实例

例8　设偏序集$<A,\preccurlyeq>$如下图所示，设$B=\{b, c, d\}$，分别求A 、B的极小元、最小元、极大元、最大元..

解：A的极小元：a, b, c；
极大元：a, f；
没有最小元与最大元.



B的极小元：b, c；
极大元：d；
没有最小元
最大元为d.

偏序集的特定元素

定义4.28　设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.
(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为 B 的最小元.
(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为 B 的最大元.
(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极小元.
(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极大元.

性质：
- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个；
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定唯一；
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元；
- 孤立结点既是极小元，也是极大元。

偏序集的特定元素(续)

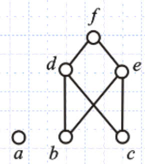
定义4.29　设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in A$.
（1） 若$\forall x\ (x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为B 的上界.
（2） 若$\forall x\ (x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为B 的下界.
（3） 令$C=\{y\mid y$为B的上界$\}$, 则称C的最小元为B 的最小上界 或上确界.
（4） 令$D=\{y\mid y$为B的下界$\}$, 则称D的最大元为B 的最大下界 或下确界.

实例

例8 设偏序集$<A,\preccurlyeq>$如下图所示，设$B=\{b, c, d\}$，分别求A、B的下界、上界、下确界、上确界.

解：A 的下界、上界、下确界、上确界都没有；

B的下界和下确界不存在，上界有d和f，上确界为d.



25

偏序集的特定元素(续)

定义4.29 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in A$.

（1） 若$\forall x\ (x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立，则称 y 为B 的上界.

（2） 若$\forall x\ (x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立，则称 y 为B 的下界.

（3） 令$C=\{y \mid y$为B的上界$\}$，则称C的最小元为B 的最小上界 或上确界.

（4） 令$D=\{y \mid y$为B的下界$\}$，则称D的最大元为B 的最大下界 或下确界.

性质：

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在；
- 下界、上界存在不一定唯一；
- 下确界、上确界如果存在，则唯一；
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

26

实例

例9 已知$A=\{<1,1>,<1,0>,<0,1>,<0,0>\}$，规定$A$上的偏序关系$\preccurlyeq$为：

$$<a,b> \preccurlyeq <c,d> \Leftrightarrow a \le c \wedge b \le d$$

（1）画出偏序集$<A, \preccurlyeq>$的哈斯图；（4分）

（2）令$B=\{<1,1>,<1,0>,<0,1>\}$，求出B的最大元、最小元、极大元、极小元、上确界和下确界。（如果不存在则指明不存在）（6分）

27

实例

例10 R是集合A上的二元关系。对于所有的a、b、$c\in A$，如果aRb，bRc，则cRa，那么称R是循环关系。

证明：R是自反和循环的当且仅当R是一等价关系。

28

作业

- 27,32,34

2020年2月19日10时6分

29