教学内容

	教学内容		
离散数学（一）	集合论	集合（第1章）	对象层
		关系（第4章）	内容层
		函数（第5章）	
	数理逻辑	命题逻辑（第2章）	方法层
		一阶逻辑（第3章）	
离散数学（二）	图论	图（第6章）	
		树（第7章）	
	代数系统	（第14章）	

1

数理逻辑的研究内容

从广义上讲，数理逻辑是一门研究数学中基础性问题的学科。其内容由**证明论、模型论、递归论、集合论**等四大理论组成。

从狭义上讲，数理逻辑研究**形式逻辑中推理规则的一个数学分支**。

逻 辑	形式逻辑	演绎性推理
		归纳性推理
	辩证逻辑	

2

数理逻辑的研究方法

在数理逻辑中采用数学方法研究演绎性的形式逻辑的规律。所谓数学方法指的是**引进一套符号体系**的方法，因此数理逻辑又称为符号逻辑，用这种方法在形式逻辑推理中**引入一套形式语言**，**组成一个形式系统**，使得对形式逻辑的研究归结为**对一整套符号所组成的形式系统的研究**。

3

第二章　命题逻辑

4

第2章　命题逻辑

- 2. 1命题逻辑基本概念
- 2. 2命题逻辑等值演算
- 2. 3范式
- 2. 4推理

2020年2月19日10时21分　5

5

2. 1 命题逻辑基本概念

- **2.1.1** 命题与联结词
- **2.1.2** 命题公式及其分类
- 知 识 点： 命题及表示、联结词、命题公式与赋值、真值表
- 教学要求：深刻理解和掌握命题逻辑中的基本概念
- 教学重点：命题逻辑中的基本概念

2020年2月19日10时21分　6

6

土耳其商人问题

一个土耳其商人想找一个聪明的助手协助他经商，有两人前来应聘，这个商人为了试试哪个更聪明些，就把两个人带进一间漆黑的屋子里，他打开灯后说：“这张桌子上有五顶帽子，两顶是红色的，三顶是黑色的，现在，我把灯关掉，而且把帽子摆的位置弄乱，然后我们三个人每人摸一顶帽子戴在自己头上，在我开灯后，请你们尽快说出自己头上戴的帽子是什么颜色的。” 说完后， 商人将电灯关掉，然后三人都摸了一顶帽子戴在头上，同时商人将余下的两顶帽子藏了起来，接着把灯打开。这时，那两个应试者看到商人头上戴的是一顶红帽子，过了一会儿，其中一个人便喊道：“我戴的是黑帽子。”

请问这个人说得对吗？他是怎么推导出来的呢？

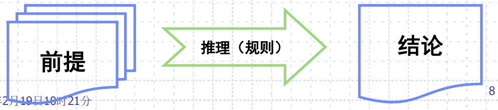
2020年2月19日10时21分 7

7

土耳其商人问题

- 要回答这样的问题，实际上就是看由一些诸如“商人戴的是红帽子”这样的前提能否推出“猜出答案的应试者戴的是黑帽子”这样的结论来。这又需要经历如下过程：

(1) 什么是前提？有哪些前提？
(2) 结论是什么？
(3) 根据什么进行推理？
(4) 怎么进行推理？



2020年2月19日10时21分 8

8

2.1.1 命题与联结词

- 数理逻辑研究的中心问题是推理。
- 推理的前提和结论都是表达判断的陈述句。
- 表达判断的陈述句构成了推理的基本单位。

2020年2月19日10时21分 9

9

命 题

- 称能判断真假（不是可真可假）的陈述句为**命题**。

例1：判断下列句子是否为命题

- 4是素数
- π是无理数
- x大于y
- 火星上有水
- 2100年元旦是晴天

2020年2月19日10时21分 10

10

命 题

例1：判断下列句子是否为命题

- π大于 3 吗？
- 请不要吸烟！
- 这朵花真美丽啊！
- 我正在说假话
- 所有的整数都大于0
- 有的整数大于0

2020年2月19日10时21分 11 ®

11

命题及其真值

- 称能判断真假（不是可真可假）的陈述句为**命题**。
- 作为命题的陈述句所表达的判断结果称为**命题的真值**。
- 真值只取两个：真与假。
- 真值为真的命题称为真命题。
- 真值为假的命题称为假命题。

2020年2月19日10时21分 12

12

命题及其真值

◈ 判断给定句子是否为命题，应该分两步

- 首先判定它是否为陈述句
- 其次判断它是否有唯一的真值

说明

- ❑感叹句、疑问句、祈使句都不能称为命题。
- ❑判断结果不唯一确定的陈述句不是命题。
- ❑陈述句中的悖论不是命题。
- ❑一个语句本身是否能分辨真假与我们是否知道它的真假是两回事。也就是说，对于一个句子，有时我们可能无法判定它的真假，但它本身却是有真假的，那么这个语句是命题。

命题及其真值

例2：判断下列句子是否为命题,并确定真值。

(1) 北京是中华人民共和国的首都.	真命题
(2) $2+5=8$.	假命题
(3) $x+5>3$.	真值不确定
(4) 你会开车吗？	疑问句
(5) 2050年元旦北京是晴天.	真值确定，但未知
(6) 这只兔子跑得真快呀！	感叹句
(7) 请关上门！	祈使句
(8) 我正在说谎话.	悖论

(1),(2),(5)是命题，(3),(4),(6)~(8)都不是命题

简单命题与复合命题

◈ 用小写英文字母$p,q,r\ldots,p_i,q_i,r_i\ldots$表示命题

◈ 用"1"表示真，用"0"表示假

p: 4是素数　　q:n是无理数

r:火星上有水　　s: 2100年元旦是晴天

t:所有的整数都大于0　　u:有的整数大于0

➢ 不能被分解成更简单的陈述句，称这样的命题为简单命题或原子命题。

➢ 由简单陈述句通过联结词联结而成的陈述句，称这样的命题为复合命题。

命题符号化

例：将下面这段陈述句中所出现的原子命题符号化，并指出它们的真值，然后再写出这段陈述。

❑ $\sqrt{2}$是有理数是不对的；2是偶素数；2或4是素数；如果2是素数，则3也是素数；2是素数当且仅当3也是素数。

p：$\sqrt{2}$ 是有理数	0
q：2是素数；	1
r：2是偶数	1
s：3是素数；	1
t：4是素数	0

非p；q并且(与)r；q或t；如果q，则s；q当且仅当s。

命题符号化

◈ 半形式化形式

◈ 数理逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的各种要素都符号化。即构造各种符号语言来代替自然语言。

◈ 形式化语言：完全由符号所构成的语言。

◈ 将联结词符号化，消除其二义性，对其进行严格定义。

联结词

为了避免歧义,对联结词进行严格定义,并且加以符号化

◈ 常用的联结词　　设p 和 q为两个命题

- 定义1　否定联结词：¬
- 复合命题"非 p"称为p的否定式,记为¬p，"¬"称为否定联结词，"¬P"为真当且仅当p为假（依赖于P 的取值，即定义运算表为

见假为真，见真为假

命题	p	¬p
真值	0	1
	1	0

联结词

■ **定义2 合取联结词 ：∧**

复合命题"p并且q"称为p与q的合取式,记作 p∧q ,"∧"称作合取联结词， p∧q 为真当且仅当p与q同时为真,合取的运算表为

见假为假，全真为真

命题	p	q	p∧q
真值	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

2020年2月19日10时21分 19

19

联结词

使用合取联结词时要注意的两点：

- 描述合取式的灵活性与多样性。
  自然语言中的"既……又……"、"不但……而且……"、"虽然……但是……"、"一面……一面……"等联结词都可以符号化为∧。
- 分清简单命题与复合命题。
  不要见到"与"或"和"就使用联结词∧。

2020年2月19日10时21分 20

20

联结词

例4 将下列命题符号化。

- 吴颖既用功又聪明。
- 吴颖不仅用功而且聪明。
- 吴颖虽然聪明，但不用功。
- 张辉与王丽都是三好学生。
- 张辉与王丽是同学。

p：吴颖用功。
q：吴颖聪明。
r：张辉是三好学生。
s：王丽是三好学生。
t：张辉与王丽是同学。

p∧q
p∧q
q∧┐p
r∧s
t

解题要点：
正确理解命题含义。
找出原子命题并符号化。
选择恰当的联结词。

2020年2月19日10时21分 21

21

联结词

- *p*：我们去看电影。
  q：房间里有十张桌子。
  p∧*q*：我们去看电影并且房间里有十张桌子。

说明

在数理逻辑中，关心的只是复合命题与构成复合命题的各原子命题之间的真值关系，即抽象的逻辑关系，并不关心各语句的具体内容。

2020年2月19日10时21分 22

22

联结词

■ **定义3 析取联结词 ：∨**

复合命题"p或q"称为p与q的析取式,记作 p∨q，"∨"称作析取联结词。 p∨q为真当且仅当 p与q中至少有一个为真,析取的运算表为

见真为真，全假为假

命题	p	q	p∨q
真值	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

说明

自然语言中的"或"具有二义性，用它联结的命题有时具有相容性，有时具有排斥性，对应的联结词分别称为相容或和排斥或（排异或）。

2020年2月19日10时21分 23

23

相容或和排斥或

例： 张三或李四会英语。
设 p:张三会英语, q:李四会英语， 符号化为p∨q

例： 这件事只能由张三或李四中的一人去做
设 p:张三做这件事, q:李四做这件事
应符号化为 (p ∧ ¬q) ∨(¬p ∧ q)

2020年2月19日10时21分 24

24

相容或和排斥或

- 前者称为“相容或”，后者称为“排斥或”
- 差异在于：

  当构成它们的简单命题都为真时，前者为真，后者却为假
- 前者可表示为p∨q，后者表示为(p∧¬q)∨(¬p∧q)
- 对于具体的命题p和q,如果p,q不可能同时为真时就不用区分

2020年2月19日10时21分 25

25

例5 将下列命题符号化

- 张晓静爱唱歌或爱听音乐。
- 张晓静是江西人或安徽人。
- 张晓静只能挑选202或203房间。
- 他昨天做了二十或三十道习题。
- 设 p：张晓静爱唱歌，q：张晓静爱听音乐。
  相容或，符号化为 $p∨q$
- 设 r：张晓静是江西人， s：张晓静是安徽人。
  排斥或，符号化为：$r∨s$。
  （排斥或联结的两个命题事实上不可能同时为真）
  或符号化为：(r∧┐s)∨(┐r∧s)
- 设 t：张晓静挑选202房间， u：张晓静挑选203房间。
  排斥或，符号化为：(t∧┐u)∨(┐t∧u)
- 原子命题，因为“或”只表示了习题的近似数目。

2020年2月19日10时21分 26

26

联结词

- 定义4 蕴涵联结词：→

前件 后件

复合命题”如果p,则q”称为p与q的蕴涵式,记作 p→q，“→”称为蕴涵联结词。“p→q”为假当且仅当p为真而q为假,运算表为

命题	p	q	p→q
真值	0	0	1
	0	1	1
	1	0	0
	1	1	1

前真后假为假，其他为真

2020年2月19日10时21分 27

27

联结词

- 在日常生活中当p=0时，p→q 没有实际意义。故人们只考虑 p=1 的情形。但在p→q 真值表中规定：当 p=0 时，不管 q 如何， p→q 的真值都为1. 有没有道理呢？
- 例如，张三对李四说：‘我去图书馆一定帮你借那本书’。可以将这句话表为命题 p→q(p表示:张三去图书馆,q表示:张三借那本书)。后来张三因有事未去图书馆，即 p=0，此时按规定 p→q 为真。我们应理解为张三讲了真话，即他要是去图书馆我们相信他一定会为李四借书。这种理解也称为‘善意推定’。

2020年2月19日10时21分 28

28

例6 将下列命题符号化,并指出它们的真值

(1)如果3+3＝6，则雪是白的。
(2)如果3+3≠6，则雪是白的。
(3)如果3+3＝6，则雪不是白的。
(4)如果3+3≠6，则雪不是白的。

解：令p：3+3＝6，p的真值为1。
q：雪是白色的，q的真值也为1。

- p→q 1
- ┐p→q 1
- p→┐q 0
- ┐p→┐q 1

2020年2月19日10时21分 29

29

说明

说明

- p→q的逻辑关系表示q是p的必要条件。
- q是p的必要条件有许多不同的叙述方式
  - 只要p，就q
  - 因为p，所以q
  - p仅当q
  - 只有q才p
  - 除非q才p
  - 除非q，否则非p

2020年2月19日10时21分 30

30

例7 将下列命题符号化，并指出它们的真值

以下命题中出现的a是一个给定的正整数：

(5) 只要a能被4整除，则a一定能被2整除。

(6) a能被4整除，仅当a能被2整除。

(7) 除非a能被2整除，a才能被4整除。

(8) 除非a能被2整除，否则a不能被4整除。

(9) 只有a能被2整除，a才能被4整除。

(10)只有a能被4整除，a才能被2整除。

解：令r：a能被4整除 s：a能被2整除

(5)至(9)五个命题均叙述的是a能被2整除是a能被4整除的必要条件，因而都符号化为$r\rightarrow s$。其真值为1

在(10)中，将a能被4整除看成了a能被2整除的必要条件，因而应符号化为$s\rightarrow r$。a值不定时，真值未知。

2020年2月19日10时21分 31

31

联结词

- **定义5 等价联结词 ：↔**

复合命题"p当且仅当q"称为p与q的等价式,记作 p↔q "↔"称作等价联结词。"p↔q"为真当且仅当p、q同时为真或同时为假,它的运算表为

命题	p	q	p↔q
真值	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

相同为真，相异为假

说明

- "当且仅当"（*if and only if*）
- p↔q的逻辑关系为p与q互为充分必要条件。
- (p→q)∧(q→p)与p↔q的逻辑关系完全一致。

2020年2月19日10时21分

32

例8 将下列命题符号化，并讨论它们的真值

- π是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。
- 2+3＝5的充要条件是π是无理数。
- 若两圆A，B的面积相等，则它们的半径相等；反之亦然。
- 当王小红心情愉快时，她就唱歌；反之，当她唱歌时，一定心情愉快。

- **设 p：π是无理数，q：加拿大位于亚洲。符号化为 $p\leftrightarrow q$，真值为0。**
- **设 p：2+3＝5，q：π是无理数。符号化为 $p\leftrightarrow q$，真值为1。**
- **设 p：两圆A，B的面积相等，q：两圆A，B的半径相等。符号化为 $p\leftrightarrow q$，真值为1。**
- **设 p：王小红心情愉快，q：王小红唱歌。符号化为 $p\leftrightarrow q$，真值由具体情况而定。**

2020年2月19日10时21分 33

33

关于基本联结词的说明

- {┐,∧,∨,→,↔}，称为一个联结词集。
- 由联结词集{┐,∧,∨,→,↔}中的一个联结词联结一个或两个原子命题组成的复合命题是最简单的复合命题，可以称它们为基本的复合命题。

2020年2月19日10时21分 34

34

基本复合命题

- 基本复合命题的真值表

p q	┐p	p∧q	p∨q	p→q	p↔q
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

规定：当前件为假命题时，不论后件是真是假，该蕴涵式都为真命题

蕴涵式的前件和后件可以没有内在联系 例如：
如果 中国的首都是北京 则 雪是白的
显然这是一个真命题

2020年2月19日10时21分 35 ®

35

关于基本联结词的说明

- 多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复杂复合命题的真值时，除依据上表外，还要规定联结词的优先顺序，将括号也算在内。
- 本书规定的联结词优先顺序为：()，┐，∧，∨，→，↔，对于同一优先级的联结词，先出现者先运算。

2020年2月19日10时21分 36

36

运算的优先级

运算的优先级依次为:

运算		
(,)	↑	高
¬		
∧		
∨		
→		
↔		低

例如 ¬ p ∧ q ∨ p ∨ q ∧ ¬ r → q ↔ p

相当于 (((((¬p) ∧ q) ∨ p) ∨ (q ∧ (¬r))) → q) ↔ p

2020年2月19日10时21分 37

37

运算优先级说明

- 几点说明:
  - 相同运算符按从左至右顺序执行, 括号可省去.
  - 最外层的括号总可以省去.
- 例如 ¬P∨¬P∨Q∧¬S∨¬Q∧R

与 (((¬(P)∨¬(P))∨(Q∧¬(S))∨(¬(Q)∧R))

运算顺序完全一样,前者不加一个括号.

- 请大家特别注意先∧后∨的习惯.

2020年2月19日10时21分 38

38

例9

令 p: 北京比天津人口多。
q: 2+2=4.
r: 乌鸦是白色的。

求下列复合命题的真值:

(1)((┐p∧q)∨(p∧┐q))→r
(2)(q∨r)→(p→┐r)
(3)(┐p∨r)↔(p∧┐r)

解: p、q、r的真值分别为
1、1、0

(1) 1
(2) 1
(3) 0

说明 我们关心的是复合命题中命题之间的真值关系,而不关心命题的内容。

2020年2月19日10时21分 39

39

2.1.2 命题公式及其分类

- 简单命题是真值唯一确定的命题逻辑中最基本的研究单位,所以也称简单命题为命题常项或命题常元。
- 称真值可以变化的陈述句为命题变项或命题变元.
  也用p,q,r,…表示命题变项。
- 当p,q,r,…表示命题变项时, 它们就成了取值0或1的变项,因而命题变项已不是命题。
- 这样一来, p,q,r,…既可以表示命题常项, 也可以表示命题变项。在使用中, 需要由上下文确定它们表示的是常项还是变项。
- 将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式或命题公式。

2020年2月19日10时21分 40

40

定义6 : 合式公式

(1)单个命题变项和命题常项是合式公式, 并称为原子命题公式。
(2)若A是合式公式, 则(┐A)也是合式公式。
(3)若A, B是合式公式, 则(A∧B), (A∨B), (A→B), (A↔B)也是合式公式。
(4)只有有限次地应用(1)~(3)形式的符号串才是合式公式。
合式公式也称为命题公式或命题形式, 简称为公式。

2020年2月19日10时21分 41

41

关于合式公式的说明

- 定义6是归纳定义, 而不是循环定义
  (1) 是奠基, (2)、(3) 是归纳步骤
- 合式公式的例子:
  (p→q)∧(q↔r)
  (p∧q)∧┐r
  p∧(q∧┐r)
- 不是合式公式的例子
  pq→r, p→(r→q

2020年2月19日10时21分 42

42

定义7： 公式层次

(1)若公式A是单个的命题变项，则称A为0层公式。

(2)称A是$n+1(n\geq 0)$层公式是指下面情况之一：

(a) $A=\neg B$，B是n层公式；

(b) $A=B\wedge C$，其中B,C分别为i层和j层公式，且$n=\max(i,j)$；

(c) $A=B\vee C$，其中B,C的层次及n同(b)；

(d) $A=B\rightarrow C$，其中B,C的层次及n同(b)；

(e) $A=B\leftrightarrow C$，其中B,C的层次及n同(b)。

例如：$(\neg p\wedge q)\rightarrow r$，$(\neg(p\rightarrow\neg q))\wedge((r\vee s)\leftrightarrow\neg p)$

分别为3层和4层公式

公式的解释

- 在命题公式中，由于有命题变项的出现，因而真值是不确定的。当将公式中出现的全部命题变项都解释成具体的命题之后，公式就成了真值确定的命题了。
- $(p\vee q)\rightarrow r$
- 若p：2是素数，q：3是偶数，r：π是无理数，则p与r被解释成真命题，q被解释成假命题，此时公式$(p\vee q)\rightarrow r$被解释成：若2是素数或3是偶数，则π是无理数。（真命题）
- r被解释为：π是有理数，则$(p\vee q)\rightarrow r$被解释成：若2是素数或3是偶数，则π是有理数。（假命题）
- 将命题变项p解释成真命题，相当于指定p的真值为1，解释成假命题，相当于指定p的真值为0。

定义8： 赋值或解释

- 设$p_1,p_2,\ldots,p_n$是出现在公式A中的全部命题变项，给$p_1,p_2,\ldots,p_n$各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释。若指定的一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值；若使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值。

定义9 真值表

- 将命题公式A在所有赋值下取值情况列成表，称作A的真值表。
- 构造真值表的具体步骤如下：

(1)找出公式中所含的全体命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$ (若无下角标就按字典顺序排列)，列出2^n个赋值。本书规定，赋值从00…0开始，然后按二进制加法依次写出各赋值，直到11…1为止。

(2)按从低到高的顺序写出公式的各个层次。

(3)对应各个赋值计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值。

说明 公式A与B具有相同的或不同的真值表，是指真值表的最后一列是否相同，而不考虑构造真值表的中间过程。

例题

例10 求下列公式的真值表,哪些具有相同的真值表?

(1)$p\rightarrow q$

(2)$\neg q\vee r$

(3)$(\neg p\vee q)\wedge((p\wedge r)\rightarrow p)$

(4)$(q\rightarrow r)\wedge(p\rightarrow p)$

p q r	$p\rightarrow q$	$\neg q\vee r$	$(\neg p\vee q)\wedge((p\wedge r)\rightarrow p)$	$(q\rightarrow r)\wedge(p\rightarrow p)$
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	1	0	1
1 1 0	1	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

定义10 永真式、永假式、可满足式

- 设A为任一命题公式

(1)若A在它的各种赋值下取值均为真,则称A是重言式(*tautology*)或永真式。

(2)若A在它的各种赋值下取值均为假,则称A是矛盾式(*contradiction*)或永假式。

(3)若A不是矛盾式,则称A是可满足式（*satisfactable formula*）。

哑元

- 设公式A、B中共含有命题变项$p_1,p_2,\dots,p_n$，而A或B不全含这些命题变项，比如A中不含$p_i,p_{i+1},\dots,p_n$，$i\geq 2$，称这些命题变项为A的哑元。
- A的取值与哑元无关，因而在讨论A与B是否有相同的真值表时，可将A，B都看成含$p_1,p_2,\dots,p_n$的命题公式

2020年2月19日10时21分 49

49

2.2 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 等值演算
- 联结词完全备集
- 知 识 点：等值式、置换规则、等值演算、联结词完备集、教学要求：深刻理解和掌握命题逻辑中的基本概念
- 教学重点：等值演算、

2020年2月19日10时21分 50

50

§2.2.1 等值式与等值演算

- 两公式什么时候代表了同一个命题呢？
- 抽象地看，它们的真假取值完全相同时即代表了相同的命题。
- 设公式A,B共同含有n个命题变项，可能对A或B有哑元，若A与B有相同的真值表，则说明在2^n个赋值的每个赋值下，A与B的真值都相同。于是等价式A↔B应为重言式。
- 定义2.1 设A,B是两个命题公式,若A,B构成的等价式 A↔B为重言式,则称A与B是等值的,记为A⇔B

说明

- A或B中可能有哑元出现。
  p→q ⇔ (┐p∨q)∨(┐r∧r)
  r为左边公式中的哑元。
- 用真值表可以验证两个公式是否等值。

2020年2月19日10时21分 51

51

等值举例

例题1 判断下列各组公式是否等值

(1)p→(q→r)与(p∧q)→r 等值

(2)(p→q)→r与(p∧q)→r 不等值

解答

p q r	p→(q→r)	(p∧q)→r	(p→q)→r
0 0 0	1	1	0
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	0
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	1	1
1 1 0	0	0	0
1 1 1	1	1	1

2020年2月

52

基本等值式

- 16组(24个)重要的等值式

1. 双重否定律 A ⇔ ┐┐A
2. 幂等律 A ⇔ A∨A， A ⇔ A∧A
3. 交换律 A∨B ⇔ B∨A，A∧B ⇔ B∧A
4. 结合律 (A∨B)∨C ⇔ A∨(B∨C)
   (A∧B)∧C ⇔ A∧(B∧C)
5. 分配律 A∨(B∧C) ⇔ (A∨B)∧(A∨C)
   (∨对∧的分配律)
   A∧(B∨C) ⇔ (A∧B)∨(A∧C)
   (∧对∨的分配律)

2020年2月19日10时21分 53 ®

53

基本等值式

6. 德摩根律 ┐(A∨B) ⇔ ┐A∧┐B
   ┐(A∧B) ⇔ ┐A∨┐B
7. 吸收律 A∨(A∧B) ⇔ A， A∧(A∨B) ⇔ A
8. 零律 A∨1 ⇔ 1 ， A∧0 ⇔ 0
9. 同一律 A∨0 ⇔A ， A∧1 ⇔ A
10. 排中律 A∨┐A ⇔ 1
11. 矛盾律 A∧┐A ⇔ 0
12. 蕴涵等值式 A→B ⇔ ┐A∨B
13. 等价等值式 (A ↔ B) ⇔ (A→B)∧(B→A)
14. 假言易位 A→B ⇔┐B → ┐A

2020年2月19日10时21分 54 ®

54

基本等值式

15. 等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

16. 归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

55

等值演算的应用

等值演算的应用
- 证明两个公式等值
- 判断公式类型
- 解判定问题

56

等值演算的应用举例

证明两个公式等值

$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

解答

$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \rightarrow r$ （蕴含等值式、置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$ （蕴含等值式、置换规则）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$ （德摩根律、置换规则）

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ （分配律、置换规则）

说明
- 也可以从右边开始演算
- 因为每一步都用置换规则，故可不写出
- 熟练后，基本等值式也可以不写出
- 通常不用等值演算直接证明两个公式不等值

57

例题

例3 用等值演算法验证等值式

$(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

解答

$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ （蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ （分配律）

$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee r$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$ （蕴含等值式）

58

例题

例4 证明：$(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 与 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 不等值

解答 方法一、真值表法。

方法二、观察法。易知，010是$(p \rightarrow q) \rightarrow r$的成假赋值，而010是 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$的成真赋值，所以原不等值式成立。

方法三、通过等值演算化成容易观察真值的情况，再进行判断。

$A=(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \rightarrow r$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$ （德摩根律）

$B=p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$ （结合律）

000，010是A的成假赋值，而它们是B的成真赋值。

59

例题

例题5 用等值演算判断下列公式的类型：

（1）$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

（2）$\neg(p \rightarrow (p \vee q)) \wedge r$

（3）$p \wedge (((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q)$

60

例5 解答

(1) (p→q)∧p→q

⇔ (┐p∨q)∧p→q （蕴涵等值式）

⇔ ┐((┐p∨q)∧p)∨q （蕴涵等值式）

⇔ (┐(┐p∨q)∨┐p)∨q （德摩根律）

⇔ ┐(┐p∨q)∨ (┐p∨q) （结合律）

⇔ 1 （排中律）

2020年2月19日10时21分 61

61

例5 解答

(2) ┐(p→(p∨q))∧r

⇔ ┐(┐p∨p∨q)∧r

⇔ (p∧┐p∧┐q)∧r

⇔ 0∧r

⇔ 0

(3) p∧(((p∨q)∧┐p)→q)

⇔ p∧(┐((p∨q)∧┐p)∨q)

⇔ p∧(┐((p∧┐p)∨(q∧┐p))∨q)

⇔ p∧(┐(0∨(q∧┐p))∨q)

⇔ p∧(┐q∨p∨q)

⇔ p∧1 ⇔ p

2020年2月19日10时21分 62

62

§2.2.2 联结词的完备集

◆ 为什么只考虑五个联结词?即
- 这五个联结词能否表示所有联结词?
- 这五个联结词是否有多余的?

◆ 要回答这两个问题,必须回答:
- 什么是联结词?
- 什么是一些联结词表示了一个联结词?
- 什么是联结词的"多余"?

2020年2月19日10时21分 63

63

§2.2.2 联结词的完备集

◆ 什么是联结词?
- 新联结词确定了新的复合命题构造方式
- 新命题建立了新的真假值对应方式

◆ 例如:
- ┐p建立了如下对应:

  0→1, 1→0
- p∨q建立了如下对应:

  (0,0)→0, (1,0)→1

  (0,1)→1, (1,1)→1

2020年2月19日10时21分 64

64

§2.2.2 联结词的完备集

◆ 定义2.12 {0,1}上n元函数

$F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

就称为一个n元真值函数(布尔函数)

◆ 每个联结词确定了一个真值函数

◆ 每个真值函数也确定了一个联结词

◆ 直观地说,联结词集合A是完备的,指的是A中联结词能表示任意联结词

2020年2月19日10时21分 65

65

§2.2.2联结词的完备集

定义2.13 设S是一个联结词集合，如果任何n(n≥1)元命题公式都可以由仅含S中的联结词构成的公式等价地表示，则称S是联结词完备集。

定理2.6 S={┐,∧,∨}是联结词完备集

推论：以下联结词集都是完备集：

(1) S_1={┐,∧,∨,→}

(2) S_2={┐,∧,∨,→,↔}

(3) S_3={┐,∧}

(4) S_4={┐,∨}

(5) S_5={┐,→}

2020年2月19日10时21分 66

66

§2.2.2联结词的完备集

证明:(1),(2)是显然的

(3) $p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

(4) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

(5) $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

- $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$不是联结词完备集

证明:总取0值的真值函数不能由只含此联结词集中的联结词的命题形式来表示.因为这样的命题形式在其中的命题变元都取1时也取值1,而不为0

2020年2月19日10时21分 67

67

作业

- 1、2、10、21、22

2020年2月19日10时21分 68

68