第三章 一阶逻辑

1

◆3.1 一阶逻辑基本概念

◆3.2 一阶逻辑等值演算

2

3.1 一阶逻辑基本概念

- 3.1.1 命题逻辑的局限性
- 3.1.2 个体词、谓词与量词
  - 个体常项、个体变项、个体域、全总个体域
  - 谓词常项、谓词变项
  - 全称量词、存在量词
- 3.1.3 一阶逻辑命题符号化
- 3.1.4 一阶逻辑公式与分类
  - 一阶语言$\mathscr{L}$（字母表、项、原子公式、合式公式）
  - 辖域和指导变元、约束出现和自由出现
  - 闭式
  - 一阶语言$\mathscr{L}$的解释
  - 永真式、矛盾式、可满足式
  - 代换实例

3

命题逻辑的局限性

考虑下述推理:

凡偶数都能被2整除, 6是偶数, 所以6能被2整除.

在命题逻辑中

令 p: 凡偶数都能被2整除, q: 6是偶数, r: 6能被2整除

则:

前提：p, q

结论：r

推理的形式结构： $(p \wedge q) \rightarrow r$

不能证明其正确性

4

个体词与个体域

个体词: 所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常项: 表示具体事物的个体词, 用a, b, c等表示

个体变项: 表示抽象事物的个体词, 用x, y, z等表示

个体域: 个体变项的取值范围

全总个体域: 宇宙间一切事物

例如 “若x是偶数, 则x能被2整除.”

x、 偶数和2是个体词, 偶数和2是个体常项, x是个体变项

个体域可以是自然数集**N**, 整数集**Z**,..., 也可以是全总个体域

5

谓词

谓词: 表示个体词性质或相互之间关系的词

谓词常项: 表示具体性质或相互之间关系的谓词

谓词变项: 表示抽象性质或相互之间关系的谓词

谓词用F,G,H,P等表示

n元谓词$P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$: 含n个命题变项的谓词, 是定义在个体域上, 值域为$\{0,1\}$的n元函数

一元谓词: 表示事物的性质

多元谓词($n\geq 2$): 表示事物之间的关系

0元谓词: 不含个体变项的谓词

6

例1 (1) 4是偶数
4是个体常项, "是偶数"是谓词常项, 符号化为: $F(4)$
(2) 小王和小李同岁
小王, 小李是个体常项, 同岁是谓词常项. 记a:小王, b: 小李, $G(x,y)$: x与y同岁, 符号化为: $G(a,b)$
(3) $x< y$
x,y是个体变项, < 是谓词常项, 符号化为: $L(x,y)$
(4) x具有某种性质P
x是个体变项, P是谓词变项, 符号化为: $P(x)$

7

7

例2 将下述命题用0元谓词符号化, 并讨论它们的真值:
(1) $\sqrt{2}$是无理数, 而 $\sqrt{3}$是有理数
(2) 如果2>3, 则3<4

解
(1) 设$F(x)$: x是无理数, $G(x)$: x是有理数
符号化为 $F(\sqrt{2})\wedge G(\sqrt{3})$
真值为0
(2) 设 $F(x,y)$: $x>y$, $G(x,y)$: $x<y$
符号化为 $F(2,3)\rightarrow G(3,4)$
真值为1

8

8

量词

量词: 表示数量的词
全称量词$\forall$: 表示任意的, 所有的, 一切的
如 $\forall x$ 表示对个体域中所有的x
$\forall x\, F(x)$ 表示所有的x具有性质F

存在量词$\exists$: 表示存在, 有的, 至少有一个
如 $\exists x$ 表示在个体域中存在x
$\exists x\, F(x)$ 表示存在x具有性质F

9

9

一阶逻辑命题符号化

例3 在一阶逻辑中将下面命题符号化:
(1) 人都爱美; (2) 有人用左手写字
个体域分别取(a) 人类集合, (b) 全总个体域 .

解: (a) (1) 设$F(x)$: x爱美, 符号化为 $\forall x\, F(x)$
(2) 设$G(x)$: x用左手写字, 符号化为 $\exists x\, G(x)$
(b) 设$M(x)$: x为人, $F(x)$, $G(x)$同(a)中
(1) $\forall x\, (M(x)\rightarrow F(x))$
(2) $\exists x\, (M(x)\wedge G(x))$
$M(x)$称作特性谓词

10

10

例4 将下列命题符号化, 并讨论其真值:
(1) 对任意的x, 均有x^2-3x+2=(x-1)(x-2)
(2) 存在x, 使得x+5=3
分别取(a) 个体域D_1=N, (b) 个体域D_2=R

解 记$F(x)$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $G(x)$: $x+5=3$

(a) (1) $\forall x\, F(x)$ 真值为1
(2) $\exists x\, G(x)$ 真值为0

(b) (1) $\forall x\, F(x)$ 真值为1
(2) $\exists x\, G(x)$ 真值为1

11

11

例5 将下列命题符号化，并讨论真值。

（1）所有的人都长着黑头发。
（2）有的人登上过月球。
（3）没有人登上过木星。
（4）在美国留学的学生未必都是亚洲人。

12

12

例6 将下面命题符号化:
(1) 兔子比乌龟跑得快
(2) 有的兔子比所有的乌龟跑得快
(3) 并不是所有的兔子都比乌龟跑得快
(4) 不存在跑得一样快的两只兔子

解 用全总个体域，令$F(x)$: x是兔子, $G(y)$: y是乌龟, $H(x,y)$: x比y跑得快; $N(x,y)$: $x\neq y$;$L(x,y)$: x和y跑得一样快
(1) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$
(2) $\exists x(F(x)\wedge \forall y\,(G(y)\rightarrow H(x,y))$
(3) $\neg\,\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$
(4) $\neg\,\exists x\exists y(F(x)\wedge F(y)\wedge N(x,y)\wedge L(x,y))$

13

13

注意

(1) 一元谓词和多元谓词的使用
(2) 全称量词和存在量词的区别
(3) 多个量词出现时, 不能随意交换顺序
如 在个体域R中, 记$H(x,y)$: $x+y=10$
$\forall x\exists y\ H(x,y)$ 真值为1
$\exists y\forall x\ H(x,y)$ 真值为0

(4) 命题的符号化不唯一
如例6 (1) $\forall x\ (F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$
(3) $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

14

14

一阶语言$\mathscr{L}$

定义3.1 一阶语言L 的字母表定义如下:
(1) 个体常项: $a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i\geq 1$
(2) 个体变项: $x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i\geq 1$
(3) 函数符号: $f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i\geq 1$
(4) 谓词符号: $F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i\geq 1$
(5) 量词符号: $\forall, \exists$
(6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
(7) 括号与逗号: ( ), ,

15

15

定义3.2 L 的项的定义如下:
(1) 个体常项和个体变项是项.
(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数, $t_1,t_2,\ldots,t_n$是任意的n个项, 则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.
(3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

定义3.3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是L 的任意n元谓词, $t_1,t_2,\ldots, t_n$是L 的任意n个项, 则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式

16

16

定义3.4 L 的合式公式定义如下:
(1) 原子公式是合式公式
(2) 若A是合式公式, 则 $(\neg A)$也是合式公式
(3) 若A, B是合式公式, 则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式
(4) 若A是合式公式, 则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式
(5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串才是合式公式.
合式公式又称谓词公式, 简称公式

17

17

量词的辖域

定义3.5 在公式$\forall xA$和$\exists xA$中, 称x为指导变元, A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中, x的所有出现称为约束出现, A中不是约束出现的其他变项称为自由出现。

例 公式 $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$
$\forall x$的辖域:$(F(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$, 指导变元为$x$
$\exists y$的辖域:$G(x,y,z)$, 指导变元为y
x的两次出现均为约束出现
y的第一次出现为自由出现, 第二次出现为约束出现
z为自由出现.

18

18

例 公式 $\forall x(F(x)\to\exists xG(x))$

$\forall x$的辖域:$(F(x)\to\exists xG(x))$， 指导变元为x

$\exists x$的辖域:$G(x)$， 指导变元为x

x的两次出现均为约束出现. 但是, 第一次出现的x是$\forall x$中的x, 第二次出现的x是$\exists x$中的x.

19

19

解释和赋值的直观涵义

例 公式$\forall x(F(x)\to G(x))$

指定1 个体域:全总个体域, $F(x)$: x是人, $G(x)$: x是黄种人
假命题

指定2 个体域:实数集, $F(x)$: $x>10$, $G(x)$: $x>0$
真命题

例 $\exists xF(x,y)$

指定 个体域:自然数集, $F(x,y)$: $x=y$
$y=0$

20

20

解释与赋值

定义3.7 设一阶语言$\mathscr{L}$的个体常项集$\{a_i \mid i\geq1\}$, 函数符号集$\{f_i \mid i\geq1\}$, 谓词符号集$\{F_i \mid i\geq1\}$, $\mathscr{L}$的解释I由下面4部分组成:

(1) 非空个体域D_I

(2) 对每一个个体常项a_i, $\bar{a}_i \in D_I$, 称作a_i在I中的解释

(3) 对每一个函数符号f_i, 设其为m元的, $\bar{f}_i$是D_I上的m元函数, 称作f_i在I中的解释

(4) 对每一个谓词符号F_i, 设其为n元的, $\bar{F}_i$是一个n元谓词, 称作F_i在I中的解释

(5) 对每一个自由出现的个体变项x指定个体域中的一个值$\sigma(x)$, 称作赋值σ.

21

21

- 例8 给定解释I如下:
  - (a) 个体域D=N(N为自然数集合)
  - (b) a=0
  - (c) f(x,y)=x+y, g(x,y)=xy
  - (d) F(x,y)为 x=y
- 在解释I下，下列哪些公式为真?哪些为假?哪些的真值还不能确定?

(1) F(f(x,y),g(x,y))

(2) F(f(x,a),y)→F(g(x,y),z)

(3) ┐F(g(x,y),g(y,z))

(4) (∀x)F(g(x,y),z)

(5) (∀x)F(g(x,a),x)→F(x,y)

(6) (∀x)F(g(x,a),x)

(7) (∀x)(∀y)(F(f(x,a),y)→F(f(y,a),x))

(8) (∀x)(∀y)(∃z)F(f(x,y),z)

(9) (∃x)F(f(x,x),g(x,x))

(1)	x+y=xy	不能确定
(2)	(x+0=y)→(xy=z)	不能确定
(3)	┐(xy=yz)	不能确定
(4)	(∀x)(xy=z)	不能确定
(5)	(∀x)(x0=x)→(x=y)	真
(6)	(∀x)(x0=x)	假
(7)	(∀x)(∀y)((x+0=y)→(y+0=x))	真
(8)	(∀x)(∀y)(∃z)(x+y=z)	真
(9)	(∃x)(x+x=xx)	真

22

闭式

闭式: 不含自由出现的个体变项的公式.

（6）-（9）

定理3.1 闭式在任何解释下都变成命题.

闭式只需给定解释.

只给定解释,非闭式可能成为命题（5）, 但通常不能成为命题.

只有给定解释和赋值, 非闭式才能一定成为命题.

23

23

一阶逻辑公式的分类

永真式(逻辑有效式)：无成假解释和赋值

矛盾式(永假式)：无成真解释和赋值

可满足式：至少有一个成真解释和赋值

在一阶逻辑中，公式的可满足性(永真性, 永假性)是不可判定的, 即不存在算法能在有限步内判断任给的公式是否是可满足式(永真式, 矛盾式)

24

24

代换实例

定义3.9 设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式, $A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式, 用A_i处处代替A_0中的$p_i(1 \le i \le n)$, 所得公式A称为A_0的代换实例.

例如 $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$ 等都是$p \to q$的代换实例

定理3.2 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

25

25

实例

例9 判断下列公式的类型:

(1) $\forall x(F(x) \to G(x))$

取解释I_1, D_1=R, $\bar{F}(x)$:x是整数, $\bar{G}(x)$:x是有理数，真命题

取解释I_2, D_2=R, $\bar{F}(x)$:x是整数, $\bar{G}(x)$:x是自然数，假命题

非永真式的可满足式

(2) $\neg(\forall x F(x,y)) \vee (\forall x F(x,y))$

这是 $\neg p \vee p$ 的代换实例, $\neg p \vee p$是重言式, 永真式

(3) $\neg (\forall x F(x) \to \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y)$

这是$\neg(p \to q) \wedge q$的代换实例, $\neg(p \to q) \wedge q$是矛盾式 矛盾式

26

26

(4) $\forall x F(x,y)$

解释I_1, D_1=N, $\bar{F}(x,y)$:$x \ge y$; 赋值$\sigma(y)$=0, 真命题

解释I_2, D_2=N, $\bar{F}(x,y)$:$x \ge y$; 赋值 $\sigma(y)$=1, 假命题

非永真式的可满足式

27

27

3.2 一阶逻辑等值演算

- 3.2.1 一阶逻辑等值式与置换规则
  - 基本等值式
  - 置换规则、换名规则
- 3.2.2 一阶逻辑前束范式

28

28

等值式

定义3.10 若$A \leftrightarrow B$是永真式, 则称A与B是等值的, 记作$A \Leftrightarrow B$, 并称$A \Leftrightarrow B$为等值式

基本等值式

命题逻辑中基本等值式的代换实例

如，$\forall x F(x) \to \exists y G(y) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \vee \exists y G(y)$

$\neg(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y)$ 等

29

29

一阶逻辑等值式

消去量词等值式 设$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

量词否定等值式

设$A(x)$是含x约束出现的公式

$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

30

30

量词分配等值式

$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

注意：∀对∨，∃对∧无分配律

- 例如："联欢会上所有人既唱歌又跳舞"和"联欢会上所有人唱歌且所有人跳舞"，这两个语句意义相同。故有(1)式。
- 讨论题：证明该量词分配等值式

31

31

量词辖域收缩与扩张等值式

设$A(x)$是含x约束出现的公式，B中不含x的出现

关于全称量词：	关于存在量词的:
$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$	$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$
$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$	$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$
$\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B$	$\exists x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\to B$
$\forall x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\forall xA(x)$	$\exists x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\exists xA(x)$

32

32

证明: $\forall xA(x)\to B\Leftrightarrow\exists x(A(x)\to B)$

$\forall xA(x)\to B$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee B$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee B$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee B)$

$\Leftrightarrow\exists x(A(x)\to B)$

33

33

置换规则、换名规则

置换规则　设$\Phi(A)$是含公式A的公式，$\Phi(B)$是用公式B取代$\Phi(A)$中的所有A得到的公式，若$A\Leftrightarrow B$，则$\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$

换名规则　将公式A中某量词的指导变元及其在辖域内的所有约束出现改成该量词辖域内未曾出现的某个个体变项，其余部分不变，记所得公式为A'，则$A'\Leftrightarrow A$

34

34

例1：消去公式中既约束出现、又自由出现的个体变项

(1) $\forall xF(x,y,z)\to\exists yG(x,y,z)$

$\Leftrightarrow\forall uF(u,y,z)\to\exists yG(x,y,z)$　　换名规则

$\Leftrightarrow\forall uF(u,y,z)\to\exists vG(x,v,z)$　　换名规则

(2) $\forall x(F(x,y)\to\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x,y)\to\exists tG(x,t,z))$　　换名规则

35

35

例2 设个体域$D=\{a,b,c\}$，消去下面公式中的量词:

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$

$\Leftrightarrow(F(a)\to G(a))\wedge(F(b)\to G(b))\wedge(F(c)\to G(c))$

(2) $\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$　　量词辖域收缩

$\Leftrightarrow(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

(3) $\exists x\forall yF(x,y)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow(F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$
$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$

36

36

例4：证明

（1）$\forall x(A(x)\lor B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x)\lor\forall xB(x)$

（2）$\exists x(A(x)\land B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x)\land\exists xB(x)$

其中A(x)，B(x)为含x约束出现的公式。

证明 只要证明在某个解释下两边的式子不等值。

取解释I：个体域为自然数集合N；

(1)取F(x)：x是奇数，代替A(x)；
取G(x)：x是偶数，代替B(x)。

则$\forall x(F(x)\lor G(x))$为真命题，

而$\forall xF(x)\lor\forall xG(x)$为假命题。

两边不等值。

37

37

证明 (2)$\exists x(A(x)\land B(x))\not\Leftrightarrow\exists xA(x)\land\exists xB(x)$

$\exists x(F(x)\land G(x))$：有些x既是奇数又是偶数为假命题；

而$\exists xF(x)\land\exists xG(x)$：有些x是奇数并且有些x是偶数为真命题。

两边不等值。

说明

- 全称量词“∀”对“∨”无分配律。
- 存在量词“∃”对“∧”无分配律。
- 当B(x)换成没有x出现的B时，则有
$\forall x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\lor B$
$\exists x(A(x)\land B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\land B$

38

38

例5：给定解释I如下：

（a）个体域 D={2,3}

（b）D中特定元素 $\bar{a}=2$

（c）D上的特定函数$\bar{f}(x)$为：$\bar{f}(2)=3$，$\bar{f}(3)=2$。

（d）D上的特定谓词

$\bar{G}(x,y)$为：$\bar{G}(2,2)=\bar{G}(2,3)=\bar{G}(3,2)=1$，$\bar{G}(3,3)=0$。

$\bar{L}(x,y)$为：$\bar{L}(2,2)=\bar{L}(3,3)=1$，$\bar{L}(2,3)=\bar{L}(3,2)=0$。

$\bar{F}(x)$为：$\bar{F}(2)=0$，$\bar{F}(3)=1$。

在解释I下求下列各式的值：

（1）$\forall x(F(x)\land G(x,a))$

（2）$\exists x(F(f(x))\land G(x,f(x)))$

（3）$\forall x\exists yL(x,y)$

（4）$\exists y\forall xL(x,y)$

39

39

（1）$\forall x(F(x)\land G(x,a))$

$\Leftrightarrow (F(2)\land G(2,2))\land(F(3)\land G(3,2))$

$\Leftrightarrow(0\land1)\land(1\land1)$

$\Leftrightarrow 0$

（2）$\exists x(F(f(x))\land G(x,f(x)))$

$\Leftrightarrow(F(f(2))\land G(2,f(2)))\lor(F(f(3))\land G(3,f(3)))$

$\Leftrightarrow(F(3)\land G(2,3))\lor(F(2)\land G(3,2))$

$\Leftrightarrow(1\land1)\lor(0\land1)$

$\Leftrightarrow 1$

40

40

（3）$\forall x\exists yL(x,y)$

$\Leftrightarrow(L(2,2)\lor L(2,3))\land(L(3,2)\lor L(3,3))$

$\Leftrightarrow(1\lor0)\land(0\lor1)$

$\Leftrightarrow 1$

（4）$\exists y\forall xL(x,y)$

$\Leftrightarrow\exists y(L(2,y)\land L(3,y))$

$\Leftrightarrow(L(2,2)\land L(3,2))\lor(L(2,3)\land L(3,3))$

$\Leftrightarrow(1\land0)\lor(0\land1)$

$\Leftrightarrow 0$

说明

- 由(3)，(4)的结果进一步可以说明量词的次序不能随意颠倒。

41

例6：证明下列等值式。

（1）$\neg\exists x(M(x)\land F(x))\Leftrightarrow\forall x(M(x)\to\neg F(x))$

（2）$\neg\forall x(F(x)\to G(x))\Leftrightarrow\exists x(F(x)\land\neg G(x))$

（3）$\neg\forall x\forall y(F(x)\land G(y)\to H(x,y))$
$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\land G(y)\land\neg H(x,y))$

（4）$\neg\exists x\exists y(F(x)\land G(y)\land L(x,y))$
$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\land G(y)\to\neg L(x,y))$

42

42

(1) ┐∃x(M(x)∧F(x)) ⇔ ∀x(M(x)→┐F(x))

┐∃x(M(x)∧F(x))

⇔ ∀x┐(M(x)∧F(x))

⇔ ∀x(┐M(x)∨┐F(x))

⇔ ∀x(M(x)→┐F(x))

(2) ┐∀x(F(x)→G(x)) ⇔ ∃x(F(x)∧┐G(x))

┐∀x(F(x)→G(x))

⇔ ∃x┐(F(x)→G(x))

⇔ ∃x┐(┐F(x)∨G(x))

⇔ ∃x(F(x)∧┐G(x))

43

43

(3) ┐∀x∀y(F(x)∧G(y)→H(x, y))

⇔ ∃x∃y(F(x)∧G(y)∧┐H(x,y))

┐∀x∀y(F(x)∧G(y)→H(x, y))

⇔ ∃x┐(∀y(F(x)∧G(y)→H(x, y)))

⇔ ∃x∃y┐(┐(F(x)∧G(y))∨H(x, y))

⇔ ∃x∃y(F(x)∧G(y)∧┐H(x,y))

(4) ┐∃x∃y(F(x)∧G(y)∧L(x, y))

⇔ ∀x∀y(F(x)∧G(y)→┐L(x,y))

┐∃x∃y(F(x)∧G(y)∧L(x, y))

⇔ ∀x┐(∃y(F(x)∧G(y)∧L(x, y)))

⇔ ∀x∀y┐(F(x)∧G(y)∧L(x, y))

⇔ ∀x∀y(┐(F(x)∧G(y))∨┐L(x,y))

⇔ ∀x∀y(F(x)∧G(y)→┐L(x,y))

44

44

前束范式

定义3.11 设A为一个一阶逻辑公式, 若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

则称A为前束范式, 其中Q_i为∀或∃, $1\le i\le k$, B为不含量词的公式.

例如 $\forall x\exists y(F(x)\to(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

45

45

定理3.3(前束范式存在定理) 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

例1 求公式的前束范式

(1) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解1	$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$	量词否定等值式
	$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$	量词分配等值式
解2	$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\neg\exists yG(y)$	换名规则
	$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$	量词否定等值式
	$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\forall y\neg G(y))$	量词辖域扩张
	$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$	量词辖域扩张

46

46

◈ 例2 求¬((∀x)P(x)→(∀x)Q(x))的前束范式

解:	$\neg((\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x))$	
	$\Leftrightarrow \neg((\forall x)P(x)\to(\forall y)Q(y))$	换名
	$\Leftrightarrow \neg(\neg((\forall x)P(x))\vee(\forall y)Q(y))$	消去→
	$\Leftrightarrow (\forall x)P(x)\wedge\neg((\forall y)Q(y))$	后移¬
	$\Leftrightarrow (\forall x)P(x)\wedge(\exists y)(\neg Q(y))$	后移¬
	$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(P(x)\wedge\neg Q(y))$	前移量词

47

47

说明

- 求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。
- 任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。
- 利用一阶逻辑等值式以及置换规则、换名规则就可以求出与公式等值的前束范式。

48

48

◆ 按如下步骤可求得谓词公式的前束范式:

(1) 对约束变元进行换名, 使其互不相同

(2) 将谓词公式中的其它联词转化为¬, ∨, ∧

(3) 将否定词置于量词之后

$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

(4) 将所有量词的辖域扩张到整个公式

$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$

$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$

(5) 将不含量词部分化为析取范式或合取范式

49

49

例3 求前束范式

(1) $\exists x F(x) \wedge \forall x G(x)$

$\Leftrightarrow \exists y F(y) \wedge \forall x G(x)$

$\Leftrightarrow \exists y \forall x (F(y) \wedge G(x))$

(2) $\forall x F(x) \rightarrow \exists x G(x)$

$\Leftrightarrow \forall y F(y) \rightarrow \exists x G(x)$

$\Leftrightarrow \exists y \exists x (F(y) \rightarrow G(x))$

(3) $\exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$

$\Leftrightarrow \exists y F(y) \rightarrow \forall x G(x)$

$\Leftrightarrow \forall y \forall x (F(y) \rightarrow G(x))$

(4) $\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \rightarrow G(y))$

50

50

例4求公式的前束范式

(1) $\forall x F(x,y) \rightarrow \exists y G(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall t F(t,y) \rightarrow \exists w G(x,w)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \exists t \exists w (F(t,y) \rightarrow G(x,w))$ ((5.3),(5.4))

说明

❑ 解本题时一定注意, 哪些个体变项是约束出现, 哪些是自由出现, 特别要注意那些既是约束出现又是自由出现的个体变项。不能混淆。

51

51

(2) $(\forall x_1 F(x_1,x_2) \rightarrow \exists x_2 G(x_2)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$

$\Leftrightarrow (\forall x_4 F(x_4,x_2) \rightarrow \exists x_5 G(x_5)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$

$\Leftrightarrow \exists x_4 \exists x_5 (F(x_4,x_2) \rightarrow G(x_5)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$

$\Leftrightarrow \forall x_4 \forall x_5 \forall x_1 ((F(x_4,x_2) \rightarrow G(x_5)) \rightarrow H(x_1,x_2,x_3))$

52

52

作业

◆ **4,5,29**

2020年2月19日10时17分

53

53