第四章 关 系

1

1

第四章 关 系

- 4.1 关系的定义及其表示
- 4.2 关系的运算
- 4.3 关系的性质
- 4.4 等价关系与偏序关系

2

2

4.3 关系的性质

- 4.3.1关系性质的定义和判别
  - 自反性与反自反性
  - 对称性与反对称性
  - 传递性
- 4.3.2 关系的闭包
  - 闭包定义
  - 闭包计算
  - **Warshall算法**

3

3

自反性与反自反性

定义4.14 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\in R)$, 则称$R$在$A$上是自反的.

(2) 若$\forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

例1 $A=\{a, b, c\}$, R_1, R_2, R_3 是 A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle\}$

$R_3=\{\langle a,c\rangle\}$

R_2自反, R_3 反自反, R_1既不自反也不反自反.

自反：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

4

4

对称性与反对称性

定义4.15 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$，则称$R$为$A$上对称的关系.

(2) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$，则称$R$为$A$上的反对称关系.

例2 设$A=\{a,b,c\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$， $R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$

$R_3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$， $R_4=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$

R_1 对称、反对称. R_2 对称，不反对称.

R_3 反对称，不对称. R_4 不对称、也不反对称

实例： 对称：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

反对称：恒等关系I_A，空关系是A上的反对称关系. 5

5

传递性

定义4.16 设R为A上的关系, 若

$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R)$,

则称R是A上的传递关系.

例3 设$A=\{a, b, c\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$

$R_3=\{\langle a,c\rangle\}$

R_1 和 R_3 是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

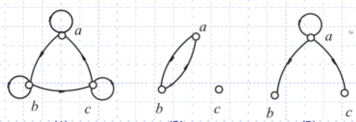
实例：A上的全域关系 E_A, 恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$, 小于等于关系, 小于关系, 整除关系, 包含关系, 真包含关系。

6

6

实例

例4 判断下图中关系的性质, 并说明理由



(1) (2) (3)

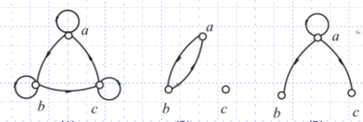
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
(1)					
(2)					
(3)					

7

7

实例

例4 判断下图中关系的性质, 并说明理由



(1) (2) (3)

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
(1)	√	×	×	√	×
(2)	×	√	√	×	×
(3)	×	×	×	√	√

8

8

关系性质判别

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
表达式	$I_A\subseteq R$	$R\cap I_A=\varnothing$	$R=R^{-1}$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$	$R\circ R\subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i\neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边,则从x_i到x_k也有边

9

9

自反性证明

证明模式 证明 R 在 A 上自反
任取 x,
$x\in A \Rightarrow$ ……… …………… …… $\Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$
前提 推理过程 结论

例5 证明若 $I_A\subseteq R$， 则 R 在 A 上自反.

证 任取x,

$x\in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$

因此 R 在 A 上是自反的.

10

10

反自反性证明

证明模式 证明 R 在 A 上反自反
任取 x,
$x\in A \Rightarrow$ ……… …………… …… $\Rightarrow \langle x, x\rangle \notin R$
前提 推理过程 结论

例6 证明若$R\cap I_A=\varnothing$， 则 R 在 A 上反自反.

证 任取x,

$x\in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \notin R$

因此 R 在 A 上是反自反的.

11

11

对称性证明

证明模式 证明 R 在 A 上对称
任取$\langle x, y\rangle$
$\langle x, y\rangle\in R \Rightarrow$…… …………… …… $\Rightarrow \langle y, x\rangle\in R$
前提 推理过程 结论

例7 证明若 $R=R^{-1}$, 则 R 在A上对称.

证 任取$\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle\in R \Rightarrow \langle y, x\rangle\in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x\rangle\in R$

因此 R 在 A 上是对称的.

12

12

反对称性证明

证明模式 证明 R 在 A 上反对称
任取$<x,y>$
$<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$
前提 推理过程 结论

例8 证明若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，则 R 在 A 上反对称.

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A \Rightarrow x=y$

因此 R 在 A 上是反对称的.

13

13

传递性证明

证明模式 证明 R 在 A上传递
任取$<x,y>$，$<y,z>$
$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$
前提 推理过程 结论

例9 证明若 $R\circ R\subseteq R$，则 R 在 A 上传递.

证 任取$<x,y>$，$<y,z>$

$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in R\circ R \Rightarrow <x,z>\in R$

因此 R 在 A 上是传递的.

14

14

关系性质的充要条件

设 R 为 A 上的关系, 则

(1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A\subseteq R$

(2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R\cap I_A=\varnothing$

(3) R 在 A 上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R\circ R\subseteq R$

15

15

运算与性质的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1\cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1\cup R_2$	√	√	√	×	×
R_1-R_2	×	√	√	√	×
$R_1\circ R_2$	√	×	×	×	×

16

16

运算与性质的关系

例10：设 R_1 为 A 上的关系, 若R_1则是自反的（反自反的，对称的，反对称的，传递的），证明R_1^{-1} 也是自反的（反自反的，对称的，反对称的，传递的）。

17

17

运算与性质的关系

例11：设 R_1，R_2 为 A 上的关系, 判断：

（1）若R_1，R_2 是自反的，$R_1\circ R_2$ 是否是自反的；

（2）若R_1，R_2 是反自反的，$R_1\circ R_2$ 是否是反自反的；

（3）若R_1，R_2 是对称的，$R_1\circ R_2$ 是否是对称的；

（4）若R_1，R_2 是反对称的，$R_1\circ R_2$ 是否是反对称的；

（5）若R_1，R_2 是传递的，$R_1\circ R_2$ 是否是传递的。

解：（1）是； 设A={1,2,3}

（2）否，反例：R_1={<1,2>}，R_2={<2,1>}.

（3）否，反例：R_1={<1,2>,<2,1>}，R_2={<2,3>,<3,2>}.

（4）否，反例：R_1={<1,2>,<3,2>}，R_2={<2,1>,<2,3>}.

（5）否，反例：R_1={<1,1>,<2,3>}，R_2={<1,2>,<3,3>}.

18

18

闭包定义

定义4.17 设R是非空集合A上的关系, R 的自反 (对称或传递) 闭包 是A上的关系R', 使得 R'满足以下条件:

(1) R'是自反的（对称的或传递的）

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R 的自反（对称或传递）关系R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

19

实例

例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>,<d,c>\}$, 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$。

$r(R)=R \cup \{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\}$;

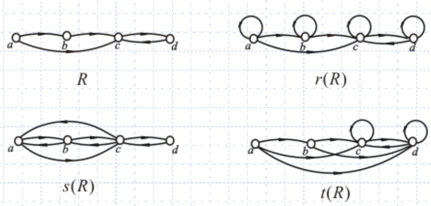
$s(R)=R \cup \{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$;

$t(R)=R \cup \{<a,d>,<b,d>,<c,c>,<d,d>\}$。

20

实例

例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>,<d,c>\}$, R和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.



21

闭包的构造方法

集合表示

定理4.7 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R \cup R^0$

(2) $s(R)=R \cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明:

对于有穷集合A上的关系, (3)中的并一定是有限项.

若R 是自反的，则 $r(R)=R$; 若 R 是对称的，则 $s(R)=R$;若 R 是传递的，则 $t(R)=R$.

22

定理4.7的证明

只证 (1) 和 (3)，（2）的证明与（1）类似。

证 $r(R)=R \cup R^0$

只需证明$R \cup R^0$满足闭包定义.

$R \cup R^0$包含了R

由$I_A \subseteq R \cup R^0$可知 $R \cup R^0$ 在 A上是自反的.

下面证明$R \cup R^0$是包含R 的最小的自反关系.

假设R'是包含R 的自反关系，那么$I_A \subseteq R'$, $R \subseteq R'$，

因此有 $R \cup R^0=I_A \cup R \subseteq R'$

23

定理4.7的证明（续）

任取$<x,y>$和$<y,z>$

$<x,y> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \wedge <y,z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

$\Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

于是，由$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$的传递性得

$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

对n 进行归纳证明 $R^n \subseteq t(R)$.

$n=1$时显然为真. 假设$n=k$时为真，那么对于任意$<x,y>$

$<x,y> \in R^{k+1} \Rightarrow <x,y> \in R^k \circ R \Rightarrow \exists s\,(<x,s> \in R^k \wedge <s,y> \in R)$

$\Rightarrow \exists s\,(<x,s> \in t(R) \wedge <s,y> \in t(R)) \Rightarrow <x,y> \in t(R)$ （$t(R)$传递）

于是， $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

24

闭包的构造方法

矩阵表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s 和 M_t, 则

$M_r = M+E$

$M_s = M+M'$

$M_t = M+M^2+M^3+\ldots$

其中E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意：在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

25

25

闭包的构造方法（续）

图表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新的边：

考察G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环. 最终得到的是G_r.

考察G 的每一条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i\neq j$, 则在G中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边. 最终得到G_s.

考察G 的每个顶点 x_i, 找从 x_i 出发的每一条路径，如果从 x_i 到路径中的任何结点 x_j 没有边，就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图G_t.

26

26

传递闭包的计算——Warshall算法

算法思路：

考虑 n+1个矩阵的序列M_0, M_1, …, M_n, 将矩阵 M_k 的 i 行 j 列的元素记作$M_k[i,j]$. 对于k=0,1,…,n, $M_k[i,j]$=1当且仅当在 R 的关系图中存在一条从 x_i 到 x_j 的路径，并且这条路径除端点外中间只经过$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$中的顶点. 不难证明$M_0$ 就是R 的关系矩阵，而 M_n 就对应了R 的传递闭包.

Warshall算法：

从M_0开始，顺序计算 M_1, M_2, …, 直到 M_n 为止.

27

27

Warshall算法及其效率

算法4.1 Warshall算法

输入：M（R 的关系矩阵）

输出：M_t（$t(R)$的关系矩阵）

1. $M_t \leftarrow M$
2. for $k \leftarrow 1$ to n do
3. for $i \leftarrow 1$ to n do
4. for $j \leftarrow 1$ to n do
5. $M_t[i, j] \leftarrow M_t[i, j] + M_t[i, k]\cdot M_t[k, j]$

时间复杂度 $T(n)=O(n^3)$

28

28

Warshall算法的依据

从 $M_k[i, j]$ 计算 $M_{k+1}[i, j]$: $i, j\in V$.

顶点集 $V_1=\{1,2, \ldots, k\}$, $V_2=\{k+2, \ldots, n\}$, $V=V_1\cup\{k+1\}\cup V_2$,

$M_{k+1}[i,j]=1 \Leftrightarrow$ 存在从i 到 j 中间只经过$V_1\cup\{k+1\}$中点的路径

这些路径分为两类：

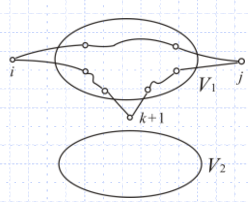
第1类：只经过 V_1中点

第2类：经过 k+1点

存在第1类路径：$M_k[i,j]=1$

存在第2类路径：

$M_k[i,k+1]=1 \wedge M_k[k+1,j]=1$



29

29

实例

例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$, 用Warshall算法求$t(R)$。

30

30

作业

- **18,20,21**

2020年2月19日10时
15分

31

31