

◆ 命题逻辑基本概念
 ◆ 亦题逻辑等值演算
 ◆ 並式
 ◆ 推理

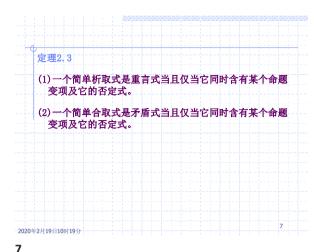
§ 2.3 范式
◆ 每种数字标准形都能提供很多信息,如代数式的因式分解可判断代数式的根情况。逻辑公式在等值演算下也有标准形→范式
◆ 范式有两种
● 析取范式
■ 合取范式

5

◆ 为讨论方便,有时用 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 表示s个简单析取式或s个简单合取式。

◆ 设 $A_1$ 是含n个文字的简单析取式,若 $A_1$ 中既含某个命题变项 $p_3$ ,又含它的否定式n  $p_3$ ,即 $p_3$  $\bigvee n$   $p_3$  $\bigvee n$   $p_4$  $\bigwedge n$   $p_5$  $\bigvee n$   $p_5$  $\bigvee$ 

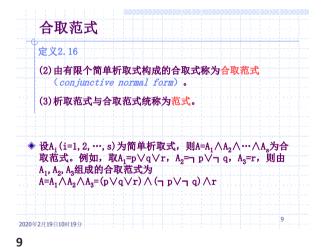
6



析取范式

定义2.16
(1)由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式
(disjunctive normal form)。

◆ 设A<sub>1</sub>(i=1, 2, ···, s) 为简单合取式,则A=A<sub>1</sub>∨A<sub>2</sub>∨···∨A<sub>s</sub>为析取范式。例如,A<sub>1</sub>=p∧¬q,A<sub>2</sub>¬¬q∧¬r,A<sub>3</sub>¬p,则由A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>构造的析取范式为A=A<sub>1</sub>∨A<sub>2</sub>∨A<sub>3</sub>=(p∧¬q)∨(¬q∧¬r)∨p



形如¬p∧q∧r的公式既是一个简单合取式构成的析取 范式,又是由三个简单析取式构成的合取范式。
形如p∨¬q∨r的公式既是含三个简单合取式的析取范式,又是含一个简单析取式的合取范式。

10

8

析取范式和合取范式的性质

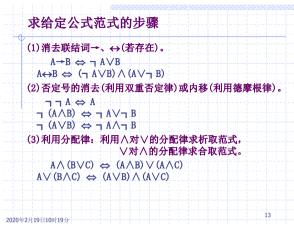
定理2.4
(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。
(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

研究范式的目的在于,将给定公式化成与之等值的析取范式或合取范式,进而将公式化成与之等值的主析取范式或主合取范式。

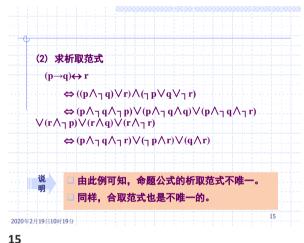
11

12

13



例题 求下面公式的析取范式与合取范式:  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ 解答 1) 求合取范式  $(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$  $\Leftrightarrow ( p \lor q) \leftrightarrow r$ (消去→) (消去↔)  $\Leftrightarrow ((\neg p \lor q) \rightarrow r) \land (r \rightarrow (\neg p \lor q))$ (消去→)  $\Leftrightarrow (\neg (\neg p \lor q) \lor r) \land (\neg r \lor \neg p \lor q)$  $\Leftrightarrow ((p \land_{\neg} q) \lor r) \land (\neg p \lor q \lor_{\neg} r)$ (否定号内移) ⇔(p∨r)∧(¬q∨r)∧(¬p∨q∨¬r) (∨对∧分配律)



◆ 定义2.17 (极小项) 在含有n个命题变项的简单合取式中, 若每个命题变项和它的否定式不同时出现,而且二者之一 必出现且仅出现一次,且第i个命题变项或它的否定式出现 在从左算起的第i位上(若命题变项无角标,就按字典顺序 排列),称这样的简单合取式为极小项。

◆ p, q形成I	<b>始极小面</b>			
▼ p, q/⊘///	13/12/17/20			
		极小项		
	公式	成真赋值	名称	
	PΓΛαΓ	0 0	m <sub>0</sub>	
	₽∧qг	0 1	m <sub>1</sub>	
	₽F∧q	1 0	m <sub>2</sub>	
	p∧q	1 1	m <sub>3</sub>	
				17

◆ p, q, r形成的极小项 极小项 名称 成真赋值 公式 ¬p∧¬q∧¬r ¬p∧¬q∧r ¬p∧q∧¬r ¬p∧q∧r 0 0 0 Πn 0 0 1 m<sub>1</sub> 0 1 0 m<sub>2</sub> m3  $\begin{smallmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{smallmatrix}$ ηαΛηr m<sub>4</sub> p∧¬ q∧r m<sub>5</sub> p∧q∧¬r p∧q∧r ♠ n个命题变项共可产生2n个不同的极小项。其中每个极小项 都有且仅有一个成真赋值。若成真赋值所对应的二进制数 转换为十进制数i, 就将所对应极小项记作m, 。

此处是标题 3

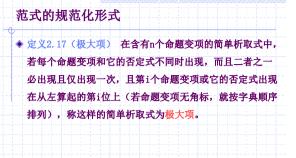
14

16

范式的规范化形式

2020年2月19日10时19分

2020年2月19日10时19分



19 20

<del>}</del>	极大项		
公式	成假赋值	名称	
pVqVr	0 0 0	Mn	
pVqV¬r	0 0 1	M <sub>1</sub>	
p∨¬q∨r	0 1 0	M <sub>2</sub>	
pVηqVηr	0 1 1	Мз	
¬ pVqVr	100	M <sub>4</sub>	
TpV4V7.r	1 0 1	M <sub>5</sub>	
7 pV7 qVr	1 1 0	M <sub>6</sub>	
¬рV¬ qV¬r	111	M <sub>7</sub>	

极小项			极大项			
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称	
₽ΓΛαΓ 1 ΑΛαΓ 1 ΑΓΛα	0 0 0 1 1 0	m <sub>0</sub> m <sub>1</sub> m <sub>2</sub>	рVq р Г Vq р V q Г	0 0 0 1 1 0	M <sub>O</sub> M <sub>1</sub>	
p/(q p/q	1 1	m <sub>3</sub>	pvq r □ pV¬ q	11	М <sub>2</sub> Мз	

21

极小项			极大项			
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称	
т гЛр гЛч г	0 0 0	mn	pVqVr	0 0 0	Mn	
¬р∧¬ q∧r	0 0 1	m <sub>1</sub>	pVqV¬r	0 0 1	M <sub>1</sub>	
¬р∧q∧¬г	0 1 0	m <sub>2</sub>	pV7 qVr	0 1 0	M <sub>2</sub>	
¬р∧q∧r	0 1 1	m <sub>3</sub>	pV¬qV¬r	0 1 1	Mз	
о∧па∧пг	100	m <sub>4</sub>	¬ pVqVr	1 0 0	M <sub>4</sub>	
p∧¬ q∧r	1 0 1	m <sub>5</sub>	7 pVqV7 r	1 0 1	M <sub>5</sub>	
p∧q∧¬ r	1 1 0	m <sub>6</sub>	7 pV7 qVr	1 1 0	M <sub>6</sub>	
p/q/r	1 1 1	m <sub>7</sub>	7 pV7 qV7 r	1 1 1	M <sub>7</sub>	

◆ n个命题变项共可产生2º个不同的极小项。其中每个极小项 都有且仅有一个成真赋值。若成真赋值所对应的二进制数
转换为十进制数i,就将所对应极小项记作m <sub>i</sub> 。
◆ 类似地,n个命题变项共可产生2 <sup>n</sup> 个极大项,每个极大项只 有一个成假赋值,将其对应的十进制数i做极大项的角标,
有一个成假则值,将来对应的一定问题:IDV IDV IDV IDV IDV IDV IDV IDV IDV IDV

23

#### 主析取范式与主合取范式

定义2.18 设由n个命题变项构成的析取范式(合取 范式)中所有的简单合取式(简单析取式)都是 极小项(极大项),则称该析取范式(合取范式 ) 为主析取范式(主合取范式)。

定理2.7 任何命题公式都存在着与之等值的主析取 范式和主合取范式、并且是唯一的。

2020年2月19日10时19分

25

定理2.7的证明

(只证主析取范式的存在和唯一性)

(1)证明存在性。

设A是任一含n个命题变项的公式。

由定理2.5可知,存在与A等值的析取范式A',即A⇔A',

若A'的某个简单合取式A,中既不含命题变项p,,也不含它的否 定式<sub>7 Pi</sub>,

则将A<sub>i</sub>展成如下形式:

 $A_i \Leftrightarrow A_i \land 1 \Leftrightarrow A_i \land (p_i \lor \neg p_i) \Leftrightarrow (A_i \land p_i) \lor (A_j \land \neg p_j)$ 

继续这个过程,直到所有的简单合取式都含任意命题变项或 它的否定式。

若在演算过程中出现重复的命题变项以及极小项和矛盾式时, 都应"消去":如用p代誊p $\wedge$ p,m,代誊m, $\vee$ m, 0代誊矛盾式等。最后就将A化成与之等值的主析取范式A''。

26

(2)证明唯一性。

假设某一命题公式A存在两个与之等值的主析取范式B和 C, 即A⇔B且A⇔C, 则B⇔C。由于B和C是不同的主析 取范式,不妨设极小项mi只出现在B中而不出现在C中。 于是,角标i的二进制表示为B的成真赋值,而为C的成假 赋值。这与B⇔C矛盾,因而B与C必相同。

27

29

求公式▲的主析取范式的方法与步骤

- ◆ 方法一、等值演算法
- (1)化归为析取范式。
- (2)除去析取范式中所有永假的析取项。
- (3)将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并。
- (4)对合取项补入没有出现的命题变元,即添加如(p\/¬p)式, 然后应用分配律展开公式。
- ◆ 方法二、真值表法
- (1)写出A的真值表。
- (2)找出A的成真赋值。
- (3)求出每个成真赋值对应的极小项(用名称表示),按角标 从小到大顺序析取。

2020年2月19日10时19分

28

### 求公式A的主合取范式的方法与步骤

- ◆ 方法一、等值演算法
- (1)化归为合取范式。
- (2)除去合取范式中所有永真的合取项。
- (3)将合取式中重复出现的析取项和相同的变元合并。
- (4)对析取项补入没有出现的命题变元,即添加如(p/\\_p)式, 然后应用分配律展开公式。
- ◆ 方法二、真值表法
- (1)写出A的真值表。
- (2)找出A的成假赋值。
- (3)求出每个成假赋值对应的极大项(用名称表示),按角标 从小到大顺序合取。

2020年2月19日10时19分

例题

例 求命题公式 p→q 的主析取范式和主合取范式。

解答

(1)求主合取范式

 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \lor q \Leftrightarrow M_2$ (2)求主析取范式

 $p \rightarrow q$ q 0 0 1 0 i 1 1 0 1

D

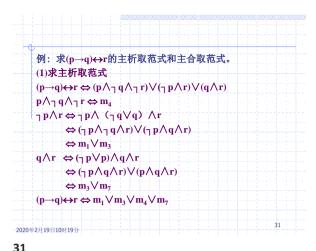
 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \gamma p \vee q$ 

- $\Leftrightarrow$   $(\neg p \land (\neg q \lor q)) \lor ((\neg p \lor p) \land q)$
- $\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (p \land q)$  $\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land q) \lor (p \land q)$

 $\Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_3$ 2020年2月19日10时19分

30

33



(2) 求主合取范式  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \lor r) \land (\neg q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r)$  $\neg p \lor q \lor \neg r \Leftrightarrow M_5$  $p \lor r \Leftrightarrow p \lor (q \land_{\neg} q) \lor r$  $\Leftrightarrow (p \lor q \lor r) \land (p \lor_{7} q \lor r)$  $\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2$  $\neg q \lor r \Leftrightarrow (p \land \neg p) \lor \neg q \lor r$  $\Leftrightarrow (p \vee_{\neg} q \vee r) \wedge (_{\neg} p \vee_{\neg} q \vee r)$  $\Leftrightarrow M_2 \wedge M_6$  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow M_0 \land M_2 \land M_5 \land M_6$ 真值表法: (略) 2020年2月19日10时19分

32

主析取范式的用途 ■ 求公式的成真赋值与成假赋值 判断公式的类型 ■ 判断两个命题公式是否等值 ■ 分析和解决实际问题

求公式的成真赋值与成假赋值 ◆ 若公式A中含n个命题变项,A的主析取范式含s(0≤s≤2n) 个极小项,则A有s个成真赋值,它们是所含极小项角标的 二进制表示,其余2n-s个赋值都是成假赋值。 ◆ 在例2.8中, (p→q)↔r ⇔ m₁√m₃√m₄√m₂, 各极小项均含 三个文字, 因而各极小项的角标均为长为3的二进制数,它 们分别是001,011,100,111,这四个赋值为该公式的成 真赋值,其余的为成假赋值。 ◆ 在例2.9中,p→q ⇔ m<sub>0</sub>√m<sub>1</sub>√m<sub>3</sub>,这三个极小项均含两个 文字,它们的角标的二进制表示00,01,11为该公式的成 真赋值,10是它的成假赋值。

34

判断公式的类型 ■ A为重言式当且仅当A的主析取范式含全部2n个 极小项 ■ A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极 小项,此时,记A的主析取范式为0 ■ A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含 一个极小项 2020年2月19日10时19分 35

例2.10 用公式的主析取范式判断公式的类型:  $(1) \gamma (p \rightarrow q) \wedge q$ (2)  $p \rightarrow (p \lor q)$  $(3) (p \lor q) \rightarrow r$ 解答  $(1)_{7}(p\rightarrow q) \land q \Leftrightarrow_{7} (_{7}p \lor q) \land q$ 矛盾式  $\Leftrightarrow (p \land \neg q) \land q \Leftrightarrow 0$  $(2)p \rightarrow (p \lor q) \Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3$ 重言式  $(3)(p \lor q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_7$ 2020年2月19日10时19分

此处是标题 6

36

# 判断两个命题公式是否等值 ♦ 设公式A.B共含有n个命题变项,按n个命题变项求出A与B 的主析取范式A'与B'。若A'=B',则A⇔B;否则,A与B不 等值。 例: 判断下面两组公式是否等值: (1) p与 $(p \land q) \lor (p \land \neg q)$ $(2) (p \rightarrow q) \rightarrow r 与 (p \land q) \rightarrow r$ 解答 (1) $p \Leftrightarrow p \land (\neg q \lor q) \Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor (p \land q) \Leftrightarrow m_{2} \lor m_{3}$ $(p \land q) \lor (p \land q) \Leftrightarrow m_2 \lor m_3$ 两公式等值。 (2) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_4 \lor m_5 \lor m_7$ $(\mathsf{p} \land \mathsf{q}) \!\!\to\! \mathsf{r} \Leftrightarrow \mathsf{m_0} \lor \mathsf{m_1} \lor \mathsf{m_2} \lor \mathsf{m_3} \lor \mathsf{m_4} \lor \mathsf{m_5} \lor \mathsf{m_7}$ 两公式不等值

应用主析取范式分析和解决实际问题

例2.12 某科研所要从3名科研骨干A,B,C中挑选1~2名出国进 修。由于工作原因,选派时要满足以下条件:

- (1)若A去,则C同去。 (2)若B去,则C不能去。
- (3)若C不去,则A或B可以去。

问应如何选派他们去?

#### 分析:

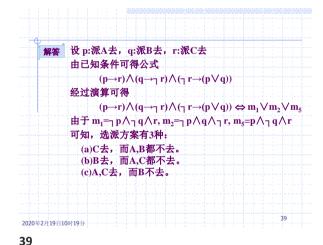
- (1) 将简单命题符号化
- (2) 写出各复合命题
- (3) 写出由(2)中复合命题组成的合取式(前提)
- (4) 将(3)中公式化成析取式 (最好是主析取范式)
- (5) 这样每个小项就是一种可能产生的结果。 去掉不符合题意的小项,即得结论。

2020年2月19日10时19分

37

41

38



由公式的主析取范式求主合取范式

设公式A含n个命题变项。

A的主析取范式含s(0<s<2n)个极小项,即

 $A \Leftrightarrow m_i \vee m_j \vee \cdots \vee m_i, 0 \leq i_i \leq 2^n - 1, j = 1, 2, \cdots, s$ 

没有出现的极小项设为  $m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_m}$ 

它们的角标的二进制表示为¬A的成真赋值,因而¬A的主 析取范式为

40

2020年2月19日10时19分

例2.13 由公式的主析取范式, 求主合取范式: (1) A ⇔ m<sub>1</sub> ∨ m<sub>2</sub> (A中含2个命题变项p,q) (2) B ⇔ m<sub>1</sub> ∨ m<sub>2</sub> ∨ m<sub>3</sub> (B中含3个命题变项p,q,r) 解答  $(1) A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2$ (2)  $B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$ 

重言式与矛盾式的主合取范式

设n为公式中命题变项个数

- 矛盾式无成真赋值,因而矛盾式的主合取范式含2<sup>n</sup>个 极大项。
- 重言式无成假赋值,因而主合取范式不含任何极大项。
- 将重言式的主合取范式记为1。

■ 可满足式的主合取范式中极大项的个数一定小于2n。

7

42

# 真值表与范式的关系

2020年2月19日10时19分

n个命题变项共可产生2<sup>n</sup>个极小项(极大项) 可以产生的主析取范式(主合取范式)数目为:

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + \dots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$$

- A⇔B当且仅当A与B有相同的真值表,又当且仅当A与B 有相同的主析取范式(主合取范式)。
- 真值表与主析取范式(主合取范式)是描述命题公式 标准形式的两种不同的等价形式。



43