讨论题3

◆ 发生了一宗劫案，劫匪驾驶一辆货车逃走了。你只知道：
1) 除了疑犯*A*，*B*和*C*之外不会有其他人；
2) 没有*A*的陪同，*C*不会单独犯案；
3) *B*不会驾驶。

如此看来*A*有没有罪？

2020年2月19日10时18分 1

1

第二章　命题逻辑（第3讲）

2

◆ 命题逻辑基本概念
◆ 命题逻辑等值演算
◆ 范式
◆ 推理

2020年2月19日10时18分 3

3

2.4 推理

◆ 推理的形式结构
◆ 推理的证明
◆ 归结证明法（自学）
◆ 对证明方法的补充说明（自学）
◆ 知 识 点：推理的形式结构、推理理论、自然推理系统P、推理规则
◆ 教学要求：深刻理解和掌握命题逻辑中的基本推理方法
◆ 教学重点：推理理论、推理规则

2020年2月19日10时18分 4

4

§2.4.1 推理的形式结构

◆ 数理逻辑的主要任务是用数学的方法研究推理
◆ 什么是推理形式?
- 一组前提,一个结论
- 前提、结论都是命题
- 若前提为$A_1, A_2,…, A_n$，结论为B，则将这样的推理形式称为$A_1, A_2,…, A_n$推出B

◆ 要研究推理，首先应该明确什么样的推理是有效的或正确的。
- 直观上，正确的推理应该保证：如果前提正确，则结论也应该正确

2020年2月19日10时18分 5

5

有效推理

定义2.19　设$A_1, A_2, \cdots, A_k$和B都是命题公式，若对于$A_1, A_2, \cdots, A_k$和B中出现的命题变项的任意一组赋值，
（1）或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为假；
（2）或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为真时，B也为真；
则称由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$推出结论B的推理是有效的或正确的，并称B是有效结论。

2020年2月19日10时18分 6

6

例 判断下列推理是否正确。（真值表法）

(1) {p,p→q}推出 q　正确

(2) {p,q→p}推出 q　不正确

p	q	$p\wedge(p\to q)$	q	$p\wedge(q\to p)$	q
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

2020年2月19日10时18分 7

7

有效推理的等价定理

定理2.8 命题公式$A_1,A_2,\ldots,A_k$推B的推理正确当且仅当

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\to B$ 为重言式。

说明 该定理是判断推理是否正确的另一种方法。

2020年2月19日10时18分 8

8

推理的形式结构

◆ 定义2.20 推理的形式结构
- 形式1：$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\to B$
- 形式2：

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

  结论：B

说明 当推理正确时，记为$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\Rightarrow B$。
⇒表示蕴涵式为重言式。

2020年2月19日10时18分 9

9

例 判断下列推理是否正确。（等值演算法）

（1）下午马芳或去看电影或去游泳。她没去看电影，所以，她去游泳了。

解：设p:马芳下午去看电影，q:马芳下午去游泳。

前提：$p\vee q$，$\neg p$

结论：q

推理的形式结构：$((p\vee q)\wedge\neg p)\to q$

$((p\vee q)\wedge\neg p)\to q$

$\Leftrightarrow \neg((p\vee q)\wedge\neg p)\vee q$

$\Leftrightarrow (\neg(p\vee q)\vee p)\vee q$

$\Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee(p\vee q)$

$\Leftrightarrow 1$

由定理 2.8 可知，推理正确。

2020年2月19日10时18分 10

10

例题

例 判断下列推理是否正确。（主析取范式法）

（2）若今天是1号，则明天是5号。明天是5号，所以今天是1号。

解：设p：今天是1号，q：明天是5号。

前提：$p\to q$，q

结论：p

推理的形式结构：$(p\to q)\wedge q\to p$

$(p\to q)\wedge q\to p$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$

$\Leftrightarrow \neg q\vee p$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$

主析取范式不含m_1，故不是重言式（01是成假赋值），所以推理不正确。

2020年2月19日10时18分 11

11

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法
- 观察法（找成假赋值证明推理不正确）

说明 当命题变项较少时,这几种方法比较方便。

思考 是否有其他的证明方法？

2020年2月19日10时18分 12

12

§ 2.4.2 推理的证明

推理定律--重言蕴含式

(1) $A \Rightarrow (A \lor B)$ 附加律

(2) $(A \land B) \Rightarrow A$ 化简律

(3) $(A \to B) \land A \Rightarrow B$ 假言推理

(4) $(A \to B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式

(5) $(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

(6) $(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论

(7) $(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论

(8) $(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$ 构造性二难

$(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)

(9) $(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$ 破坏性二难

13

关于推理定律的几点说明：

- 由九条推理定律可以产生九条推理规则,它们构成了推理系统中的推理规则集。
- 2.2节给出的24个等值式中的每一个都派生出两条推理定律。例如双重否定律$A \Leftrightarrow \neg\neg A$产生两条推理定律$A \Rightarrow \neg\neg A$和$\neg\neg A \Rightarrow A$。(等值置换)

14

推理规则

(1) 前提引入规则
在证明的任何步骤上都可以引入前提。

(2) 结论引入规则
在证明的任何步骤上所得到的结论都可以作为后继证明的前提。

(3) 置换规则
在证明的任何步骤上，命题公式中的子公式都可以用与之等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式。

15

- 由9条推理定律和结论引入规则可以导出以下各条推理规则：

(4) 假言推理规则
$A \to B$
A
$\therefore B$

(4) 若今天下雪, 则将去滑雪。今天下雪，所以去滑雪。

(5) 附加规则
A
$\therefore A \lor B$

(5) 现在气温在冰点以下。因此，要么现在气温在冰点以下，要么现在下雨。

(6) 化简规则
$A \land B$
$\therefore A$

(6) 现在气温在冰点以下并且正在下雨。因此，现在气温在冰点以下。

16

(7) 拒取式规则
$A \to B$
$\neg B$
$\therefore \neg A$

(8) 假言三段论规则
$A \to B$
$B \to C$
$\therefore A \to C$

(9) 析取三段论规则
$A \lor B$
$\neg B$
$\therefore A$

17

(10) 构造性二难推理规则
$A \to B$
$C \to D$
$A \lor C$
$\therefore B \lor D$

(11) 破坏性二难推理规则
$A \to B$
$C \to D$
$\neg B \lor \neg D$
$\therefore \neg A \lor \neg C$

(12) 合取引入规则
A
B
$\therefore A \land B$

18

在自然推理系统P中构造证明

- P中构造证明就是由一组P中公式作为前提，利用P中的规则，推出结论。
- 构造形式结构$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 的推理的书写方法：
  前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$
  结论： B
- 证明方法：
  - 直接证明法
  - 附加前提法
  - 归谬法（或称反证法）

2020年2月19日10时18分 19

19

例题

例1： 构造下面推理的证明：

前提：$p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$

结论：$r \wedge (p \vee q)$

证明：

①	$p \rightarrow s$	前提引入
②	$\neg s$	前提引入
③	$\neg p$	①②拒取式
④	$p \vee q$	前提引入
⑤	q	③④析取三段论
⑥	$q \rightarrow r$	前提引入
⑦	r	⑤⑥假言推理
⑧	$r \wedge (p \vee q)$	⑦④合取引入

2020年2月19日10时18分 20

20

例2： 构造下面推理的证明：

前提：$\neg p \vee q, r \vee \neg q, r \rightarrow s$

结论：$p \rightarrow s$

证明：

①	$\neg p \vee q$	前提引入
②	$p \rightarrow q$	①置换
③	$r \vee \neg q$	前提引入
④	$q \rightarrow r$	③置换
⑤	$p \rightarrow r$	②④假言三段论
⑥	$r \rightarrow s$	前提引入
⑦	$p \rightarrow s$	⑤⑥假言三段论

2020年2月19日10时18分 21

21

例3： 构造下面推理的证明：

前提：$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q$

结论：$\neg r \rightarrow s$

证明：

①	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	前提引入
②	$p \wedge q$	前提引入
③	p	②化简
④	q	②化简
⑤	$q \rightarrow r$	①③假言推理
⑥	r	④⑤假言推理
⑦	$r \vee s$	⑥附加
⑧	$\neg r \rightarrow s$	⑦置换

2020年2月19日10时18分 22

22

- **例4**：构造下面推理的证明：

  若数a是实数，则它不是有理数就是无理数；若a不能表示成分数，则它不是有理数；a是实数且它不能表示成分数。所以a是无理数。

设 p:a是实数，q:a是有理数，r:a是无理数，s:a能表示成分数

推理的形式结构为: $(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg s \rightarrow \neg q) \wedge (p \wedge \neg s)) \rightarrow r$

证明：

①	$p \wedge \neg s$	前提引入
②	p	①化简
③	$\neg s$	①化简
④	$p \rightarrow (q \vee r)$	前提引入
⑤	$q \vee r$	②④假言推理
⑥	$\neg s \rightarrow \neg q$	前提引入
⑦	$\neg q$	③⑥假言推理
⑧	r	⑤⑦析取三段论

2020年2月19日10时18分 23

23

- **例5**：构造下面推理的证明：

  如果我努力学习，我一定取得好成绩。若我贪玩或不按时完成作业，我就不能取得好成绩。所以，如果我努力学习，我就不贪玩并且按时完成作业。

设 p:我努力学习。
q:我取得好成绩。
r:我贪玩。
s:我按时完成作业

推理的形式结构：

前提：$p \rightarrow q, r \vee \neg s \rightarrow \neg q$

结论：$p \rightarrow (\neg r \wedge s)$

2020年2月19日10时18分 24

24

附加前提法

- 有时推理的形式结构具有如下形式 ：

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

  结论：$C \to B$

- 可将结论中的前件也作为推理的前提，使结论只为B

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

  结论：B

- 理由：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (C \to B)$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$
$$\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee \neg C) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$
$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

2020年2月19日10时18分 25

25

- **例6**：构造下面推理的证明。

  如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影；小赵不去看电影或小张去看电影；小王去看电影。所以，当小赵去看电影时，小李也去看电影。

- **解** 将简单命题符号化：

  设 **p:**小张去看电影, **q:**小王去看电影, **r:**小李去看电影, **s:**小赵去看电影

  前提：$(p \wedge q) \to r$，$\neg s \vee p$，q

  结论：$s \to r$

证明：用附加前提证明法。

① s 附加前提引入
② $\neg s \vee p$ 前提引入
③ p ①②析取三段论
④ $(p \wedge q) \to r$ 前提引入
⑤ q 前提引入
⑥ $p \wedge q$ ③⑤合取
⑦ r ④⑥假言推理

2020年2月19日10时18分 26 ®

26

归谬法（反证法）

- 有时推理的形式结构具有如下形式：

  前提：A_1，A_2，…，A_k

  结论：B

- 如果将¬ B作为前提能推出矛盾来，则说明推理正确。

  前提：A_1，A_2，…，A_k，$\neg B$

  结论：矛盾

- 理由：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

- 若$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B$为矛盾式，则说明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B)$为重言式。

2020年2月19日10时18分 27 ®

27

例7：构造下面推理的证明。

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将取胜。或者A队未取胜，或者A队获得联赛第一名。A队没有获得联赛的第一名。小张守第一垒。因此，小李没有向B队投球。

证明：
① q 结论的否定引入
② $\neg r \vee s$ 前提引入
③ $\neg s$ 前提引入
④ $\neg r$ ②③析取三段论
⑤ $(p \wedge q) \to r$ 前提引入
⑥ $\neg(p \wedge q)$ ④⑤拒取式
⑦ $\neg p \vee \neg q$ ⑥置换
⑧ p 前提引入
⑨ $\neg q$ ⑦⑧析取三段论
⑩ $q \wedge \neg q$ ①⑨合取

由于最后一步$q \wedge \neg q \Rightarrow 0$，所以推理正确

先将简单命题符号化

设 **p:**小张守第一垒

q:小李向B队投球

r:A队取胜

s:A队获得联赛第一名

推理的形式结构

前提：$(p \wedge q) \to r, \neg r \vee s, \neg s, p$

结论：$\neg q$

2020年2月19日10时18分 28 ®

28

归结证明法

归结规则

$$\frac{A \vee B \qquad \neg A \vee C}{\therefore B \vee C}$$

理由 $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \to (B \vee C)$

$$\Leftrightarrow \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \vee (B \vee C)$$
$$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee B \vee C$$
$$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \vee B) \vee ((A \wedge \neg C) \vee C)$$
$$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee (A \vee C)$$
$$\Leftrightarrow 1$$

29

29

归结证明法的基本步骤

1. 将每一个前提化成等值的合取范式, 设所有合取范式的全部简单析取式为$A_1, A_2, \ldots, A_t$

2. 将结论的否定化成等值的合取范式$B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_s$, 其中每个$B_j$是简单析取式

3. 以$A_1, A_2, \ldots, A_t$和$B_1, B_2, \ldots, B_s$为前提, 使用归结规则推出0

除前提引入规则外, 只使用归结规则

30

30

实例

例8 用归结证明法构造下面推理的证明:

前提: $(p\to q)\to r, r\to s, \neg s$

结论: $p\wedge\neg q$

解: $(p\to q)\to r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$

$r\to s \Leftrightarrow \neg r\vee s$

$\neg(p\wedge\neg q) \Leftrightarrow \neg p\vee q$

把推理的前提改写成

前提: $p\vee r, \neg q\vee r, \neg r\vee s, \neg s, \neg p\vee q$

(结论均为0, 不必写出)

31

31

前提: $p\vee r, \neg q\vee r, \neg r\vee s, \neg s, \neg p\vee q$

结论: 0

证明:

① $p\vee r$ 前提引入

② $\neg p\vee q$ 前提引入

③ $q\vee r$ ①②归结

④ $\neg q\vee r$ 前提引入

⑤ r ③④归结

⑥ $\neg r\vee s$ 前提引入

⑦ s ⑤⑥归结

⑧ $\neg s$ 前提引入

⑨ 0 ⑦⑧合取

32

32

课堂练习

33

33

对证明方法的补充说明（自学）

直接证明法 当A为真时B为真, 则$A\to B$为真

前提假证明法 若A为矛盾式, 则$A\to B$为真.

结论真证明法 若B为永真式, 则 $A\to B$为真 (不管A如何)

间接证明法 $A\to B \Leftrightarrow \neg B\to\neg A$

分情况证明法 $(A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_k)\to B$

$\Leftrightarrow\neg(A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_k)\vee B$

$\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\ldots\wedge\neg A_k)\vee B$

$\Leftrightarrow(\neg A_1\vee B)\wedge(\neg A_2\vee B)\wedge\ldots\wedge(\neg A_k\vee B)$

$\Leftrightarrow(A_1\to B)\wedge(A_2\to B)\wedge\ldots\wedge(A_k\to B)$

34

34

讨论题3

- 发生了一宗劫案，劫匪驾驶一辆货车逃走了。你只知道:

1) 除了疑犯A，B和C之外不会有其他人;

2) 没有A的陪同，C不会单独犯案;

3) B不会驾驶。

如此看来A有没有罪?

2020年2月19日10时18分 35

35

作业

- 35,36,38,41

2020年2月19日10时18分 36

36