Задача 9.1. Дадена е системата

$$\left| \begin{array}{rcl} |x-1| & = & y \\ 3y-1 & = & x+2. \end{array} \right.$$

За кои стойности на числата a и b решенията на системата също така удовлетворяват и $y = ax^2 - b^2x + a$?

Решение. Да решим системата. За $x \geq 1$ имаме

$$\left| \begin{array}{rcl} x-1 & = & y \\ 3y-1 & = & x+2 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{c} x-1=y \\ 3y-1=y+3 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ x & = & 3. \end{array} \right.$$

За $x < 1$ имаме

$$\left| \begin{array}{rcl} 1-x & = & y \\ 3y-1 & = & x+2 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{rcl} 1-x & = & y \\ 3y-1 & = & 3-y \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & 0. \end{array} \right.$$

Сега нека заместим с втората двойка числа в квадратното уравнение. Получаваме $a = 1$. Сега нека заместим с първата двойка числа. Получаваме $2 = 9 - 3b^2 + 1$ или $3b^2 = 8$. Окончателно получаваме решенията $(a, b) = (1, \pm\sqrt{\frac{8}{3}})$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за правилно разкриване на модула; по 1 т. за всяка от двете системи; 1 т. за намиране на a; 2 т. за намиране на b.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен и разностранен триъгълник $\triangle ABC$, вписан в окръжността Γ. Ъглополовящата на ъгъл BAC пресича BC в т. L и Γ в т. S. Точката M е среда на AL. Нека AD е височина в $\triangle ABC$ и описаната около $\triangle DSL$ окръжност пресича Γ за втори път в т. P. Нека N е средата на BC и K е симетричната точка на D спрямо N. Да се докаже, че триъгълниците $\triangle MPS$ и $\triangle ADK$ са подобни.

Решение. Първи подход. Без ограничение на общността приемаме, че $AB > AC$. При стандартни означения за ъглите на триъгълника имаме $\measuredangle LMD = 180^\circ - 2\measuredangle DLM = 180^\circ - 2(\beta + \frac{\alpha}{2}) = \gamma - \beta$. Също така $\measuredangle APD = \measuredangle APS - \measuredangle DPS = \gamma + \frac{\alpha}{2} - \measuredangle DLA = \gamma - \beta$ и значи четириъгълник $AMDP$ е вписан. От тук намираме $\measuredangle MPS = \measuredangle MPD + \measuredangle DPS = \measuredangle MAD + \measuredangle DLA = 90^\circ$.

Нека MP пресича Γ в точката T. Тогава T е среда на дъгата BAC от Γ, понеже $\measuredangle SPT = 90^\circ$. Имаме $AD \parallel TN \perp BC$ и значи TN пресича AK в нейната среда W (от средна отсечка в $\triangle ADK$). След това $\measuredangle TAS = 90^\circ$, защото ST е диаметър в Γ, както и $\measuredangle TWM = \measuredangle TNB = 90^\circ$ от успоредността на MW и DK. Следователно $ATWM$ е вписан, откъдето $\measuredangle AKD = \measuredangle AWM = \measuredangle ATM = \measuredangle ATP = \measuredangle ASP = \measuredangle MSP$, с което сме готови.

Втори подход. Доказваме, че $\measuredangle MPS = 90^\circ$, по същия начин както в първото решение.

Ще докажем, че триъгълниците $\triangle MPS$ и $\triangle ADK$ са подобни по втори признак. Имаме $\measuredangle MPS = \measuredangle ADK = 90^\circ$. Остава да проверим, че $\frac{MP}{PS} = \frac{AD}{DK} \iff \frac{AD}{MP} = \frac{DK}{PS}$. Нека означим

$F = AL \cap PD$. От вписаните $AMDP$ и $DLSP$ намираме $FM \cdot FA = FD \cdot FP = FL \cdot FS$. От подобните триъгълници $\triangle AFD$ и $\triangle PFM$ намираме $\frac{AD}{MP} = \frac{AF}{PF}$. Сега от подобните триъгълници $\triangle FLD$ и $\triangle FPS$ намираме $\frac{DL}{PS} = \frac{FL}{FP}$, откъдето $\frac{DK}{PS} = \frac{DK}{DL} \cdot \frac{DL}{PS} = \frac{DK \cdot FL}{DL \cdot FP}$. Така искаме да проверим, че $\frac{AF}{PF} = \frac{DK \cdot FL}{DL \cdot FP}$ или съответно $\frac{FA}{FL} = \frac{DK}{DL}$.

Имаме $\measuredangle ADN = 90^\circ = \measuredangle SNC$ (тъй като S е среда на дъгата BC от Г) и значи $SN \parallel AD$. Тогава от теоремата на Талес имаме $\frac{NL}{LD} = \frac{SL}{AL}$ и добавяйки 1 към двете страни на това равенство, получаваме $\frac{DN}{LD} = \frac{AS}{AL}$. След умножение по 2 получаваме $\frac{DK}{DL} = \frac{2AS}{AL} = \frac{AS}{\frac{AL}{2}} = \frac{AS}{AM}$.

Нека означим $AM = x$, $MF = y$, $FL = z$, $LS = t$ и да отбележим, че $x = AM = ML = y + z$, откъдето $z = x - y$. Също така от равенството $FM \cdot FA = FL \cdot FS$ имаме $y(y+x) = z(z+t)$, откъдето $t = \frac{y(y+x)}{z} - z = \frac{y(y+x)}{x-y} - x + y$. Накрая искаме да установим, че $\frac{FA}{FL} = \frac{AS}{AM}$, което е еквивалентно на

$$\frac{y+x}{z} = \frac{x+y+z+t}{x} \iff x(y+x) = z(2x+t) \iff xy+y^2 = (x-y)\Big(2x + \frac{y(y+x)}{x-y} - x + y\Big),$$

като директно се проверява, че последното е изпълнено.

Оценяване. (6 точки) *Първи подход.* 2 т. за $\measuredangle MPS = 90^\circ$; 3 т. за $ATWM$ - вписан; 1 т. за довършване; *Втори подход.* 2 т. за $\measuredangle MPS = 90^\circ$; 1 т. за еквивалентното $\frac{FA}{FL} = \frac{DK}{DL}$; 1 т. за $\frac{DK}{DL} = \frac{AS}{AM}$; 2 т. за довършване.

Задача 9.3. В една държава има селища, някои от които са свързани с пътища. Между всеки две селища има маршрут (не задължително директен). Министърът на образованието е направил така, че всяко селище, в което няма училище, да е свързано със селище, в което има училище. Министърът на държавната оптимизация иска между всеки две селища да може да се стига по единствен начин (ако не се повтарят пропътувани участъци), като за целта евентуално да премахне част от пътищата. Винаги ли може това да се направи без изграждане на допълнителни училища, като все пак се запази постигнатото от образователния министър?

Решение. Нека построим граф със селищата като върхове и пътищата като ребра. Върховете с училища ще са черни, а тези без – бели.

Първи подход. Нека между два върха може да се стигне по два начина: от A до B през C и от A до B през D. Тогава съществува цикъл, обхващащ върховете B, C, и D. Значи, за да не може да се стигне между два града по два начина, „оптимизираният“ граф не трябва да има цикли, т.е. ще е дърво.

Нека разгледаме един цикъл C. Ако всички върхове на цикъла са черни, можем да премахнем произволно ребро и условието няма да се наруши.

Нека $X \in C$ е бял връх. Ако и двата върха, с които е свързан в цикъла, са бели, то можем да премахнем кое да е от тези ребра (защото съществува друг черен връх, с който X е свързан). Ако и двата върха, с които е свързан, са черни, то можем да премахнем което и да е от тези ребра. Ако единият връх е черен, а другият е бял, то можем да премахнем реброто с белия връх, защото вторият бял връх граничи с някой черен връх (по условие).

Повтаряме тази процедура, докато премахнем всички цикли.

Втори подход. Да изтрием временно ребрата, свързващи едноцветни върхове. Полученият граф G' е двуделен, като по условие в него няма изолирани бели върхове.

Нека $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ са свързаните компоненти на G'. Във всяко Γ_i последователно премахваме ребра, докато елиминираме всички цикли. Да забележим, че условието с училищата в така получения граф G'' е изпълнено, но той може да не е свързан. По нататък, за всяка двойка компоненти $\Gamma_i, \Gamma_j, i \neq j$, между които са били изтривани ребра, възстановяваме едно от изтритите ребра. Може да гледаме на това като граф с върхове в $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$. Той е свързан, но в него може да има цикли. На последната стъпка последователно премахваме ребра в този граф, докато в него не останат цикли. Това, което остава, е граф, удовлетворяващ условието.

Коментар. Дървото, което построихме, се нарича „покриващо дърво“. Множеството от черни върхове се нарича „доминиращо множество“.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за твърдението, че оптимизирането на пътната мрежа се свежда до дърво или гора; 1 т. за частичен алгоритъм или алгоритъм без обосновка за коректност; 5 т. за обосновка че предложеният алгоритъм решава задачата.

Задача 9.4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които за всеки две естествени числа a, b е изпълнено

$$f(a) + 2ab + 2f(b) \text{ дели } f(a)^2 + 4f(b)^2.$$

Решение. Нека $P(a, b)$ означава делимостта в условието. От $P(a, a)$ получаваме

$$3f(a) + 2a^2 \mid 5f(a)^2 \text{ за всяко } a \in \mathbb{N}.$$

От горното намираме

$$3f(a) + 2a^2 \mid 15f(a)^2 - 5f(a)(3f(a) + 2a^2) = -10a^2 f(a)$$

и

$$3f(a) + 2a^2 \mid 30a^2 f(a) - 10a^2(3f(a) + 2a^2) = -20a^4.$$

Нека p е голямо просто число. Полагайки $a = p$ имаме $3f(p) + 2p^2 \mid 20p^4$. Числото $20p^4$ има 12 естествени делителя, които не се делят на p^2 и всички те са по-малки от p^2 (при условие, че p е достатъчно голямо). Понеже $3f(p)+2p^2 > 2p^2$, то имаме $3f(p)+2p^2 = k_p \cdot p^2$, където $k_p \geq 3$ е цяло число, което може да зависи от p и изпълнява $k_p \mid 20p^2$. От равенството $3f(p) = (k_p - 2)p^2$ следва $3 \mid k_p - 2$.

От полагането $P(a, 1)$ имаме

$$f(a)+2a+2f(1) \mid f(a)^2+4f(1)^2 \equiv \big(2a+2f(1)\big)^2+4f(1)^2 = 4a^2+8af(1)+8f(1)^2 \pmod{f(a)+2a+2f(1)}$$

и значи $f(a) + 2a + 2f(1) \leq 4a^2 + 8af(1) + 8f(1)^2$, откъдето $f(a) < 5a^2$ за достатъчно големи a.

Връщайки се към равенството $f(p) = \frac{k_p-2}{3} \cdot p^2$, получаваме $\frac{k_p-2}{3} < 5$ и съответно $k_p \leq 16$. Отчитайки $k_p \equiv 2 \pmod 3$, $k_p \geq 3$ и $k_p \mid 20p^2$, намираме $k_p = 5$. Тогава $f(p) = p^2$ за всяко достатъчно голямо p.

Нека сега a е фиксирано и да разгледаме полагането $P(a,p)$:

$$f(a)+2ap+2p^2 \mid f(a)^2+4p^4-2p^2(f(a)+2ap+2p^2) = f(a)^2-4p^3a-2p^2f(a)$$
$$f(a)+2ap+2p^2 \mid f(a)^2-4p^3a-2p^2f(a)+2ap(f(a)+2ap+2p^2) = f(a)^2+2apf(a)+2p^2(2a^2-f(a))$$
$$f(a)+2ap+2p^2 \mid f(a)^2+2apf(a)+2p^2(2a^2-f(a))-(2a^2-f(a))(f(a)+2ap+2p^2) =$$
$$= 2f(a)^2-2a^2f(a)+p(4af(a)-4a^3).$$

Виждаме, че за голямо просто число p е изпълнено $f(a)+2ap+2p^2 > p^2 > |2f(a)^2-2a^2f(a)+p(4af(a)-4a^3)|$. Така получаваме $0=2f(a)^2-2a^2f(a)+p(4af(a)-4a^3)$, откъдето $2f(a)^2-2a^2f(a)=4af(a)-4a^3=0$ и $f(a)=a^2$.

Обратно, ако $f(x)=x^2$ за всяко естествено x, то

$$f(a)+2ab+2f(b)=a^2+2ab+2b^2 \mid (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)=a^4+4b^4=f(a)^2+4f(b)^2.$$

Оценяване. (7 точки) 2 т. за $3f(p)+2p^2=k_pp^2$ за достатъчно голямо просто p; 1 т. за $f(a)<5a^2$ или сходна оценка; 1 т. за $f(p)=p^2$; 2 т. за $f(a)+2ap+2p^2 \mid 2f(a)^2-2a^2f(a)+p(4af(a)-4a^3)$; 1 т. за довършване.