Тема за 7. клас, задачи и решения

Задача 1. Намерете броя на петцифрените числа $\overline{abcde}$, за които

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 2(a + b + c + d + e).$$

Решение. Записваме даденото равенство във вида

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 + (d - 1)^2 + (e - 1)^2 = 5.$$

(1 точка)

Има две възможности 5 да се представи като сбор на пет квадрата на неотрицателни цели числа:

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 5.$$

Първи случай. При $(x-1)^2 = 1 \iff x(x-2) = 0$ следва, че $x = 2$ или $x = 0$, т.е. петцифрените числа трябва да са записани само с цифрите 2 и 0. **(1 точка)**

Първата цифра трябва да е 2, а за останалите четири позиции има по 2 възможности. В този случай числата са $2^4 = 16$.

(1 точка)

Втори случай. Ако $(x - 1)^2 = 2^2 \iff (x + 1)(x - 3) = 0$ и $x > 0$, намираме $x = 3$. Ако $(x - 1)^2 = 0$, то $x = 1$. Следователно петцифрените числа имат по една цифра 3, една цифра 2 или 0 и по 3 цифри 1.

(1 точка)

При цифри 3, 2, 1, 1, 1, за избор на позицията на цифрата 3 има 5 възможности, за цифрата 2 остават 4 възможности и останалите места се заемат от трите единици. Общо числата са $5.4 = 20$.

(1 точка)

При цифри 3, 0, 1, 1, 1 за избор на позицията на цифрата 0 има 4 възможности, за цифрата 3 остават 4 възможности и останалите места се заемат от трите единици. Общо числата са $4.4 = 16$.

(1 точка)

Окончателно, търсените числа са $16 + 20 + 16 = 52$.

Задача 2. Вътрешната ъглополовяща BL и височината CH на $\triangle ABC$ се пресичат в точка O, като $CL = OL$ и $\sphericalangle ACB$ е с 10% по-малък от $\sphericalangle ABC$.

а) Намерете $\sphericalangle BAC$.

б) Докажете, че $HA = HB + BC$.

Решение. а) Нека $\sphericalangle ABL = \sphericalangle CBL = x$; тогава $\sphericalangle ABC = 2x$ и изразяваме $\sphericalangle ACB = 90\% \sphericalangle ABC = 1,8x$.

От правоъгълния триъгълник HOB изразяваме $\sphericalangle HOB = 90^\circ - x$. Ъглите $\sphericalangle LOC$ и $\sphericalangle HOB$ са връхни, следователно $\sphericalangle LOC = 90^\circ - x$.

Тъй като $CL = OL$, триъгълникът COL е равнобедрен, следователно $\sphericalangle ACO = \sphericalangle LOC = 90^\circ - x$. От правоъгълния триъгълник AHC изразяваме $\sphericalangle HAC = 90^\circ - \sphericalangle ACH = 90^\circ - (90^\circ - x) = x$.

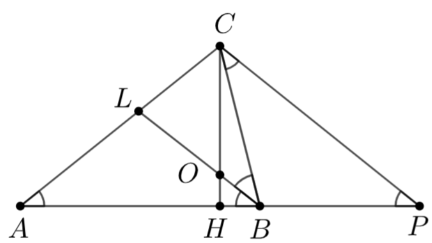
От сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме равенството

$$x + 2x + 1,8x = 180^\circ,$$

от което намираме $x = \dfrac{75^\circ}{2} = 37^\circ 30'$.

(3 точки)

б) Да построим точка P на правата AB така, че $BP = BC$ и лъчите $BP^{\rightarrow}$ и $BA^{\rightarrow}$ са противоположни.



Тогава $\triangle BPC$ е равнобедрен и следователно

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BCP = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC = \frac{75^\circ}{2}.$$

Тогава $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BPC$, следователно $\triangle APC$ е равнобедрен. Тогава височината CH към основата AP в този триъгълник е и медиана, т.е $AH = HP$. Но

$$AH = HP = HB + BP = HB + BC.$$

(3 точки)

Задача 3. В правоъгълна координатна система Oxy ще казваме, че точката $P(x, y)$ е *интересна*, ако нейните координати x и y са цели числа между -100 и 100 включително и

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 = 0.$$

а) Намерете броя на всички интересни точки.

б) По колко различни начина могат да се изберат две интересни точки A и B така, че лицето на триъгълника AOB да е равно на 2025?

Решение. а) Очевидно точката $O(0; 0)$ е интересна. Ще търсим ненулевите цели стойности на x и y. Тъй като

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 = 0 \iff 12x^2 + 16xy - 9xy - 12y^2 = 0 \iff$$

$$4x(3x + 4y) - 3y(3x + 4y) = 0 \iff (3x + 4y)(4x - 3y) = 0,$$

получаваме, че $3x + 4y = 0$ или $4x - 3y = 0$.

Ако $3x + 4y = 0$, числото $x = -\dfrac{4y}{3}$ е цяло, точно когато y се дели на 3, т.е. $y = 3k$; тогава $x = -4k$. Тъй като x е ненулево цяло число между -100 и 100, то k е различно от 0 и е между -25 и 25. Следователно има $2.25 = 50$ интересни точки от вида $(-4k; 3k)$, $k \neq 0$.

Ако $4x - 3y = 0$, числото $x = \dfrac{3y}{4}$ е цяло, когато y се дели на 4, т.е. $y = 4n$; тогава $x = 3n$. Тъй като y е ненулево цяло число между -100 и 100, то n е различно от 0 и е между -25 и 25. Следователно има $2.25 = 50$ интересни точки от вида $(3n; 4n)$, $n \neq 0$.

Така получаваме общо $1 + 2.50 = 101$ интересни точки.

(3 точки)

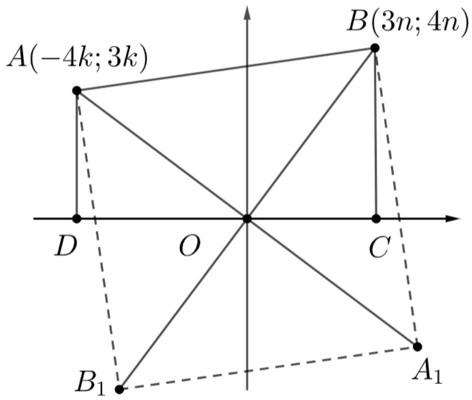
б) Интересните точки от вида $(-4k; 3k)$ лежат на графиката на правата пропорционалност $y = -\dfrac{3}{4}x$, която е права a през O.

Интересните точки от вида $(3n; 4n)$ лежат на графиката на правата пропорционалност $y = \dfrac{4}{3}x$, която е права b през O.

Точките O, A и B образуват триъгълник, когато едната от точките A и B е от вида $(-4k; 3k)$, а другата е от вида $(3n; 4n)$.

Ако A и B са интересни точки и лицето на триъгълника AOB е 2025, то точките A_1 и B_1, които са симетрични съответно на A и B относно O, също са интересни и лицата на триъгълниците AOB, AOB_1, A_1OB, A_1OB_1 са равни. Последното твърдение следва от еднаквостта на триъгълниците AOB и A_1OB_1 и от факта, че AO и BO са медиани в триъгълниците BB_1A и AA_1B .

Достатъчно е да се направят разсъждения за един от четирите триъгълника. Нека $A(-4k; 3k)$, $B(3n; 4n)$, $1 \leq k, n \leq 25$, където k и n са естествени числа.



Ако $C(3n;0)$, $D(-4k;0)$, то

$$S_{AOB} = S_{ABCD} - S_{AOD} - S_{BOC} =$$

$$= \frac{(3k+4n)(3n+4k)}{2} - \frac{4k \cdot 3k}{2} - \frac{3n \cdot 4n}{2} = \frac{25kn}{2},$$

откъдето

$$2025 = \frac{25kn}{2} \iff kn = 2.3^4$$

Има две възможности за $1 \leq k, n \leq 25$: $k = 2.3^2$, $n = 3^2$ или $n = 2.3^2$, $k = 3^2$. Следователно търсените двойки точки са $2.4 = 8$.

(4 точки)

Забележка. Всички двойки интересни точки са:

n	k	$B(3n;4n)$	$A(-4k;3k)$
9	18	$(27;36)$	$(-72;54)$
9	-18	$(27;36)$	$(72;-54)$
-9	18	$(-27;-36)$	$(-72;54)$
-9	-18	$(-27;-36)$	$(72;-54)$
18	9	$(54;72)$	$(-36;27)$
18	-9	$(54;72)$	$(36;-27)$
-18	9	$(-54;-72)$	$(-36;27)$
-18	-9	$(-54;-72)$	$(36;-27)$

Задача 4. Да се намери най-голямото естествено число n, за което съществуват n на брой триъгълника със следното свойство: множеството от градусните мерки на ъглите на тези триъгълници се състои от $3n$ на брой различни естествени числа.

Решение. Нека триъгълникът $\triangle_i$ има ъгли α_i, β_i, γ_i за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$.

Сборът на градусните мерки на ъглите на триъгълниците е $180^\circ \cdot n$. Ако

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$$

са $3n$ на брой различни естествени числа, сборът им е най-малко $1 + 2 + \cdots + 3n = \dfrac{3n(3n+1)}{2}$. Следователно

$$180 \cdot n \geqq \frac{3n(3n+1)}{2} \Longrightarrow n \leqq 39\frac{2}{3},$$

т.е. естественото число n е най-много 39. **(3 точки)**

Пример за 39 триъгълника с желаното свойство е следният: 30 триъгълника с ъгли от вида

$$(i^\circ,\ (91-2i)^\circ,\ (89+i)^\circ), \quad i = 1, 2, \ldots, 30,$$

т.е.

$$(1^\circ, 89^\circ, 90^\circ), (2^\circ, 87^\circ, 91^\circ), (3^\circ, 85^\circ, 92^\circ), \ldots, (30^\circ, 31^\circ, 119^\circ),$$

(в които „четните“ ъгли са от 2° до 30° и от 90° до 118°) и 9 триъгълника само с „четни“ ъгли от 32° до 88°:

$$(32^\circ, 60^\circ, 88^\circ), (34^\circ, 62^\circ, 84^\circ), (36^\circ, 64^\circ, 80^\circ), (38^\circ, 66^\circ, 76^\circ), (40^\circ, 68^\circ, 72^\circ),$$

$$(42^\circ, 52^\circ, 86^\circ), (44^\circ, 54^\circ, 82^\circ), (46^\circ, 56^\circ, 78^\circ), (48^\circ, 58^\circ, 74^\circ).$$

(4 точки)