Министерство на образованието и науката
Съюз на Математиците в България

ПРОЛЕТНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ
29 март 2025 г.

Тема за 4. клас, задачи и решения

Задача 1. Намерете неизвестните числа a и b в равенствата

$$(a-345):67=89 \quad \text{и} \quad 2025:(b-38)=45.$$

Ако

$$c=34.37+36.46+34.73+36.64,$$

намерете числото $d=c:(1+a:b)$.

Намерете сбора на всички естествени числа, които са по-големи от числото b и по-малки от числото d.

Решение. Намираме $a=89.67+345=5963+345=6308$,

(2 точки)

$$b=2025:45+38=45+38=83,$$

(2 точки)

$$c=34.37+36.46+34.73+36.64=34.(37+73)+36.(46+64)=$$

$$=34.110+36.110=110.(34+36)=110.70=7700,$$

(2 точки)

$$d=c:(1+a:b)=7700:(1+6308:83)=7700:(1+76)=7700:77=100.$$

(2 точки)

Сборът на всички естествени числа, които са по-големи от $b=83$ и по-малки от $d=100$ е $84+85+\cdots+98+99$. В този сбор има $99-83=16$ събираеми, които могат да се групират в 8 двойки със сбор $84+99=183$. Следователно търсеният сбор е равен на $183.8=1464$.

(2 точки)

Свалено от Klasirane.com

Задача 2. Пипи, Томи и Аника събрали общо 264 миди в морето край остров Корекоредут.

Томи и Аника общо събрали 3 пъти повече миди, отколкото Пипи.

Оказало се, че в половината от мидите на Пипи и в третината от мидите на Аника има по една перла. Така те двете имали общо 74 перли.

а) Колко миди е събрал Томи?

б) Във всяка от мидите, които събрал Томи, имало по една перла, розова или бяла. На пазара на острова той разменил всяка розова перла за три кокосови ореха и един портокал. Той успял да размени и всичките си бели перли, като за три бели перли получавал един кокосов орех и два портокала.

От размяната на перлите Томи получил 89 кокосови ореха. Колко портокала е получил Томи от размяната на перлите?

Решение. а) Всички миди могат да се разделят на четири еднакви купчини – едната купчина е събрала Пипи, а другите три купчини са събрани от Томи и Аника заедно. В една купчина има $264 : 4 = 66$ миди, т.е. Пипи е събрала 66 миди.

(2 точки)

В $66 : 2 = 33$ от мидите на Пипи има по една перла. Значи $74 - 33 = 41$ перли идват от третината от мидите на Аника. Следователно Аника е събрала $41.3 = 123$ миди.

(2 точки)

Томи е събрал $264 - (66 + 123) = 75$ миди.

(1 точка)

б) Нека Томи a пъти е направил размяната на розова перла за три кокосови ореха и един портокал, и b пъти е направил размяната на три бели перли за един кокосов орех и два портокала.

Той е разменил всичките си 75 перли, следователно

$$a + 3.b = 75.$$

Томи е получил 89 кокосови ореха, следователно

$$3.a + b = 89.$$

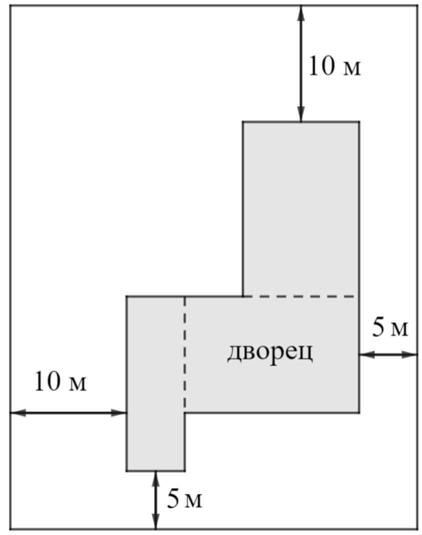
Като съберем двете равенства, получаваме, че $4.a + 4.b = 164$, откъдето $a + b = 41$ и намираме $a = (89 - 41) : 2 = 24$, $b = 41 - 24 = 17$.

От размяната Томи е получил $a + 2.b = 24 + 2.17 = 58$ портокала.

(5 точки)

Свалено от Klasirane.com

Задача 3. Дворецът на Шрек се състои от три правоъгълни сгради и е разположен в правоъгълен двор. На чертежа дворецът е оцветен в сив цвят и са посочени някои разстояния от стените на двореца до оградата на двора.



Оградата се пази от 124 стражи, разположени по следния начин:

- има по един страж във всеки ъгъл на оградата;
- на всяка страна на оградата стражите са разположени през 5 метра един от друг.

а) Намерете обиколката на оградата и обиколката на двореца на Шрек.

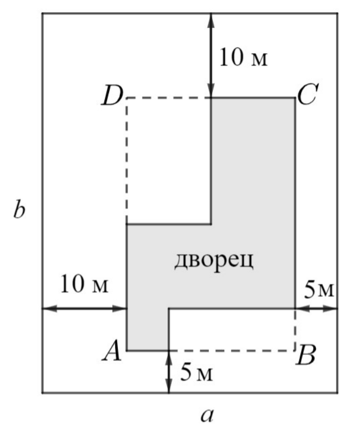
б) Магарето и Котаракът се намирали в един от ъглите на оградата и едновременно тръгнали в противоположни посоки да обикалят оградата. Котаракът изминавал 40 метра за 15 секунди, а Магарето изминавало 40 метра за 16 секунди.

Когато Магарето и Котаракът се срещнали за 24-ти път, те решили да спрат обиколките си.

Колко минути те са обикаляли оградата и колко метра е изминало Магарето?

Забележка. Моментът на тръгване не е среща.

Решение. а) Обиколката на оградата е $124.5 = 620$ метра. (**2 точки)**
Обиколката на двореца е равна на обиколката на правоъгълника $ABCD$ на чертежа.
Ако означим страните на оградата с a м и b м, намираме, че
$AB = a - (10 + 5) = a - 15$,
$BC = b - (10 + 5) = b - 15$.
Тъй като всяка страна на правоъгълника $ABCD$ е с 15 м по-малка от съответната страна на оградата, то обиколката на $ABCD$ е с $4.15 = 60$ метра по-малка от обиколката на оградата.



Следователно обиколката на двореца е $620 - 60 = 560$ метра.

(**4 точки)**

Свалено от Klasirane.com

б) Да разгледаме движението на Магарето и на Котарака.

Котаракът	Магарето
40 метра – 15 секунди	40 метра – 16 секунди
$\downarrow : 5$	$\downarrow : 8$
8 метра – 3 секунди	5 метра – 2 секунди
$\downarrow \cdot 2$	$\downarrow \cdot 3$
16 метра – 6 секунди	15 метра – 6 секунди

(4 точки)

За 6 секунди Магарето и Котаракът, които вървят един срещу друг, изминават общо $16 + 15 = 31$ метра.

В момента на първата им среща, те са изминали общо цялата обиколка на оградата, т.е. 620 метра.

Магарето и Котаракът

31 метра – 6 секунди
$\downarrow \cdot 20$
620 метра – 120 секунди

Следователно първата им среща е 120 секунди (или 2 минути) след тръгването.

(2 точки)

Магарето и Котаракът се срещат през 2 минути, следователно до 24-тата среща са обикаляли $24.2 = 48$ минути.

(1 точка)

Да пресметнем какво разстояние е изминал всеки от тях до срещата.

Котаракът	Магарето
16 метра – 6 секунди	15 метра – 6 секунди
$\downarrow \cdot 20$	$\downarrow \cdot 20$
320 метра – 120 секунди	300 метра – 120 секунди

До първата среща Котаракът и Магарето са изминали съответно 320 м и 300 м.

До 24-тата среща Магарето е изминало $24.300 = 7200$ м, а Котаракът: $24.320 = 7680$ м.

(2 точки)

Свалено от Klasirane.com

Задача 4. Ще казваме, че едно число е *специално*, ако е четирицифрено и точно две от цифрите му са 2. Например, 2025 и 2112 са специални числа, а 2220, 1234 и 3456 не са.

а) Рени записала няколко пъти специалното число 2230 и няколко пъти специалното число 2290. Оказало се, че е записала общо 36 цифри и сборът на всички записани цифри е 81. Намерете сбора на всички числа, които е записала Рени.

б) Рени и Бени, независимо една от друга, съставили списък със специални числа. Оказало се, че:

• в списъка на Рени всички числа са различни;

• в списъка на Бени всички числа са различни;

• точно половината от числата, които е записала Рени, са записани и от Бени;

• в списъка на Бени има с две числа повече, отколкото в списъка на Рени;

• само едно специално число не е записано нито от Рени, нито от Бени.

Колко специални числа е записала Рени и колко е записала Бени?

Решение. а) Нека Рени е записала x пъти числото 2230 и y пъти числото 2290. Тъй като всяко от числата е четирицифрено и са записани 36 цифри, то числата са $36 : 4 = 9$, т.е.

$$x + y = 9. \tag{1}$$

(1 точка)

Сборът на всички цифри е

$$(2+2+3+0).x + (2+2+9+0).y = 81, \text{ т.е. } 7.x + 13.y = 81. \tag{2}$$

(1 точка)

От равенствата (1) и (2) следва, че $6.y = 81 - 7.9$, т.е. $y = 3$.

(2 точки)

Следователно Рени е записала 3 пъти числото 2290 и 6 пъти числото 2230. Сборът на написаните числа е

$$2290.3 + 6.2230 = 20250.$$

(1 точка)

б) Специалните числа са от шест вида, в зависимост от това къде в техния запис са двете цифри 2:

• $\overline{22ab}$, където всяка от цифрите a и b може да е 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е. за всяка от цифрите a и b има по 9 възможности;

• $\overline{2a2b}$, където всяка от цифрите a и b може да е 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е. за всяка от цифрите a и b има по 9 възможности;

• $\overline{2ab2}$, където всяка от цифрите a и b може да е 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е. за всяка от цифрите a и b има по 9 възможности;

Свалено от Klasirane.com

• $\overline{a22b}$, където цифрата a може да е 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, а цифрата b може да е 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е. за цифрата a има 8 възможности, при всяка от които за цифрата b има по 9 възможности;

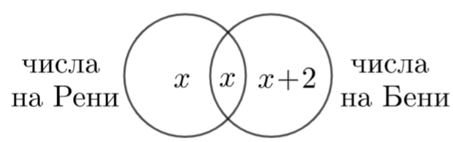
• $\overline{a2b2}$, където цифрата a може да е 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, а цифрата b може да е 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е. за цифрата a има 8 възможности, при всяка от които за цифрата b има по 9 възможности;

• $\overline{ab22}$, където цифрата a може да е 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, а цифрата b може да е 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е. за цифрата a има 8 възможности, при всяка от които за цифрата b има по 9 възможности.

От всеки от първите три вида има по $9.9 = 81$ числа, а от всеки от последните три вида има по $8.9 = 72$ числа; общо $3.81 + 3.72 = 459$ специални числа.

(6 точки)

Нека специалните числа, които са записани и от двете момичета, са x на брой. Те са половината от числата на Рени, т.е. тя е записала още x специални числа, които не участват в списъка на Бени. Бени има с две числа повече от Рени, следователно тя е записала още $x + 2$ специални числа, които не участват в списъка на Рени.



Така броят на различните специални числа, които са записани от Бени или Рени, е $3.x + 2$.

Тъй като те са пропуснали едно от 459-те специални числа, получаваме, че

$$3.x + 2 = 459 - 1,$$

откъдето намираме $x = 152$. Следователно Рени е записала $2.152 = 304$ специални числа, а Бени е записала 306 специални числа.

(4 точки)

Свалено от Klasirane.com