Министерство на образованието и науката

74. Национална олимпиада по математика

Национален кръг, 4 – 7 март 2025 г.

ТЕМА ЗА 7. КЛАС

Задача 1. Магазинер купил от зеленчукова борса a kg домати на цена b лв. за килограм и 100 пъти повече картофи, чиято цена за килограм е с 64% по-ниска от цената на доматите.

Той продал закупеното количество, като в магазина му доматите били с $a^2\,\%$ по-скъпи, а на картофите – с $b^2\,\%$ по-скъпи, отколкото на борсата.

а) Намерете отношението $b : a$, ако печалбата на магазинера от продажбата е била $0,12a^2b^2$ лв.

б) С колко процента щеше да е по-голяма печалбата, ако $b : a = 1 : 2$ и в магазина доматите бяха с $b^2\,\%$ по-скъпи, а картофите – с $a^2\,\%$ по-скъпи, отколкото на борсата?

Решение. Отговор. а) 1 : 6; б) 262,5%.

а) Закупената стока струва $ab + 100a \cdot 0,36b = 37ab$ лв. и е продадена за

$$ab(100 + a^2)\% + 100a \cdot 0,36b(100 + b^2)\% = 37ab + \frac{ab(a^2 + 36b^2)}{100} \text{ лв.}$$

Печалбата е $\dfrac{ab(a^2 + 36b^2)}{100}$ лв. От

$$\frac{ab(a^2 + 36b^2)}{100} = 0,12a^2b^2$$

следва, че

$$(a - 6b)^2 = 0 \iff b : a = 1 : 6.$$

(3 точки)

б) Закупената стока струва $37ab$ лв. и е продадена за

$$ab(100 + b^2)\% + 100a \cdot 0,36b(100 + a^2)\% = 37ab + \frac{ab(b^2 + 36a^2)}{100} \text{ лв.,}$$

т.е. печалбата е $\dfrac{ab(b^2 + 36a^2)}{100}$ лв. Тъй като $a = 2b$, печалбата в този случай е $2,9b^4$.

(2 точки)

Печалбата в а) е $\dfrac{ab(a^2 + 36b^2)}{100}$, което при $a = 2b$ е равно на $0,8b^4$.

Ако печалбата в този случай е с $x\%$ по-голяма от печалбата в а), то

$$x\%0,8b^4 = 2,9b^4 - 0,8b^4 \iff x = \frac{210}{0,8} = 262,5.$$

(2 точки)

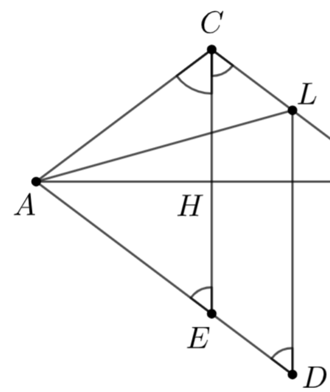
Задача 2. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) са построени ъглополовящите AL и CH. Оказало се, че $AL = 2\,CH$.

а) Намерете ъглите на триъгълника ABC.

б) Точките P и Q от страната AC са такава, че $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle QBC$. Ако $R = BP \cap AL$ и $N = QR \cap AB$, а K е точката от страната AB, за която $\sphericalangle AKR = \sphericalangle NPB$, докажете, че $AK = BR$.

Решение. а) **(3 точки)**

Да означим $\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCH = \alpha$, тогава $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 90^\circ - \alpha$. Да удвоим ъглополовящата (и височина) CH, т.е да вземем точка $E \in CH^{\rightarrow}$ така, че $CE = 2\,CH$. Тогава AH е симетрала на отсечката CE, следователно $AE = AC$, $\triangle AEC$ е равнобедрен и $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = \alpha$, а $\sphericalangle EAH = \sphericalangle CAH = 90^\circ - \alpha$. От равенството $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ECB = \alpha$ следва, че $AE || CB$.



Нека D е пресечната точка на правата AE и правата през L, която е успоредна на CE. Тогава $CEDL$ е успоредник, $\sphericalangle D = \alpha$ и

$$LD = CE = 2\,CH = AL.$$

Тогава триъгълникът ADL е равнобедрен и $\sphericalangle DAL = \sphericalangle D = \alpha$. От друга страна,

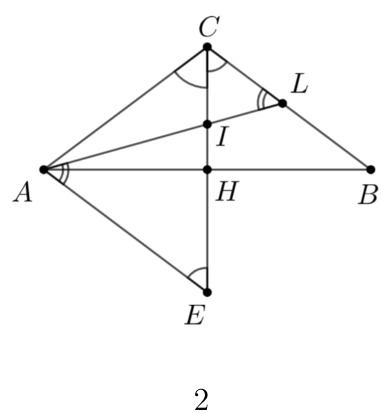
$$\sphericalangle DAL = \sphericalangle EAH + \sphericalangle BAL = 90^\circ - \alpha + \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}(90^\circ - \alpha).$$

Получаваме равенството

$$\alpha = \frac{3}{2}(90^\circ - \alpha) \iff \alpha = 54^\circ.$$

Следователно $\sphericalangle ACB = 108^\circ$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 36^\circ$.

Второ решение. Ако означим $\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCH = \alpha$ и удвоим ъглополовящата CH до $CE = 2\,CH = AL$, получаваме, че $AE || CB$ (например, както в първото решение). Следователно $\sphericalangle EAI = \sphericalangle CLI = \beta$.



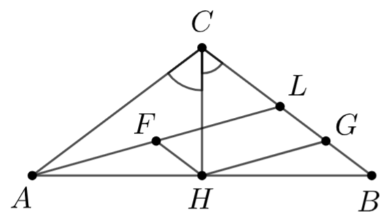
Ако $\alpha > \beta$, от $\triangle AEI$ получаваме неравенството $AI > EI$, а от $\triangle CIL$ получаваме неравенството $IL > IC$, откъдето $AL = AI + IL > EI + IC = CE$.

Ако $\alpha < \beta$, по същия начин получаваме $AL < CE$.

Следователно равенството $AL = CE$ е в сила точно когато $\alpha = \beta$.

Тогава $\alpha = \sphericalangle ALC = \sphericalangle BAL + \sphericalangle ABL = \dfrac{3}{2}(90^\circ - \alpha)$ и получаваме $\alpha = 54^\circ$, $\sphericalangle ACB = 108^\circ$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 36^\circ$.

Трето решение. През точка H построяваме $HF||BC$, $F \in AL$ и $HG||AL$, $G \in BC$. Тогава $FHGL$ е успоредник, откъдето $HG = FL$, а триъгълниците AHF и HBG са еднакви по втори признак, откъдето $HG = AF$. Така получихме, че $HG = \dfrac{1}{2}AL = CH$, т.е. триъгълникът CHG е равнобедрен.



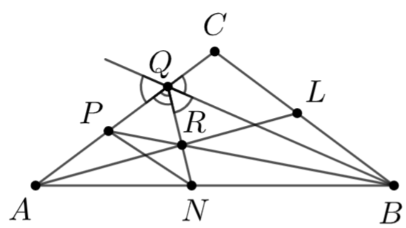
Ако $\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCH = \alpha$, тогава $\sphericalangle CGH = \alpha = \sphericalangle ALC = \dfrac{3}{2}(90^\circ - \alpha)$ и намираме $\alpha = 54^\circ$, $\sphericalangle ACB = 108^\circ$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 36^\circ$.

б) **(4 точки)**

Първо ще намерим $\sphericalangle NPB$. Като използваме резултата от а), пресмятаме

$$\sphericalangle BAL = \sphericalangle CAL = 18^\circ,\ \sphericalangle ABP = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle QBC = 12^\circ$$

и от сбора на ъглите в $\triangle ABQ$ получаваме $\sphericalangle AQB = 120^\circ$, следователно $\sphericalangle BQC = 60^\circ$.



В триъгълника ABQ ъглополовящите на $\sphericalangle BAQ$ и $\sphericalangle ABQ$ се пресичат в точка R, следователно R е на равни разстояния от AQ, AB и BQ, т.е. QR е ъглополовяща на $\sphericalangle AQB$, откъдето $\sphericalangle AQR = \sphericalangle BQR = 60^\circ$.

В триъгълника NBQ вътрешната ъглополовяща BR и външната ъглополовяща AQ се пресичат в точка P, следователно P е на равни разстояния от BQ, BN и NQ, т.е. PN е ъглополовяща на $\sphericalangle ANQ$.

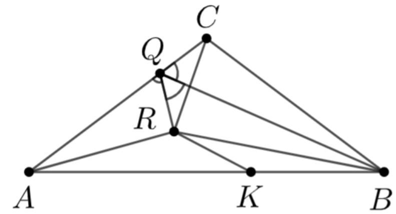
Оттук

$$\sphericalangle ANP = \frac{1}{2}\sphericalangle ANQ = \frac{1}{2}(\sphericalangle NQB + \sphericalangle NBQ) = \frac{1}{2}(60^\circ + 24^\circ) = 42^\circ.$$

Тъй като $\sphericalangle ANP$ е външен ъгъл за $\triangle NBP$, намираме

$$\sphericalangle NPB = \sphericalangle ANP - \sphericalangle NBP = 42^\circ - 12^\circ = 30^\circ.$$

Сега да построим точка K от страната AB, така че $\sphericalangle AKR = 30^\circ$.



По втори признак триъгълниците CBQ и RBQ са еднакви, следователно $QR = QC$ и $BR = BC$.

Това означава, че BQ е симетрала на CR и намираме $\sphericalangle QCR = 90^\circ - \sphericalangle BQC = 30^\circ$.

Тогава триъгълниците AKR и ACR също са еднакви по втори признак и получаваме

$$AK = AC = BC = BR.$$

Задача 3. Нека $M = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Да се намери най-малкото естествено число n, за което всяко подмножество на M с n елемента съдържа две различни числа a и b, такива че сборът $a + b$ дели произведението ab.

Решение. Отговор. 39.

Ще намерим всички двойки числа a и b от множеството M, такива че сборът $a + b$ дели произведението ab. Нека $(a, b) = c$, т.е. $a = ca_1$ и $b = cb_1$, като $(a_1, b_1) = 1$.

Тогава $c(a_1 + b_1) \mid c^2 a_1 b_1$, т.е. $(a_1 + b_1) \mid ca_1 b_1$. Тъй като $a_1 + b_1$ е взаимнопросто с a_1 и с b_1, то $(a_1 + b_1) \mid c$. От $c(a_1 + b_1) \leqq 99$ и $a_1 + b_1 \leqq c$ следва, че $a_1 + b_1 \leqq 9$.

Образуваме всички възможни двойки числа a и b от M, за които $a < b$ и $a + b \mid ab$.

a_1	b_1	c	a	b
1	2	3	3	6
1	2	6	6	12
1	2	9	9	18
1	2	12	12	24
1	2	15	15	30
1	2	18	18	36
1	2	21	21	42
1	2	24	24	48
1	3	4	4	12
1	3	8	8	24
1	3	12	12	36
1	3	16	16	48

a_1	b_1	c	a	b
1	4	5	5	20
1	4	10	10	40
1	5	6	6	30
1	6	7	7	42
2	3	5	10	15
2	3	10	20	30
2	3	15	30	45
2	5	7	14	35
3	4	7	21	28
3	5	8	24	40
4	5	9	36	45

(3 точки)

От намерените 23 двойки числа a и b избираме следните 12 непресичащи се двойки (a, b):

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
3	4	5	7	8	9	10	14	15	16	21	36
6	12	20	42	24	18	40	35	30	48	28	45

Както и да премахнем 11 числа от M, ще остане множество с 39 числа, което включва двойка $(a; b)$ измежду посочените 12. Следователно $n \leqq 39$.

(2 точки)

Можем да образуваме следното подмножество на M с 38 елемента, което не съдържа нито една от намерените 23 двойки:

1	2	3	4	5		7	8	9	10
11		13			16	17		19	
	22	23		25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	
41		43	44		46	47		49	50

Следователно $n = 39$ е най-малкото число, което удовлетворява условието на задачата.

(2 точки)