Задача 8.1. Нека u, v са корените на уравнението $3x^2 + 4x = 2$. Съставете квадратно уравнение с коефициенти цели числа, имащо за корени:

а) u^{-3} и v^{-3};

б) $u^{-3} + v^{-3}$ и $u^{-4} + v^{-4}$.

Отговор. Например а) $8y^2 - 136y - 27 = 0$; б) $2y^2 - 123y + 1513 = 0$.

Решение. От формулите на Виет $u + v = -\frac{4}{3}$, $uv = -\frac{2}{3}$.

Първи подход. Имаме $u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = \dfrac{16}{9} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{28}{9}$,

$u^4 + v^4 = (u^2+v^2)^2 - 2(uv)^2 = \dfrac{784}{81} - \dfrac{8}{9} = \dfrac{712}{81}$,

$u^{-4} + v^{-4} = \dfrac{u^4+v^4}{u^4v^4} = \dfrac{712}{81} \cdot \dfrac{81}{16} = \dfrac{89}{2}$,

$u^{-3} + v^{-3} = \dfrac{u^3+v^3}{u^3v^3} = \dfrac{(u+v)^3 - 3uv(u+v)}{u^3v^3} = = \frac{-\frac{64}{27} - \frac{8}{3}}{-\frac{8}{27}} = \frac{64+72}{8} = 8 + 9 = 17$.

Втори подход. Нека дефинираме $S_n = u^n + v^n$ за цяло n. Имаме $(u+v)(u^n+v^n) = u^{n+1} + v^{n+1} + uv(u^{n-1} + v^{n-1})$, т.е.

$$-\frac{4}{3}S_n = S_{n+1} - \frac{2}{3}S_{n-1}.$$

Оттук $S_{n-1} = \frac{3}{2}S_{n+1} + 2S_n$. От $S_1 = -\frac{4}{3}$ и $S_0 = 2$ последователно получаваме $S_{-1} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 2 = -2 + 4 = 2$, $S_{-2} = \frac{3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$, $S_{-3} = \frac{3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 7 = 3 + 14 = 17$, $S_{-4} = \frac{3}{2} \cdot 7 + 2 \cdot 17 = \frac{89}{2}$.

а) Ако търсеното уравнение е $ay^2 + by + c = 0$, то $-\frac{b}{a} = S_3 = 17$, $-\frac{c}{a} = u^{-3}v^{-3} = (-\frac{2}{3})^{-3} = -\frac{27}{8}$. Ако $a = 8$, то $c = -27$, $b = -17 \cdot 8 = -136$ и уравнението е $8y^2 - 136y - 27 = 0$.

б) Ако търсеното уравнение е $ay^2 + by + c = 0$, то $\frac{b}{a} = 17 + \frac{89}{2} = \frac{123}{2}$, $\frac{c}{a} = 17 \cdot \frac{89}{2} = \frac{1513}{2}$. Ако $a = 2$, то $c = 1513$, $b = -123$ и уравнението е $2y^2 - 123y + 1513 = 0$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за а), от които 1 т. за правилно пресмятане на $u + v$ и uv, 1 т. за правилно пресмятане на $u^3 + v^3$ и u^3v^3 и 1 т. за верен обоснован отговор; 3 т. за б), от които 1 т. за правилно пресмятане на $u^3 + v^3$, 1 т. за правилно пресмятане на $u^4 + v^4$ и 1 т. за верен обоснован отговор.

Задача 8.2. Точките A, B, C, D лежат на окръжност k в този ред, като $CD = 1$ см и $AB = BC = AD = 2$ см. Правите AD и BC се пресичат в точка P, а допирателните към k в точките B и D се пресичат в точка Q. Колко пъти по-голямо е лицето на четириъгълника $ABQP$ от лицето на триъгълника CDP?

Отговор. 12

Решение. От $AD = BC$ имаме $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$, т.е. $\measuredangle ABD = \measuredangle BDC$; значи $AB \parallel CD$. Предвид $AB = 2CD$ сега следва, че CD е средна отсечка в триъгълника ABP, откъдето $AD = DP = BC = CP = 2$. От допирателните имаме $DQ = BQ$ и

$$\measuredangle QBC = \measuredangle BDC = \measuredangle DCP - \measuredangle DBC = \measuredangle PDC - \measuredangle QDC = \measuredangle PDQ.$$

Следователно $\triangle BCQ \cong \triangle DPQ$ по две страни и ъгъл между тях. Оттук $QC = QP$. Също, ако $\measuredangle BQC = x$ и $\measuredangle QBC = \measuredangle QDP = \theta$, то $\measuredangle DQP = x$, $\measuredangle QPC = \measuredangle QCP = \theta + x$, а пък $\measuredangle PDC = \measuredangle PCD = \measuredangle PBA = \measuredangle BDC + \measuredangle DBC = \theta + \varphi$, съответно $\measuredangle CPD = 180^\circ - 2\theta - 2\varphi$. Сега от сбора на ъглите в триъгълника DPQ получаваме $x = \varphi$, значи $\measuredangle ABP = \measuredangle BPQ$ и $AB \parallel PQ$, т.е. $ABQP$ е трапец.

Нататък, от горните пресмятания следва $\triangle ABP \cong \triangle PCQ$ по страна и ъгли, значи $PQ = AP = 4$. Също, ако h е разстоянието от P до CD, то от $AB = 2CD$ и $AB \parallel CD$ и съображения за средни отсечки следва, че разстоянието от P до AB е $2h$. Окончателно

$$\frac{S_{ABPQ}}{S_{CDP}} = \frac{\frac{(AB+PQ)\cdot 2h}{2}}{\frac{CD\cdot h}{2}} = \frac{2(AB+PQ)}{CD} = \frac{2\cdot(2+4)}{1} = 12.$$

Коментар. Алтернативен подход за получаване на $AB \parallel PQ$ е както следва – от $\measuredangle QBC = \measuredangle PDQ$ следва, че $BDPQ$ е вписан в окръжност, значи $\measuredangle DQP = \measuredangle DBC = \measuredangle QDC$, съответно $PQ \parallel CD \parallel AB$.
В общия случай отговорът при $AB = 2CD$, $AD = BC$ и $AD : CD = k$ (в дадената задача $k = 2$) е $4 + 2k^2$, но доказването на това изглежда изисква употребата на подобни триъгълници.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за доказване на $AB \parallel PQ$ (от които 1 т. за $AD = DP = BC = CP$, 1 т. за $\triangle BCQ \cong \triangle DPQ$ и 1 т. за довършване); 1 т. за получаване на $PQ = 4$; 1 т. за отбелязване и обосновка, че височината на CDP към CD е два пъти по-малка от тази на $ABPQ$, 1 т. за верен отговор.

Задача 8.3. За различни положителни реални числа x, y, z означаваме

$$A = \frac{x+y}{x-y} + \frac{y+z}{y-z} + \frac{z+x}{z-x}.$$

а) Да се докаже, че $|A| > 1$ за произволни x, y, z.

б) Да се даде пример за x, y, z с $|A| < 1 + \dfrac{1}{1000}$.

Решение. Първи подход. а) След освобождаване от знаменател неравенството е еквивалентно на

$$\left|x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 - 6xyz\right| > \left|x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2\right|.$$

Лявата страна е неотрицателна от неравенството между средноаритметично и средногеометрично. Така (в зависимост от знака на израза в модула вдясно) свеждаме до доказването на $xy^2 + yz^2 + zx^2 > 3xyz$ и $x^2y + y^2z + z^2x > 3xyz$. Тези следват отново от неравенството между средноаритметично и средногеометрично, като равенство не се достига, понеже по условие x, y, z са различни.

б) При $z = 1$ и $y = x^2$ с $x > 1$ имаме $A = \dfrac{x^2+4x+1}{1-x^2}$, съответно $|A| = \dfrac{x^2+4x+1}{x^2-1}$. Последното е по-малко от $1 + \dfrac{1}{1000}$ точно когато $x(x-4000) > 2001$, което е вярно например за $x = 4001$.

Втори подход. Ще докажем исканото за по-общата ситуация, в която се позволява едно от числата да е 0. Явно две от събираемите на A са с еднакъв знак, а третото е с противоположния знак. Пренареждайки x, y, z, ако е необходимо (с което евентуално ще променим само знака на A, но не и $|A|$), може да считаме, че $0 \leq x < y < z$. Достатъчно е да докажем, че

$$f(x,y,z) = \frac{x+y}{y-x} + \frac{y+z}{z-y} - \frac{z+x}{z-x} > 1.$$

Нека заместим $x = x' + c$, $y = y' + c$, $z = z' + c$, където $c \geq 0$ е реално число, такова че $0 \leq x' < y' < z'$. Получаваме

$$f(x,y,z) = f(x',y',z') + 2c\left(\frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-y} - \frac{1}{z-x}\right).$$

Да забележим, че изразът в скобите отдясно е положителен, тъй като $\frac{1}{z-y} > \frac{1}{z-x}$. Следователно, при $c \geq 0$ имаме $f(x,y,z) \geq f(x',y',z')$. Оттук за $c = x$ следва

$$f(x,y,z) \geq f(0, y-x, z-x) = 1 + \frac{2(y-x)}{z-y} > 1.$$

От тук също се вижда, че при фиксирано x стойността $f(x,y,z)$ може да е колкото искаме близка до 1.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за а), от които 0 т. за освобождаване от знаменател и разкриване на скобите в двете страни, 2 т. за обосновка, че лявата страна на неравенството без знаменатели е неотрицателна, по 1 т. за доказване на всеки от двата случая за дясната страна, 1 т. за обосновка защо равенство не се достига; 2 т. за б), от които 1 т. за деклариране на верен пример и 1 т. за обосновка, че той наистина е такъв.

Задача 8.4. Определете броя на всички редици от 7 различни естествени числа със следните две свойства:

(i) не съществуват три поредни числа в редицата, средното от които да е по-голямо от всяко от двете други;

(ii) всяко естествено число (без значение дали е елемент на редицата), което е по-малко от най-големия елемент на редицата, се различава с не повече от 2 от някой елемент на редицата.

Отговор. 3 000 000

Решение. Нека броят на всички редици от n различни естествени числа с тези свойства е r_n. Ще докажем, че $r_n = 3.10^{n-1}$ с индукция по n. При $n = 1$ това е вярно: единственият елемент на редицата е или числото 1, или 2, или 3. Да предположим, че твърдението е доказано за някое n. Най-големият елемент на такава редица с $n+1$ числа задължително е на първо или последно място (заради (i)) и стойността му е с 1, 2, 3, 4 или 5 по-голяма от тази на следващия най-голям елемент (заради (ii)). Останалите елементи образуват такава редица с n елемента; използвайки индукционното предположение, заключаваме, че $r_{n+1} = 2.5.3.10^{n-1} = 3.10^n$. Индукционната стъпка е завършена. Остава да пресметнем $r_7 = 3.10^6 = 3\,000\,000$.

Оценяване. (7 точки) При дадения подход: 1 т. за работеща идея за индукция; 1 т. за обосноваване на базата; 1 т. за обяснение, че най-голямото число е в края; 1 т. за обяснение, че елементите в редицата се различават с не повече от 5; 2 т. за правилно извършване на индукционната стъпка; 1 т. за обоснован верен отговор