Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

74. Национална Олимпиада по математика

8 клас: условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Един изпъкнал четириъгълник $ABCD$ ще наричаме *иновативен*, ако са изпълнени следните две условия:

- Точките A, B, C, D в този ред лежат на окръжност с център O и радиус 1 см.
- Ако точките M, N, P, Q са средите съответно на страните AB, BC, CD, DA, то $MP = NQ$.

а) Ако $ABCD$ е иновативен четириъгълник, то намерете най-голямата възможна стойност (в сантиметри) на сбора от дължините на отсечките OM и OP.

б) Крайно или безкрайно е множеството от нееднаквите иновативни четириъгълници, при които стойността от а) се достига?

Отговор. а) $\sqrt{2}$ см; б) безкрайно.

Решение. а), б) Според Теоремата на Вариньон $MNPQ$ е успоредник със страни, успоредни на диагоналите на $ABCD$. Така $MP = NQ$ е изпълнено точно когато $MNPQ$ е правоъгълник, т.е. (поради споменатата успоредност) точно когато $AC \perp BD$. Нека $T \in AC \cap BD$.

От съображения за централни и вписани ъгли имаме $2\measuredangle AOM = \measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$, т.е. $\measuredangle AOM = \measuredangle ACB$. Аналогично $\measuredangle COP = \measuredangle TBC$. Но $\measuredangle TCB + \measuredangle TBC = 90^\circ$ и значи $\measuredangle AOM + \measuredangle COP = 90^\circ$, т.е. $\measuredangle AOM = \measuredangle OCP$. Заедно с $\measuredangle AMO = \measuredangle CPO = 90^\circ$ и $AO = OC$ получаваме $\triangle AOM \cong \triangle OCP$ и в частност $AM = OP$.

Остава да намерим максимума на $AM + OM$. Да забележим, че $AM^2 + OM^2 = 1$ от Питагоровата теорема за триъгълника AOM. От неравенството $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ за $x, y > 0$ (еквивалентно на $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ и значи на $(x - y)^2 \geq 0$) за $x = AM$ и $y = OM$ получаваме, че $OM + OP \leq \sqrt{2}$.

Аргументите ни показват, че тази стойност се достига точно при $AB = \sqrt{2} = CD$, или еквивалентно $\measuredangle AOB = 90^\circ = \measuredangle COD$, което влече $AC \perp BD$ и $\measuredangle ACB = \measuredangle DBC = \measuredangle ADB = \measuredangle CAD = 45^\circ$. За всяка стойност на $\measuredangle BOC \in (0; 90^\circ)$ тези четириъгълници са различни, така че множеството е безкрайно.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за а), от които 1 т. за обосновка на $AC \perp BD$, 2 т. за доказване на $AM = OP$, 1 т. за използване на $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ и 1 т. за довършване и окончателен отговор; 2 т. за б), от които 1 т. за описание на безбройно много (може всички) четириъгълници, които достигат равенство и 1 т. за обосновка, че те наистина са безбройно много.

Задача 8.2. Да се намерят всички двойки $(a; b)$ от цели неотрицателни числа, такива че за всяко естествено число n числото

$$a \cdot 4^n + b \cdot 2^n - 2^{an^2+bn}$$

се дели на $an^2 + bn$.

Отговор. $(a; b) = (0; 1)$.

Решение. Нека $n = p \geq 3$ е произволно просто число. От малката теорема на Ферма имаме по модул p сравненията $4^p \equiv 4$, $2^p \equiv 2$, $2^{ap^2} \equiv 2^a$ и $2^{bp} \equiv 2^b$ (понеже $a(p^2 - 1)$ и $b(p - 1)$ се делят на $p - 1$ и $2^{p-1} \equiv 1$). Така понеже p дели $ap^2 + bp$, непременно p дели $4a + 2b - 2^{a+b}$. Понеже за p има безбройно много възможности, получаваме, че непременно $2^{a+b} = 4a + 2b$.

Сега ако $m = \max(a, b)$, то лявата страна е поне 2^m, а дясната не надминава $6m$, откъдето $2^m \leq 6m$. Обаче $2^m > 6m$ за $m \geq 5$ по индукция, понеже $32 > 30$ и ако $2^m > 6m$, то $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m > 2 \cdot 6m \geq 6m + 6 = 6(m + 1)$. Следователно $0 \leq a, b \leq 4$ и директна проверка показва, че $2^{a+b} = 4a + 2b$ се изпълнява само от $(0; 1)$, $(0; 2)$, $(1; 2)$ и $(4; 0)$.

Ако $a = 0$ и $b = 1$, то делимото е 0 за всяко естествено n и исканото е изпълнено.

Ако $a = 0$ и $b = 2$, то при $n = 6$ числото $2n = 12$ не дели $2^{n+1} - 2^{2n} = 2^7 - 2^{12} = -31 \cdot 2^7$.

Ако $a = 1$ и $b = 2$, то трябва $p^2 + 2p$ да дели $4^p + 2^{p+1} - 2^{p^2+2p}$, което не е изпълнено за $p = 3$, понеже делимото е $80 - 2^{15}$ и не се дели на 5.

Ако $a = 4$ и $b = 0$, то трябва $4p^2$ да дели $4^{p+1} - 2^{4p^2}$, което не е изпълнено за $p = 3$, понеже $4^4 \equiv 4 \pmod 9$ и $2^{36} \equiv (2^6)^6 \equiv 1 \pmod 9$.

Оценяване. (7 точки) Общо 1 т. за верен отговор, обосновка защо $a = 0$ с $b = 1$ работи и разглеждане на делимост на просто $n = p$ в общия случай; 2 т. за опростяване на делимото до $4a + 2b - 2^{a+b}$, 1 т. за аргументиране на $2^{a+b} = 4a + 2b$, 1 т. за доказване на $0 \leq a, b \leq 4$, 2 т. за отхвърляне на всички $0 \leq a, b \leq 4$ освен $a = 0$ с $b = 1$.

Задача 8.3. В координатна система са отбелязани 2025-те точки от вида $(x; y)$: $x, y \in \{1, 2, \ldots, 45\}$. Построена е начупена линия L с върхове в различни отбелязани точки и редуващи се звена (отсечки) с дължина 1 и $\sqrt{2}$ (няма изискване от кой вид да е първото звено). От колко най-много звена може да се състои L?

Отговор. 1939.

Решение. Ще покажем по-общо твърдение: ако са отбелязани точките от вида $(x; y)$: $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$, то максималният брой звена в L е $4n^2 + 3$. Оттук при $n = 22$ ще следва, че отговорът е $44^2 + 3 = 1939$.

Оценка. Да оцветим всеки връх от L в цвят Ч, ако сборът от координатите му е четен, и в цвят Н, ако е нечетен (това оцветяване е шахматно). Поради редуването на звената цветовете са поредица от групи ЧЧНН, като крайните групи могат да са непълни. Всяко звено ЧЧ свързва точка с четни координати с такава с нечетни.

Точките с две четни координати са n^2 на брой, така че групите ЧЧ са не повече от n^2 на брой. Около тях може да има най-много n^2+1 групи НН и евентуално в края може да има по едно Ч, така че общият брой звена е не повече от $(n^2+n^2+1).2+1 = 4n^2+3$.

Пример. Ще построим начупена линия L_n с $4n^2+3$ звена, завършваща със звено с дължина 1 в точката $(1; 2n+1)$. Построението е с индукция по n. Върховете на L_1 могат да са поред $(3;1)$, $(3;2)$, $(2;3)$, $(3;3)$, $(2;2)$, $(2;1)$, $(1;2)$, $(1;3)$. Ако вече е построена L_n, то след размяна на координатите ще считаме, че тя завършва в $(2n+1;1)$ (последното звено е с дължина 1). За дострояване на L_{n+1} продължаваме с върховете $(2n+2;2)$, $(2n+3;2)$, $(2n+2;3)$, $(2n+3;3)$, $\ldots$, $(2n+2;2n+1)$, $(2n+3;2n+1)$, $(2n+2;2n+2)$, $(2n+2;2n+3)$, $(2n+1;2n+2)$, $(2n+1;2n+3)$, $(2n;2n+2)$, $(2n;2n+3)$, $\ldots$, $(2;2n+2)$, $(2;2n+3)$, $(1;2n+2)$, $(1;2n+3)$. Построената по този начин L_{n+1} завършва с отсечка с дължина 1 в точката $(1;2(n+1)+1)$ и съдържа общо $4n^2+3+2(2n+1)+2(2n+1) = 4n^2+8n+4+3 = 4(n+1)^2+3$ звена. Това завършва индукционната стъпка.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за оценката, от които 1 т. за разглеждане на шахматно оцветяване и отбелязване, че цветът се редува през две звена; 3 т. за примера.

Задачите са предложени както следва:
8.1, 8.2 – Мирослав Маринов, 8.3 – Ивайло Кортезов.