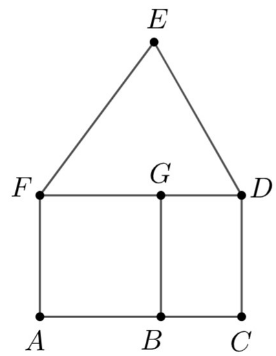
Министерство на образованието и науката
Съюз на Математиците в България

ПРОЛЕТНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ

Плевен, 28 – 30 март 2025 г.

Тема за 5. клас, задачи и решения



Задача 1. Квадратът $ABGF$, правоъгълникът $BCDG$ и триъгълникът FDE са разположени, както е показано на чертежа.
Триъгълникът FDE има обиколка 2025 cm, а обиколката на фигурата $ACDEF$ е с 56% по-голяма от обиколката на FDE.

а) Намерете страната на квадрата $ABGF$.

б) Отсечката ED е с 40% по-малка от отсечката FD, която е с 40% по-голяма от отсечката EF. Колко процента от лицето на правоъгълника $ACDF$ е лицето на правоъгълника $BCDG$?

Решение. а) Нека страната на квадрата $ABGF$ е равна на a см. Тъй като $FD = AC$, разликата на обиколките на фигурата $ACDEF$ и триъгълника FDE е $AF + CD = 2.a$. Следователно

$$2.a = 56\% \cdot 2025 \text{ и } a = 28\% \cdot 2025 = 567 \text{ cm}.$$

(2 точки)

б) Нека $EF = x$, тогава $FD = 140\%x = 1{,}4x$ и

$$ED = 60\% \cdot FD = 60\% \cdot 140\%x = 84\%x = 0{,}84x.$$

Сборът им е

$$x + 1{,}4x + 0{,}84x = 2025 \iff 3{,}24x = 2025,$$

откъдето намираме $x = 2025 : 3{,}24 = 625$. Следователно $EF = 625$ cm.

(2 точки)

Тъй като $FD = 1{,}4 \cdot 625 = 875$ cm, намираме

$$GD = FD - FG = 875 - 567 = 308 \text{ cm},$$

откъдето

$$\frac{S_{BCDG}}{S_{ACDF}} = \frac{GD \cdot CD}{FD \cdot CD} = \frac{GD}{FD} = \frac{308}{875} = \frac{44}{125} = 35{,}2\%.$$

(2 точки)

Задача 2. Мечо Пух и Йори имали общо 312 бонбона. Първо Мечо Пух подарил $\dfrac{1}{4}$ от своите бонбони на Йори. След това Йори дал $\dfrac{1}{3}$ от бонбоните, които имал в момента, на Мечо Пух. Накрая Мечо Пух подарил на Йори $\dfrac{1}{2}$ от бонбоните, които имал в този момент. Така се оказало, че Йори имал точно толкова бонбони, колкото имал Мечо Пух в началото. Колко бонбона е имал всеки от тях отначало?

Решение. Нека отначало Мечо Пух е имал a бонбона, а Йори е имал b бонбона;

$$a + b = 312.$$

След третото даване Йори имал a бонбона и тъй като общият брой на бонбоните се е запазил, то Мечо Пух е имал b бонбона.

(1 точка)

При първото даване Мечо Пух дал на Йори $\dfrac{1}{4}a$ бонбона. След това Мечо Пух имал $\dfrac{3}{4}a$ бонбона, а Йори е имал $b + \dfrac{1}{4}a$ бонбона.

(1 точка)

При второто даване Йори е дал на Мечо Пух $\dfrac{1}{3}\left(b + \dfrac{1}{4}a\right) = \dfrac{1}{3}b + \dfrac{1}{12}a$ бонбона. Така бонбоните на Мечо Пух станали

$$\frac{3}{4}a + \left(\frac{1}{3}b + \frac{1}{12}a\right) = \frac{5}{6}a + \frac{1}{3}b.$$

(1 точка)

При третото даване Мечо Пух дал половината от бонбоните си на Йори и му останали b бонбона; следователно преди нея Мечо Пух е имал $2b$ бонбона. Получаваме равенството

$$2b = \frac{5}{6}a + \frac{1}{3}b,$$

от което следва, че $a = 2b$.

(2 точки)

Следователно общият брой бонбони е $3b = 312$ и намираме $b = 104$, $a = 208$, т.е. Мечо Пух е имал 208 бонбона, а Йори е имал 104 бонбона.

(1 точка)

Задача 3. Редовете и стълбовете на квадратна таблица с 2025 реда и 2025 стълба са номерирани от 1 до 2025. Първоначално всички квадратчета в таблицата са бели, а след това оцветили:

• в **жълто** всички квадратчета в редове с номер, кратен на 3, и всички квадратчета в стълбове с номер, кратен на 15;

• в **синьо** всички квадратчета в редове с номер, кратен на 5, и всички квадратчета в стълбове с номер, кратен на 9.

При смесване на жълт и син цвят се получава зелен цвят.

Ако броят на белите, жълтите, сините и зелените квадратчета в таблицата е съответно $2025.a$, $2025.b$, $2025.c$ и $2025.d$, намерете a, b, c и d.

Решение. Оцветяването на редовете се повтаря през $\text{НОК}(3;5) = 15$, а оцветяването на стълбовете – през $\text{НОК}(9;15) = 45$. Следователно таблицата е покрита с еднакво оцветени правоъгълници с 15 реда и 45 стълба. Броят на тези правоъгълници е $\dfrac{2025}{15} \cdot \dfrac{2025}{45} = 6075$.

(1 точка)

Във всеки такъв правоъгълник 15 х 45:

• редовете с номер 3, 6, 9, 12 са жълти, редовете с номер 5, 10 са сини, ред 15 е зелен и остават $15 - (4 + 2 + 1) = 8$ бели реда;

• стълбовете с номер 15, 30 са жълти, стълбовете с номер 9, 18, 27, 36 са сини, стълб номер 45 е зелен и остават $45 - (2 + 4 + 1) = 38$ бели стълба.

(1 точка)

Следователно във всеки правоъгълник 15 х 45 има $8.38 = 304$ бели квадратчета.

(1 точка)

Зелените квадратчета във всеки правоъгълник 15 х 45 се получават:

• от 1 ред с 45 квадратчета и 1 стълб с 15 квадратчета, които имат едно общо квадратче, т.е. $45 + 15 - 1 = 59$ зелени квадратчета;

• при пресичането на 4 сини стълба с 4 жълти реда и 2 жълти стълба с 2 сини реда, т.е. $4.4 + 2.2 = 20$ зелени квадратчета.

Така зелените квадратчета в един правоъгълник са $59 + 20 = 79$.

(1 точка)

Сините квадратчета във всеки правоъгълник 15 х 45 се получават при пресичането на 4 сини стълба с 8 бели реда, 2 сини реда с 38 бели стълба и 4 сини стълба с 2 сини реда, т.е. са $4.8 + 2.38 + 4.2 = 116$.

(1 точка)

Жълтите квадратчета във всеки правоъгълник 15 х 45 се получават при пресичането на 2 жълти стълба с 8 бели реда, 4 жълти реда с 38 бели стълба и 2 жълти стълба с 4 жълти реда, т.е. са $2.8 + 4.38 + 2.4 = 176$.

(1 точка)

Тъй като правоъгълниците 15 х 45 са 6075 на брой, броят на:

• белите квадратчета на дъската е $304.6075 = 2025.a$, откъдето $a = 304.3 = 912$;

• жълтите квадратчета на дъската е $176.6075 = 2025.b$, откъдето $b = 176.3 = 528$;

• сините квадратчета на дъската е $116.6075 = 2025.c$, откъдето $c = 116.3 = 348$;

• зелените квадратчета на дъската е $79.6075 = 2025.d$, откъдето $d = 79.3 = 237$.

(1 точка)

Забележка. Друг начин да се намери броят на квадратчетата от всеки цвят в правоъгълник 15 х 45, е като се разгледат редовете в този правоъгълник. Има:

• 8 *предимно бели* реда с по 38 бели, 2 жълти, 4 сини и едно зелено квадратче;

• 4 *предимно жълти* реда с по 40 жълти и 5 зелени;

• 2 *предимно сини* реда с по 42 сини и 3 зелени;

• 1 *зелен* ред с 45 зелени квадратчета.

Така в правоъгълник 15 х 45 има $8.38 = 304$ бели квадратчета,

$8.1 + 4.5 + 2.3 + 45 = 79$ зелени квадратчета,

$8.2 + 4.40 = 176$ жълти квадратчета,

$8.4 + 2.42 = 116$ сини квадратчета.

Задача 4. На горския празник се събрали вълшебни същества: феи и елфи. Оказало се, че всяка фея познава точно $\frac{1}{5}$ от останалите феи и точно 5 елфи, а всеки елф познава точно $\frac{1}{3}$ от останалите елфи и точно 3 феи.

Елфът Пък и феята Титания се познават, но нямат общи познати. Оказало се, че на празника има 262 вълшебни същества (феи или елфи), които не познават нито Пък, нито Титания.

Колко феи и колко елфи са присъствали на празника?

(Познанствата са взаимни: ако А познава В, то и В познава А.)

Решение. Нека има n феи и k елфи на тържеството. Тъй като всяка фея познава точно 5 елфи, броят на приятелствата между елфи и феи е $5n$. Тъй като всеки елф познава точно 3 феи, броят на познанства между елфи и феи е $3k$. Това означава, че броят на всички познанства е кратен на 3 и на 5, т.е. на 15; да означим този брой с $15a$. Получихме равенството

$$5n = 3k = 15a.$$

Тогава $n = 3a$, $k = 5a$.

(2 точки)

Титания познава $\frac{1}{5}$ от останалите $(n-1)$ феи и 5 елфи, сред които е Пък.

Пък познава $\frac{1}{3}$ от останалите $(k-1)$ елфи и 3 феи, сред които е Титания.

Тъй като те нямат общи познати, броят на всички вълшебни същества е

$$n + k = 5 + \frac{1}{5} \cdot (n-1) + 3 + \frac{1}{3} \cdot (k-1) + 262,$$

$$n + k = 5 + \frac{1}{5} \cdot n - \frac{1}{5} + 3 + \frac{1}{3} \cdot k - \frac{1}{3} + 262.$$

(**2 точки**)

Като извадим от двете страни на равенството $\frac{1}{5} \cdot n$ и $\frac{1}{3} \cdot k$, получаваме

$$\frac{4}{5} \cdot n + \frac{2}{3} \cdot k = 5 - \frac{1}{5} + 3 - \frac{1}{3} + 262 = 269\frac{7}{15}.$$

Като използваме, че $n = 3a$, $k = 5a$, от последното равенство получаваме

$$\frac{4}{5} \cdot 3a + \frac{2}{3} \cdot 5a = 269\frac{7}{15},$$

$$a \cdot \left(\frac{12}{5} + \frac{10}{3}\right) = 269\frac{7}{15},$$

$$a \cdot \frac{86}{15} = \frac{4042}{15}$$

и намираме $a = 47$.

(**2 точки**)

Всички феи са $3.47 = 141$, а всички елфи са $5.47 = 235$.

(**1 точка**)