Задача 12.1. Нека a, b са реални параметри. Да се намери минималната стойност на функцията

$$f(x)=\sqrt{(x+a)^2+1}+\sqrt{(x+1-a)^2+1}+\sqrt{(x+b)^2+1}+\sqrt{(x+1-b)^2+1}$$

и да се определи за кои стойности на x се достига.

Отговор. $\sqrt{(2a-1)^2+4}+\sqrt{(2b-1)^2+4}$ с равенство за $x=-1/2$.

Решение. Ще докажем, че $g(x):=\sqrt{(x+a)^2+1}+\sqrt{(x+1-a)^2+1}\geq\sqrt{(2a-1)^2+4}$ за всяко $x\in\mathbb{R}$.

Първи подход. Имаме, че $g'(x)=\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+1}}+\frac{x+1-a}{\sqrt{(x+1-a)^2+1}}$ и следователно

$$\begin{aligned}
g'(x)=0 &\iff \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+1}}+\frac{x+1-a}{\sqrt{(x+1-a)^2+1}}=0\\
&\iff \frac{(x+a)^2}{(x+a)^2+1}=\frac{(x+1-a)^2}{1+(x+1-a)^2},\ (x+a)(x+1-a)\leq 0\\
&\iff x+a=-(x+1-a) \iff x=-1/2.
\end{aligned}$$

Оттук т.к g е диференцируема и има единствен локален екстремум, то той е глобален и следователно $g(x)\geq g(-1/2)=\sqrt{(2a-1)^2+4}$.

Втори подход. От неравенството на Коши-Шварц имаме, че

$$\begin{aligned}
\sqrt{(2a-1)^2+4}\sqrt{(x+a)^2+1}&\geq(2a-1)(x+a)+2\\
\sqrt{(2a-1)^2+4}\sqrt{(x+1-a)^2+1}&\geq-(2a-1)(x+1-a)+2,
\end{aligned}$$

след събиране на които следва $g(x)\geq\sqrt{(2a+1)^2+4}$ с равенство тогава и само тогава когато $x=-1/2$

Трети подход. Разглеждаме следните точки в Декартова координатна система $A=(-x-a,0), B=(x+1-a,0), C=(0,1)$. Да отбележим, че $M=(1/2,0)$ е среда на отсечката AB. Неравенството $g(x)\geq\sqrt{(2a-1)^2+4}$ следва от класическото неравенство $|BC|+|AC|\geq 2|CM|$, което може да се докаже например чрез взимане на симетричната точка D на C относно M и неравенство на триъгълника за $\triangle ADC$. Равенство се достига точно когато $A\equiv B\equiv M$, т.е когато $x=-1/2$.

Оттук нататък задачата следва като разгледаме аналогичното неравенство $\sqrt{(x+b)^2+1}+\sqrt{(x+1-b)^2+1}\geq\sqrt{(2b-1)^2+4}$ и отбележим, че и в двете неравенства равенство се достига в $x=-1/2$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за верен отговор; 1 т. за твърдение, че $\sqrt{(x+a)^2+1}+\sqrt{(x+1-a)^2+1}\geq\sqrt{(2a-1)^2+4}$; 3 т. за доказателство на твърдението; 1 т. за довършване.0

Задача 12.2. Една редица $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ се нарича *периодична*, ако съществува естествено число t, за което $a_{n+t} = a_n$ при всяко цяло $n \geq 0$. Да се намерят всички стойности на реалното число c, за които редицата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, зададена чрез $a_0 = c$ и $a_{n+1} = 3a_n - 4a_n^3$, е периодична.

Отговор. $c = \sin\frac{(2k+1)\pi}{3^m+1}$ или $c = \sin\frac{2k\pi}{3^m-1}$ за някои $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека първо $c \in [-1, 1]$. Да отбележим, че можем да запишем $a_0 = \sin\alpha_0$ за някое $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. От формулата $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ по индукция лесно следва, че $a_n = \sin 3^n\alpha_0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Редицата (a_n) е периодична тогава и само тогава, когато съществува $m \in \mathbb{N}$, такова че $\sin 3^m\alpha_0 = \sin\alpha_0$. Последното е еквивалентно на това да съществува $k \in \mathbb{Z}$, за което $(3^m+1)\alpha_0 = (2k+1)\pi$ или $(3^m-1)\alpha_0 = 2k\pi$. Тоест редицата a_n е периодична тогава и само тогава, когато $\alpha_0 = \frac{(2k+1)\pi}{3^m+1}$ или $\alpha_0 = \frac{2k\pi}{3^m-1}$ за някои $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

От друга страна при $|x| > 1$ е в сила $|3x - 4x^3| = |x||3 - 4x^2| > |x|$, така че ако $|c| > 1$, то $|a_{n+1}| > |a_n|$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и редицата не е периодична.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за верен отговор; 1 т. за случая $|c| > 1$; 3 т. за $a_n = \sin 3^n\alpha_0$; 1 т. за довършване. Точки, неадитивни към случая $|c| \leq 1$: 1 т. за намиране на решение с период 2; 2 т. за намиране на решение с период 3 или доказателство, че съществуват безбройно много стойности на c, изпълняващи условието.

Задача 12.3. Дадени са естествени числа $m, n \geq 2$. Точките $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са избрани случайно, независимо и равномерно по окръжност с обиколка 1 (т.е. за всяко $i = 1, \ldots, n$, за всяко $x \in (0, 1)$ и за всяка дъга $\mathcal{C}$ с дължина x от окръжността е в сила $\mathbb{P}(A_i \in \mathcal{C}) = x$.)

Каква е вероятността да съществува дъга от окръжността с дължина $1/m$, която съдържа всяка от точките $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

Решение. Първи подход. За всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ нека E_i е събитието всички точки да се съдържат в дъгата $\mathcal{C}_i$ с дължина $1/m$, започваща от A_i по посока на часовниковата стрелка. Имаме, че за всяка точка A_j е в сила $\mathbb{P}(A_j \in \mathcal{C}_i) = 1/m$ и от независимостта следва, че $\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{m^{n-1}}$. Да отбележим също, че т.к $\frac{2}{m} \leq 1$, то $\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = 0$ за $i \neq j$. Следователно

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) = \frac{n}{m^{n-1}}$$

Втори подход. Ако x е точка от окръжността, а $c \in \mathbb{R}$, с $x + c$ означаваме точка от окръжността завъртяна на c радиана спрямо x. Нека X е множеството от всички набори $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n точки върху окръжността. За $x \in X$, нека означим:

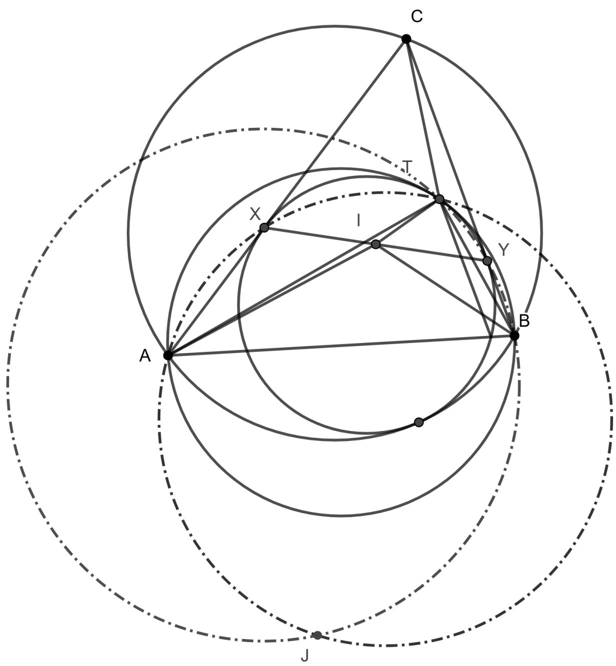
$$S_x := \{y = (y_1, \ldots, y_n) : y_i = x_i + k_i/m, k_i = 0, 1, \ldots, m-1, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Да забележим, че за всеки две $x, y \in X$ или $S_x = S_y$ или $S_x \cap S_y = \emptyset$, т.е. X се разбива на класове от подмножества, всяко състоящо се от m^n елемента. Остава да забележим, че за фиксиран клас S_x точно $n \cdot m$ от наборите точки в него лежат върху дъга с дължина $1/m$. Така търсената вероятност е $\frac{nm}{m^n} = \frac{n}{m^{n-1}}$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за верен отговор; 1 т. за разглеждане на ясно дефинирано E_i; 1 т. за $\mathbb{P}(E_i) = 1/m^{n-1}$; 2 т. за $\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = 0$ за $i \neq j$; 2 т. за довършване.

Задача 12.4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с $AC > BC$ и център I на вписаната окръжност. Нека ω е полувписаната окръжност в триъгълник ABC срещу върха C (това е окръжността, допираща се вътрешно до описаната около $\triangle ABC$ окръжност, както и до правите AC и BC). Окръжността Γ минава през точките A, B и се допира до ω в точка T, като $C \notin \Gamma$ и точка I е в $\triangle ATB$. Да се докаже, че $\measuredangle CTB + \measuredangle ATI = 180^\circ + \measuredangle BAI - \measuredangle ABI$.

Решение. Ще използваме стандартни означения за $\triangle ABC$. Нека точка J е центърът на външновписаната окръжност срещу върха C, а X и Y са допирните точки на ω съответно с AC и BC. Тъй като $CX = CY$ и CJ е ъглополовяща, получаваме $\triangle CXJ \cong \triangle CYJ$, откъдето $\measuredangle JXY = \measuredangle JYX$ и $\measuredangle JXA = \measuredangle JYB$.



Фигура 1:

Ще докажем, че $T = (AXJ) \cap (BYJ)$. Достатъчно е да докажем, че ABT' се допира до ω за $T' = (AXJ) \cap (BYJ)$. Имаме, че $\measuredangle XT'Y = \measuredangle XT'J + \measuredangle YT'J = 180^\circ - \measuredangle JAX + 180^\circ - \measuredangle JBY = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Следователно T' лежи на ω. Също имаме, че

$$\begin{aligned}\measuredangle ABT' &= \measuredangle T'BJ - \measuredangle ABJ = \measuredangle T'YJ - \measuredangle ABJ = \measuredangle XYT' + \measuredangle XYJ - \measuredangle ABJ \\ &= \measuredangle XYT' + \measuredangle YXJ - \measuredangle ABJ = \measuredangle XYT' + \measuredangle XT'A.\end{aligned}$$

Оттук следва, че (ABT') се допира до ω, т.е $T' \equiv T$. Също тъй като CX и CY са допирателни към ω, то CT е симедиана за $\triangle XTY$. Добре известно е (Теорема на Вериер), че I е среда на XY, откъдето следва, че $\measuredangle XTI = 180^\circ - \measuredangle CTB + \measuredangle BTY$. Следователно

$$\begin{aligned}\measuredangle CTB + \measuredangle ATI &= 180^\circ + \measuredangle BTY - \measuredangle ATX \\ &= 180^\circ + \measuredangle BTY + \measuredangle JYB - \measuredangle ATX - \measuredangle JXA \\ &= 180^\circ + \measuredangle JTY - \measuredangle JTX \\ &= 180^\circ + 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 180^\circ + \measuredangle BAI - \measuredangle ABI.\end{aligned}$$

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $T' \in \omega$; 2 т. за $(AT'B)$ допира ω; 1 т. за изразяване на $\measuredangle XTI$ чрез $\measuredangle CTB$ и $\measuredangle BTY$; 3 т. за довършване.

Задачите са предложени от: 8.1 и 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2 и 8.3 – Мирослав Маринов; 9.1 и 9.3 – Константин Делчев; 9.2 и 9.4 – Любен Балтаджиев; 10.1 – Станислав Харизанов; 10.2 – Божидар Димитров; 10.3 – Николай Георгиев; 10.4 – Александър Иванов; 11.1 и 11.2 – Емил Колев; 11.3 и 11.4 – Драгомир Грозев; 12.1, 12.2, 12.3 и 12.4 – Кристиян Василев.