Задача 10.1. Да се намери най-малкото нечетно естествено число n, за което сумата на всички нечетни числа от 1 до 2025 включително дели произведението на всички нечетни числа от 1 до n включително.

Решение. Сумата на нечетните числа от 1 до 2025 включително е:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2025 = \frac{(1 + 2025) \cdot 1013}{2} = 1013^2. \tag{1}$$

Да означим с $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n$ произведението на нечетните числа от 1 до n включително. Тъй като 1013 е просто число, то $1013^2 \mid n!!$ тогава и само тогава, когато поне два от множителите в двойния факториел се делят на 1013. Най-малките нечетни числа, делящи се на 1013, са 1013 и $3 \cdot 1013 = 3039$. Следователно $3039 \leq n$ и минималната търсена стойност е $n = 3039$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за доказателство на (1); 1 т. за наблюдението, че 1013 е просто; 2 т. за доказателство на $3039 \leq n$; 2 т. за аргументиран отговор на базата на горните формули.

Задача 10.2. Даден е неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC. Точката D лежи върху страната му BC. Точките P и Q са средите на дъгите $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$, несъдържащи точка D, от описаните окръжности съответно около триъгълниците ABD и ACD. Да се докаже, че окръжността, описана около триъгълника PQD, минава през постоянна точка, независеща от положението на D върху BC.

Решение. Ще покажем, че въпросната окръжност минава през средата M на BC. Нека N и K са средите на AB и AC. Ако означим $\measuredangle ADB = 2\theta$, то $\measuredangle APB = 180^\circ - 2\theta \implies \measuredangle NPB = 90^\circ - \theta$. Също $\measuredangle AQC = 2\theta \implies \measuredangle KQC = \theta$. Следователно $\triangle PNB \sim \triangle CKQ$ и $\frac{KQ}{KC} = \frac{NB}{NP}$. Освен това от средни отсечки имаме, че $NM = KC$ и $KM = NB$. Също така $\measuredangle PNM = \measuredangle QKM = 90^\circ + \measuredangle BAC$. Последните две означават, че $\triangle PNM \sim \triangle MKQ$, т.е.

$$\measuredangle PMN + \measuredangle KMQ = \measuredangle PMN + \measuredangle NPM = 180^\circ - \measuredangle PNM = 90^\circ - \measuredangle BAC.$$

Заключаваме, че $\measuredangle PMQ = \measuredangle PMN + \measuredangle KMQ + \measuredangle NMK = 90^\circ$. Понеже DP и DQ са ъглополовящи съответно на ъглите $\measuredangle ADB$ и $\measuredangle ADC$, то $\measuredangle PDQ = 90^\circ$. Следователно точките P, Q, D, M лежат на една окръжност, с което решението е завършено.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за въвеждане на точките N и K и доказване на $\triangle PNB \sim \triangle CKQ$; 2 т. за $\triangle PNM \sim \triangle MKQ$; 2 т. за довършване. Присъжда се 1 т., която не е адитивна с останалите, ако ясно е заявено, че постоянната точка е M.

Задача 10.3. За всяко естествено число n нека T_n е таблица $n \times n$, в която за всеки две цели $i, j \in [1, n]$ в клетката на i-тия ред и j-тия стълб е записано числото $(i-1)n + j$. Да се намерят всички стойности на n, за които броят на редовете в T_n, които не съдържат нито един точен квадрат, е равен на 2025.

Отговор. $n \in \{8100, 8101, 8102, 8103\}$.

Решение. Ще покажем, че броят на редовете в T_n, който не съдържа нито един точен квадрат, е равен на $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ за всяко n, откъдето исканото ще следва.

Да направим следното наблюдение: нека A и B са числа от таблицата. Ако $|A-B| \leq n$, то A и B са или на един и същи ред, или на последователни. Ако $|A-B| \geq n$, то A и B са на различни редове.

Разликата между k-тия и $(k-1)$-вия точен квадрат е

$$f(k) = k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1.$$

Тъй като тази функция е строго растяща, съгласно горното разсъждение на всеки ред до този, в който се намира квадратът на $S = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ има поне един точен квадрат. Той е точно на ред

$$L = \left\lceil \frac{1}{n} S^2 \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^2 \right\rceil.$$

Следователно на всеки ред до L има поне по един точен квадрат, а на всеки ред след L - най-много един точен квадрат. Остават $n - L$ реда и точно $n - S$ квадрата. Тогава броят на редовете без точен квадрат е

$$L_0 = (n-L) - (n-S) = S - L = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^2 \right\rceil. \tag{2}$$

Ще проверим, че последното е равно на $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. Нека $n = 4k + r$, където $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ще разгледаме възможните случаи за r.

Първи случай. Ако $r = 0$, т.е. $n = 4k$, то

$$L_0 = \left\lfloor \tfrac{4k+1}{2} \right\rfloor - \left\lceil \tfrac{1}{4k} \left\lfloor \tfrac{4k+1}{2} \right\rfloor^2 \right\rceil = 2k - \left\lceil \tfrac{1}{4k} (2k)^2 \right\rceil = k = \left\lfloor \tfrac{n}{4} \right\rfloor.$$

Втори случай. Ако $r = 1$, т.е. $n = 4k + 1$, то

$$L_0 = \left\lfloor \tfrac{4k+2}{2} \right\rfloor - \left\lceil \tfrac{1}{4k+1} \left\lfloor \tfrac{4k+2}{2} \right\rfloor^2 \right\rceil = 2k + 1 - \left\lceil \tfrac{(2k+1)^2}{4k+1} \right\rceil = 2k + 1 - \left\lceil \tfrac{4k^2+k}{4k+1} + \tfrac{3k+1}{4k+1} \right\rceil =$$
$$= 2k + 1 - (k+1) = k = \left\lfloor \tfrac{n}{4} \right\rfloor.$$

Трети случай. Ако $r = 2$, т.е. $n = 4k + 2$, то

$$L_0 = \left\lfloor \tfrac{4k+3}{2} \right\rfloor - \left\lceil \tfrac{1}{4k+2} \left\lfloor \tfrac{4k+3}{2} \right\rfloor^2 \right\rceil = 2k + 1 - \left\lceil \tfrac{(2k+1)^2}{4k+2} \right\rceil = 2k + 1 - \left\lceil \tfrac{4k^2+2k}{4k+2} + \tfrac{2k+1}{4k+2} \right\rceil =$$
$$= 2k + 1 - (k+1) = k = \left\lfloor \tfrac{n}{4} \right\rfloor.$$

Четвърти случай. Ако $r = 3$, т.е. $n = 4k + 3$, то

$$L_0 = \left\lfloor \tfrac{4k+4}{2} \right\rfloor - \left\lceil \tfrac{1}{4k+3} \left\lfloor \tfrac{4k+4}{2} \right\rfloor^2 \right\rceil = 2k + 2 - \left\lceil \tfrac{(2k+2)^2}{4k+3} \right\rceil =$$
$$2k + 2 - \left\lceil \tfrac{4k^2+7k+3}{4k+3} + \tfrac{k+1}{4k+3} \right\rceil = 2k + 2 - (k+2) = k = \left\lfloor \tfrac{n}{4} \right\rfloor.$$

Значи търсеният брой редове наистина е $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$, с което решението е завършено.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за извода, че в редовете с номер $\ell \in [1, L]$ има поне по един точен квадрат, а в останалите – по най-много един (2 т., ако е съобразено само едното); 2 т. за (2); 2 т. за довършване.

Задача 10.4. Станислав и Сашо играят следната игра. Станислав избира граф с 2221 върха, такъв че всеки връх принадлежи на поне едно ребро, след което Сашо изтрива някои от ребрата (възможно никои) на избрания граф. Станислав заплаща по един лев на Сашо за всеки връх, който принадлежи на нечетен брой ребра. Каква е най-голямата сума, която Сашо гарантирано може да спечели?

Отговор. 1482.

Решение. Основната идея се базира на следната:

Лема. Нека G е свързан граф с n върха. Тогава можем да изтрием част от ребрата така, че ако n е четно, то всички върхове да станат от нечетна степен, а ако n е нечетно, то всички върхове без точно един да станат от нечетна степен.

Доказателство. Нека разбием върховете на двойки по произволен начин (като при n нечетно оставяме един връх извън разбиването). За всяка двойка да разгледаме път от ребра от единия до другия връх. Върху всяко ребро записваме броят на пътищата, които минават през него – да наречем този брой *степен на реброто.* Да забележим, че за всеки връх от двойка сумата от степените на ребрата, излизащи от него, е нечетна, защото пътят от този връх дава принос 1, а всеки друг път дава принос 0 или 2. Следователно за всеки такъв връх, броят на ребрата от нечетна степен, излизащи от него, е нечетен. От изолирания връх (ако има такъв), този брой е четен. Следователно ако запазим ребрата от нечетна степен и изтрием всички други, исканото е изпълнено.

Обратно към задачата. При всяка свързана компонента с нечетен брой върхове от графа на Станислав поне един оставащ връх ще е от четна степен (от лемата за ръкостискането), докато основната лема в решението показва, че е възможно да няма повече върхове от четна степен. Понеже по условие всеки връх има положителна степен, компонентите с нечетен брой върхове са най-много 739 – толкова на брой триъгълници, както и компонента с 4 върха, която може например да е цикъл. Така търсената максимална сума е $739 \cdot 2 + 4 = 1482$.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за формулиране и доказване на лемата; 2 т. довършване на решението.