Тема за 6. клас, задачи и решения

Задача 1. По окръжност са отбелязани 15 точки, които я разделят на 15 равни дъги. Във всяка от отбелязаните точки е записано цяло число така, че произведението на всеки три поредни числа е равно на 15 и сборът на всички записани числа е -15.

а) Намерете числата, които са записани в отбелязаните точки по окръжността.

б) Мравките Ата и Дот тръгват едновременно от една и съща отбелязана точка и се движат по окръжността в противоположни посоки. Ата се движи два пъти по-бързо от Дот.

Те се срещат 5 пъти и при всяка среща Ата запомня числото, което е записано в точката на срещата. На колко може да е равен сборът на петте числа, които е запомнила Ата?

Решение. а) Нека a, b, c и d са четири последователно записани числа. Тъй като $abc = bcd = 15$, то $a = d$, т.е. числата се повтарят през три.

Следователно по окръжността последователността a, b, c се повтаря $15 : 3 = 5$ пъти и сборът на числата в отбелязаните точки е

$$5(a + b + c) = -15, \quad \text{т.е.} \quad a + b + c = -3.$$

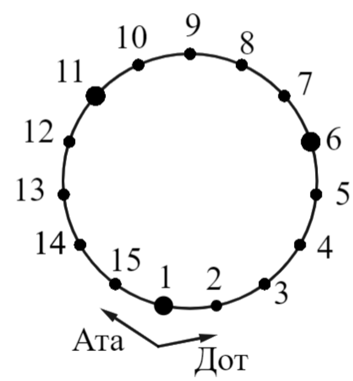
От друга страна, 15 се представя като произведение на три цели числа по 7 начина:

$15 = 1.1.15 = (-1).(-1).15 = (-1).1.(-15) = 1.3.5 = 1.(-3).(-5) = (-1).(-3).5 = (-1).3.(-5)$.

Условието $a + b + c = -3$ е изпълнено само когато числата са -1, -5 и 3 (в някакъв ред). **(2 точки)**

б) Нека разстоянието между две последователни отбелязани точки е k, т.е. дължината на окръжността е $15k$.

Да номерираме отбелязаните точки по окръжността. Нека Ата и Дот тръгват от точка 1, и нататък номерираме отбелязаните точки с числата 2, 3, …, 15 по посоката на движение на Дот.

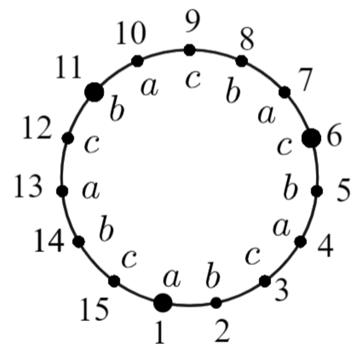


В момента на срещата си мравките са изминали общо разстояние $15k$. Щом скоростите на Дот и Ата се отнасят както $1 : 2$, то и разстоянията, изминати от тях до срещата, се отнасят както $1 : 2$.

Следователно Дот е изминала разстояние $5k$, а Ата е изминала разстояние $10k$.

Тъй като тръгват от точка 1 и номерацията е по посоката на движение на Дот, срещите са в точки с номер $1+5=6$, $6+5=11$, $11+5=16$, т.е. 1, след това отново в точките с номер 6 и 11. **(2 точки)**

Нека в точките с номер 1, 2 и 3 са записани съответно числата a, b, c; тогава b е записано и в точка номер 11, а c е записано в точка номер 6. В точките на срещите са записани числата c, b, a, c, b и сборът им е



$$S = a + 2b + 2c = 2.(a+b+c) - a =$$

$$= 2.(-3) - a = -6 - a.$$

Тъй като a е -1, -5 или 3, сборът S може да е -5, -1 или -9.

(2 точки)

Задача 2. Туристическо корабче изпълнява курс от точка A до точка B по течението на една река и се връща обратно по същия път.

Корабчето тръгва от A със собствена скорост V, която се отнася към скоростта на течението на реката както $4:1$. Когато стига до точка C, корабчето забавя ход и плава до B със собствена скорост $50\%V$.

На връщане корабчето пътува със собствена скорост $3V$ и изминава пътя от B до A три пъти по-бързо, отколкото пътя от A до B.

Намерете отношението на разстоянията AC и CB.

Забележка. Собствена скорост на плавателен съд наричаме скоростта му в спокойна вода.

Решение. Нека $V_{\text{теч.}} = x$ km/h. Тогава $V = 4x$ и изразяваме

$$V_{AC} = 4x + x = 5x, \quad V_{CB} = 2x + x = 3x, \quad V_{BC} = V_{CA} = 12x - x = 11x.$$

(2 точки)

Скоростта V_{AC}, с която е изминато разстоянието AC на отиване, се отнася към скоростта V_{CA}, с която е изминато на връщане, както $5x : 11x = 5 : 11$. При фиксирано разстояние времето е обратно пропорционално на скоростта, т.е. времето t_{AC}, за което е изминато разстоянието AC на отиване, се отнася към времето t_{CA}, за което е изминато същото разстояние на връщане, както $11 : 5$. Това означава, че $t_{AC} = 11k$, $t_{CA} = 5k$.

По същия начин, $V_{CB} : V_{BC} = 3x : 11x = 3 : 11$. Следователно

$$t_{CB} : t_{BC} = 11 : 3,$$

т.е. $t_{CB} = 11n$, $t_{BC} = 3n$.

(2 точки)

От условието, че времето на отиване е 3 пъти по-голямо от времето на връщане, т.е. $t_{AC} + t_{CB} = 3(t_{BC} + t_{CA})$, получаваме

$$11k + 11n = 3(5k + 3n) \iff n = 2k.$$

Тогава

$$\frac{AC}{BC} = \frac{t_{AC} \cdot V_{AC}}{t_{CB} \cdot V_{CB}} = \frac{11k \cdot 5x}{11n \cdot 3x} = \frac{5}{6}.$$

(2 точки)

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с обиколка 96 cm. Височината CH лежи вътре в триъгълника, като $BC : AH = 2 : 3$ и $AC : BH = 17 : 6$.

а) Намерете лицето на триъгълника ABC.

б) На височината CH е избрана точка P така, че $CP : PH = 7 : 1$. Ако M е пресечната точка на правите AP и BC, а K е пресечната точка на правите BP и AC, намерете лицето на четириъгълника $CKPM$.

Решение. а) От $BC : AH = 2 : 3$ следва, че $BC = 2x$, $AH = 3x$. От $AC : BH = 17 : 6$ следва, че $AC = 17y$, $BH = 6y$.

От питагоровата теорема за триъгълниците AHC и BHC следва, че

$$AC^2 - AH^2 = CH^2 = BC^2 - BH^2,$$

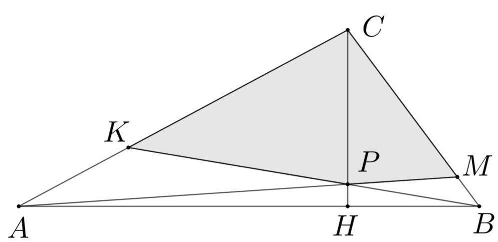
$$(17y)^2 - (3x)^2 = (2x)^2 - (6y)^2 \iff 289y^2 + 36y^2 = 4x^2 + 9x^2 \iff$$
$$325y^2 = 13x^2 \iff x^2 = 25y^2 = (5y)^2.$$

От последното равенство следва, че $x = 5y$. Тогава $BC = 2x = 10y$, $AH = 3x = 15y$, $AB = AH + HB = 15y + 6y = 21y$ и от условието, че обиколката на триъгълника ABC е 96 cm получаваме равенството

$$21y + 10y + 17y = 96 \iff 48y = 96 \iff y = 2.$$

Тогава $AB = 21y = 42$ cm, $CH^2 = BC^2 - BH^2 = (10y)^2 - (6y)^2 = (8y)^2$, т.е. $CH = 8y = 16$ cm и намираме $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 16 = 336$ cm^2.

(3 точки)



б) Намираме $AH = 15y = 30$ cm, $BH = 6y = 12$ cm и отсечката $PH = \dfrac{1}{8}CH = \dfrac{1}{8} \cdot 16 = 2$ cm. Тогава $S_{ABP} = \dfrac{AB.PH}{2} = \dfrac{42.2}{2} = 42$ cm^2, $S_{APC} = \dfrac{AH.PC}{2} = \dfrac{30.14}{2} = 210$ cm^2 и $S_{BPC} = \dfrac{BH.PC}{2} = \dfrac{12.14}{2} = 84$ cm^2.

Ако означим $S_{CPK} = x$ cm^2, то $S_{APK} = (210 - x)$ cm^2. От свойството

$$S_{CPK} : S_{APK} = CK : KA = S_{CBP} : S_{ABP}$$

получаваме равенството

$$x : (210 - x) = 84 : 42 \iff 2(210 - x) = x \iff x = 140.$$

Аналогично, ако означим $S_{CPM} = y$ cm^2, то $S_{BPM} = (84 - y)$ cm^2 и

$$S_{CPM} : S_{BPM} = CM : MB = S_{CAP} : S_{BAP},$$

откъдето получаваме равенството

$$y : (84 - y) = 210 : 42 \iff 5(84 - y) = y \iff y = 70.$$

Така получихме, че $S_{CKPM} = x + y = 210$ cm^2.

(4 точки)

Забележка. Решението в б) може да използва, освен посоченото свойство, теоремата на Менелай или теоремата на Чева. Тези факти, ако са използвани вярно, не се нуждаят от доказателство.

Задача 4. По планинска пътека се изкачвала група от 45 ученици. Техният водач ги подредил в колона един след друг. Всяко момиче казало на водача колко момчета има пред него в колоната, и всяко момче казало на водача колко момичета има пред него в колоната.

Водачът пресметнал, че сборът на числата, които му казали учениците, е 504.

Ако в групата има повече момчета, отколкото момичета, намерете броя на момчетата и броя на момичетата.

Решение. Нека в групата има a момчета и b момичета. По условие

$$a + b = 45.$$

Забелязваме, че за всяка двойка на момче и момиче единият брои другия в числото си. Ако момчето е пред момичето, то момичето преброява това момче; ако момичето е пред момчето, то момчето преброява това момиче.

Следователно сборът на всички казани числа е равен на броя на двойките момче и момиче в групата, т.е. на $a.b$.

(4 точки)

Тъй като

$$a.b = 504 = 2^3.3^2.7$$

и сборът на a и b се дели на 3 и не се дели на 2, то търсените числа може да са $3.2^3 = 24$ и $3.7 = 21$, или $3.2^3.7 = 168$ и 3. Първата двойка има желания сбор $24 + 21 = 45$.

Получихме, че в групата има 24 момчета и 21 момичета.

(3 точки)

Второ решение. Ще покажем, че ако разменим местата на момче и момиче, които са едно след друго, сборът на числата не се променя.

Нека момичето A е точно пред момчето B. Когато A и B си разменят местата, числото на A се увеличава с 1, а числото на B се намалява с 1, числата на останалите деца не се променят, следователно общият сбор се запазва.

След няколко последователни размени на места ще стигнем до момента, в който първи са момчетата, а след тях са момичетата. Тогава числото на всяко момче е 0, а на всяко момиче е a и сборът е $a.b$.

Нататък разсъжденията продължават както в първото решение.