Задача 11.1. Вписаната окръжност в триъгълник ABC, $AB > BC$, се допира да страните AB и AC съответно в точки P и Q. Точка R от страната AB е такава, че $BC = BR$. Да се докаже, че средната отсечка в триъгълник ABC, успоредна на AB, и правите PQ и CR се пресичат в една точка.

Решение. Нека S и T са средите съответно на страните AC и BC, а I е центърът на вписаната окръжност. Тъй като $AB > BC$, то R е върху отсечката AB. Ще използваме стандартни означения за елементите на триъгълник ABC.

Първи подход. Нека X е пресечната точка на CR и ST. Тогава X е среда на CR и BX е медиана в равнобедрения триъгълник RBC. Следователно BX е ъглополовяща на $\measuredangle ABC$. Понеже $I \in BX$ имаме $\measuredangle IXC = \measuredangle IQC = 90^\circ$, откъдето намираме, че $XICQ$ е вписан четириъгълник. Тогава $\measuredangle AQX = \measuredangle XIC = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$ и понеже $\measuredangle AQP = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$, то $X \in QP$.

Втори подход. Пресмятаме:

$$PR = BR - BP = BC - BP = BC - BT = CT = CQ. \tag{1}$$

Нека X е пресечната точка на QP и CR. Прилагаме теоремата на Менелай за $\triangle ARC$ и правата QXP.

$$\frac{AP}{PR} \cdot \frac{RX}{XC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

От това равенство, (1) и $AP = AQ$ следва $RX = XC$. Това означава, че X лежи на средната отсечка ST.

Оценяване. (6 точки) *Първи подход.* 1 т. за BX ъглополовяща на $\measuredangle ABC$; 3 т. за доказване, че $XICQ$ е вписан четириъгълник; 1 т. за $\measuredangle AQP = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$; 1 т. за довършване. *Втори подход.* 2 т. за $PR = CQ$; 3 т. за прилагане на теоремата на Менелай за $\triangle ARC$ и правата QXP; 1 т. за довършване.

Задача 11.2. Ъглите α и β се наричат *приятелски*, ако $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{3}$.

а) Да се докаже, че за всеки два приятелски ъгъла α и β е изпълнено $\cos\alpha\cos\beta \in \left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right]$.

б) Да се докаже, че за всяко реално число $t \in \left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right]$ съществуват приятелски ъгли α и β, за които $\cos\alpha\cos\beta = t$.

Решение. а) Имаме:

$$\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta \geq -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta\le 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

б) За всяко $t\in\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$ имаме $-1\le t-\frac{1}{3}\le 1$ и $-1\le t+\frac{1}{3}\le 1$. Следователно съществуват ъгли φ и ψ, за които $\cos\varphi=t-\frac{1}{3}$ и $\cos\psi=t+\frac{1}{3}$. Нека $\alpha=\frac{\varphi+\psi}{2}$ и $\beta=\frac{\varphi-\psi}{2}$. Получаваме:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}=\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}=\frac{\cos\psi+\cos\varphi}{2}=t.$$

От горните равенства следва, че α и β са приятелски ъгли, за които $\cos\alpha\cos\beta=t$.

Оценяване. (6 точки) а) (2 точки): 1 т. $\cos\alpha\cos\beta\ge-\frac{2}{3}$; 1 т. за $\cos\alpha\cos\beta\le\frac{2}{3}$; б) (4 точки): 1 т. за $-1\le t-\frac{1}{3}\le 1$ и $-1\le t+\frac{1}{3}\le 1$; 1 т. за $\alpha=\frac{\varphi+\psi}{2}$ и $\beta=\frac{\varphi-\psi}{2}$; 1 т. за $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$; 1 т. за $\cos\alpha\cos\beta=t$.

Задача 11.3. Злата магьосница Моргана живее в дворец във форма на квадрат, разделен на 101×101 клетки/стаи; във всяка от тях температурата е 20 градуса. Мерлин решава да замрази Моргана, като прави магия и обледенява централната клетка на двореца, поддържайки в нея постоянна температура от 0 градуса. На всяка следваща наносекунда се извършват следните действия в този ред:

1. За всяка клетка, без централната, се изчислява средноаритметичното от температурите на съседните и клетки (с които има обща страна), след което,
2. новите температури на всички клетки, без централната, едновременно се променят на така изчислените.

Моргана може свободно да се придвижва из стаите, като ще замръзне, ако температурата на всички клетки стане по-ниска от 10^{-2025} градуса. Действието на ледената магия на Мерлин трае 10^{75} наносекунди, след което температурите на клетките възстановяват началните си стойности. Ще успее ли Мерлин да замрази Моргана?

Отговор. Да.

Решение. Да означим с q_0 централната клетка и нека q е произволна клетка на двореца. Съществува път $q_0\,q_1\,\dots q_k=q$ от съседни една на друга клетки, така че $k\le 100$. Да допуснем, че в някакъв момент t максималната температура е M. Тогава в момента $t+1$ и след това температурата в q_1 няма да надхвърли $(0+M+M+M)/4=(1-\frac{1}{4})M$. Поради това, температурата на q_2 в момента $t+2$ и след това няма да е повече от $\left(M+M+M+(1-\frac{1}{4})M\right)/4=\left(1-\frac{1}{4^2}\right)M$. Продължавайки така, установяваме, че в момент $t+100$ температурата в клетка $q_k=q$ е по-малка или равна на $\left(1-\frac{1}{4^{100}}\right)M$.

Тъй като q е произволна клетка, след 100 хода максималната температура M_1 в таблицата удовлетворява

$$M_1\le\left(1-\frac{1}{4^{100}}\right)M.$$

Тези разсъждения показват, че ако в началния момент максималната температура е M, то след $100n$ наносекунди максималната температура в таблицата ще е не повече от

$$M\left(1-\frac{1}{4^{100}}\right)^n = M\left(1-\frac{1}{2^{66}\cdot 4^{67}}\right)^n < M\left(1-\frac{1}{10^{67}}\right)^n$$

Слагайки $n = 10^{75-2}$, получаваме, че в момента, в който магията на Мерлин спира да действа, максималната температура в двореца е по-малка от

$$\begin{aligned} M_{\text{end}} := M\left(1-\frac{1}{10^{67}}\right)^{10^{67}\cdot 10^{75-69}} \\ < M\cdot e^{-10^6} < M\cdot 10^{-10^5}. \end{aligned}$$

Щом началната температура е $M = 20$, то $M_{\text{end}} < 20\cdot 10^{-10^5} < 10^{-2025}$ и Мерлин замразява Моргана.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за доказване, че максималната температура клони към 0; 3 т. за намиране на експлицитна количествена оценка за максималната температура в зависимост от операциите; 3 т. за коректно изчисление, даващо отговор на въпроса.

Задача 11.4. Два неконстантни полинома ще наричаме *приятелски*, ако всеки от тях има само реални корени, и всеки корен на единия полином е корен и на другия. За два приятелски полинома $P(x), Q(x)$ и константа $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$ е известно, че $P(x)+C, Q(x)+C$ също са приятелски полиноми. Докажете, че $P(x) \equiv Q(x)$.

Решение. Нека $n := \deg(P) \geq \deg(Q)$. Тъй като всичките корени на P и $P+C$ са реални то

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\cdots(x-x_k)^{a_k} \\ P(x)+C &= (x-y_1)^{b_1}(x-y_2)^{b_2}\cdots(x-y_\ell)^{b_\ell} \end{aligned}$$

където числата $x_i, y_j, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \ell$ са две по две различни, $a_i \geq 1, b_j \geq 1$ и

$$n = \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{\ell} b_i.$$

Използваме факта, че ако a е m е кратен корен на даден полином, $m \geq 1$, то a е $m-1$ кратен корен на неговата производна. От $P'(x) = (P(x)+C)'$ заключаваме, че $x_i, 1 \leq i \leq k$ е $a_i - 1$ кратен корен на $P'(x)$, както и $y_j, 1 \leq j \leq \ell$ е $b_j - 1$ кратен корен на $P'(x)$. Следователно броят на реалните корени на $P'(x)$, броени с тяхната кратност, е поне

$$\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{j=1}^{\ell} b_j - k - \ell = 2n - k - \ell.$$

От друга страна, броят на реалните корени на P', броени с кратността им, е не повече от $n-1$. И така: $2n - k - \ell \leq n-1$, т.е. $k + \ell \geq n+1$.

Да забележим сега, че P и Q приемат едни и същи стойности в различните точки x_i, y_j, чийто брой е поне $n+1$. Значи $P(x)-Q(x)=0$ в $n+1$ различни точки. Тъй като $\deg(P+Q)\leq n$, следва че $P\equiv Q$.

Коментар. Може да считаме без ограничения на общността, че $C=-1$. Както по-горе нека

$$P(x)=(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\cdots(x-x_k)^{a_k}$$
$$P(x)-1=(x-y_1)^{b_1}(x-y_2)^{b_2}\cdots(x-y_\ell)^{b_\ell},$$

където x_i, y_j са две по две различни. Следователно:

$$(x-x_1)^{a_1}\cdots(x-x_k)^{a_k}-(x-y_1)^{b_1}\cdots(x-y_\ell)^{b_\ell}=1 \qquad (1).$$

Да си представим, че сме фиксирали x_i, y_j. Това, което се твърди е, че (1) има решение само за един комплект $a_i, 1\leq i\leq k$ и $b_i, 1\leq i\leq \ell$.

Да разгледаме сега следните (интерполационни) условия:

$$P^{(j)}(x_i)=0, j=0,1,\ldots,m_i, i=1,\ldots,k,$$
$$P(y_i)=1, P^{(j)}(y_i)=0, j=1,2,\ldots,n_i, i=1,2,\ldots,\ell \qquad (2).$$

Равенството (1) показва, че P удовлетворява (2) за $m_i=a_i-1, n_i=b_i-1$. От (2) следва

$$P\equiv 0 \pmod{(x-x_i)^{m_i+1}}$$

$$P\equiv 1 \pmod{(x-y_i)^{n_i+1}}$$

Съгласно Китайската теорема за остатъците (за полиноми), има единствен полином P, от степен по-малка от $\sum_{i=1}^{k}(m_i+1)+\sum_{i=1}^{\ell}(n_i+1)$, който удовлетворява тези условия.

Да допуснем сега, че има два полинома P и Q удовлетворяващи (1), които съответстват на два различни комплекта съответно a_i, b_i и a_i', b_i'. Тогава и P и Q ще удовлетворяват интерполационните условия (2) за $m_i=\min(a_i,a_i')-1, n_i=\min(b_i,b_i')-1$. Ако по някакъв начин успеем да докажем, че

$$\begin{aligned}\max(\deg(P),\deg(Q)) &< \sum_{i=1}^{k}(m_i+1)+\sum_{i=1}^{\ell}(n_i+1)\\ &=\sum_{i=1}^{k}\min(a_i,a_i')+\sum_{i=1}^{\ell}\min(b_i,b_i') \qquad (3),\end{aligned}$$

то съгласно казаното, $P=Q$. За да докажем това (както е в решението), трябва да се забележи, че в конкретния случай P' (и съответно Q'), съгласно (2) има твърде много корени - техният броят, броени с кратността им, е $\sum_{i=1}^{k}(a_i-1)+\sum_{i=1}^{\ell}(b_i-1)=2\deg(P)-k-\ell$. От тук (тъй като $P'\not\equiv \mathrm{const}$),

$$\deg(P)-1=\deg(P')\geq 2\deg(P)-k-\ell,$$

откъдето:

$$\deg(P) \le k + \ell - 1 \le \sum_{i=1}^{k} \min(a_i, a_i') + \sum_{i=1}^{\ell} \min(b_i, b_i') - 1,$$

което установява (3).

Забележете, че този подход би могъл да работи и когато в дясната страна на (1), вместо константа, стои полином от ниска степен. В този случай $P^{(j)}(y_i) = 0$ ще е в сила за по-големи j и ако разполагаме с допълнителна информация за a_i, b_i същата идея може да е възможна. Например, ако знаем, че a_i, b_i са по-големи за част от индексите.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за доказване, че общият брой различни корени на $P(x)$ и $P(x)+C$ е поне $n+1$; 3 т. за довършване (или 2 т., ако е ползвано без доказателство $k+\ell \ge n+1$ и се довършат разсъжденията).