Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

74. Национална Олимпиада по математика

Първи ден (5.4.2025), 9-12 клас

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 1. Да се намерят всички безкрайни редици $a_1, a_2, \dots$ от реални числа, за които е изпълнено

$$a_{m^2+m+n} = a_m^2 + a_m + a_n$$

за произволни (не непременно различни) естествени числа m и n.

Отговор. $a_n = n$ за всяко n; $a_n = 0$ за всяко n; $a_n = -1$ за всяко n; $a_n = 0$ за четни n и $a_n = -1$ за нечетни n; $a_n = -1$ за четни n и $a_n = 0$ за нечетни n.

Решение. Първи подход. Да означим $a_1 = x$. Имаме $a_{n+2} = a_n + x^2 + x$, в частност $a_3 = x^2 + 2x$ и $a_{13} = a_1 + 6(x^2+x) = 6x^2 + 7x$. От друга страна, $a_{13} = a_3^2 + a_3 + a_1 = (x^2+2x)^2 + (x^2+2x) + x = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x$. След приравняване получаваме $x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x = 0$, което се разлага до $x(x-1)(x+1)(x+4) = 0$, съответно $a_1 = 0, 1, -1$ или -4. Ако $a_1 = -4$, то $a_{n+2} = a_n + 12$ за всяко n и $a_5 = 20$, $a_{35} = a_1 + 17 \cdot 12 = 200$, $a_{35} = a_5^2 + 2a_5 = 440$, противоречие.

Сега нека $a_2 = y$. От по-горе имаме $a_7 = a_1 + 3(x^2 + x) = 3x^2 + 4x$, а от друга страна $a_7 = a_2^2 + a_2 + a_1 = y^2 + y + x$, значи $y^2 + y = 3x^2 + 3x$. Имаме следните случаи:

- Ако $x = 0$ или $x = -1$, то $y = 0$ или $y = -1$ и $a_{n+2} = a_n$ за всяко n. И четирите възможности работят, понеже $t^2 + t = 0$ за $t = 0, -1$, а пък $m^2 + m + n$ и n са с еднаква четност.

- Ако $x = 1$, то $y^2 + y = 6$, съответно $y = 2$ или $y = -3$; освен това $a_{n+2} = a_n + 2$. В първия случай по индукция получаваме $a_n = n$ за всяко n (което явно изпълнява даденото), а във втория случай $a_4 = -1$, $a_{21} = a_4^2 + a_4 + a_1 = 1$, но и $a_{21} = a_1 + 2 \cdot 10 = 21$, противоречие.

Втори подход. Чрез полагането $m = 1$ получаваме $a_{n+2} = a_n + a_1^2 + a_1$.

- Ако $a_1^2 + a_1 = 0$ (тогава $a_1 = 0$ или $a_1 = -1$) от горното равенство получаваме

  (1) $$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots \text{ и } a_2 = a_4 = a_6 = \cdots$$

  При $m = 2$ и $n = 1$ имаме $a_7 = a_2^2 + a_2 + a_1$ и понеже $a_1 = a_7$, то $a_2^2 + a_2 = 0$, значи $a_2 = 0$ или $a_2 = -1$. За всяка редица, изпълняваща (1), за която $a_1, a_2 \in \{0, -1\}$, равенството от условието е вярно, понеже $m^2 + m + n$ и n са с еднаква четност.

- Нека сега $a_1^2 + a_1 \neq 0$. Тогава редицата $a_1, a_3, \dots$ (съответно $a_2, a_4, \dots$ е аритметична прогресия с първи член a_1 (съответно a_2) и разлика $a_1^2 + a_1 \neq 0$. Следователно $a_{2k+1} = a_1 + k(a_1^2 + a_1)$ и $a_{2k} = a_2 + (k-1)(a_1^2 + a_1)$. Това означава, че $a_{2k} = a \cdot 2k + b$ и $a_{2k+1} = c(2k+1) + d$ за всяко k и някакви реални константи $a \neq 0, b, c \neq 0, d$.

Нека m и n са четни числа. Тогава от условието следва, че за всеки две m и n е изпълнено:

$$a(m^2 + m + n) + b = (am + b)^2 + am + b + an + b.$$

След сравняване на коефициентите получаваме $b^2 + b = 0, a = a^2, 2ab = 0$. Предвид $a \neq 0$, единствената възможност е $a = 1$ с $b = 0$, съответно $a_{2k} = 2k$. Аналогично чрез нечетни m и n получаваме $c = 1$ с $d = 0$, съответно $a_{2k+1} = 2k + 1$ за всяко k. Следователно $a_n = n$ за всяко n, което наистина изпълнява даденото уравнение.

Оценяване. (7 точки) *Първи подход.* 1 т. за пълно описание на работещите редици; 1 т. за проверка, че наистина работят; 3 т. за получаване на $a_1 = 0, 1, -1$ (1 т. за получаване на уравнение за a_1, 1 т. за решаването му и 1 т. за отхвърляне на стойности, различни от желаните); 1 т. за получаване на уравнение от най-много втора степен между a_1 и a_2; 1 т. за довършване.
Втори подход. 1 т. за пълно описание на работещите редици; 1 т. за проверка, че наистина работят; 1 т. за получаване, че подредиците от членове с четни и нечетни номера са аритметични прогресии; 1 т. за пълен анализ на случая с разлика 0; 2 т. за доказване, че $a_n = n$ за четни (или нечетни) n при ненулева разлика на прогресията; 1 т. за довършване.

Задача 2. При дадено естествено число n нека точно n от клетките на квадратна таблица $n \times n$ са оцветени в черно, а останалите – в бяло; *цената* на такова оцветяване е минималният брой бели клетки, които трябва да се преоцветят в черно, така че от всяка черна клетка да може да се стигне до всяка друга черна клетка чрез последователност от черни клетки, в която всеки две поредни клетки имат обща страна. Нека $f(n)$ е максималната възможна цена спрямо всички първоначални оцветявания за дадено n. Да се намери реално число α, такова че за всяко естествено число $n \geq 100$ е в сила

$$\frac{1}{3}n^{\alpha} \leq f(n) \leq 3n^{\alpha}.$$

Отговор. $\alpha = 3/2$.

Решение. За горната граница, при $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ да разгледаме колоните с номера cm за $c = 1, 2, \ldots, m$. За всяка първоначално оцветена клетка нека изградим път от нея до най-близката до нея колона. Нека също оцветим всяка от тези колони в черно, както и първия ред – с това желаното свързване е получено. За всяка от n-те първоначално черни клетки това изисква не повече от $m - 1$ допълнителни клетки, имаме също mn клетки от m-те колони и n клетки от първия ред. Така цената не надминава

$$n(m - 1) + mn + n = 2mn < 3n^{3/2}.$$

За долната граница, нека m е цяло и $\sqrt{n-1} - 1 < m \leq \sqrt{n-1}$. Нека черни са n клетки от вида $(1 + im; 1 + jm)$: $i, j = 0, 1, \ldots, m$ (те са в таблицата, понеже $1 + m^2 \leq n$, и също така броят им е $(m + 1)^2 < m^2 + 1 \leq n$). За всяка верига от черни клетки ще разглеждаме начупената линия, свързваща центровете на поредните клетки. Около всяка начална черна клетка обособяваме множеството от тези точки, до които можем да стигнем с начупена линия с дължина не повече от $\frac{m}{2}$, съдържаща само хоризонтални и/или вертикални отсечки (тази начупена линия включва и отсечка с дължина $\frac{1}{2}$ в началната черна клетка). Тези множества за различните точки не се пресичат (единствено могат да имат общи гранични точки). За да се осъществи връзка между началните черни клетки, трябва да има верига от $\frac{1}{2}(m-1)$ черни клетки от границата на началната черна клетка до границата на съответната ѝ област (ако това число е дробно, то една от новооцветените клетки е на границата на две области и по половинка от нея се брои към всяка от двете контактуващи области). Това означава, че $f(n) \geq \frac{n}{2}(m-1) > \frac{n}{2}(\sqrt{n-1}-2)$ и остава да се уверим, че

$$\frac{1}{2}(\sqrt{n-1}-2) \geq \frac{1}{3}\sqrt{n}$$

$$3\sqrt{n-1} \geq 2\sqrt{n}+6$$

$$9n-9 \geq 4n+24\sqrt{n}+36.$$

При $n \geq 100$ това е вярно, понеже $\sqrt{n}(5\sqrt{n}-24) \geq 10(5\cdot 10-24) > 45$.

Коментар. От гореизложеното може да се направи изводът, че $\alpha = 3/2$ е единственото подходящо. Наистина, при $\alpha \neq 3/2$, за достатъчно големи n ($n > 9^{1/|\alpha-\frac{3}{2}|}$) е в сила:

- $3n^\alpha < \frac{1}{3}n^{3/2}$, ако $\alpha < 3/2$;
- $\frac{1}{3}n^\alpha > 3n^{3/2}$, ако $\alpha > 3/2$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отговора $\alpha = 3/2$; 2 т. за доказване на горната граница (1 т. за работещо оцветяване, 1 т. за правилно пресмятане (може чрез m или подобен израз) на допълнителния брой клетки); 4 т. за доказване на долната граница (1 т. за работещо оцветяване, 3 т. за обосновка, че то работи).

Задача 3. Нека P е неконстантен полином с цели коефициенти, като старшият е равен на 1, и нека $a_1, a_2, \ldots$ е безкрайна редица от естествени числа. Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа, всяко от които дели поне един член на редицата

$$b_n = P(n)^{a_n} + 1.$$

Решение. Ще разгледаме отделно ситуациите, когато редицата (a_n) е неограничена и когато е ограничена.

Първи подход, неограничена. Започваме със следната:

Лема. Ако $a, k \in \mathbb{N}$, а p е просто, за което $\nu_p(a^k+1) = \alpha$, то

$$p^\alpha \leq (a^{p-1}-1)p^{\nu_p(k)}.$$

Доказателство. Да запишем $k = p^t b$, където $(b,p) = 1$. От Лемата за повишаване на експонентата следва, че $\alpha = t + v_p(a^b+1)$. Да отбележим, че ако d е показателят на a по модул p, то $d|2b$ и тъй като $(p, 2b) = 1$ имаме $\nu_p(a^{2b}-1) = \nu_p(a^d-1) = \nu_p(a^{p-1}-1)$. Така $\nu_p(a^b+1) \leq \nu_p(a^{p-1}-1)$ и значи $p^{\nu_p(a^b+1)} \leq a^{p-1}-1$, с което лемата е доказана.

Да допуснем, че множеството от прости числа, делящи някое b_k, е крайно и нека $p_1, p_2, \dots, p_s$ са всички такива прости числа. От лемата следва, че

$$P(k)^{a_k} + 1 = \prod_{i=1}^{s} p_i^{v_{p_i}(P(k)^{a_k}+1)} \leq \prod_{i=1}^{s} \left(P(k)^{p_i-1} - 1\right) p_i^{v_{p_i}(a_i)} \leq a_k P(k)^{\sum\limits_{i=1}^{s} p_i}$$

съответно $P(k)^{a_k - \sum\limits_{i=1}^{s} p_i} \leq a_k$. Понеже $P(k) \geq 2$ за всички достатъчно големи k, последното е невъзможно за достатъчно големи стойности на a_k.

Втори подход, неограничена. Да допуснем, че множеството от прости числа, делящи някое b_k, е крайно и нека $p_1, p_2, \dots, p_s$ са всички такива прости числа. Да означим $M = \max(p_1, \dots, p_s)$.

Твърдение 1. Ако p е нечетно просто число и $p | x^{2^n} + 1$ за някое $x \in \mathbb{N}$, то $2^{n+1} | p - 1$ и в частност $p > 2^n$.

Доказателство. Ако d е показателят на x по модул p, то $d | 2^{n+1}$, но d не дели 2^n, значи $d = 2^{n+1}$. От малката теорема на Ферма имаме, че d дели $p - 1$, т.е. $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ и твърдението е доказано.

Твърдение 2. Множеството $\{\nu_2(a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено.

Доказателство. Да отбележим, че $x^2 + 1$ не е степен на 2 за $x > 1$ поради модул 4. Следователно ако $\nu_2(a_n) > 0$ за някое $n \in \mathbb{N}$, то съществува $p \in \{p_1, \dots, p_s\}$, което дели $P(n)^{a_n} + 1$ и от Твърдение 1 следва, че $M \geq p > 2^{\nu_2(a_n)}$, с което твърдението е доказано.

Остава да отбележим, че $P(k)^{2^{\nu_2(a_k)}} + 1 | P(k)^{a_k} + 1$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, откъдето чрез Твърдение 2 свеждаме задачата до ситуацията с ограничена редица.

Първи подход, ограничена. Нека $M \in \mathbb{N}$ е такова, че $a_k \leq M$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. Нека t е такова, че $P(t) > 0$ и нека $N > \max(P(t) + 1, P(t)^2 + 1, \dots, P(t)^M + 1)$ е достатъчно голямо. Тогава за $k = \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{2N} + t$ имаме, че

$$P(k)^{a_k} + 1 \equiv P(t)^{a_k} + 1 \pmod{p_1^N p_2^N \cdots p_s^N}.$$

Следователно $\nu_{p_i}\left(P(k)^{a_k} + 1\right) \leq N$, понеже $a_k \leq M$. Последното означава, че $P(k)^{a_k} + 1 \leq \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^N < \sqrt{k}$, което води до противоречие за достатъчно голямо N.

Втори подход, ограничена. Ще използваме само, че $b_k \leq c^{k^\varepsilon}$ за някое $c > 1$, всяко $\varepsilon > 0$ и достатъчно големи k и че съществува константа T, такава че всяко естествено число се среща като член на редицата не повече от T пъти. Тези са изпълнени, понеже $P(n)^a + 1$ са краен брой неконстантни полиноми и всеки от тях приема дадена стойност краен брой пъти; тук a пробягва ограничената съвкупност от стойности на редицата.

Нека отново $p_1, \dots, p_s$ са всички прости числа с исканото свойство. Да запишем $b_k = \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ за $\alpha_i \geq 0$. Понеже $p_i \geq 2$ за всяко i и $b_k < c^{k^\varepsilon} = 2^{k^\varepsilon \log_2 c}$ за големи k, всяко α_i не надвишава $k^\varepsilon \log_2 c$. Така броят различни стойности измежду $b_1, \dots, b_m$ не надминава

$(m^{\varepsilon} \log_2 c)^s$. От друга страна, този брой е поне $\dfrac{m}{T}$. Оттук $m^{1-s\varepsilon} \leq T(\log_2 c)^s$. Ако изберем $\varepsilon < \dfrac{1}{s}$, то последното е невярно за големи m, противоречие.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за случая на неограничена редица: 2 т. за лемата и 1 т. за довършване чрез нея или 2 т. за доказване, че $\{\nu_2(a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено и 1 т. за довършване чрез това; 3 т. за случая на ограничена редица; 1 т. при изцяло завършено решение.

Задачите са предложени от: 1 – Мирослав Маринов; 2 – Илияс Номан; 3 – Кристиян Василев.

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

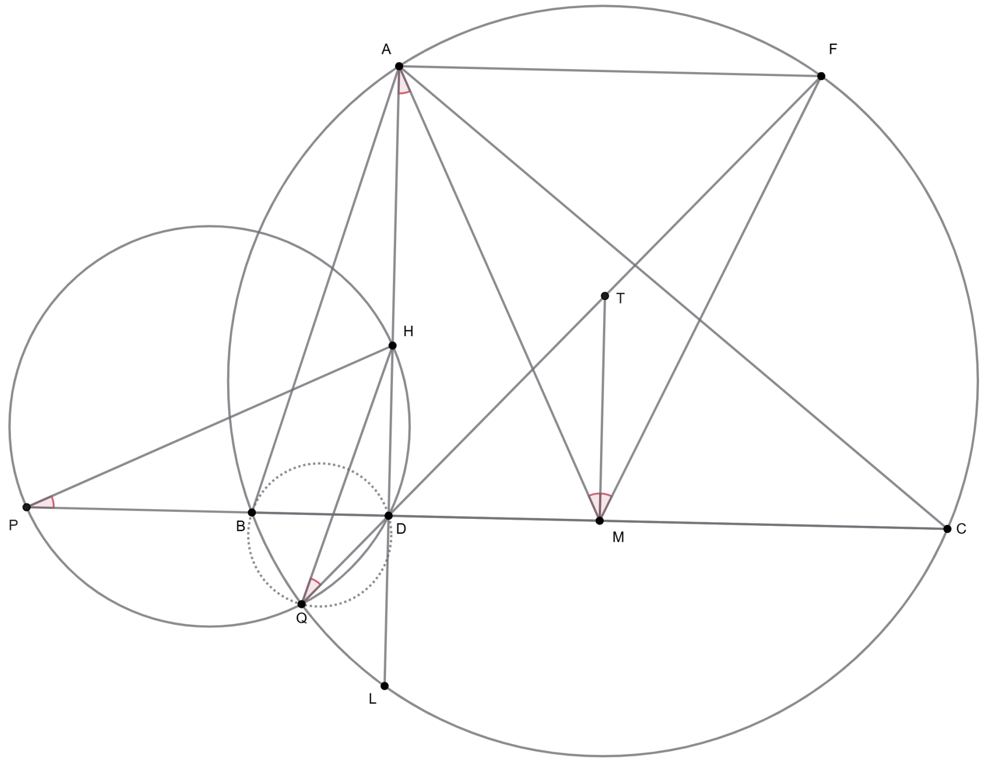
74. Национална Олимпиада по математика

Втори ден (6.4.2025), 9-12 клас

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

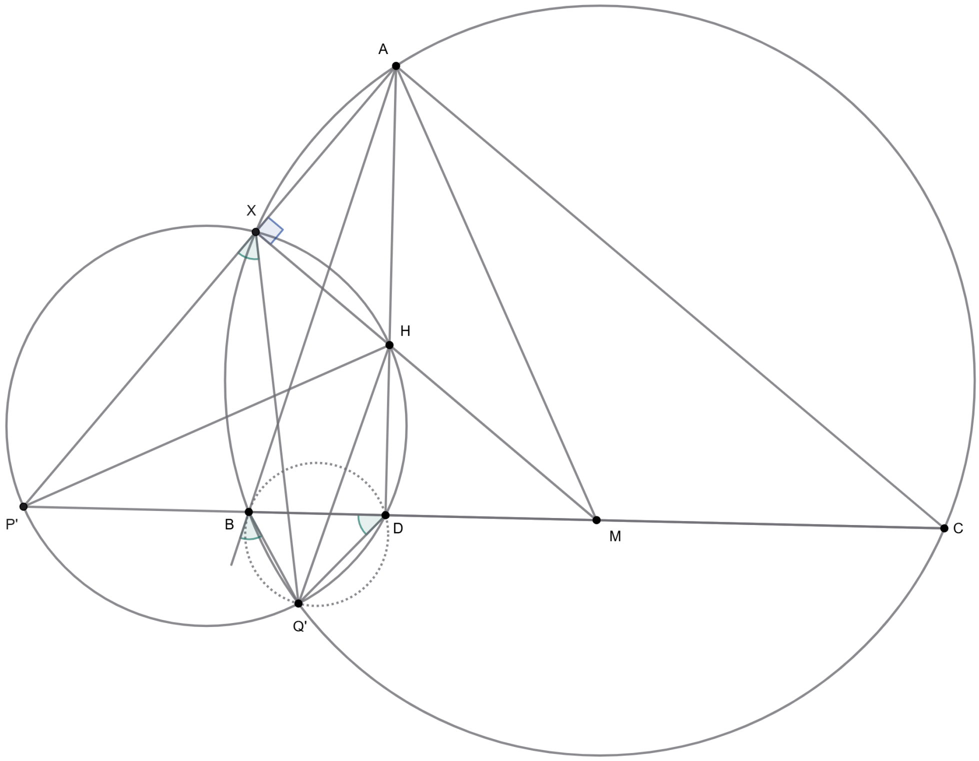
Задача 4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, $AB < AC$, с височина AD ($D \in BC$) и ортоцентър H. Окръжност през точки B и D се допира до правата AB и пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точка Q. Описаната около $\triangle QDH$ окръжност пресича правата BC за втори път в точка P. Да се докаже, че ако M е среда на BC, то правите MH и AP са перпендикулярни.

Решение. Първи подход. Нека QD пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност, да я означим с k, в т. F, а T е среда на DF. От $\measuredangle BQD = \beta$, не е трудно да се види, че F е симетрична на A относно симетралата на BC, която в случая е правата MT. Нека L е симетрична на H относно BC, $L \in k$. От $\triangle MTD \sim \triangle QDL \implies \frac{DT}{TM} = \frac{DL}{DQ} \implies \frac{FT}{TM} = \frac{HD}{DQ} \implies \triangle TMF \sim \triangle DQH$ ($\measuredangle FTM = \measuredangle HDQ$ от успоредност). От тук следва $\measuredangle TMF = \measuredangle HQD$. Сега лесно се вижда, че $PH \perp AM$, т.е. H е ортоцентър на $\triangle PMA$ и твърдението следва.



Втори подход. Нека лъчът $MH^{\rightarrow}$ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка X и нека $AX \cap BC = P'$. Добре известно е, че $\measuredangle MXA = 90^\circ$, откъдето следва, че точките

P', X, D и H лежат на една окръжност. Нека тази окръжност пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точката Q'. Понеже $AP' \perp MH$ е достатъчно да докажем, че $Q' \equiv Q$. От друга страна от $(P'Q'DX)$ имаме, че $\measuredangle P'XQ' = \measuredangle P'DQ'$, а от $(AXBQ')$ следва, че $\measuredangle ABQ' = 180^\circ - \measuredangle P'XQ' = 180^\circ - \measuredangle BDQ'$, т.е правата AB допира окръжността, описана около $\triangle BDQ'$ и в частност $Q' \equiv Q$.



Оценяване. (7 точки) *Първи подход.* 1 т. за въвеждане на точки F, T и L; 2 т. за доказване $\triangle MTD \sim \triangle QDL$; 3 т. за $\triangle TMF \sim DQH$; 1 т. за довършване.
Втори подход. 1 т. за $\measuredangle MXA = 90^\circ$; 3 т. за предефиниране на задачата и свеждането ѝ до $Q' \equiv Q$; 3 т. за довършване.

Задача 5. Казваме, че естественото число m е *свободно от квадрати*, ако не съществува естествено число $d > 1$, за което d^2 дели m. Нека n е естествено число. Да се докаже, че съществува естествено число a, за което множеството $\{a+1, a+2, \ldots, a+n\}$ съдържа точно $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ числа, свободни от квадрати.

Решение. За $x \in \mathbb{N}_0$ нека $f(x)$ е броят числа, свободни от квадрати, в интервала $[x+1, x+n]$. Първо ще докажем, че за всяко естествено число n е в сила неравенството $f(0) > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. Наистина, ако едно число $m \leq n$ не е свободно от квадрати, то съществува естествено число $d \geq 2$, за което d^2 дели m. Следователно броят на числата, по-малки от n, които не са свободни от квадрати, е най-много

$$\sum_{d=2}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{d^2}\right\rfloor \le \sum_{d=2}^{\infty}\frac{n}{d^2} \le n\left(\frac{1}{4}+\sum_{d=3}^{\infty}\frac{1}{d^2}\right) < n\left(\frac{1}{4}+\sum_{d=3}^{\infty}\frac{1}{d(d-1)}\right) = \frac{3n}{4}.$$

Следователно $f(0) > n - \frac{3n}{4} = \frac{n}{4}$.

Сега ще докажем, че съществува $m \in \mathbb{N}$, за което $f(m) = 0$. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са различни прости числа. Тогава от Китайската теорема за остатъците съществува естествено число m, за което $m + i \equiv 0 \pmod{p_i^2}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Така за този избор на m имаме $f(m) = 0$.

Остава да отбележим, че $f(x+1) - f(x) \in \{-1, 0, 1\}$ за всяко $x \in \mathbb{N}_0$. Оттук тъй като $f(0) > \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$ и $f(m) = 0 < \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$, то съществува $a \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, за което $f(a) = \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $|f(n+1) - f(n)| \le 1$; 2 т. за $f(0) > n/4$; 2 т. за намиране на m, за което $f(m) = 0$; 2 т. за довършване.

Задача 6. Нека $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ са $n \ge 2$ дадени точки в равнината и $r > 0$ е реално число. Ани и Боби играят следната игра: Ани построява свързан граф с върхове в точките $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, т.е. свързва някои от точките с ребра, така че от всяка от дадените точки да може да се стигне до всяка друга, движейки се по ребра. След това Ани записва във всеки връх X_i неотрицателно реално число r_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, така че $\sum_{i=0}^{n-1} r_i = 1$. Боби избира различни върхове $X_{i_0} = X_0, X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ така че X_{i_j} и $X_{i_{j+1}}$ са свързани с ребро за всяко $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Боби печели, ако $\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} r_{i_j} \ge r$; в противен случай печели Ани. В зависимост от n, определете най-голямото възможно r, за което Боби има печеливша стратегия.

Отговор. $r = \begin{cases} \frac{4}{(n+1)^2}, & \text{ако } n \text{ е нечетно,} \\ \frac{4}{n(n+2)}, & \text{ако } n \text{ е четно.} \end{cases}$

Решение. Първи подход (Иля Богданов). Ако Ани замени графа с някое от неговите покриващи дървета, това ще намали опциите на Боби за избор на пътища в графа, затова приемаме, че тя построява дърво с корен в X_0 върху дадените точки.

Сега, да приемем че тя е построила дърво и е присвоила числа r_i на върховете съгласно изискванията. Ще покажем как да променим тези числа така, че задачата на Боби да не стане по-лесна.

Нека разгледаме всяко листо X_i, при $i > 0$, и му присвоим сумата от числата по пътя от X_0 до X_i; като заменим всички останали числа с нули. Тогава сумата на Боби по всеки път с начало X_0 не се увеличава. От друга страна, сумата на числата не намалява. Ако е нужно, после Ани намалява числата при листата, така че да изпълни условията за сумата.

Задачата вече се поставя така: Нека е дадено дърво с n върха и корен в X_0. Нека $L_1, \ldots, L_k$ са листата на това дърво, различни от корена, и нека d_i е броят на върховете по пътя от X_0 до L_i. Трябва да изберем неотрицателни числа $s_1, \ldots, s_k$, чиято сума е 1, така че да минимизираме величината

$$r = \max_{1 \le i \le k} \frac{s_i}{d_i}.$$

Нека $d = \max_i d_i$. Без да губим общност, ще считаме, че $d = d_1$. Тогава пътят от X_0 до L_1 съдържа $d-1$ върха, различни от тези на L_i, така че $k \le n-(d-1)$. Следователно

$$r \ge \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{s_i}{d_i} \ge \frac{1}{dk}\sum_{i=1}^{k} s_i = \frac{1}{dk} \ge \frac{1}{d(n-d+1)} \ge \frac{1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil}.$$

Равенството се достига, ако $d = \left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil$, и графът се състои от път с дължина $d-1$, като единият му край е X_0, а към другия край са свързани $n-d+1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor$ листа. На всяко от тези листа трябва да се присвои числото $1/(n-d+1)$, а на всички останали върхове да се присвоят нули.

Втори подход. Ани построява свързан граф G върху върховете $V = \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$. Обърнете внимание, че премахването на всяко ребро, което оставя G свързан, намалява опциите на Боби за избор на път. Следователно, приемаме, че Ани изгражда покриващо дърво върху V. Нека означим с T едно такова дърво върху V, с корен в $v_0 = X_0$. Нека $f : V \to [0,1]$ е функция, която удовлетворява $\sum_{v\in V} f(v) = 1$. За всеки път P в T да означим:

$$A(f,P) = \frac{1}{|V(P)|}\sum_{v\in V(P)} f(v).$$

Нека u бъде връх от V, който не е листо в T, и u' бъде листо на T, такова че u да лежи на пътя от v_0 до u'. Дефинираме $f' : V \to [0,1]$ като функция, която съвпада с f във всички върхове, освен в u и u', като $f'(u) = 0$ и $f'(u') = f(u') + f(u)$. Обърнете внимание, че $A(f',P) \le A(f,P)$ за всеки път P. Това означава, че Ани може да разглежда само тези функции f, които приемат стойност 0 във върховете, които не са листа. По същия начин може да приемем, че $f(v_0) = 0$.

Нека $L(T)$ бъде множеството от листата на T (приемаме, че $v_0 \notin L(T)$). За всяко $u \in L(T)$ да означим с $p(u)$ броя на върховете на пътя от v_0 до u. Трябва да минимизираме

$$M(f,T) := \max\left\{\frac{f(u)}{p(u)} : u \in L(T)\right\} \tag{1}$$

по всички $f : L(V) \to [0,1]$ с условието $\sum_u f(u) = 1$.

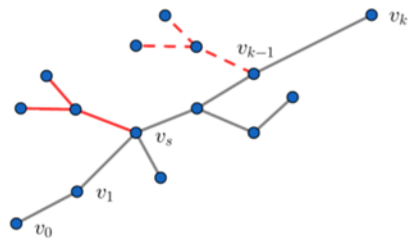
Тези функции формират затворено множество в компактното пространство $[0,1]^{L(V)}$, така че те формират компактно множество. Тъй като M зависи непрекъснато от f, минимумът се достига при някоя функция f. Ако $\frac{f(u_1)}{p(u_1)} > \frac{f(u_2)}{p(u_2)}$ за някои $u_1, u_2 \in L(T)$, можем да построим функция f_0 така, че $M(f_0,T) < M(f,T)$, като намалим $f(u_1)$ с подходяща стойност и увеличим $f(u_2)$ със същата стойност. Следователно, за функцията f, която минимизира (1), стойността $\frac{f(u)}{p(u)}$ трябва да е една и съща за всички $u \in L(T)$. Така получаваме:

$$f(u) = \begin{cases} \frac{p(u)}{\sum_{v\in L(T)} p(v)} & \text{ако } u \in L(T) \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

което дава

$$m(T) := \min_f M(f,T) = \frac{1}{\sum_{v\in L(T)} p(v)}. \tag{2}$$

Остава да изчислим $m := \min_T m(T)$, тоест да посочим покриващо дърво T върху V, с корен в v_0, за което $\sum\limits_{v \in L(T)} p(v)$ да е максимално възможно. Нека T минимизира (2), и нека $P := v_0 v_2 \ldots v_k$ бъде най-дългият път в T. Ако някой връх от $v_0, v_1, \ldots, v_{k-2}$, да кажем v_s, е инцидентен с ребро, което не принадлежи на P, можем да вземем поддървото, с корен в v_s, което не съдържа ребра от P, и да го преместим в v_{k-1} (вижте фигурата).



Резултатът е дърво T' с $m(T') < m(T)$, което противоречи на избора на T. Следователно, $\deg_T v_0 = 1$ и $\deg_T(v_i) = 2$, за $i = 1, 2, \ldots, k-2$. Тъй като P е най-дългият път, то v_{k-1} е свързан с всички останали върхове от V, които не са в $\{v_0, \ldots, v_{k-1}\}$. От тук:

$$m(T) = \frac{1}{\sum_{v \in L(T)} p(v)} = \frac{1}{(n-k)(k+1)}.$$

Лесно се вижда, че $m(T)$ достига своя минимум при $k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ и тази стойност е

$$m(n) = \begin{cases} \frac{4}{(n+1)^2} & \text{ако } n \text{ е нечетно,} \\ \frac{4}{n(n+2)} & \text{ако } n \text{ е четно.} \end{cases}$$

В заключение, най-малката възможна стойност на $M(f, T)$, която Ани може да постигне, е $m(n)$. Следователно, Боби печели, тогава и само тогава, когато $r \leq m(n)$, а най-голямото такова r е $r = m(n)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за показване, че построеният граф трябва да е дърво; 1 т. за доказване, че ненулевите числа трябва да са в листата на дървото; 2 т. за доказване, че дървото, минимизиращо максималната усреднена величина, е път, в който последният връх е свързан с всички останали листа; 3 т. за довършване.

Задачите са предложени от:
4 – Александър Иванов; 5 – Кристиян Василев; 6 – Драгомир Грозев.