**Министерство на образованието и науката**
**Съюз на математиците в България**

---

## 74. Национална Олимпиада по математика

### Първи ден (5.4.2025), 9-12 клас

**Задача 1.** Да се намерят всички безкрайни редици $a_1, a_2, \dots$ от реални числа, за които е изпълнено

$$a_{m^2+m+n} = a_m^2 + a_m + a_n$$

за произволни (не непременно различни) естествени числа $m$ и $n$.

**Задача 2.** При дадено естествено число $n$ нека точно $n$ от клетките на квадратна таблица $n \times n$ са оцветени в черно, а останалите – в бяло; *цената* на такова оцветяване е минималният брой бели клетки, които трябва да се преоцветят в черно, така че от всяка черна клетка да може да се стигне до всяка друга черна клетка чрез последователност от черни клетки, в която всеки две поредни клетки имат обща страна. Нека $f(n)$ е максималната възможна цена спрямо всички първоначални оцветявания за дадено $n$. Да се намери реално число $\alpha$, такова че за всяко естествено число $n \geq 100$ е в сила

$$\frac{1}{3}n^{\alpha} \leq f(n) \leq 3n^{\alpha}.$$

**Задача 3.** Нека $P$ е неконстантен полином с цели коефициенти, като старшият е равен на 1, и нека $a_1, a_2, \dots$ е безкрайна редица от естествени числа. Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа, всяко от които дели поне един член на редицата

$$b_n = P(n)^{a_n} + 1.$$

**Министерство на образованието и науката**
**Съюз на математиците в България**

---

## 74. Национална Олимпиада по математика

### Втори ден (6.4.2025), 9-12 клас

**Задача 4.** Даден е остроъгълен триъгълник $ABC$, $AB < AC$, с височина $AD$ ($D \in BC$) и ортоцентър $H$. Окръжност през точки $B$ и $D$ се допира до правата $AB$ и пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точка $Q$. Описаната около $\triangle QDH$ окръжност пресича правата $BC$ за втори път в точка $P$. Да се докаже, че ако $M$ е среда на $BC$, то правите $MH$ и $AP$ са перпендикулярни.

**Задача 5.** Казваме, че естественото число $m$ е *свободно от квадрати*, ако не съществува естествено число $d > 1$, за което $d^2$ дели $m$. Нека $n$ е естествено число. Да се докаже, че съществува естествено число $a$, за което множеството $\{a+1, a+2, \ldots, a+n\}$ съдържа точно $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor$ числа, свободни от квадрати.

**Задача 6.** Нека $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ са $n \geq 2$ дадени точки в равнината и $r > 0$ е реално число. Ани и Боби играят следната игра: Ани построява свързан граф с върхове в точките $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, т.е. свързва някои от точките с ребра, така че от всяка от дадените точки да може да се стигне до всяка друга, движейки се по ребра. След това Ани записва във всеки връх $X_i$ неотрицателно реално число $r_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, така че $\sum_{i=0}^{n-1} r_i = 1$. Боби избира различни върхове $X_{i_0} = X_0, X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ така че $X_{i_j}$ и $X_{i_{j+1}}$ са свързани с ребро за всяко $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Боби печели, ако $\dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} r_{i_j} \geq r$; в противен случай печели Ани.

В зависимост от $n$, определете най-голямото възможно $r$, за което Боби има печеливша стратегия.