

Задача 12.1. Нека a, b са реални параметри. Да се намери минималната стойност на функцията

$$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + 1} + \sqrt{(x+1-a)^2 + 1} + \sqrt{(x+b)^2 + 1} + \sqrt{(x+1-b)^2 + 1}$$

и да се определи за кои стойности на x се достига.

Задача 12.2. Една редица $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ се нарича *периодична*, ако съществува естествено число t , за което $a_{n+t} = a_n$ при всяко цяло $n \geq 0$. Да се намерят всички стойности на реалното число c , за които редицата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, зададена чрез $a_0 = c$ и $a_{n+1} = 3a_n - 4a_n^3$, е периодична.

Задача 12.3. Дадени са естествени числа $m, n \geq 2$. Точките A_1, A_2, \dots, A_n са избрани случайно, независимо и равномерно по окръжност с обиколка 1 (т.е. за всяко $i = 1, \dots, n$, за всяко $x \in (0, 1)$ и за всяка дъга \mathcal{C} с дължина x от окръжността е в сила $\mathbb{P}(A_i \in \mathcal{C}) = x$.)

Каква е вероятността да съществува дъга от окръжността с дължина $1/m$, която съдържа всяка от точките A_1, A_2, \dots, A_n ?

Задача 12.4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с $AC > BC$ и център I на вписаната окръжност. Нека ω е полувписаната окръжност в триъгълник ABC срещу върха C (това е окръжността, допираща се вътрешно до описаната около $\triangle ABC$ окръжност, както и до правите AC и BC). Окръжността Γ минава през точките A, B и се допира до ω в точка T , като $C \notin \Gamma$ и точка I е в $\triangle ATB$. Да се докаже, че $\angle CTB + \angle ATI = 180^\circ + \angle BAI - \angle ABI$.