

Übungsblatt – Methode der kleinsten Quadrate

Ziel: In dieser Übung wenden Sie die Methode der kleinsten Quadrate zur linearen Regression auf verschiedene Problemstellungen an. Sie vertiefen Ihr Verständnis für Residuen, Fehlermaße und den Einfluss einzelner Datenpunkte auf das Modell.

Aufgabe 1 – Manuelle Bestimmung einer Ausgleichsgeraden

Gegeben ist folgender Datensatz mit Messwerten:

x	1	2,5	3,5	5
y	2,5	3,5	5	5

- Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $y = ax + b$ mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate.
- Tragen Sie die Datenpunkte in ein Koordinatensystem ein und zeichnen Sie die Ausgleichsgerade ein.
- Berechnen Sie die Residuen r_i , die quadrierten Abweichungen und den MSE der Ausgleichsgeraden.

Aufgabe 2 – Einfluss von Ausreißern

Ergänzen Sie den Datensatz aus Aufgabe 1 um einen Ausreißer bei $x = 2$ mit $y = 7$.

- Wie verändert sich der MSE der in Aufgabe 1 bestimmten Ausgleichsgeraden?
- Wenn wir für die angepassten Werte erneut die Ausgleichsgerade berechnen erhalten wir für $m = 0,36$ und für $b = 3,59$. Vergleichen Sie die beiden Geraden graphisch und beschreiben Sie den Einfluss des Ausreißers auf das Modell.

Aufgabe 3 – Fehlermaße vergleichen

Gegeben sind zwei Modelle A und B mit folgenden Residuen:

i	r_i Modell A	r_i Modell B
1	-0,2	-0,5
2	0,1	0,3
3	-0,3	0,1
4	0,4	-0,6

- Berechnen Sie für beide Modelle die SSE, den MSE und den MAE.
- Welches Modell würden Sie bevorzugen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 4 – Gravitationskonstante bestimmen

Sie haben ein Experiment durchgeführt in dem Sie ein kleines Objekt aus unterschiedlichen Höhen fallen gelassen haben und die Zeit bis zum Aufprall gestoppt haben. Aus den leicht verrauschten Messdaten und dem Wissen, dass im freien Fall gilt $s = \frac{1}{2}gt^2$, möchten Sie nun die Gravitationskonstante g herleiten. Folgende Messwerte liegen Ihnen vor:

Fallhöhe s [m]	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
Fallzeit t [s]	0,43	0,63	0,81	0,90	1,01

Im freien Fall gilt $s = \frac{1}{2}gt^2$

- Stellen Sie die Beziehung zwischen s und t^2 grafisch dar. Bilden Sie in Ihrem Diagramm dafür t^2 auf der x-Achse und s auf der y-Achse ab.
- Welches Modell beschreibt den Zusammenhang in den Variablen s und t^2 am besten? Verwenden Sie die Variablen s und t^2 für ihr Modell. Überlegen Sie auch, wie die Fallzeit aus einer Höhe von 0m ist, und ob Sie mit dieser Überlegung ihr Modell weiter vereinfachen können.
- Bestimmen Sie die gesuchte Gerade mit der Methode der kleinsten Quadrate. Führen Sie dazu zunächst die benötigte Formeln auf und berechnen Sie diese.
- Berechnen Sie daraus g .
- Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

Hinweis: Sie können das im GitHub hinterlegte Jupyter Notebook aus dem Ordner Example für diese Aufgabe verwenden.



Alle Materialien zur Veranstaltung finden Sie auf GitHub
<https://github.com/MartinaEchtenbruck/Least-Squares-Materials>