ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
MÓDULO 1- VECTORES GEOMÉTRICOS

VECTORES

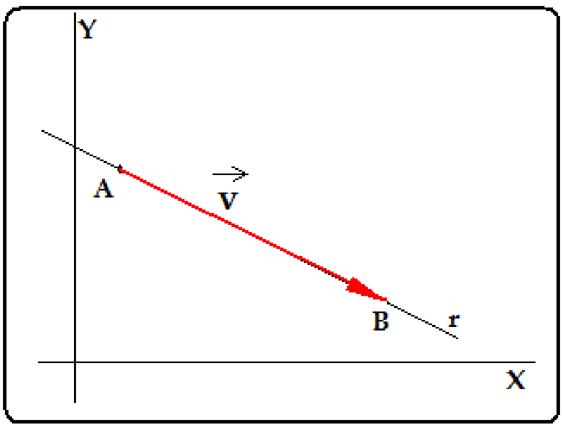
Magnitudes escalares y vectoriales

En el mundo real los fenómenos físicos son registrados y medidos según sus características específicas. La medición determinará, según las características necesarias para que quede perfectamente definida, magnitudes de distinto tipo, llamadas magnitudes escalares, vectoriales y tensoriales (no haremos referencia a estas últimas en esta asignatura)

Una **magnitud escalar** es aquella que está completamente caracterizada a través de un número real (la intensidad de lo medido) y la unidad de medida (puede ser el metro, el gramo, el segundo, etc.). El número indica la cantidad de veces que la magnitud medida contiene a la unidad considerada.
Ejemplos de este tipo de magnitud son la longitud, densidad, temperatura, tiempo, presión, trabajo entre otras.
En una **magnitud vectorial** son necesarios otros elementos adicionales, aparte de la unidad e intensidad se debe dar la recta de acción donde se encuentra esa magnitud vectorial, el sentido sobre dicha recta y el punto de aplicación dónde se haya aplicado. Esta magnitud recibe el nombre de **vector**.
En Física abundan los ejemplos de magnitudes vectoriales: la velocidad, aceleración, la fuerza, entre otros.
Cada magnitud vectorial tiene una representación analítica que en ciertas situaciones tiene correlato geométrico (sólo en una, dos o tres dimensiones) y allí se lo puede representar.

VECTORES EN EL PLANO

Trabajando en la recta, el plano o el espacio podemos tener una representación geométrica del vector.

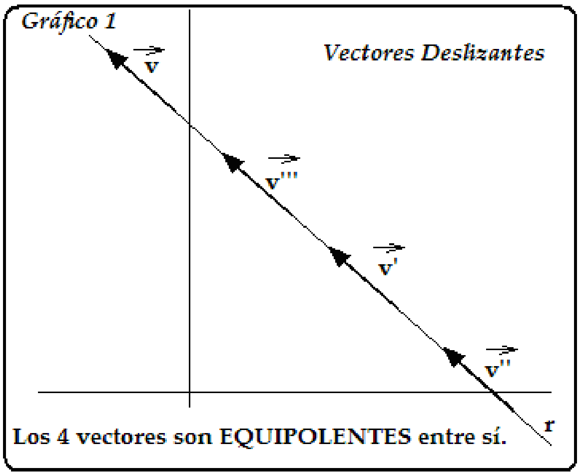


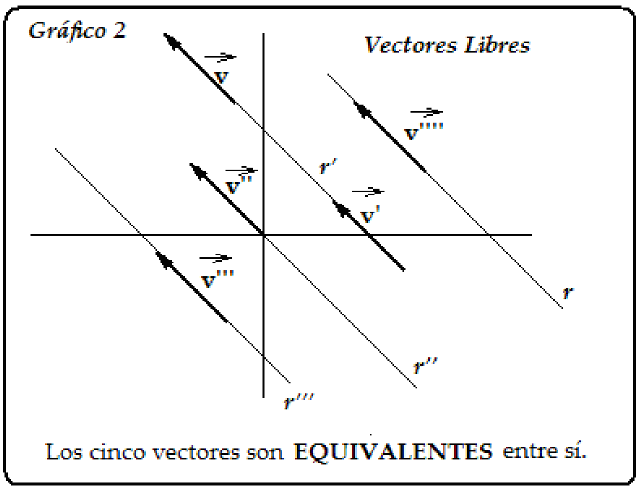
El vector $\vec{v}$ está sobre la recta **r**, su punto de aplicación – origen- es A y su sentido es uno de los dos posibles desde A (en este caso hacia abajo). El tamaño de la representación tendrá correlación con la intensidad –o módulo- del vector.

El vector $\vec{v}$ también puede denominarse como $\overrightarrow{AB}$. El orden es fundamental en la escritura: de izquierda a derecha, del origen a su punto final.

En Física aparecen diferentes tipos de vectores:

- los vectores *fijos* que son los que quedan definidos por su longitud, unidad de medida, dirección sentido y punto de aplicación;
- los vectores *deslizantes* son los que quedan definidos por su longitud, unidad de medida, recta de acción y sentido; donde no es necesario precisar el punto de aplicación sobre la recta **r**; llamaremos *equipolentes* a todos los vectores con igual tamaño, sobre la misma recta **r** y con igual sentido -observar el gráfico 1-
- los vectores *libres* quedan definidos por su longitud, unidad de medida, dirección y sentido. Dos vectores libres son equipolentes con aquellos otros que tienen rectas de apoyo paralelas, tienen igual intensidad e igual sentido –ver gráfico 2-; a la equipolencia se la denomina *equivalencia* de vectores.





A partir de ahora nuestro estudio se enfocará sobre los ***vectores libres***.

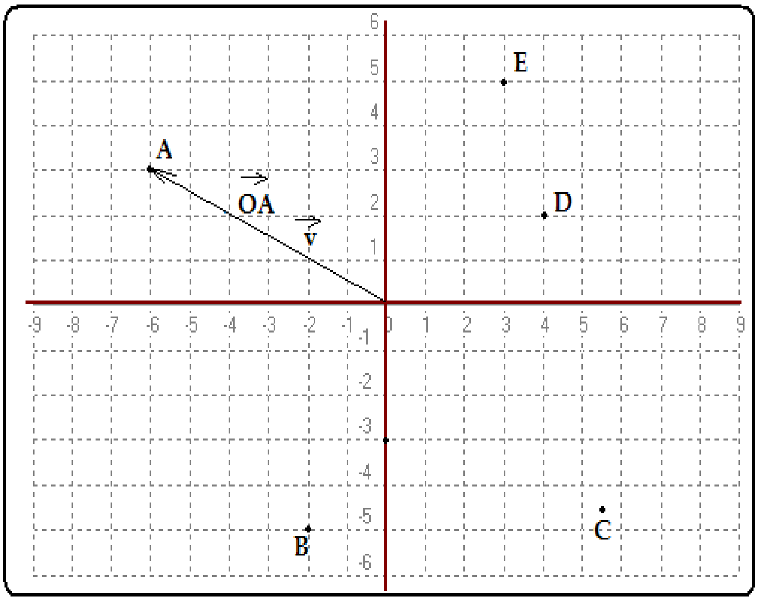
La definición geométrica de estos vectores es la del conjunto de todos los segmentos orientados de recta equivalentes a un segmento de recta de ese conjunto, llamado *representación* del vector.

En particular, elegiremos como **representante** al vector equivalente con origen en el punto O de coordenadas (0; 0) del sistema de referencia. En el gráfico 2 el representante es $\overrightarrow{v''}$.

A continuación, se hará la presentación de la *definición algebraica* y de las *propiedades* de los vectores en el plano ($\mathbf{R}^2$) y en más adelante se generalizará lo aprendido.

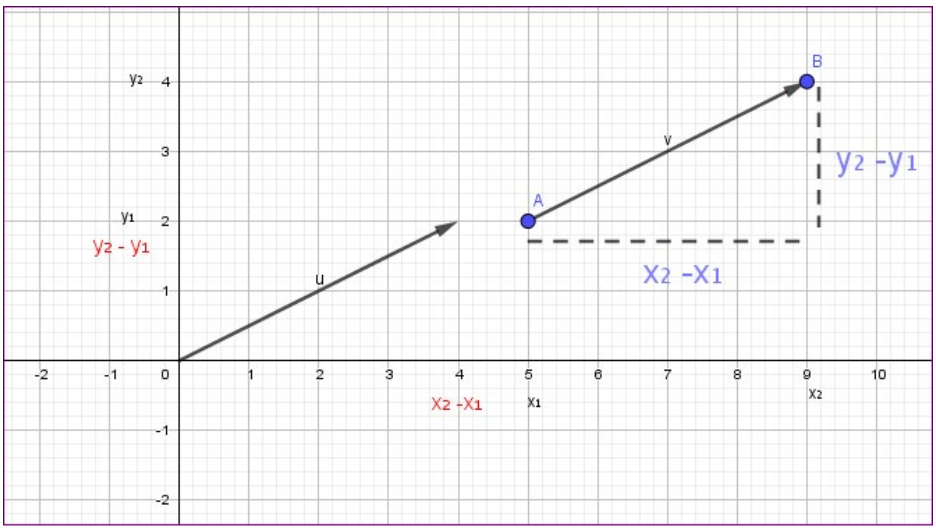
En R^2 un vector es un **par ordenado de números reales** que representa al extremo del vector respecto a un sistema de referencia (O, X, Y); el vector será $\vec{v} = (v_x ; v_y)$ donde $\mathbf{v_x}$ es la componente sobre la dirección X y $\mathbf{v_y}$ es la componente sobre la dirección Y. Si los ejes X e Y son perpendiculares, las componentes son las *proyecciones ortogonales*.
El punto O = (0; 0) representa al origen de coordenadas, pero al mismo tiempo al *vector nulo*.

El vector $\overrightarrow{OA}$ representado es el (–6; 3).



Se pide:
a) Dar las coordenadas de los demás vectores con origen en O y extremo final en el punto marcado.
b) Dibujar el vector $\overrightarrow{HG}$ con G= (–2; –1) y H= (4; –3).

Si consideramos el vector $\overrightarrow{AB}$ con A = (5 ; 2) y B = (9 ,4) , el vector equivalente , con origen en el origen de coordenadas es $\vec{u} = (9 – 5 ; 4 – 2) = (4 , 2)$



En general:

Si $A=(x_1;y_1)$ y $B=(x_2;y_2)$ entonces su representante en el origen es: $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$

c) Indicar las componentes del vector $\overline{HG}$ que dibujaste anteriormente.

Igualdad entre vectores

Dos vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ son iguales si sus respectivas componentes lo son.
Si $\vec{v}=(v_x;v_y)$ y $\vec{w}=(w_x;w_y)$ resulta que $\vec{v}=\vec{w}$ cuando $v_x=w_x$ y $v_y=w_y$.

$$\boxed{\vec{v}=\vec{w} \iff v_x=w_x \wedge v_y=w_y}$$

Ejemplo:

Hallar *k* real para que suceda que $\vec{v}=\vec{w}$ siendo $\vec{v}=(k^2;\ 2k+3)$ y $\vec{w}=(4;\ 1+\mathrm{k})$.

Dijimos que se necesita que: $v_x=w_x$ y $v_y=w_y$.

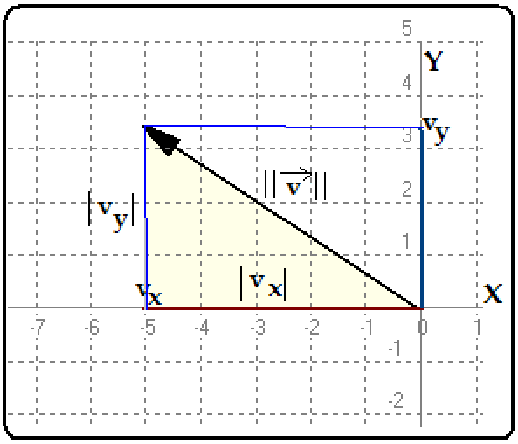
Entonces planteamos las ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} k^2=4 & \wedge & 2k+3=1+k \\ |k|=\sqrt{4} & \wedge & 2k-k=1-3 \\ (k=2 \vee k=-2) & \wedge & k=-2 \end{array}$$

El único número que cumple las dos condiciones es *k* = -2, entonces $\vec{v}=\vec{w} \iff k=-2$

LONGITUD, NORMA O MÓDULO DE UN VECTOR

Si $\vec{v}=(v_x;v_y)$ se puede obtener su longitud que anotamos $\|\vec{v}\|$ utilizando el Teorema de Pitágoras.



Tomando en cuenta el esquema, en el triángulo inferior la hipotenusa toma valor $\|\vec{v}\|$ y los catetos $|v_x|$ y $|v_y|$, donde las barras indican valor absoluto de un número real.

Se tiene $\|\vec{v}\|^2 = |v_x|^2 + |v_y|^2$; como $|v_x|^2 = (v_x)^2$ y $|v_y|^2 = (v_y)^2$ despejando queda:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

Ejemplos:

Si $\vec{v} = (3;-4)$ entonces la norma , módulo o longitud es :

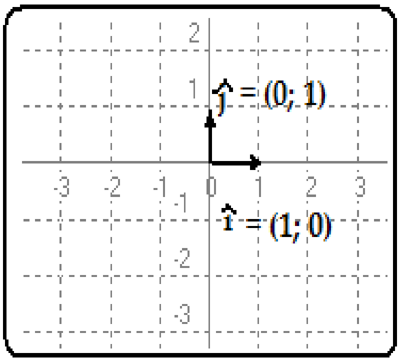
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

La longitud del segmento que representa al vector $\vec{v}$ es 5

Si $\vec{w} = (-2;\ -5)$ es $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.

A los vectores **unitarios** – de tamaño 1– se los llama **versores.**

En particular, a los versores que están en la dirección y sentido de los ejes X e Y positivos, se los llama **versores canónicos** $\breve{i}$ y $\breve{j}$ respectivamente. (Notar que a los versores, se les coloca otro símbolo encima de ellos)



OPERACIONES ENTRE LOS VECTORES Y SUS PROPIEDADES

Suma de vectores

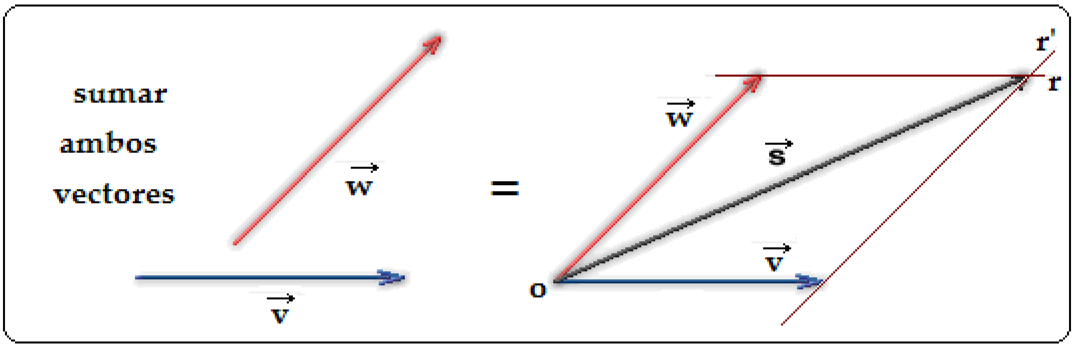
Definimos la suma + entre vectores de R^2 del siguiente modo:

$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = (v_x; v_y) + (w_x; w_y) = (v_x + w_x;\ v_y + w_y)$ con v_x, v_y, w_x y w_y números reales.

Notar que la suma da un nuevo vector pues al sumar v_x con w_x y v_y con w_y obtenemos nuevamente números reales.

Se dice que + es una ley de **composición interna** en R^2 o que la suma entre vectores es *cerrada,* ya que operamos con dos elementos del mismo conjunto (en este caso R^2) y obtenemos otro elemento del mismo conjunto R^2.

Geométricamente la suma se obtiene a través del **método del paralelogramo**:
Se traslada a un origen común ambos vectores y luego se traza por los extremos de cada vector una recta paralela al otro formándose un paralelogramo. La diagonal principal forma el vector **suma** resultante.

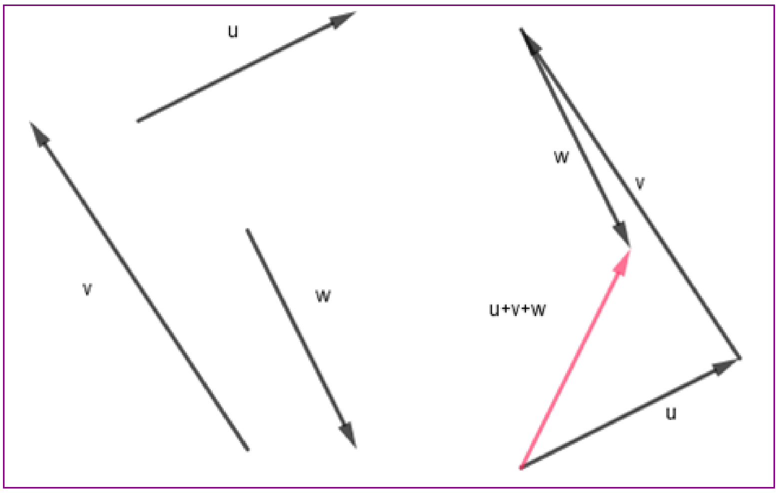


Dados los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{TS}$ con M= (0; 2) , N= (–2; –1); S= (4; –1) y T= (2; 1).¿Cuál es el *representante* de $\overrightarrow{MN}$ que tiene su origen en el (0; 0)? ¿Y para $\overrightarrow{TS}$?
Obtener gráficamente el vector $\vec{r} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{TS}$.
¿Cuánto da la suma de ambos mirando el gráfico? Operar también algebraicamente con las componentes.

Si se deben sumar más de dos vectores o los vectores a sumar son paralelos, conviene aplicar el **método de la poligonal**.

Este método consiste en graficar un vector a continuación de otro; es decir, el origen de uno de los vectores se lleva sobre el extremo del anterior, sobre el extremo de cada vector se dibuja un vector equipolente al próximo, formando una poligonal. Para obtener el vector suma se une el origen del primer vector con el extremo del último vector, el vector resultante será igual a la suma de todos los vectores.

Sumamos los tres vectores:



Revisamos a continuación algunas **propiedades:**

1) La suma de vectores es **asociativa**

Debe valer que para cualquier terna de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ resulte que

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$$

$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = [(u_x;\, u_y) + (v_x;\, v_y)] + (w_x;\, w_y) =_1 (u_x + v_x;\, u_y + v_y) + (w_x;\, w_y)$

$=_1 ((u_x + v_x) + w_x;\, (u_y + v_y) + w_y) =_2 (u_x + v_x + w_x;\, u_y + v_y + w_y)$ [1]

donde hemos usado la definición de suma de vectores (1) , suma y propiedad asociativa de la suma de números reales (2)

$\vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = (u_x;\, u_y) + [(v_x;\, v_y) + (w_x;\, w_y)] =_1 (u_x;\, u_y) + (v_x + w_x;\, v_y + w_y)$

$=_1 (u_x + (v_x + w_x);\, u_y + (v_y + w_y)) =_2 (u_x + v_x + w_x;\, u_y + v_y + w_y)$ [2]

Como en [1] y [2] coinciden las expresiones se cumple con $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$.

2) Existe un elemento $\vec{O} = (0;0)$ tal que para todo vector $\vec{v}$ resulte que $\vec{O} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{O} = \vec{v}$. [**Elemento neutro**]

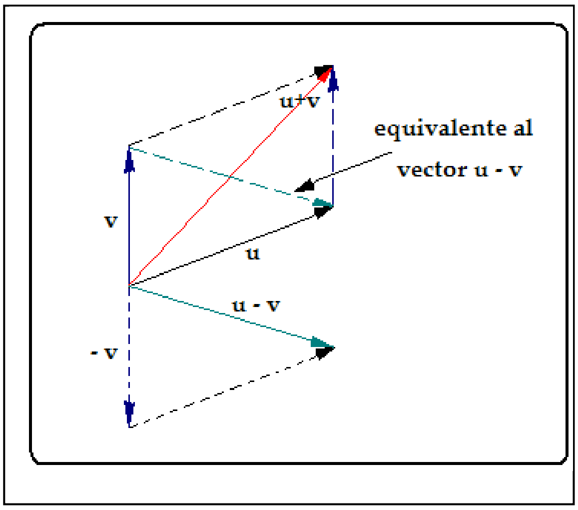
3) Cada vector $\vec{v}$ tiene un vector –inverso aditivo u **opuesto-** denotado $\overrightarrow{-v}$ tal que $\vec{v} + \left(\overrightarrow{-v}\right) = \left(\overrightarrow{-v}\right) + \vec{v} = \vec{O}$ **[elemento simétrico respecto a la suma]**

El vector opuesto tiene la misma dirección y longitud que el vector dado pero tiene sentido opuesto.

4) Para todo $\vec{v}$ y $\vec{w}$ resulta que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$. [**conmutatividad**]

Nota: El vector nulo es un vector de características particulares: su intensidad (módulo) es cero, pero carece de dirección (recta donde se encuentra –tiene infinitas opciones-es un punto) y de sentido.

Nota



La resta de vectores puede definirse usando el vector opuesto: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(\overrightarrow{-v}\right)$.

En el esquema se observan los vectores *suma* y *resta*. Dados **u** y **v**, la diagonal principal del paralelogramo que forman da el vector suma; la otra diagonal da el vector resta siendo la orientación desde el *sustraendo* al *minuendo*. (Con la flecha para la flecha del primer vector)

Producto de un escalar por un vector

Dado $\vec{v} = (v_x; v_y)$ y α Є R se define el producto de α por $\vec{v}$ como un nuevo vector $\overrightarrow{\alpha.v}$ donde

$$\alpha.\vec{v} = \alpha.(v_x; v_y) = (\alpha.v_x; \alpha.v_y)$$

como tanto v_x, v_y y α ЄR, resulta que las componentes $\alpha.v_x$ y $\alpha.v_y$ son también números reales y tenemos por resultado un vector de R^2.

Al relacionar dos conjuntos (R y R^2) se trata de una **ley de composición externa** de R x $R^2 \rightarrow R^2$.

La dirección de $\overrightarrow{\alpha.v}$ coincide con la dirección de $\vec{v}$ $\quad \forall \alpha \neq 0 \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

El sentido de $\overrightarrow{\alpha.v}$ coincide con el sentido de $\vec{v}$ si $\alpha > 0$ y es opuesto al sentido de $\vec{v}$ si $\alpha < 0$.

Y en cuanto a la norma, se cumple que:

$$\left\|\alpha\vec{v}\right\| = |\alpha|.\left\|\vec{v}\right\| \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} \left\|\alpha\vec{v}\right\| < \left\|\vec{v}\right\| & \text{si} \quad |\alpha| < 1 \\ \left\|\alpha\vec{v}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| & \text{si} \quad |\alpha| = 1 \\ \left\|\alpha\vec{v}\right\| > \left\|\vec{v}\right\| & \text{si} \quad |\alpha| > 1 \end{cases}$$

Si $\vec{u} = \left(1;\ \sqrt{3}\right)$ Haremos $\vec{v} = 3.\vec{u}$

Se puede observar que $\vec{v} = 3.\vec{u} = 3.\left(1;\ \sqrt{3}\right) = (3;\ 3.\sqrt{3})$,

$$\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\left(1;\ \sqrt{3}\right)\right\| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + \left(3.\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 9.3} = \sqrt{36} = 6$$

Efectivamente las longitudes de $\vec{v}$ y $\vec{u}$ sea una el triple de la otra, resulta que 6 = 3. 2 como se esperaba.

Ejercicio:

Sea A= (2; 4) y $\vec{v} = \overline{OA}$.

a) Graficar $\vec{v}$.

b) Obtener analíticamente $\vec{w} = 2.\vec{v}$ y $\vec{u} = -\ ½.\vec{v}$ y graficarlos.

c) Analizar lo que dijimos recién ¿Qué ocurre con el sentido de $\vec{v}$ si se lo multiplica por un número positivo? ¿Y por uno negativo?

d) ¿Qué sucede con el tamaño si se lo multiplica por un número de valor absoluto mayor que uno? ¿Y entre 0 y 1?

• La operación producto de un vector por un escalar tiene las siguientes **propiedades**:

1) $\forall \alpha, \beta \ \varepsilon\ R \ \wedge \forall \vec{v}\ \varepsilon\ R^2$ resulta que $\alpha.(\beta.\vec{v}) = (\alpha.\ \beta).\vec{v}$ **[asociatividad mixta]**

2) $\forall \alpha, \beta \ \varepsilon\ R \wedge \forall \vec{v}\ \varepsilon\ R^2 \Rightarrow (\alpha+\beta).\vec{v} = \alpha.\vec{v} + \beta.\vec{v}$ **[distributividad del producto respecto a la suma de escalares]**

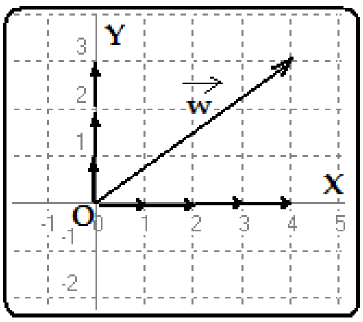
3) $\forall \alpha\ \varepsilon\ R \wedge \forall \vec{v}\ , \vec{w}\ \varepsilon\ R^2 \Rightarrow \alpha.(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha.\vec{v} + \alpha.\vec{w}$ **[distributividad del producto respecto a la suma de vectores]**

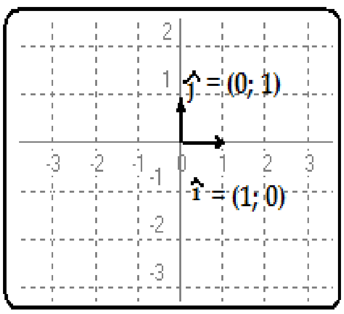
4) La unidad del "cuerpo" de los números reales es elemento neutro para este producto

$\forall \vec{v}\ \varepsilon\ R^2$ resulta que $1.\ \vec{v} = \vec{v}$. [**Elemento unidad**]

Otra forma de expresar un vector

Tomemos un vector como el (4; 3)





el mismo puede pensarse como 4. (1; 0) + 3. (0; 1)

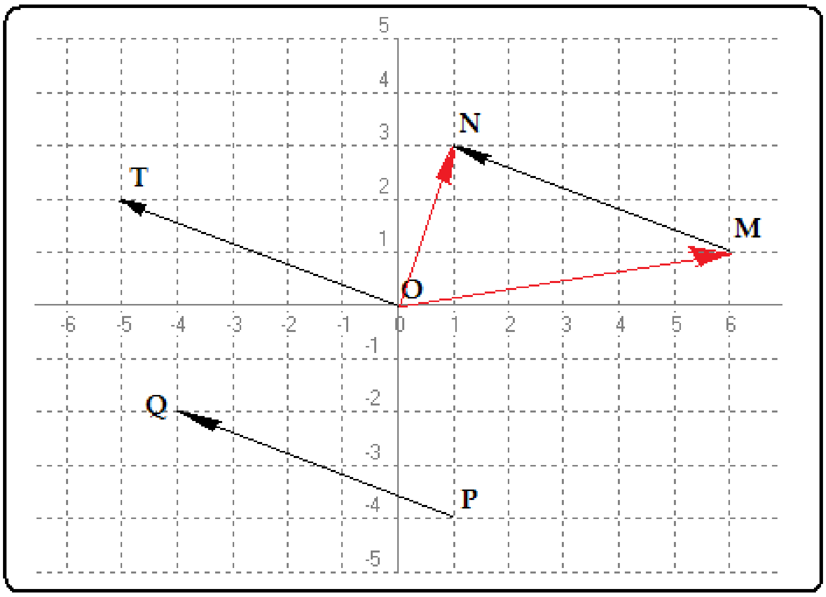
Usando las operaciones vistas, pensarse como (4; 3) = 4. (1; 0) + 3. (0; 1) = 4 $\breve{i}$ + 3 $\breve{j}$.

Comentario
Si se tiene un conjunto **A** con la estructura de cuerpo (como los reales) y otro **V** (por ejemplo, $\mathbf{R}^2$) y definimos las operaciones + y • como lo hicimos recién; si además ambas operaciones son cerradas y cumplen las ocho propiedades se dice que **V** es un ***espacio vectorial sobre A***. En nuestro ejemplo es R^2 un espacio vectorial sobre R (también se lo llama espacio vectorial real).
Este concepto lo retomaremos en el módulo 4

EQUIVALENCIA DE VECTORES

¿Será posible operar con vectores que mantengan la equipolencia pero desde el origen de coordenadas?
Para eso vamos a definir un nuevo concepto, el de equivalencia entre vectores:
Dos vectores son ***equivalentes*** si trasladados al origen son iguales.

El siguiente esquema nos ayudará a obtener una expresión.
De $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$, de donde surge $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.
Si analizamos geométricamente esta última expresión vemos que nos da el vector $\overrightarrow{OT}$. La resta nos lleva a un punto del plano **T** tal que $\overrightarrow{OT}$ sea equivalente a $\overrightarrow{MN}$.



De lo anterior llegamos a que $\overrightarrow{MN}$ es equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ si: **N–M** = **Q–P**.

Ejercicio:
Para el esquema anterior:
a) Indicar las coordenadas de M, N, P, Q y T.
b) Comprobar que se cumple la equivalencia.
c) Si E= (–1; –1), obtener F tal que $\overrightarrow{EF}$ sea equivalente a $\overrightarrow{PM}$. Graficar ambos vectores.
d) Dados los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{TS}$ con M= (0; 2), N= (–2; –1), S= (4; –1) y T= (2; 1) hallar analítica y gráficamente el vector $\vec{s} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{TS}$

PARALELISMO ENTRE VECTORES

Piensa en elegir un vector $\vec{v} = (v_x; v_y)$ cualquiera, no nulo y considerar los diferentes vectores $\vec{w}$ que se obtienen haciendo $\vec{w} = \alpha. \vec{v}$, resulta que los vectores $\vec{w}$ son paralelos a $\vec{v}$.

Resulta que dos vectores no nulos son paralelos, si cualquiera de ellos puede obtenerse multiplicando al otro por un escalar.

$$\vec{v} // \vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} = \alpha \vec{v} \wedge \alpha \in \mathbb{R}$$

Dicho de otra forma si $\vec{v} = (v_x; v_y)$ y $\vec{w} = \left(w_x; w_y\right)$ si $\vec{w} = \alpha \vec{v} \wedge \alpha \in \mathbb{R}$

$\left(w_x; w_y\right) = \alpha(v_x; v_y) = (\alpha v_x; \alpha v_y)$ entonces por igualdad de vectores y suponiendo que ninguna de las componentes sea 0 , resulta:

$$\begin{cases} w_x = \alpha v_x \Rightarrow \alpha = \dfrac{w_x}{v_x} \\ w_y = \alpha v_y \Rightarrow \alpha = \dfrac{w_y}{v_y} \end{cases}$$ igualando los valores de α entonces $\dfrac{w_x}{v_x} = \dfrac{w_y}{v_y}$

Sintetizando: $\vec{v} // \vec{w} \Leftrightarrow \dfrac{w_x}{v_x} = \dfrac{w_y}{v_y}$

Esto significa que dos vectores son paralelos, si sus componentes son proporcionales.

Ejemplo:
Si M= (5; –2), N= (3; 1), P= (4; 0) y Q= (–2; 9) comprobar que los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos.
$\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{PQ}$.
Para empezar, y poder compararlos conseguimos vectores equivalentes a ambos pero que tengan un origen en común, el origen de coordenadas.

Encontramos las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$ y del vector $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{MN}$ = (3-5 ; 1-(-2)) = (-2 ; 3) $\overrightarrow{PQ}$ =(-2-4; 9-0) = (-6 ; 9)
Nos preguntamos ¿es $\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{PQ}$?
¿ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{MN}$ = α $\overrightarrow{PQ}$? Observando las componentes vemos que unas son el triple de las otras, o la tercera parte, dependiendo quién nombremos primero.

$(-2 ; 3) = \alpha (-6 ; 9)$ $\begin{cases} -2 = \alpha(-6) \Rightarrow \alpha = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3} \\ 3 = \alpha\ 9 \quad \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ existe α ya que en los dos cálculos llegamos al mismo resultado $\alpha = \dfrac{1}{3}$ entonces resulta que $\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{PQ}$

De otra manera podemos plantear la proporcionalidad de sus componentes, y analizar si se cumple

$$\frac{-2}{-6} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

se cumple, entonces $\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{PQ}$

Normalización de un vector o Cálculo del vector unitario (versor) asociado a un vector

Dado un vector $\vec{u}$, no nulo, normalizar dicho vector significa encontrar el versor ($\breve{u}$) asociado a él, que tiene las siguientes características: es un vector unitario (de norma 1), tiene la misma dirección y sentido que $\vec{u}$.

Como debe tener la misma dirección y sentido:

$\breve{u} = k\vec{u}$ y $k > 0$ Aplicando el módulo a ambos miembros

$\|\breve{u}\| = \|k.\vec{u}\|$ aplicando la noma del producto de un número por un vector y que la norma del versor es 1 , resulta

$1 = |k|\|\vec{u}\|$ como dijimos que k debe ser positivo para que tenga el mismo sentido que $\vec{u}$

$1 = k.\|\vec{u}\|$ despejamos k

$k = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}$ significa que, para normalizar un vector distinto del nulo, se debe multiplicar por el inverso de su norma.

$$\breve{u} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

Ejemplo:

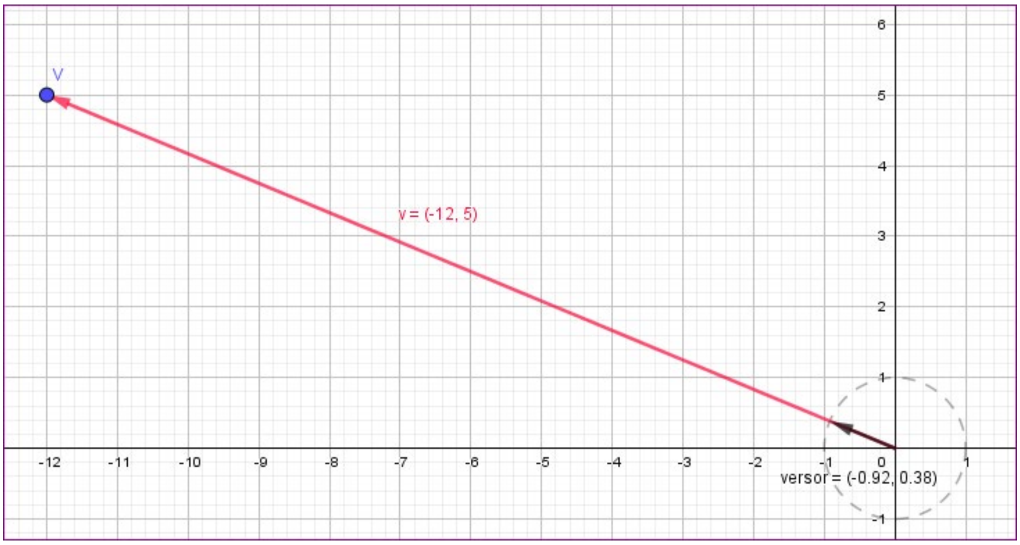
Obtener un vector de tamaño uno (unitario o versor) que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v} = (-12;5)$

Calculamos la norma de $\vec{v}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

Procedemos a multiplicar a $\vec{v}$ por el inverso de su norma $\breve{v}=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$

$\breve{v}=\frac{1}{13}(-12;5)=\left(-\frac{12}{13};\frac{5}{13}\right)$ el vector $\left(-\frac{12}{13};\frac{5}{13}\right)$ tiene norma 1, es paralelo y de igual sentido que $\vec{v}$

Gráficamente,



Nota que el vector $\left(-\frac{12}{13};\frac{5}{13}\right)$= (-0,92 ; 0,38) tiene norma 1, su extremo se encuentra sobre la circunferencia de radio 1, tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$

Ejercicio:

a) Si $\vec{v}=(-5;\ 0)$ y $\vec{u}=(4;\ -3)$ calcular las normas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{u-v}$.

b) ¿Cómo se puede hacer para hallar la longitud de un vector $\overrightarrow{MN}$ conociendo M y N? Aplicarlo con M= (5; –2) y N= (3; 1).

c) ¿Cuáles son los valores de x reales para que la distancia de A a B sea 10 sabiendo que A=(x–4; –3) y B= (x+4; x–2)?

Video de la cátedra que puede ayudarte con estos temas:

Introducción a GeoGebra. Vectores en el plano
https://web.microsoftstream.com/video/3a7258b1-9c36-4e87-a6d2-5d19887175b2

VECTORES EN R³

Ya hemos trabajado en el plano (R^2) y se hace necesario agregar una tercera dimensión (**z** o **x_3** generalmente).

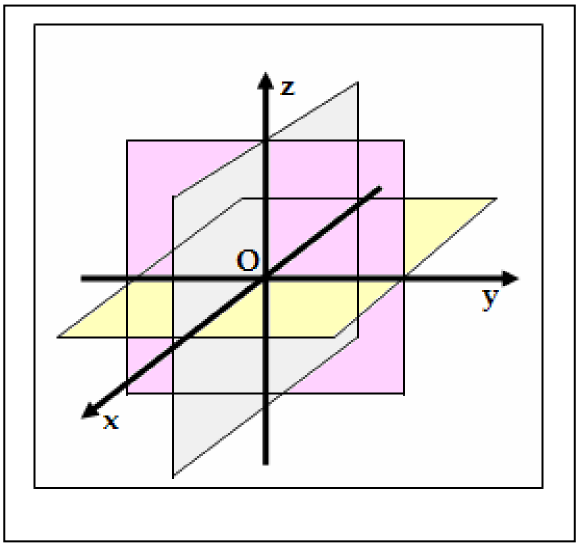
Para la ubicación de puntos (y por ende de vectores) en R^3 utilizaremos una terna de referencia de tres ejes ortogonales entre sí:

x **-eje de abscisas-**

y **-eje de ordenadas-**

z **-eje de cotas-**

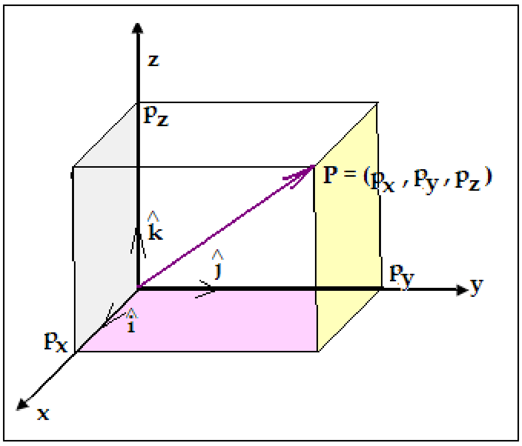
cortándose en el punto O llamado **origen de coordenadas.**

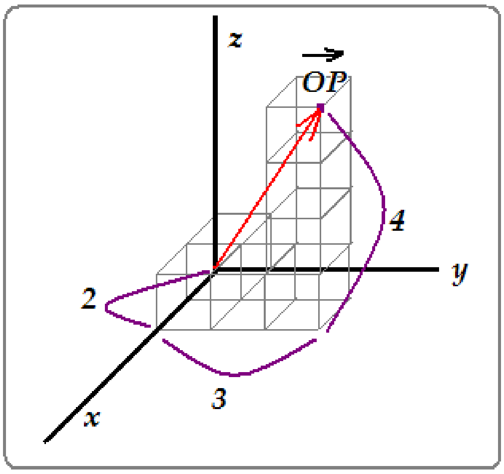


Los planos determinados por cada par de ejes se llaman **planos coordenados**: pl(x,y); pl(x,z) y pl(y,z).

Todo **punto** $P = (p_x, p_y, p_z) \in R^3$ está asociado a un **vector posición** que va desde el origen hasta dicho punto del plano.

Tenemos $\overline{p} = \overline{OP} = (p_x, p_y, p_z)$ terna ordenada de números reales.





Un punto como S= (2; 3; 4) indica 2 unidades en la dirección *x*, 3 en la *y* ,y, 4 en la *z*.

Además $(2; 3; 4) = (2; 0; 0) + (0; 3; 0) + (0; 0; 4) = 2.(1; 0; 0) + 3.(0; 1; 0) + 4.(0; 0; 1) = 2.\hat{i} + 3.\hat{j} + 4.\hat{k}$

donde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son los **versores canónicos**.

Las operaciones vistas en R^2 se adaptan en R^3 del siguiente modo:

$\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{v}' = (x', y', z')$ vectores de R^3 y α Є R entonces:

$\vec{v} + \vec{v}' = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

$\alpha.\vec{v} = \alpha.(x, y, z) = (\alpha.x \ , \alpha.y \ , \alpha.z)$

y las interpretaciones geométricas se mantienen.

Ejemplo:

Dados los vectores de $\vec{a}=(3,-2,\ 0)$, $\vec{b}=(2,\ 2,\ 1)$, $\vec{c}=(-1,\ 4,\ 2)$, $\vec{d}=(0,\ 3,\ 4)$ hallar analíticamente $\vec{l}$ para que $\frac{1}{3}\vec{l}-\vec{a}+\vec{b}-2.\vec{c}=\vec{d}$

Para poder averiguar $\vec{l}$ en $\frac{1}{3}\vec{l}-\vec{a}+\vec{b}-2.\vec{c}=\vec{d}$ procedemos a despejar

$\frac{1}{3}\vec{l}=\vec{d}+\vec{a}-\vec{b}+2.\vec{c} \quad \Rightarrow \ \vec{l}=3.\left(\vec{d}+\vec{a}-\vec{b}+2.\vec{c}\right)$

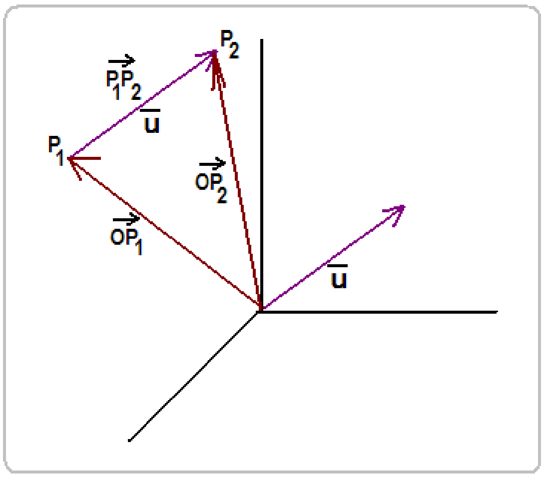
Reemplazamos por las componentes de los vectores y operamos

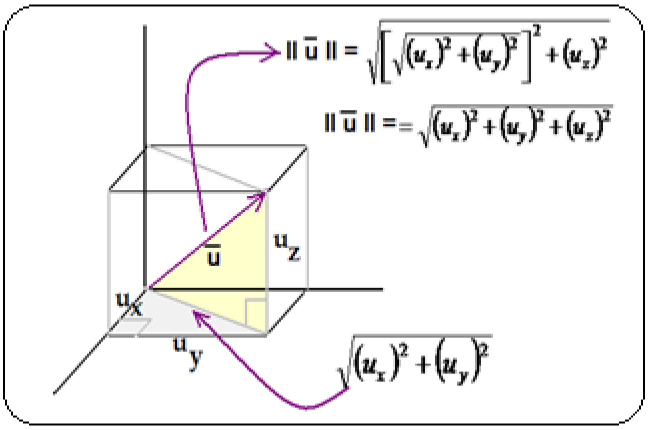
$\vec{l}=3.((0,\ 3,\ 4)+(3,-2,\ 0)-(2,\ 2,\ 1)+2.(-1,\ 4,\ 2))$

$\vec{l}=3.((1;\ -1;\ 3)+(-2;\ 8;\ 4))=3.(-1;\ 7;\ 7)\ =(-3;21;21)$

NORMA, MÓDULO O LONGITUD DE UN VECTOR EN R^3

La norma o módulo de un vector $\overline{P_1P_2}$ está dada por la longitud del vector equivalente $\vec{u}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$ que tiene su punto de inicio en el origen de coordenadas.





Si $P_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ y $P_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ son origen y extremo del vector, respectivamente, resulta:

$\bar{u}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$

Si recurrimos al Teorema de Pitágoras, **la norma de un vector** será

$\|\bar{u}\|=\sqrt{{u_x}^2+{u_y}^2+{u_z}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Si A= (–2, 3, 0) y B = (–1, 5, –2) resulta que la distancia de A a B es:

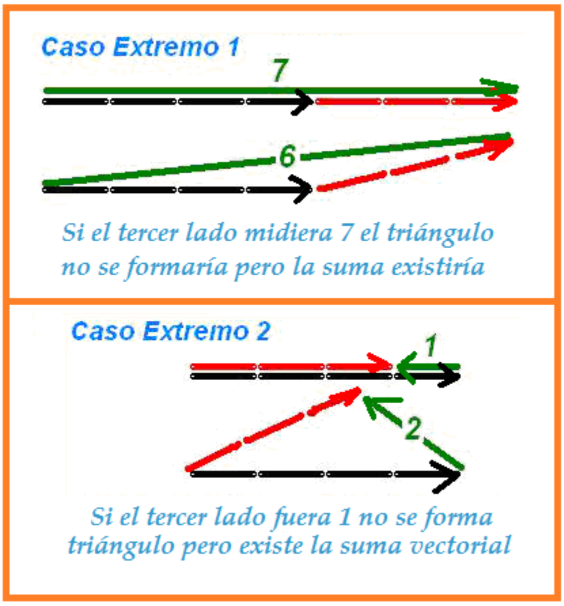
d(A; B) = $\left\|\overline{AB}\right\|=\|B-A\|=\|(1,\ 2,\ -2)\|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

Propiedades de la norma de un vector

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera:

1.- $\|\overline{u}\| \geq 0$ [la norma es un número real positivo o nulo.]

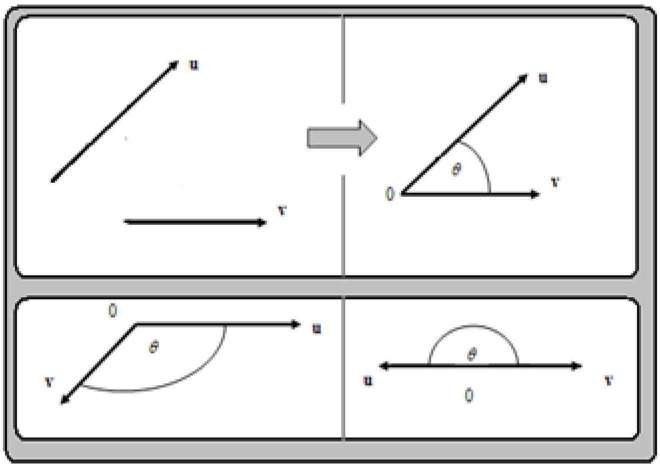
2.- $\|\overline{u+v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$ [*Desigualdad triangular*]



3.- que $|k|.\|\overline{u}\| = \|k.\overline{u}\| \quad \forall k \in R \wedge \forall \overline{u} \in R^3$

Ángulo entre vectores

Si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos, se entiende por ángulo entre ellos al número real $\hat{\theta} = ang(\vec{u},\vec{v})$ (entre 0 y π) siendo $\hat{\theta}$ el ángulo entre las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuando se trasladan a un origen común.



Para vectores *paralelos* el ángulo es 0º o π; si son *perpendiculare*s es ½ π y se dirá que son *ortogonales*.

PRODUCTO ESCALAR o INTERIOR o PUNTO EN R^2 y R^3

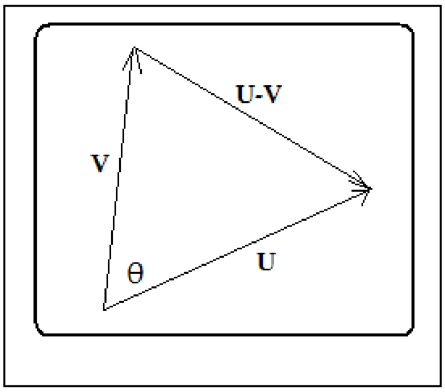
Se define una nueva operación entre vectores denominada **producto escalar** entre vectores de R^2 R^3 (también para R^n) y cuyo resultado es un número real (de allí el término escalar):

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores entonces el producto interior, escalar o punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = \begin{cases} \|\bar{u}\|.\|\bar{v}\|.\cos\theta & si \quad \bar{u} \neq \bar{0} \wedge \bar{v} \neq \bar{0} \\ 0 & si \quad \bar{u} = \bar{0} \vee \bar{v} = \bar{0} \end{cases}$$

Para el cálculo del producto escalar, tal como indica la definición debemos conocer el ángulo entre los vectores, que a veces no es de simple determinación, entonces te mostraremos otra forma de calcularlo. Para no perder generalización, lo haremos en R^3.

El **teorema del coseno** en un triángulo cualquiera establece que "el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto entre ambos y el coseno del ángulo que forman" (trabajaste con él en el curso de ingreso).



Simbólicamente: $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2.\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$

Sean $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$; $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$;

reemplazando llegamos a:

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (u_x-v_x)^2 + (u_y - v_y)^2 + (u_z - v_z)^2 = (u_x)^2 - 2.u_x.v_x + (v_x)^2 + (u_y)^2 - 2.u_y.v_y + (v_y)^2 + (u_z)^2 - 2.u_z.v_z + (v_z)^2$

$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2.\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta = (u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2 + (v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2 - 2.\ \vec{u} \bullet \vec{v}$

Comparando ambos miembros derechos y simplificando términos comunes,

$-2.u_x.v_x - 2.u_y.v_y - 2.u_z.v_z = -2.\ \vec{u} \bullet \vec{v}$

y dividiendo por –2 se obtiene:

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}$$

En R^2, siendo $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$ resultará $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y$

Por ejemplo: (–3; 2)•(4; 5) = –3. 4 +2. 5 = –12 +10 = –2

Ejemplos:

1) Sean $\vec{v}$ = (2, –5, 1) y $\vec{v'}$ = (4, 3, –3).

Obtener el producto escalar entre ambos y el ángulo que forman.

$\vec{v} \bullet \vec{v'}$ = 2. 4 + (–5). 3 +1. (–3) = 8 –15 –3 = –10

Además $\|\vec{v}\| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$ y $\|\vec{v'}\| = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$.

Como $\vec{v} \bullet \vec{v'} = \|\vec{v}\|.\|\vec{v'}\|.\cos\theta \to -10 = \sqrt{30}.\sqrt{34}.\cos\theta \to$

$\cos\theta = \dfrac{-10}{\sqrt{30}.\sqrt{34}}$ –0,313112145 → θ = 1,889264519 (rad) (aproximadamente 108º 14' 49'')

2) Si $\vec{g}$ = (k–3, 0, 2) y $\vec{h}$ = (–3, k, 2k–1). Encontrar para qué valores de k resultan perpendiculares ambos vectores. Indicar los vectores resultantes para esos valores de k.

Los vectores deben ser ortogonales, es decir el ángulo entre los vectores debe ser de 90º; como cos90º = 0 resulta que su producto escalar es cero.

Calculamos $\vec{g} \bullet \vec{h}$ y lo igualamos a cero

–3.(k–3) + 0.k +2. (2k –1) = 0 → –3k + 9 +4k –2 = 0 → **k = –7**

Y reemplazando obtenemos $\vec{g}$ = (–10, 0, 2) y $\vec{h}$ = (–3, –7, –15).

Verificamos, efectivamente el producto escalar vale –10.(–3) + 0. (–7) + 2. (–15) = 30 +0 –30 = 0

Propiedades del producto interior entre vectores (en R^3 pero vale para R^n)

a) $\forall\ \overline{u}\ ,\ \overline{v} \in R^3 : \overline{u} \bullet \overline{v} = \overline{v} \bullet \overline{u}$ (**conmutatividad**)

b) $\forall\ \overline{u}\ ,\ \overline{v}\ ,\ \overline{w} \in R^3 : \overline{u} \bullet (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \bullet \overline{v} + \overline{u} \bullet \overline{w}$ (**distributividad respecto de la suma de vectores**)

c) $\forall\ \alpha \in R \wedge \forall\ \overline{u}\ ,\ \overline{v} \in R^3 : (\alpha.\overline{u}) \bullet \overline{v} = \overline{u} \bullet (\alpha.\overline{v}) = \alpha.(\overline{u} \bullet \overline{v})$ (**extracción de un escalar**)

d) $\forall\ \overline{u}\ ,\ \overline{v} \in R^3 \wedge \overline{u} \neq \overline{0} \wedge \overline{v} \neq \overline{0} : \overline{u} \bullet \overline{v} = 0 \Leftrightarrow áng(\overline{u};\overline{v}) = \pi/2$ (**perpendicularidad de vectores no nulos**)

e) $\forall\ \overline{u}\ ,\ \overline{v} \in R^3 : \overline{u} \bullet \overline{v} = 0 \Rightarrow \overline{u} = \overline{0} \vee \overline{v} = \overline{0} \vee \overline{u} \perp \overline{v}$

f) $\forall\ \overline{u} \in R^3 : \overline{u} \bullet \overline{u} = \|\overline{u}\|^2$; $\forall\ \overline{u} \in R^3 : \|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u} \bullet \overline{u}}$ (**relación producto interior y norma de un vector**)

Te mostraremos algunos ejemplos de ejercicios, que para poder resolverlos, es indispensable emplear estas propiedades.

Ejemplos

1) Calcule $\|\overline{u}\|$ sabiendo que se cumplen simultáneamente $\begin{cases} ang(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3} \\ \|\vec{v}\| = 4 \\ (\vec{u} - \vec{v}) \perp \vec{u} \end{cases}$

Como $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \perp \vec{u}$ el producto escalar entre ambos vectores es nulo.

$\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \bullet \vec{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{v} \bullet \vec{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{u} = \vec{v} \bullet \vec{u} \quad \rightarrow \quad \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|.\|\vec{u}\|.\cos(\theta)$

Como ninguno de los vectores es nulo (forman ángulo) resulta que $\|\vec{u}\| \neq 0$ y podemos dividir la última ecuación por este número.

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|.\cos(\theta) \quad \rightarrow \quad \|\vec{u}\| = 4.½ = 2$

2) ¿Es cierto que $(\overline{u}+\overline{v})\bullet(3.\overline{u}-\overline{v}) = 3.\|\overline{u}\|^2 - \|\overline{v}\|^2 + 2.\overline{u}\bullet\overline{v}$?

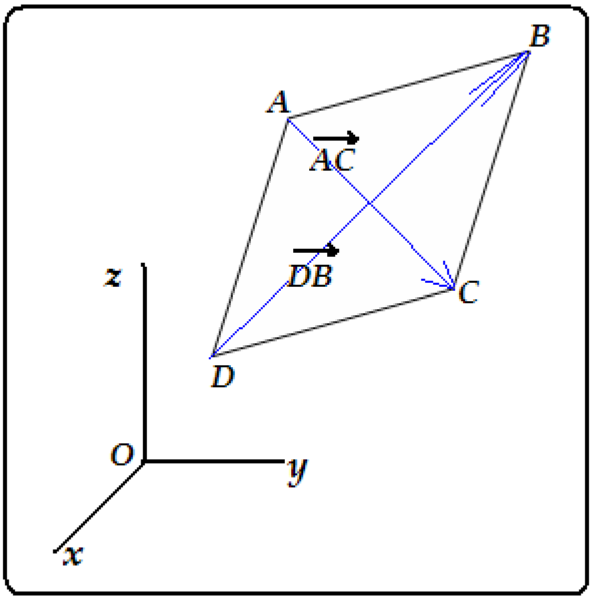
$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(3.\vec{u}-\vec{v}\right) =$ aplicando la propiedad distributiva

$\vec{u}\bullet\left(3.\vec{u}-\vec{v}\right)+\vec{v}\bullet\left(3.\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}\bullet\left(3.\vec{u}\right)-\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}\bullet\left(3.\vec{u}\right)-\vec{v}\bullet\vec{v} =$ aplicando la propiedad de la norma y extracción de factor

$3.\vec{u}\bullet\vec{u}-\vec{u}\bullet\vec{v}+3.\vec{v}\bullet\vec{u}-\|\vec{v}\|^2 =$ por conmutatividad

$3.\|\vec{u}\|^2-\vec{u}\bullet\vec{v}+3.\vec{u}\bullet\vec{v}-\|\vec{v}\|^2 = \; = 3.\|\vec{u}\|^2+2.\vec{u}\bullet\vec{v}-\|\vec{v}\|^2$ (la igualdad es cierta)

3) Probar que en todos los rombos sus diagonales son perpendiculares.
Consideremos a A, B, C, D los cuatro puntos del rombo ordenado ABCD.



Nuestro objetivo es probar que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$ o sea que (C–A) • (B–D) = 0 que reescribiremos como (C–A) • B – (C–A) • D y confirmaremos que esta cuenta nos da cero.

Recordamos que la característica de un rombo es la de tener sus cuatro lados de igual longitud:

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{DA}\|$

Elevemos al cuadrado todos los miembros:

$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{DA}\|^2$

Desarrollamos $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$

(B–A)•(B–A) = (C–B)•(C–B)

$B\bullet B - B\bullet A - A\bullet B + A\bullet A = C\bullet C - C\bullet B - B\bullet C + B\bullet B$
simplificando y usando propiedad conmutativa del producto escalar

$- 2B\bullet A + \|A\|^2 = \|C\|^2 - 2B\bullet C \quad \rightarrow \quad 2B\bullet C - 2B\bullet A = \|C\|^2 - \|A\|^2$

$\rightarrow \; 2B\bullet (C - A) = \|C\|^2 - \|A\|^2$

$B\bullet (C - A) = ½.\{\|C\|^2 - \|A\|^2\}$

De igual forma $\|\overline{CD}\|^2 = \|\overline{DA}\|^2 \rightarrow (D - C)\bullet(D - C) = (A–D)\bullet(A–D)$

$D\bullet D - D\bullet C - C\bullet D + C\bullet C = A\bullet A - A\bullet D - D\bullet A + D\bullet D - 2\, D\bullet C + \|C\|^2 = \|A\|^2 - 2\, D\bullet A \rightarrow$

$- 2D\bullet C + 2D\bullet A = \|A\|^2 - \|C\|^2 \rightarrow$

$-2D\bullet(C - A) = \|A\|^2 - \|C\|^2 \rightarrow$

$-D\bullet(C - A) = ½\{\|A\|^2 - \|C\|^2\}$

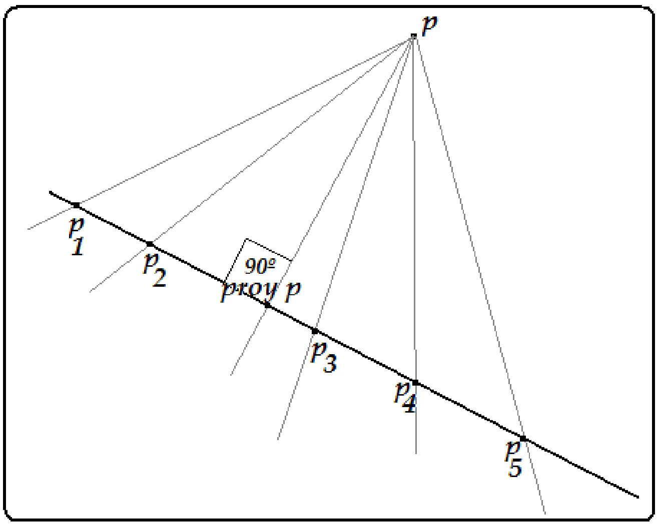
Realicemos la cuenta buscada:
$(C–A) \bullet B - (C–A) \bullet D =$
$B \bullet (C–A) - D \bullet (C–A)$ [por propiedad conmutativa del producto escalar]
Reemplazando por las expresiones obtenidas:

$½\{\|C\|^2 - \|A\|^2\} + ½\{\|A\|^2 - \|C\|^2\}$

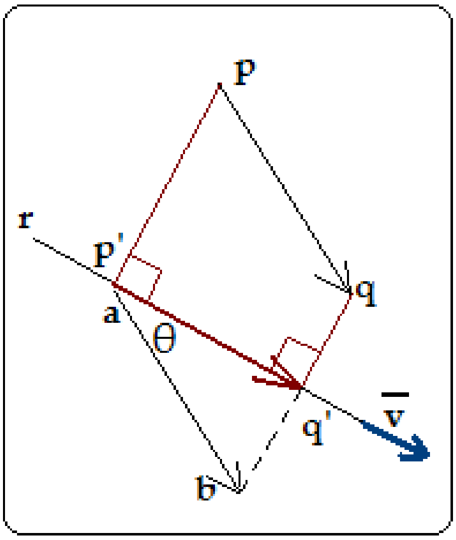
$= ½\{\|C\|^2 - \|A\|^2 + \|A\|^2 - \|C\|^2\} = ½.\{0\} = 0$ que es lo que se pretendía probar.

Proyección de un vector sobre una dirección

En geometría, la proyección ortogonal de un punto sobre una recta está dada por un punto ubicado sobre la recta que es la intersección entre dicha recta y la perpendicular a ella, trazada desde el **punto** cuya proyección estamos buscando.
En el gráfico la proyección está marcada con ese nombre. No lo son p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5.



La proyección de p es p’ y de q es q’; la del vector $\overrightarrow{pq}$ es $\overrightarrow{p'q'}$.



Comencemos con un ángulo θ que sea nulo o agudo.
Traslademos $\overrightarrow{pq}$ con comienzo en p’ y nos da el vector que denotaremos $\overrightarrow{ab}$.
Las **longitudes** entre los segmentos $\overline{p'q'}$ y $\overline{ab}$ están relacionados por el coseno de θ:

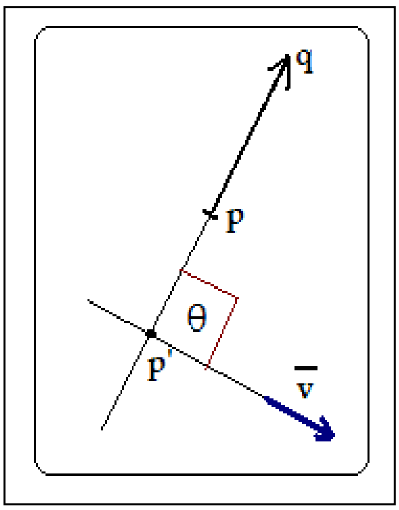
$$\cos\theta = \frac{\left\|\overline{p'q'}\right\|}{\left\|\overline{ab}\right\|} \rightarrow \left\|\overline{ab}.\right\| \ \cos\theta = \left\|\overline{p'q'}\right\|$$

La dirección de la recta r nos la da un vector director $\vec{v}$.
Si multiplicamos $\left\|\overline{ab}.\right\| \ \cos\theta = \left\|\overline{p'q'}\right\|$ por $\left\|\vec{v}\right\|$ tenemos:

$$\left\|\overline{ab}\right\|.\ \cos\theta.\ \left\|\vec{\mathrm{v}}\right\| = \left\|\overline{p'q'}\right\|.\ \left\|\vec{\mathrm{v}}\right\| \rightarrow \overrightarrow{ab}\bullet\vec{v} = \left\|\overline{p'q'}\right\|.\ \left\|\vec{v}\right\| \rightarrow \overrightarrow{pq}\bullet\vec{v} = \left\|\overline{p'q'}\right\|.\ \left\|\vec{v}\right\|$$

ya que $\overrightarrow{pq}$ y $\overrightarrow{ab}$ son equivalentes.
Despejando:

$$\frac{\overrightarrow{pq}\bullet\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|} = \left\|\overline{p'q'}\right\| = proy.escalar_{\vec{v}}\,\overrightarrow{pq}$$

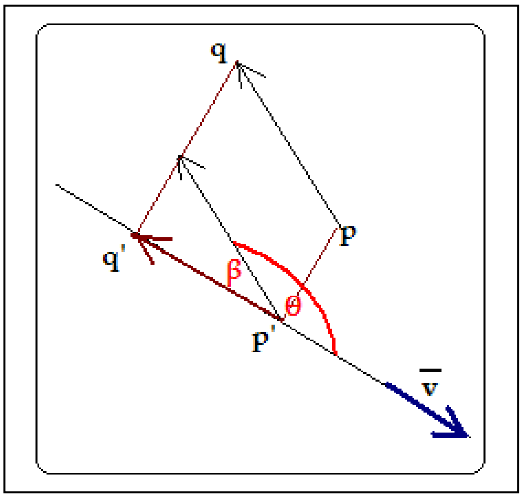


Si ángulo θ fuera recto, el coseno es cero, el producto escalar también y lo mismo la $proy.escalar_{\vec{v}}\,\overrightarrow{pq}$.

Veamos la situación de un ángulo obtuso o llano.

Los ángulos θ y β son suplementarios (y β menor a un recto) y por lo tanto el cos θ es negativo (además vale que cos θ = –cos β).

Lo primero que uno nota es que el vector $\overrightarrow{p'q'}$ es colineal, con sentido opuesto al vector $\vec{v}$ lo cual no es un dato menor.



Si al desarrollo recién hecho lo repetimos usando a β en reemplazo de θ seguimos teniendo una relación de longitudes:

$\|\overline{ab}.\| \ \cos\beta. \ \|\vec{\mathrm{v}}\| = \|\overline{p'q'}\|. \ \|\vec{\mathrm{v}}\|$

Pero si nosotros queremos <u>significar</u> un sentido opuesto al sentido de $\vec{v}$, a $\overline{p'q'}$ debemos asociarle un valor negativo con lo cual debemos definir que:

$$-\|\overline{p'q'}\|.\|\vec{v}\| = -\|\overline{ab}\|. \ \cos\beta. \ \|\vec{\mathrm{v}}\| = \|\overline{pq}\|. \ (-\cos\beta). \ \|\vec{\mathrm{v}}\| = \|\overline{pq}\|. \ (\cos\theta). \ \|\vec{\mathrm{v}}\| = \overrightarrow{pq} \bullet \vec{v}$$

Y si de allí surge que nuevamente:

$$\frac{\overrightarrow{pq} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\|\overline{p'q'}\| = proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq}$$

Resumiendo:

La *proyección escalar* de un vector $\overrightarrow{pq}$ en la dirección de un vector $\vec{v}$ es un número (positivo, negativo o cero) que geométricamente indica la norma -asociada a un signo- de la proyección perpendicular del vector $\overrightarrow{pq}$ sobre $\vec{v}$.

Si el ángulo entre $\vec{v}$ y $\overrightarrow{pq}$ es menor a 90º el valor es positivo y coincide con la norma del vector proyección; si el ángulo supera los 90º (hasta 180º) el resultado es negativo y es el opuesto de la norma del vector proyección.

$$\boxed{proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq} = \frac{\overrightarrow{pq} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

La *proyección escalar* de un vector $\overrightarrow{pq}$ en la dirección de un vector $\vec{v}$ es el número, el escalar por el cual, se debe multiplicar al versor en la dirección y sentido de $\vec{v}$, para obtener el vector proyección.

El vector proyección lo podemos obtener multiplicando al versor en la dirección y sentido de $\vec{v}$ por el número (el escalar) que es la $proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq}$

$$proy_{\vec{v}}\overrightarrow{pq} = proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\overrightarrow{pq} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} =$$

Colocando a todos los escalares adelante, resulta:

$$\boxed{proy_{\vec{v}}\overrightarrow{pq} = = \frac{\overrightarrow{pq} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} . \vec{v}}$$

que es el vector proyección del vector $\overrightarrow{pq}$ en la dirección del vector $\vec{v}$

Si trabajamos con $\vec{v}$ un vector normalizado (consideramos a $\breve{v}$) la expresión se reduce a:

$$proy_{\breve{v}}\overrightarrow{pq} = \left(\overrightarrow{pq} \bullet \breve{v}\right).\breve{v} \quad \text{y} \quad proy.esc\ _{\breve{v}}\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pq} \bullet \breve{v}$$

Ten siempre presente que la proyección es un vector y la proyección escalar es un número.

Ejemplo

Sea $\vec{A} = (3, -4, 0)$ y $\vec{B} = (2, -2, -1)$.
Obtener las proyecciones escalares y las proyecciones de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ y de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.

La representación gráfica la encuentras en https://www.geogebra.org/3d/wfrtvvkk

Calculemos primero las normas de los vectores

$\|\vec{A}\| = \sqrt{9+16+0} = 5$ $\qquad\qquad$ $\|\vec{B}\| = \sqrt{4+4+1} = 3$

Calculamos primero $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$

$$proy.escalar_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{3 \cdot 2 + (-4)(-2) + 0(-1)}{3} = \frac{14}{3}$$

El vector proyección es:

$$proy_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{14}{3}\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{14}{3}\frac{\vec{B}}{3} = \frac{14}{9}\vec{B} = \frac{14}{9}(2;-2;-1) = \left(\frac{28}{9};-\frac{28}{9};-\frac{14}{9}\right)$$

Ahora calculamos de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$

$$proy.escalar_{\vec{A}}\vec{B} = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{A}\|} = \frac{14}{5}$$

Y el vector proyección es: $proy_{\vec{A}}\vec{B} = \frac{14}{5}\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{14}{5}\frac{\vec{A}}{5} = \frac{14}{25}(3;-4;0) = \left(\frac{42}{25};-\frac{56}{25};0\right)$

Resumiendo: $proy.escalar_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{14}{3}$; $proy_{\vec{B}}\vec{A} = \left(\frac{28}{9};-\frac{28}{9};-\frac{14}{9}\right)$,

$proy.escalar_{\vec{A}}\vec{B} = \frac{14}{5}$; $proy_{\vec{A}}\vec{B} = \left(\frac{42}{25};-\frac{56}{25};0\right)$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Si $\vec{u}, \vec{v}$ € R^n (n €N) se cumple: $\boxed{|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

donde las barras simples indican valor absoluto de un número real, ya que producto escalar es un número.

Demostración:

a) Si alguno de los vectores es nulo tanto el producto escalar con otro vector como su norma se anula y por lo tanto se satisface la igualdad.

b) Sean entonces ambos vectores *no nulos* y efectuemos el siguiente producto escalar:

$(\vec{u} + \lambda.\vec{v}) \bullet (\vec{u} + \lambda.\vec{v}) = \|(\vec{u} + \lambda.\vec{v})\|^2$ donde λ es un número real.

La igualdad <u>da un número real no negativo</u> (la norma no puede serlo) y varía con λ.

Desarrollamos el lado izquierdo:

$$(\vec{u} + \lambda.\vec{v}) \bullet (\vec{u} + \lambda.\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet (\lambda.\vec{v}) + (\lambda.\vec{v}) \bullet \vec{u} + (\lambda.\vec{v}) \bullet (\lambda.\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \lambda\vec{u} \bullet \vec{v} + \lambda\vec{v} \bullet \vec{u} + \lambda.\lambda\vec{v} \bullet \vec{v} =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\lambda.\vec{u} \bullet \vec{v} + \lambda^2.\|\vec{v}\|^2 = f(\lambda)$$

Respecto a λ tenemos una función cuadrática con coeficiente principal positivo ($\|\vec{v}\|^2$).

Como siempre es $f(\lambda) \geq 0$ (recordar el subrayado de más arriba) tiene una o ninguna raíz real (a lo sumo corta una sola vez al eje λ).

Por ende <u>*el discriminante es ≤ 0.*</u>

$$(2.\vec{u} \bullet \vec{v})^2 - 4.\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2 \leq 0 \rightarrow 4.(\vec{u} \bullet \vec{v})^2 \leq 4.\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2$$

$$\rightarrow (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 \leq \|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2 \rightarrow \sqrt{(\vec{u} \bullet \vec{v})^2} \leq \sqrt{\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2}$$

$\left|\vec{u} \bullet \vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|$ que es lo que se pretendía probar.

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

Ejercicio de producto escalar
https://www.youtube.com/watch?v=r369jxqJ3ew&list=PLrIBAgsbPZH2FouIVFZ_Lbv-7aDHTtkDU&pbjreload=10

Vectores 2. Propiedades del producto escalar
https://www.youtube.com/watch?v=HTedUcJkKqs

PRODUCTO VECTORIAL

Una nueva operación **solo definida entre vectores de R³** es el **producto vectorial**.
Si $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y.v_z - v_y.u_z; u_z.v_x - v_z.u_x; u_x.v_y - v_x.u_y) \qquad (1)$$

Usaremos indistintamente cualquiera de los dos símbolos (x o $\wedge$)

El resultado del producto vectorial es un nuevo vector de **R³.**
La fórmula anterior es un poco tediosa, por lo que se utiliza la siguiente regla práctica para calcularlo, empleando **determinantes.**

Para efectuar $\vec{u} \wedge \vec{v}$ disponemos en una matriz de 3x3 los tres versores canónicos de R^3 y luego dos *filas* ***ordenadas*** para $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \text{ y resolvemos el “determinante” } \hat{i}.\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \hat{j}.\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \hat{k}.\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

aplicando la regla de Laplace (que estudiaremos en profundidad en la próxima unidad), desarrollando por los elementos de la primera fila.
El signo menos (–) antes del segundo determinante recuerden que deriva de hacer $(-1)^{1+2}$ por el adjunto o cofactor del elemento 12.

Esto último se traduce como:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \hat{i}.(u_y.v_z - u_z.v_y) - \hat{j}.(u_x.v_z - u_z.v_x) + \hat{k}.(u_x.v_y - u_y.v_x) \qquad (2)$$

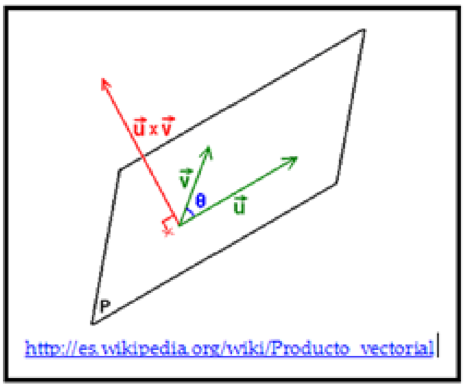
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \hat{i}.(u_y.v_z - u_z.v_y) + \hat{j}.(u_z.v_x - u_x.v_z) + \hat{k}.(u_x.v_y - u_y.v_x)$, entonces

Observar que ambas expresiones (1) y (2) son coincidentes.

Así $(-3, \; 2, \; 4) \wedge (5, \; 0, \; -6) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \hat{i}.\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} - \hat{j}.\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} + \hat{k}.\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$

$\hat{i}.(-12) - \hat{j}.(-2) + \hat{k}.(-10) = (-12, 2, -10)$

• El producto vectorial resulta ser un nuevo vector **perpendicular** a cada uno de los vectores que lo generaron.



En nuestro caso $(-12, 2, -10) \perp (-3, 2, 4)$ pues:
$(-12, 2, -10) \bullet (-3, 2, 4) = 36 + 4 - 40 = 0$ y

$(-12, 2, -10) \perp (5, 0, -6)$ ya que
$(-12, 2, -10) \bullet (5, 0, -6) = -60 + 0 + 60 = 0$.

En forma genérica:

$\vec{u} \perp \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow$

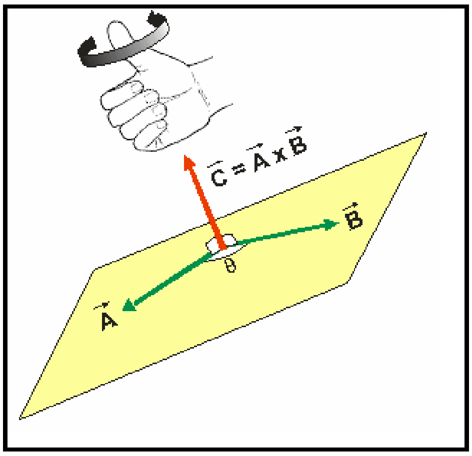
$(u_x, u_y, u_z) \bullet (u_y.v_z - v_y.u_z; u_z.v_x - v_z.u_x; u_x.v_y - v_x.u_y)$

$= u_x u_y v_z - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - u_y u_x v_z + u_z u_x v_y - u_z u_y v_x$

$= \underline{u_x u_y v_z} - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - \underline{u_y u_x v_z} + u_z u_x v_y - u_z u_y v_x = 0$

De forma análoga probar que $\vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$.

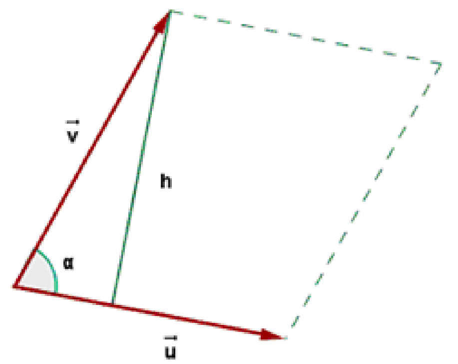
Geométricamente (si los vectores son no nulos y no paralelos) podemos ubicar al vector producto vectorial de dos vectores -a través de la *regla de la mano derecha*- en una recta que es perpendicular al plano que determinan los vectores componentes.



El sentido del vector **C = A x B** se define por dicha regla:
Se coloca la mano derecha en el origen común de los dos vectores **A** y **B**, y se flexionan los de esa mano partiendo de **A** hacia **B**. El pulgar extendido define la dirección del vector **C = A x B**.[1]

Otra forma, si colocamos el dedo índice apuntando en la dirección y sentido del primer vector, y el dedo mayor apuntando como el segundo vector. El dedo pulgar resulta apuntando en el sentido del vector producto vectorial.
La norma del vector producto vectorial se obtiene haciendo $\|\overline{u}\times\overline{v}\| = \|\overline{u}\|.\|\overline{v}\|.sen\ \ \hat{\theta}$
Piensa porque en la fórmula anterior el factor $sen\ \ \hat{\theta}$ no está entre barras de valor absoluto.

El módulo del producto vectorial de dos vectores nos da el área del paralelogramo que tiene por lados a esos vectores.



http://www.vitutor.com/analitica/vectores/producto_vectorial.html

Utilizando el esquema se observa:

$$A = \|\overline{u}\|.h = \|\overline{u}\|.\|\overline{v}\|.sen\ \ \hat{\alpha} = \|\overline{u}\times\overline{v}\|$$

Ten presente esta propiedad para los ejercicios que pidan hallar el área de un paralelogramo o de un triángulo

Propiedades del producto vectorial entre vectores

Sean $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ vectores de R^3 y $\lambda \in R$ entonces:

a) $\forall\ \ \overline{u},\overline{v} \in R^3 : \overline{u}\times\overline{v} = -(\overline{v}\times\overline{u})$ [anticonmutatividad]

b) $\forall\ \ \overline{u} \in R^3 \wedge \overline{0} \in R^3 : \overline{u}\times\overline{0} = \overline{0}\times\overline{u} = \overline{0}$

c) $\forall\ \ \overline{u} \in R^3 : \overline{u}\times\overline{u} = \overline{0}$

d) $\forall\ \ \overline{u},\overline{v} \in R^3 \wedge \forall\ \ \lambda \in R : (\lambda.\overline{u})\times\overline{v} = \overline{u}\times(\lambda.\overline{v}) = \lambda.(\overline{u}\times\overline{v})$

[1] http://cpreuni.blogspot.com.ar/2010/08/producto-vectorial.html

e) $\forall\ \overline{u},\overline{v},\overline{w}\in R^3 : \begin{cases}\overline{u}\times(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}\times\overline{v})+(\overline{u}\times\overline{w})\\ (\overline{v}+\overline{w})\times\overline{u}=(\overline{v}\times\overline{u})+(\overline{w}\times\overline{u})\end{cases}$ *pero* $\overline{u}\times(\overline{v}+\overline{w})=-\left[\left(\overline{v}+\overline{w}\right)\times\overline{u}\right]$

f) $\forall\ \overline{u},\overline{v}\in R^3 : \left\|\overline{u}\times\overline{v}\right\|^2=\left\|\overline{u}\right\|^2.\left\|\overline{v}\right\|^2-\left(\overline{u}\bullet\overline{v}\right)^2$ [Identidad de Lagrange]

g) $\forall\ \overline{u},\overline{v}\in R^3 \wedge \overline{u}\neq\overline{0}\wedge\overline{v}\neq\overline{0}\wedge\overline{u}\times\overline{v}=\overline{0}\Rightarrow\overline{u}\ //\ \overline{v}$

Todas las propiedades pueden obtenerse a partir de la definición.

• Para cada propiedad exprese en lenguaje coloquial qué significa.

Por ejemplo, en a): "el producto vectorial entre dos vectores resulta dar el *vector opuesto* si la operación se efectúa en el orden inverso".

Para la propiedad h) se parte de g);

si $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\rightarrow \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=0 \rightarrow 0=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.sen\ \hat{\theta} \rightarrow 0=sen\ \hat{\theta}\rightarrow\theta=0^{\circ}$ ó $\theta=180^{\circ}$.

Análogamente si los vectores son paralelos resulta $\theta=0^{\circ}$ ó $\theta=180^{\circ}$

$\rightarrow sen\ \hat{\theta}=0 \rightarrow \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=0\rightarrow\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

Algunos ejemplos:

a) Si $\overline{u}=(-3,2,5)$ y $\overline{v}=2.\breve{i}-\breve{j}+\breve{k}$ calcular $\overline{u}\times\overline{v},\ \overline{v}\times\overline{u},\left\|\overline{u}\times\overline{v}\right\|$ y $\left\|2.\overline{u}\times(-3).\overline{v}\right\|$ (comparar las normas de estos dos últimos).

¿Cuál es el área del paralelogramo de vértices O, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{u+v}$?

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(2+5)\hat{i}-(-3-10)\hat{j}+(3-4)\hat{k}=(7\ ;\ 13;\ -1)$$

$$\vec{v}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 5\end{vmatrix}=(-5-2)\hat{i}-(10+3)\hat{j}+(4-3)\hat{k}=(-7\ ;\ -13;\ 1)$$

En los dos cálculos anteriores tenemos un ejemplo de la anticonmutatividad, obtuvimos vectores opuestos, $\overline{u}\times\overline{v}=-(\overline{v}\times\overline{u})$

$$\left\|\vec{u}x\vec{v}\right\|=\sqrt{7^2+13^2+(-1)^2}=\sqrt{49+169+1}=\sqrt{219}$$

$$2\vec{u}\wedge\left(-3\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -6 & 4 & 10\\ -6 & 3 & -3\end{vmatrix}=(-12-30)\hat{i}-(18+60)\hat{j}+(-18+24)\hat{k}=(\ -42;\ -78\ ;\ 6)$$

También podemos resolverlo aplicando propiedades de determinantes:

$$2\vec{u}\wedge\left(-3\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -6 & 4 & 10\\ -6 & 3 & -3\end{vmatrix}=2.(-3)\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-6.\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)= -6 \;.\; (7\;;\;13;\;-1)= (\;-42;\;-78\;;\;6)$$

$$\left\|2\vec{u}\wedge\left(-3\vec{v}\right)\right\|= \sqrt{(-42)^2+(-78)^2+6^2}=\sqrt{1764+6084+36}=\sqrt{7884}=6\sqrt{219}$$

La norma de $2.\overline{u}\times(-3).\overline{v}$ es seis veces la norma de $\overline{u}\times\overline{v}$. $\left\|2.\overline{u}\times(-3).\overline{v}\right\| = 6.\ \left\|\overline{u}\times\overline{v}\right\|$

Para resolver lo anterior podemos usar las propiedades
$\left\|2.\overline{u}\times(-3).\overline{v}\right\|=\left\|-6.\left(\overline{u}\times\overline{v}\right)\right\|=|-6|\left\|\left(\overline{u}\times\overline{v}\right)\right\|=6.\left\|\left(\overline{u}\times\overline{v}\right)\right\|$ por asociatividad, y norma del producto de un escalar por un vector

PRODUCTO MIXTO

El producto mixto sólo es posible en R^3 **y se define así**:
Si $\overline{u}=(u_x,u_y,u_z),\overline{v}=(v_x,v_y,v_z)\ \ y\ \ \overline{w}=(w_x,w_y,w_z)$ el producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ es $\overline{w}\bullet(\overline{u}\times\overline{v})$
El resultado es **un número real,** un escalar y primero se efectúa el producto vectorial entre los dos primeros vectores y al resultado se lo multiplica escalarmente por el tercer vector. (Nota que es imposible que sea al revés).

Recordando que $\overline{u}\times\overline{v}=(u_y.v_z-v_y.u_z).\breve{i}-(u_x.v_z-v_x.u_z).\breve{j}+(u_x.v_y-v_x.u_y).\breve{k}$ resulta que:
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\overline{w}\bullet(\overline{u}\times\overline{v})=\ w_x.u_y.v_z-w_x.v_y.u_z-w_y.u_x.v_z+w_y.v_x.u_z+w_z.u_x.v_y-w_z.v_x.u_y$

Ejemplo
Si $\overline{u}=(3,0,-1),\overline{v}=(-2,5,1)\ \ y\ \ \overline{w}=(-1,-3,4)$ es:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(-1,-3,4)\bullet\begin{vmatrix}\hat{i} & -\hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 0 & -1\\ -2 & 5 & 1\end{vmatrix}=(-1,\ -3,\ 4)\bullet(5,\ -1,\ 15)=-5+3+60=58.$$

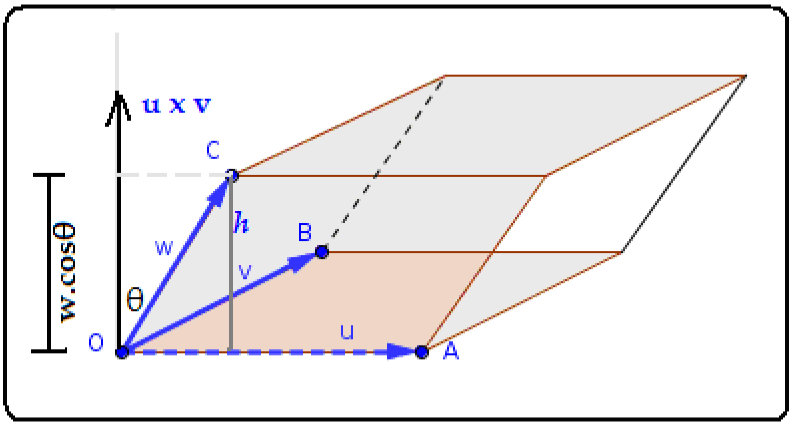
Que también puede calcularse directamente como:

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\ -2 & 5 & 1\\ -1 & -3 & 4\end{vmatrix}$ por ejemplo si desarrollamos por los elementos de la primera fila resulta:

3. (5 . 4 – 1 . (-3)) + (- 1) . ((-2).(-3) – 5 (-1)) = 3 . 23 -1. (6 + 5) = 69 -11= 58

Interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto

Tres vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in R^3$ -con origen en O- generan un paralelepípedo cuyas tres aristas concurrentes son esos vectores.



El volumen de éste está dado por el producto de la superficie de la base por su altura:
$Volumen = \sup.\,base \times long.\,altura$

Como la superficie de la base puede obtenerse por la norma del producto vectorial de los vectores aristas se tiene:
$V = h\ .\ \left\| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\|$

Pero h=$\left\| \vec{w} \right\| . \left| \cos\theta \right|$ (ponemos valor absoluto pues el coseno puede ser negativo)

$$Volumen\ = \left\| \vec{w} \right\|\ .\ \left\| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\| . \left| \cos\theta \right| = \left| \vec{w} \bullet \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \right|$$

O sea que el valor absoluto del producto mixto entre tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo determinados por esos tres vectores.

Condición de coplanaridad entre tres vectores en R^3

Tres vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in R^3$ se denominarán coplanares si sus direcciones quedan incluidas en el mismo plano. Si esto ocurriera no formarían un paralelepípedo o equivalentemente su volumen daría cero por lo que podemos resaltar el siguiente resultado:

Dados $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in R^3$, no nulos, serán coplanares si y sólo si el producto mixto entre ellos da cero.

Ejemplos

Si $\overline{u} = (-2,\ 0,\ 3)$; $\overline{v} = (1,\ -1,\ -a)$ y $\overline{w} = (3,\ a\ ,\ 9)$

a) Encontrar $a \in R$ tal que los vectores resulten coplanares. Mostrar las ternas de vectores que obtienen.

b) Dado $\vec{t} = (3\ ,1\ ,-4)$, ¿para cuáles valores de a, $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{t}$ determinan un paralelepípedo de volumen 12?

Resolución:

a) Debemos recordar que dos vectores son coplanares si y solo si su producto mixto es 0

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} = 0$$

Calculamos el producto mixto

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -a \\ 3 & a & 9 \end{vmatrix} = -1(-18-9) - a(2a-3) = 27 - 2a^2 + 3a$$

Igualamos el producto mixto a cero y resolvemos la ecuación

$$-2a^2 + 3a + 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3 \vee a = \frac{9}{2}$$

Entonces los vectores resultan:

Con a = - 3 resultan $\overline{u} = (-2,\ 0,\ 3)$; $\overline{v} = (1,\ -1,\ 3)$ y $\overline{w} = (3,\ \text{-}3\ ,\ 9)$ Nota que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ obtenidos son paralelos

Con $a = \frac{9}{2}$ resultan $\overline{u} = (-2,\ 0,\ 3)$; $\overline{v} = \left(1,\ -1,\ -\frac{9}{2}\right)$ y $\overline{w} = \left(3,\ \frac{9}{2}\ ,\ 9\right)$

b) Debemos recordar que el valor absoluto del producto mixto es el volumen del paralelepípedo determinado por los 3 vectores.

Calculamos primero el producto mixto

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{t}] = (\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{t} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -a \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1(8-9) - 1(2a-3) = 1 - 2a + 3 = -2a + 4$$

El valor absoluto del producto mixto debe ser igual a 12

$|-2a+4| = 12$ entonces

$$\begin{aligned} -2a+4 &= 12 \quad \vee \quad -2a+4 = -12 \\ -2a &= 8 \quad \vee \quad -2a = -16 \\ a &= -4 \quad \vee \quad a = 8 \end{aligned}$$

Entonces, si a vale -4 u 8 los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{t}$ forman un paralelepípedo de volumen 12 unidades cúbicas

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

Área de un triangulo
https://www.youtube.com/watch?v=sbsu5F94lRo

Vectores 1. Vectores coplanares.
https://www.youtube.com/watch?v=XgZ-IeUcVe8

Vectores 3. Volumen.
https://www.youtube.com/watch?v=Xdl0OU-kMrI