# ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I - DIIT
## MATRICES – SEL -DETERMINANTES

## MATRICES

### Definición de Matriz

Una matriz es una tabla de números dispuestos en filas (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales). Sus **elementos** son números reales o complejos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{a_{ij}} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En donde $a_{ij}$ representa cada número ubicado en la matriz, donde $i$ es el número de fila y $j$ es el número de columna.

Se puede escribir empleando paréntesis ( ) o corchetes [ ].

### Orden

Se denomina **dimensión**, **tamaño** u **orden** a la cantidad de filas y de columnas que posee.

En este caso $A$ es una matriz de $m \times n$.

A las matrices las simbolizaremos con letras mayúsculas

### Ejemplo:

Sea: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ esta es una matriz de *2 filas* y *3 columnas*, los *elementos o entradas* son *números reales*, se expresa de la siguiente manera $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$.

Otra forma de presentar la matriz A es: $[a_{ij}]_{\boldsymbol{Orden}\ 2\times3} \wedge a_{ij} \in \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{2\times3}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} i = fila & 1 \le i \le 2 \\ j = columna & 1 \le j \le 3 \end{cases}$

El elemento que aparece en la *fila i* y la *columna j* de la matriz $A$ se le nombra como $\boxed{a_{ij}}$. Por ejemplo, $a_{12} = -1$ y $a_{21} = 3$.

### Ejercicio:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ Indicar cuál es el valor asignado a cada una de las entradas de la matriz $A$ detalladas en la siguiente tabla

| | | |
|---|---|---|
| $a_{11}$=……………… | $a_{12}$=……………… | $a_{13}$=……………… |
| $a_{21}$=……………… | $a_{22}$=……………… | $a_{23}$=……………… |

La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ decimos que es rectangular; en cambio $B = \begin{bmatrix} 2^5 & -7 \\ 7 & 1{,}2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ es de igual cantidad de filas que de columnas y se denomina cuadrada (se abrevia cuadrada de orden 2, no hace falta especificarla de $2 \times 2$); como los coeficientes son números reales se dice que $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Una matriz $C \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ tendría la siguiente forma general:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} = [c_{i,j}] \,/\, 1 \le i \le 4;\ 1 \le j \le 2$$ en donde cualquier $c_{ij}$ es un número real.

En general, una matriz de orden $n \times m$ es un arreglo así

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \bullet & \bullet & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \bullet & \bullet & d_{2m} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ d_{n1} & d_{n2} & \bullet & \bullet & d_{nm} \end{bmatrix} = [d_{i,j}] \,/\, 1 \le i \le n; 1 \le j \le m$$

**Ejemplo:**

Explicitar la matriz $A \in R^{3x2}$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}.\ i$

La matriz A genérica es $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ debemos considerar la condición $a_{ij} = (-1)^{i+j}.\ i$ para i desde 1 a 3 ( porque la matriz tiene 3 filas) y j desde 1 a 2 porque tiene 2 columnas. Calculamos los 6 valores

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ Para calcular $a_{11}$ , i=j=1 reemplazando en $a_{ij} = (-1)^{i+j}.\ i$ ,

$$a_{11} = (-1)^{1+1}.\ 1 = (-1)^2 .\ 1 = 1 .\ 1 = 1$$

$a_{12}$ , i=1 y j= 2 usamos $a_{ij} = (-1)^{i+j}.\ i$ , $a_{12} = (-1)^{1+2}.\ 1 = (-1)^3 .\ 1 = -1 .\ 1 = -1$

$a_{21}$ , i=2 y j= 1 resulta , $a_{21} = (-1)^{2+1}.\ 2 = (-1)^3 .\ 2 = -1 .\ 2 = -2$

$a_{22}$ , i=2 y j= 2 resulta , $a_{22} = (-1)^{2+2}.\ 2 = (-1)^4 .\ 2 = 1 .\ 2 = 2$

$a_{31}$ , i=3 y j= 1 resulta , $a_{31} = (-1)^{3+1}.\ 3 = (-1)^4 .\ 3 = 1 .\ 3 = 3$

$a_{32}$ , i=3 y j= 2 resulta , $a_{32} = (-1)^{3+2}.\ 3 = (-1)^5 .\ 3 = -1 .\ 3 = -3$

Colocando estos valores en la matriz, resulta $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

**Ejercitación:**

a) Escribir matrices reales de los siguientes órdenes: 3x4; 4x3; 2x1; 1x2 y 3x3

b) Explicitar La matriz B Є $R^{4x4}$ si $b_{ij} = i^2 - 3j$ Los valores $i$ y $j$ son indicadores de la posición de los elementos $b_{ij}$ en la matriz B.

**Igualdad entre matrices**

Dos matrices U y V son iguales si teniendo la misma dimensión ($mxn$), se verifica que, los valores en posiciones correspondientes en cada una de las matrices son iguales

$$U = V \quad \leftrightarrow \quad u_{i,j} = v_{i,j} \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq j \leq n.$$

Esto significa que los valores en posiciones idénticas tienen que ser iguales.

**Ejemplo:**

Si $U = V$ con $U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $V = \begin{bmatrix} a+b & 1-b & 1 \\ -7 & c+a & b+a-c \end{bmatrix}$ debe ocurrir que:

$$\begin{cases} 2 = a+b \\ -4 = 1-b \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ -1 = c+a \\ 0 = b+a-c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ \boxed{b = 5} \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ c+a = -1 \\ c = a+b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+5 = 2 \\ b = 5 \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ c+a = -1 \\ c = a+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -3} \\ b = 5 \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ c+a = -1 \\ c = a+5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -3} \\ b = 5 \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ c-3 = -1 \\ c = -3+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ \boxed{\begin{matrix} c = 2 \\ c = 2 \end{matrix}} \end{cases}$$

Comprobación:

$$\begin{cases} V = \begin{bmatrix} a+b & 1-b & 1 \\ -7 & c+a & b+a-c \end{bmatrix} \\ a = -3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V = \begin{bmatrix} -3+5 & 1-5 & 1 \\ -7 & 2+(-3) & 5+(-3)-2 \end{bmatrix} \\ a = -3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow \begin{cases} V = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ a = -3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$ la matriz V entonces es igual a la matriz $U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ que es lo propuesto en el ejercicio.

**Clasificación De Matrices**

Una matriz se llama **matriz columna** si es de orden mx1.

Mostrar 3 ejemplos de matrices columna de diferente tamaño; de diferente cantidad de filas.

A las **matrices columna** se las suele llamar **vector columna**

¿Se podrá hablar de **matrices fila**?

¿A cuál tipo de matriz se denominará **vector fila**?

Mostrar 3 ejemplos de matrices fila con diferente cantidad de columnas.

Se llama **matriz Nula** o **Cero** (**N** o **O**) a una matriz con todas sus entradas o elementos iguales a **0**.

¿Cuáles son las matrices nulas para 2x5 y 4x4?

La siguiente matriz G es de orden 3x5: $G = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 3{,}2 & -2 & -0{,}3 & 5 \end{bmatrix}$

Los elementos $g_{ii}$ se llaman **elementos diagonales** de la matriz G.

¿Qué valores puede tomar i en este caso? ¿Cuáles son los elementos diagonales?

La matriz $G$ puede pensarse como formada por tres vectores filas $G_1, G_2$ $y$ $G_3$. Escribirlos.

Se acostumbra a anotar a $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} G_1 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \\ G_2 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots). \\ G_3 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \end{cases}$

De forma similar se reconocen 5 vectores columnas $G^1, G^2, G^3, G^4, G^5$ de forma tal que es $G = [G^1 \quad G^2 \quad G^3 \quad G^4 \quad G^5] \rightarrow$

$$\rightarrow G^1 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, G^2 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, G^3 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, G^4 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, G^5 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Se llama **traza** de una matriz a la suma de los elementos diagonales.

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** si todas las entradas por debajo de la diagonal principal se anulan; **triangular inferior** si todas las entradas por encima de la diagonal principal son nulos.

Brindar ejemplos de ambas en $R^{2x2}$, $R^{3x3}$ y $R^{4x4}$.

¿La matriz nula cuadrada de *orden n* es triangular superior?

Una matriz cuadrada, que a la vez es triangular superior y triangular inferior se llama matriz diagonal, dicho de otra forma:

Una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales son nulas se llama **matriz diagonal**.

Escriba una de orden 2 y otra de orden 4.

¿Es la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ una matriz diagonal?

¿Cuál es la forma general de una matriz diagonal de orden 3?

$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ usar # para indicar números diferentes de cero y $*$ si la entrada es cero.

Una **matriz diagonal** tal que sus elementos de la diagonal principal sean idénticos se llama **matriz escalar**.

Dar 2 ejemplos de matrices escalares de diferente orden.

Una matriz *escalar* con unos (1) en la diagonal se llama **matriz identidad,** se simboliza $I_n$, siendo n el orden de la matriz.

Escribir $I_2$ y $I_3$ . $\boldsymbol{I_2} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{I_3} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

**Traspuesta de una matriz**

Si H es una matriz de mxn se defina ***traspuesta*** de $H$ (se anota $H^T$ o $H^t$) a la matriz de dimensión nxm tal que los vectores fila de H son los vectores columnas de $H^T$. O simbólicamente:

$$[H^T]_{i,j} = [H]_{j,i} \text{ con } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$$

Escribir las transpuestas de las siguientes matrices:

$$H=\begin{bmatrix}2\\0\\-5\\-6\end{bmatrix};\ H'=\begin{bmatrix}\sqrt[4]{11} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix};\ H''=\begin{bmatrix}3 & -5,5 & \sqrt{17}\\ \frac{1}{4} & 0 & -12\\ 5^2 & 4 & -9\\ 7 & 0,45 & -4\\ 1 & -9 & 59\end{bmatrix};\ H'''=\begin{bmatrix}4 & -9\\ -9 & 10\end{bmatrix}.$$

Luego de las operaciones entre matrices, volveremos a la traspuesta para hablar de sus propiedades.

Una matriz cuadrada se llama **simétrica** si es igual a su transpuesta.

$S$ es simétrica $\Leftrightarrow S = S^t$ Debe cumplir $[S]_{i,j} = [S]_{j,i}$

$$S=\begin{bmatrix}7 & \mathbf{1} & -3\\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{9}\\ -3 & \mathbf{9} & 0\end{bmatrix}$$ S es una matriz simétrica

Ejemplificar tres matrices simétricas de diferente dimensión.

Indicar una regla en lenguaje coloquial para decidir si una matriz cuadrada es o no simétrica.

Una matriz *cuadrada* L se llama **antisimétrica** si $[L]_{i,j} = -[L]_{j,i}$.

$$L=\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -8\\ -4 & 8 & 0\end{bmatrix}$$ L es una matriz antisimétrica

$L$ es antisimétrica $\Leftrightarrow L = -L^t$ Debe cumplir $[L]_{i,j} = -[L]_{j,i}$

Dar 3 ejemplos de matrices antisimétricas. Dar una regla en lenguaje coloquial.

## OPERACIONES ENTRE MATRICES

### 1) Suma de matrices

Solo podemos definir la ***suma*** para matrices del *mismo orden*.

Sean A y B $\in R^{m\times n}$; se define una matriz suma S así: $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Por ejemplo:

$$A+B=\begin{bmatrix}-2 & 10 & 2 & \pi\\ 1 & -3 & 4 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -10 & 7 & -6\\ 23 & 0 & -3,2 & \sqrt{17}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)+3 & 10+(-10) & 2+7 & \pi-6\\ 1+23 & -3+0 & 4-3.2 & 0+\sqrt{17}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A+B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 9 & \pi-6\\ 24 & -3 & 0,8 & \sqrt{17}\end{bmatrix}}$$

**Propiedades de la suma de matrices**

La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

1) Para toda A y B perteneciente a $R^{mxn}$ resulta que A + B también pertenece a $R^{mxn}$ a esta propiedad se la conoce como **ley de composición interna ó ley de cierre.**

2) Para toda A y B perteneciente a $R^{mxn}$ resulta que **A+ B = B + A** [**conmutatividad**]

3) Para toda A , B y C perteneciente a $R^{mxn}$ resulta que **(A+ B)+C = A + (B + C)** [**asociatividad**]

4) Existe un elemento N perteneciente a $R^{mxn}$ tal que para toda matriz A perteneciente a $R^{mxn}$ resulta **A+N = N + A = A**. [**existencia de elemento neutro,** la matriz nula]

5) Toda matriz A tiene una matriz –inversa aditiva u **opuesta-** denotada - A que cumple que **A + (-A) = - A + A = N** [**elemento simétrico respecto a la suma**]

2) **Producto de un escalar por una matriz**

Si $A \in R^{mxn}$ y $k \in R$ definimos la matriz [k.A] como $[kA]_{ij} = k.\,[A]_{ij}$

$$(-4).A = (-4).\begin{bmatrix} -2 & 10 & 2 & \pi \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 2 & \pi \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.(-4)$$

$$= \begin{bmatrix} (-4)\times(-2) & (-4)\times 10 & (-4)\times 2 & (-4)\times\pi \\ (-4)\times 1 & (-4)\times(-3) & (-4)\times 4 & (-4)\times 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 8 & -40 & -8 & -4\pi \\ -4 & 12 & -16 & 0 \end{bmatrix}}$$

**Propiedades del producto de un escalar por una matriz**

El producto de un escalar por una matriz cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall\alpha \in R \wedge \forall A \in R^{mxn} \Rightarrow \alpha.A \in R^{mxn}$ [**ley externa**]

2) $\forall\alpha,\beta \in R \wedge \forall A \in R^{mxn} \Rightarrow$ resulta que α.(β.A) = (α. β).A [**asociativa mixta**]

3) $\forall\alpha,\beta \in R \wedge \forall A \in R^{mxn} \Rightarrow$ (α+β).A = α.A+ β.A [**producto distributivo respecto a la suma de escalares** (números)]

4) $\forall\alpha \in R \wedge \forall A, B \in R^{mxn} \Rightarrow$ α.(A+B)= α.A + α.B [**·distributivo respecto a la suma de matrices**]

5) La unidad del “cuerpo” de los números reales es elemento neutro para este producto.

$\forall A \in R^{mxn}$ resulta que 1. A=A [**elemento unidad**]

**Resta de matrices**

Habiéndose definido las operaciones (“suma de matrices **y** producto de una matriz por un escalar) podemos pensar a la **resta** como una combinación de ambas:

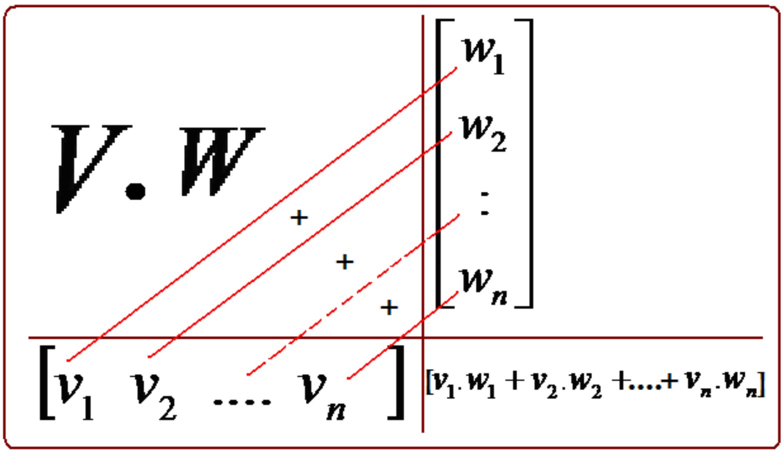
$$\boldsymbol{A - B = A + (-1).B = A + (-B).}$$

3) **Producto entre matrices**

Primero vamos a definir el producto entre una matriz fila y una matriz columna en este orden.

Sea V€R$^{1xn}$ y W€R$^{nx1}$ el resultado de V.W es un número real obtenido al realizar la cuenta $v_1.w_1 + v_2.w_2 + v_3.w_3 + \ldots + v_{n-1}.w_{n-1} + v_n.w_n$ donde $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots. & v_n \end{bmatrix}$ y $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ : \\ w_n \end{bmatrix}$

El siguiente esquema puede usarse como facilitador gráfico.




**Ejercicio:**

Efectuar el producto de las matrices $A \epsilon \mathbb{R}^{1x3}$ $y$ $B \epsilon \mathbb{R}^{3x1}$, para obtener $A.B$

Si $A = [6 \quad -3 \quad -8]$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

| Producto de matrices | **Matriz que pos-multiplica** |
|---|---|
| **Matriz que pre-multiplica** | **Matriz Producto** |

| Producto de matrices | $\boldsymbol{B}$ |
|---|---|
| $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{A.B}$ |

| Producto de matrices | $\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$ |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} 6 & -3 & -8 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{6} \times (-\mathbf{1}) + (-\mathbf{3}) \times (-\mathbf{6}) + (-\mathbf{8}) \times \mathbf{0}$=[12] |

Resulta que A.B = [12]

Ponemos la respuesta entre corchetes pues el resultado es una **matriz de 1x1**.

Producto

Producido el primer paso se puede intentar la generalización del producto de V∈R$^{mxn}$ y W∈R$^{pxq}$.

Se piensa a V considerando m vectores filas de n elementos, $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & .. & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & .. & v_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ v_{m1} & v_{m2} & .. & v_{mn} \end{bmatrix}$

y a W como q vectores columnas de p elementos $W = \begin{bmatrix} W^1 & W^2 & .. & W^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & .. & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & .. & w_{2q} \\ .. & .. & .. & .. \\ w_{p1} & w_{p2} & .. & w_{pq} \end{bmatrix}$

La siguiente disposición nos facilitará la compresión de lo que se pretende inducir.

$$\begin{array}{c|c|c}
 & & \begin{array}{cccc} W^1 & W^2 & & W^q \end{array} \\
 & \boldsymbol{V \cdot W} & \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & -- & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & -- & w_{2q} \\ -- & -- & -- & -- \\ w_{p1} & w_{p2} & -- & w_{pq} \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{array} & \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & .. & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & .. & v_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ v_{m1} & v_{m2} & .. & v_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_1 \cdot W^1 & V_1 \cdot W^2 & : & V_1 \cdot W^q \\ V_2 \cdot W^1 & V_2 \cdot W^2 & : & V_2 \cdot W^q \\ : & \cdots & : & \cdots \\ V_m \cdot W^1 & V_m \cdot W^2 & : & V_m \cdot W^q \end{bmatrix}
\end{array}$$

Para llenar cada celda se debe efectuar el producto de una matriz fila por una correspondiente columna donde ambas tengan la misma cantidad de componentes. <u>Por lo tanto **n** debe ser igual a **p**.</u>

O sea, sólo se puede multiplicar matrices donde la primera tenga igual cantidad de columnas que tiene por filas la segunda.

Además, el orden de la matriz producto es: $\boxed{\boldsymbol{Orden}(V.W) = m \times q}$

**Ejemplo**

Sean las matrices $U = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}_{Orden\ 3\times\mathbf{2}}$, $Z = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{Orden\ \mathbf{2}\times 3}$, efectuar el producto $U.Z$

Primero: se analiza la dimensión de las matrices $U\ y\ Z$ , verificando que la **cantidad de columnas** de la *la matriz U* sea igual a la **cantidad de filas** de *la matriz Z.*

Orden de la matriz $Orden(U) = 3 \times \mathbf{2}$ $\qquad Orden(Z) = \mathbf{2} \times 3$

Conclusión la operación $U \times Z$ se pueden realizar.

La matriz producto tendrá por dimensión u orden la cantidad de filas de la matriz que pre-multiplica $(U)$ y la cantidad de columnas de la que pos-multiplica $(Z)$.

La dimensión u orden de la matriz $Orden(U \times Z) = 3 \times 3$

Usando el esquema para la operación producto de matrices se calcula $U \times Z$

| $Producto\ de\ (U.Z)$ | $\begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mathbf{(-3)\times(-1)+(-2)\times 0} & \mathbf{(-3)\times 5+(-2)\times 1} & \mathbf{(-3)\times(-7)+(-2)\times(-4)} \\ \mathbf{4\times(-1)+0\times 0} & \mathbf{4\times 5+0\times 1} & \mathbf{4\times(-7)+0\times(-4)} \\ \mathbf{(-1)\times(-1)+5\times 0} & \mathbf{(-1)\times 5+5\times 1} & \mathbf{(-1)\times(-7)+5\times(-4)} \end{bmatrix}$ |

$$\boxed{U.Z = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-17} & \mathbf{29} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{20} & \mathbf{-28} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-13} \end{bmatrix}}$$

**Ejercicio**

Sean $U = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, T= $[8 \quad -8 \quad -3]$, $R = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) ¿Cuál de los siguientes productos están definidos?

$U.Z;\ Z.U;\ U.T;\ T.U;\ Z.T;\ Z.R;\ R.Z;\ U.R;\ R.U;\ T.R;\ R.T$

Conviene escribir las dimensiones de ambas matrices en el orden del producto y comparar número de columna con número de fila.

$U.Z$: $3x\mathbf{2} \bullet \mathbf{2}x3 \rightarrow 3x3$ $\qquad Z.U$: $2x\mathbf{3} \bullet \mathbf{3}x2 \rightarrow 2x2$

$U.T$: $3x2 \bullet 1x3$ $no\ se\ puede$ $\qquad T.U$: $1x\mathbf{3} \bullet \mathbf{3}x2 \rightarrow 1x2$

$Z.T$: $2x3 \bullet 1x3$ *no se puede* $\qquad$ $Z.R$: $2x3 \bullet 3x1 \rightarrow 2x1$

$R.Z$: … … … … … … … … … … … $\qquad$ $U.R$: … … … … … … … … ….

$R.U$: … … … … … … … … … … … $\qquad$ $T.R$: … … … … … … … … …

$R.T$: … … … … … … … … … …..

Completar las restantes.

b) Realicemos el producto $Z.U = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$; $\quad Z.U = \begin{bmatrix} 30 & -33 \\ 8 & -20 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|l} \text{Z.U} & \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3+20+7 & 2+0-35 \\ 0+4+4 & 0+0-20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -33 \\ 8 & -20 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sean, $U = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U.Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-17} & \mathbf{29} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{20} & \mathbf{-28} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-13} \end{bmatrix}$ $y\ \boldsymbol{Z.U} = \begin{bmatrix} \mathbf{30} & \mathbf{-33} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-20} \end{bmatrix}$

¿El producto de las matrices $\boldsymbol{U}$ ***y*** $\boldsymbol{Z}$ es conmutativo? ……………

c) Completar los productos dados en a) que sean posibles de resolver.

Notar que con los primeros ejemplos surge que la propiedad conmutativa no se cumple: existiendo $A.B$ puede no existir $B.A$ o existir $B.A$ y ser de diferente tamaño o no coincidir con $A.B$.

Mostrar ejemplos con las tres posibilidades.

Dar un ejemplo donde se cumpla la conmutatividad del producto. Si no encuentras, puedes investigar en Internet, ejemplos de matrices que conmuten.

**Propiedades del producto entre matrices**

El producto entre matrices cumple las siguientes propiedades:

1- **A.(B.C)=(A.B).C** [Asociativa]

La demostración de esta propiedad la puedes leer en el archivo "TEORIA- PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO DE MATRICES" Es opcional

Realizaremos un ejemplo para evidenciar que no importa como asociemos, agrupemos, llegamos al mismo resultado como producto:

**Ejemplo:**

Sean las matrices: A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Realizaremos ( A . B ) . C por un lado, y A. ( B . C ) por otro

$$( A . B ) . C = \left( \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -7 & -7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A. ( B . C ) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$$

Las dos formas arrojan el mismo resultado.
( A . B ) . C = A. ( B . C ) esto es una muestra de que la propiedad se cumple, **no es una demostración.**

Al cumplirse la propiedad asociativa, es posible escribir los dos productos sin paréntesis:
**A . B . C = ( A . B ) . C = A. ( B . C )**

2- **A.(B + C) =A.B + A.C** [Distributiva respecto a la suma por izquierda]

3- **(B + C).A = B.A + C.A** [Distributiva respecto a la suma por derecha]

4- **α.(A.B) = (α .A).B** = **A. (α . B)** [Asociativa respecto al producto por un escalar]

5- Para *matrices cuadradas* **A** de orden n, la matriz identidad $\mathbf{I_n}$ es el elemento neutro para la multiplicación, es decir, se cumple: $\mathbf{A.I_n} = \mathbf{I_n.A = A}$

**Otras propiedades de la Traspuesta**

Luego de haber visto las operaciones entre matrices, podemos agregar algunas propiedades de la traspuesta.

1) $\left(A^t\right)^t = A$ La traspuesta de la traspuesta es la matriz original

2) $(A+B)^t = A^t + B^t$ La traspuesta de una suma, es la suma de las traspuestas. La traspuesta es distributiva con respecto a la suma.

3) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. La traspuesta de una constante por una matriz es igual a la constante por la traspuesta de la matriz.

4) $(A.B)^t = B^t.A^t$ La traspuesta de un producto de matrices, es el producto de las traspuestas **en el orden inverso.**

Analiza las dimensiones de las matrices en esta última propiedad.

Videos:

Con ejercicio de demostraciones de propiedades de matrices simétricas y antisimétricas:

https://www.youtube.com/watch?v=vretXdAIDmI

**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)**

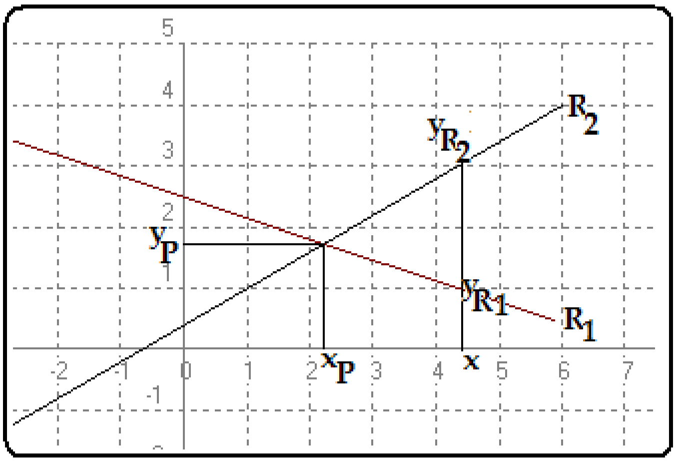
**Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y su geometría**

a) Considera las rectas $R_1: y = -x + 2$ $y$ $R_2: 4x + 3y = 3$.

Es sencillo graficarlas (¡hacerlo!) pero nuestra atención es hacia la siguiente cuestión:

¿Existirá algún punto *P* que pertenezca a ambas rectas?

El esquema siguiente nos da una idea, pero no representa al ejemplo numérico dado.



Se observa que <u>casi siempre</u> tomando un valor $x$ los valores verticales $y$ que corresponden a las rectas son diferentes, o sea $y_{R_1} \neq y_{R_2}$.

Pero sucede que en el punto de intersección de ambas líneas $(x_p;\ y_p)$ para el valor $x_p$ resulta el valor vertical de ambas idéntico.

En nuestra situación se tendría: $\begin{cases} y_p = -x_p + 2 \\ 4x_p + 3y_p = 3 \end{cases}$

Esto recibe el nombre de ***sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas***.

Se puede resolver sustituyendo en este caso la primera ecuación en la segunda (Método de sustitución).

$$4x_p + 3.(-x_p + 2) = 3 \rightarrow 4x_p - 3x_p + 6 = 3 \rightarrow x_p = 3 - 6 \rightarrow \boxed{x_p = -3}$$

Al regresar a la primera ecuación se obtiene: $y_p = -(-3) + 2 = 5$

Resulta que el punto de intersección es $\boxed{P = (-3;\ 5)}$.

Por seguridad es conveniente verificar la ecuación utilizada para el cálculo de $y_p$.

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas donde existe un ***único*** par ordenado $(x; y)$ que las cumple a ambas se denomina ***sistema compatible determinado***. Si no hay ningún par ordenado que las verifique se llama ***sistema incompatible***; si existen infinitos pares que satisfacen a ambas se trata de un ***sistema compatible indeterminado***.

b) Veamos otra situación y otra técnica para llegar a la solución.

Se pretende resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$S: \begin{cases} 2x - 3y = 13 & \text{ecuación 1} \\ 6x + 7y = 23 & \text{ecuación 2} \end{cases}$

*¿Cambia el sistema si a la ecuación 1 la multiplicamos por 3?*

(a) $S': \begin{cases} 6x - 9y = 39 & \text{ecuación 3} \\ 6x + 7y = 23 & \text{ecuación 2} \end{cases}$

*¿Qué ocurre si a la ecuación 2 le restamos la ecuación 3?*

Pensar que aquí estamos restando el número 39 (que equivale a $6x - 9y$)

(b) $S'': \begin{cases} 6x - 9y = 39 & \text{ecuación 3} \\ 6x + 7y - (6x - 9y) = 23 - 39 & \text{ecuación 4} \end{cases}$

(c) $S'': \begin{cases} 6x - 9y = 39 & \text{ec. 3} \\ 16y = -16 & \text{ec. 4} \end{cases}$

(d) $S''': \begin{cases} 2x - 3y = 13 & \text{ec. 1} \\ 16y = -16 & \text{ec. 4} \end{cases}$

[la ec.1 tiene valores más pequeños que facilitan el despeje]

Podemos ver que S'' es <u>*fácilmente resoluble*</u>.

De la ecuación 4 resulta $\boxed{y = -1}$; reemplazando en la ecuación 3 se tiene $2x + 3 = 13 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow \boxed{x = 5}$

El par $(5; -1)$ satisface las ecuaciones de los 4 sistemas: $S, S', S''$ y $S'''$ (¡hacer las cuentas!).

Las operaciones (a) y (b) son ***operaciones elementales entre ecuaciones***; le podríamos agregar la de permutar el orden en las ecuaciones (c). Además, la ecuación 4 podría pensarse como la suma de la 2 con la 1 multiplicado por (–3).

Los 4 sistemas ejemplificados tienen el mismo conjunto solución: se dice que son ***equivalentes***.

Generalizando lo efectuado en el ejemplo podemos recopilar:

*Dado un sistema S con **m** ecuaciones lineales se consigue un sistema S' equivalente a través de cualquiera de estas tres operaciones elementales entre ecuaciones:*

*a) Permutar el orden de dos ecuaciones cualesquiera.*

*b) A una ecuación multiplicarla por un número diferente de cero.*

*c) A una ecuación reemplazarla por la suma de ésta por un múltiplo de otra (el factor de multiplicación podría ser cero, pero no sería muy útil ya que S'=S).*

Estas operaciones permitirán resolver ecuaciones por el **Método de Gauss** (y de **Gauss-Jordan**) que abordaremos más adelante.

A propósito, se han ordenado los cuatro sistemas escribiendo las variables x e y en ese orden; se podría haber elegido primero y, luego x, pero es fundamental *optar por uno*.

Los coeficientes que acompañan a las variables y los términos independientes (más allá del igual) pueden distribuirse en una ***matriz***.

Vinculado a cada sistema se tiene una serie de matrices, pero por ahora nos focalizaremos en la ***matriz ampliada*** del sistema que llamemos $M, M', M''$ y $M'''$.

Ellas son:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \vdots & 13 \\ 6 & 7 & \vdots & 23 \end{bmatrix} \qquad M' = \begin{bmatrix} 6 & -9 & \vdots & 39 \\ 6 & 7 & \vdots & 23 \end{bmatrix}$$

$$M'' = \begin{bmatrix} 6 & -9 & \vdots & 39 \\ 0 & 16 & \vdots & -16 \end{bmatrix} \quad M''' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \vdots & 13 \\ 0 & -16 & \vdots & 16 \end{bmatrix}$$

Esta disposición (dentro de otra) impide la dispersión que pudieran hacer las variables sobre nuestro desarrollo algebraico y de alguna manera *lo automatiza*.

Cada una de las cuatro matrices presentadas tiene *2 filas* y *3 columnas*. Las primeras representan en nuestra situación a *las ecuaciones* y las segundas a *las variables* –ordenadas- y a los términos independientes.

Las operaciones elementales entre ecuaciones pueden pensarse como ***operaciones elementales entre filas***. Ellas nos dirigen a una ***nueva matriz*** que representa a un **sistema equivalente al anterior** o sea que tienen el mismo conjunto solución.

Escribamos las operaciones elementales para las filas de ***una matriz que represente a un sistema lineal*** de ecuaciones:

*a) Permutar dos filas entre sí.*

*b) A una fila multiplicarla por un número diferente de cero.*

*c) A una fila reemplazarla por la suma de ésta por un múltiplo de otra.*

Explicite cuál (es) fue (ron) las *operaciones elementales* que permitieron ir de la matriz $M$ hasta la $M'''$ en el caso anterior.

| ESTADO INICIAL (***sistema original***) | | PROCESO | ESTADO INICIAL (***sistema equivalente***) | |
|---|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2 & -3 & \vdots & 13 \\ 6 & 7 & \vdots & 23 \end{bmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ecuac.1 \\ ecuac\ 2 \end{pmatrix}$ | $\rightarrow$ | $\begin{pmatrix} ecuac.3 \\ ecuac\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times ecuac.1 \\ ecuac\ 2 \end{pmatrix}$ | $\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -9 & \vdots & 39 \\ 6 & 7 & \vdots & 23 \end{bmatrix}$ |

… terminar con el proceso

Si tuviésemos el sistema $\begin{cases} 2x - y + 4z = 13 \\ 3y - z = 4 \\ 10z = 50 \end{cases}$ resulta una matriz ampliada de 3 filas y 4 columnas; esta es $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 50 \end{array}\right)$.

La solución del sistema es $\boxed{z = 5}$; $3y - 5 = 4 \rightarrow \boxed{y = 3}$; $2x - 3 + 20 = 13 \rightarrow \boxed{x = -2}$.

Evidentemente podemos resolver el sistema desde las ecuaciones iniciales pero la matriz con tantos ceros y estratégicamente ubicados facilita la resolución. Es por eso por lo que se nos hace necesario un tratamiento individual y más profundo.

**Expresión matricial de un sistema de ecuaciones**

Anteriormente, se planteó el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$S: \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 6x + 7y = 23 \end{cases}$ cuya solución fue $(x, y) = (5; -1)$

Veamos que dichas ecuaciones tienen varias interpretaciones:

**(a)** Cada ecuación corresponde a una recta y cuando uno está frente a un sistema pretende conocer el punto (si existiera) donde las rectas se intersecan. Es una ***visión geométrica***.

**(b)** A todo sistema de ecuaciones lineales se le puede asociar una ***formalización matricial***.

Definimos una matriz $A$ como *matriz del sistema*, de tamaño mxn donde m es el número de ecuaciones y $n$ el número de incógnitas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$; una *matriz X de incógnitas* –que es un vector columna- de $n \times 1$ y una *matriz B de términos independientes* –también vector columna- de $m \times 1$.

Si el sistema $S$ fuera

$$S: \begin{cases} a_{11}\, x_1 \ + a_{12}\, x_2 \ + \ \dots + \ a_{1n}\, x_n \ = b_1 \\ a_{21}\, x_1 \ + a_{22}\, x_2 \ + \ \dots + \ a_{2n}\, x_n \ = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}\, x_1 \ + a_{m2}\, x_2 \ + \ \dots + \ a_{mn}\, x_n \ = b_m \end{cases}$$

las matrices serían $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

de tal forma que $S$ puede escribirse como $A.X = B$ que es la *forma matricial* de un sistema de ecuaciones.

También suele definirse otra matriz M, *matriz ampliada del sistema* y es de orden $m \times (n+1)$. Su forma es $M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ donde el separador es sólo un recurso visual para recordar que allí debe estar el signo igual[1].

En nuestro caso particular tendríamos que $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$ y por ende la forma matricial del sistema de ecuaciones es $A.X = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$

Observemos que $(5; -1)$ es solución del sistema pues al efectuar el producto (y que usaremos como matriz columna) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ obtenemos $\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$.

En cambio $(-3;\ 2)$ no es solución pues $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix}$ y como el resultado *no es* la matriz $\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$ entonces $(-3;\ 2)$ no es una solución del sistema $S$.

[1] El sistema se resolverá por aplicación de operaciones elementales entre filas.

**Sistema de ecuaciones lineales con 3 o más incógnitas. Método de resolución de Gauss y de Gauss-Jordan.**

Abordaremos la resolución de sistemas de <u>*m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas</u> a través de los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

**Ejemplo**

En $\mathbb{R}^3$una ecuación lineal en $x, y \wedge z$ la podemos interpretar como la ecuación de un **plano** (en el módulo 3 se justificará esto).

Tomemos el problema de determinar si hay (o no) intersección entre los siguientes cinco planos:

$\Pi_1$: 2x + y – z = 1 $\Pi_2$: 3x – 2y – 4z = 11 $\Pi_3$: –x + 4y + 2z = 1

$\Pi_4$: –5x – y + 6z = –26, $\Pi_5$: 3y + 2z = –7

Un punto (x, y, z) pertenecerá a los cinco planos si satisface las cinco ecuaciones que ordenamos a *nuestro gusto* en una matriz ampliada M de coeficientes.

$$M = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 11 \\ -5 & -1 & 6 & -26 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array}$$

Recordemos que entre ecuaciones y las filas de la matriz son ***lícitas*** las siguientes operaciones elementales:

*a) Permutar el orden de dos ecuaciones cualesquiera.*

*b) A una ecuación multiplicarla por un número diferente de cero.*

*c) A una ecuación reemplazarla por la suma de ésta y un múltiplo de otra*[2].

Unifiquemos criterios para la resolución:

**a)** En el paso siguiente anotaremos en la fila que vamos a modificar qué operación le hemos realizado a las anteriores. Así si en la tercera hilera apareciera $2f_1 + f_3$ debemos entender que la nueva *fila 3* (que llamaremos $f_3$ por abuso de notación) se obtiene de efectuar el doble de la *fila 1* adicionado a la fila 3 del paso inmediatamente precedente.

[2] Si a la ecuación que es sumada se la multiplica por cero no se adiciona nada a la ecuación original pero la operación elemental sigue siendo válida y por lo tanto se mantiene su aplicación. Esto será de utilidad al trabajar con sistemas con parámetros.

**b)** La intención del método es por medio de las operaciones elementales llegar a una **matriz escalonada** por filas. Esto sucede si:

**i)** Cualquier fila que se componga enteramente por ceros se ubica en la parte inferior.

**ii)** En cada renglón diferente de cero, la primera entrada no nula (llama ***entrada principal*** o ***pivote o elemento distinguido***) se localiza en una columna a la izquierda de cualquier entrada principal debajo de ella (o equivalentemente, a medida "que bajamos" por la matriz los pivotes aparecen a la derecha).

Al proceso lo llamaremos ***triangulación*** (si la matriz es cuadrada) o ***escalonamiento***.

Los siguientes esquemas muestran algunas <u>*matrices triangulares superiores o escalonadas*</u> en situaciones de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (por eso el punteado dentro de la matriz) y convengamos que "#" representa un número real no nulo y "•" uno cualquiera (incluyendo el 0).

**Ejemplo**

1. $\left[\begin{array}{cc:c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \end{array}\right]$ puesto que:

*este es el primer pivote*

$$\left[\begin{array}{cc:c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \end{array}\right]$$

*este valor debe ser cero* *este es el segundo pivote*

2. $\left[\begin{array}{cc:c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# \end{array}\right]$:

*este es el primer pivote*

$$\left[\begin{array}{cc:c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# \end{array}\right]$$

*segundo pivote*

*este valor debe ser cero* *este valor es cero pero podría no serlo*

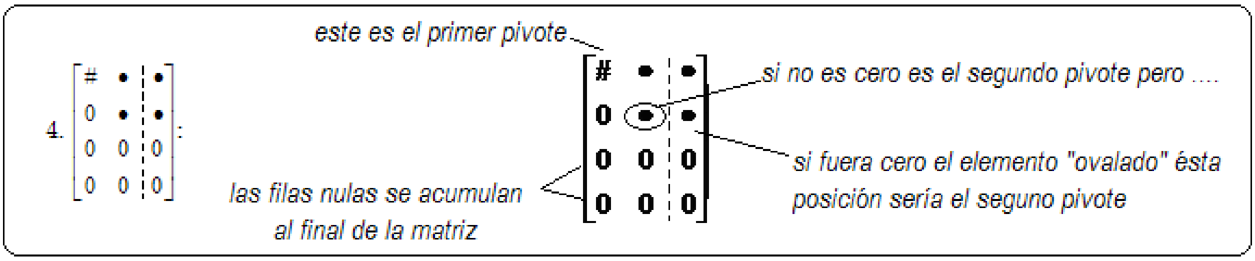
3. $\left[\begin{array}{cc:c} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$:

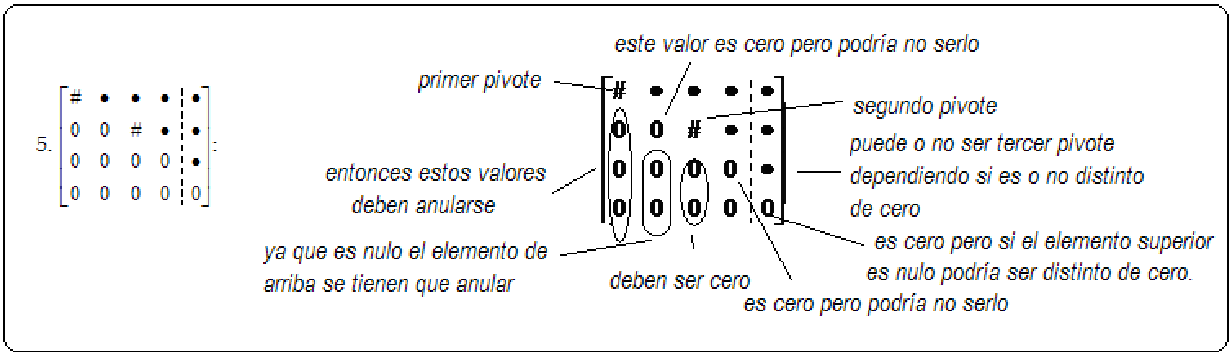
*este valor es cero pero podría no serlo*

$$\left[\begin{array}{cc:c} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

*este es el primer pivote*

*las filas nulas van al final*




Otras situaciones son:

6. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 7. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 8. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 9. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & \bullet \end{bmatrix}$,

10. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}$, 11. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$:

*M*ostrar que en cada matriz se cumple que es triangular superior ($m_{ij} = 0 \; para \; i > j$).

**c)** La intención es que $m_{11}$ sea diferente de cero y todos los demás elementos de la primera columna que están debajo de él se anulen.

Luego nos corremos una columna hacia la derecha y una fila hacia abajo y ese elemento debe ser diferente de cero; para lograrlo podemos permutar filas.

Además, los restantes valores debajo de ese elemento ser nulos; si no pudiéramos conseguirlo nos corremos una columna más a la derecha (como aquí $\begin{bmatrix} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

**d)** El objetivo del método de Gauss es llegar a la solución del sistema resolviendo de atrás hacia delante al terminar la triangulación o escalonamiento, o sea comenzar con lo que se obtiene en la última fila y seguir con las superiores.

El *método de Gauss-Jordan* prosigue triangulando hacia arriba, tratando de dejar solamente los elementos diagonales, con el fin que la respuesta sea directa, aunque el precio a pagar es una mayor cantidad de pasos en el proceso de escalonamiento.

| |
|---|
| En el *método de Gauss-Jordan* la matriz debe llevarse a la forma ***escalonada reducida por filas*** esto significa que además de ser una matriz escalonada, los pivotes o elementos distinguidos deben ser 1 (unos) y estos son los únicos distintos de cero en su columna. |

El método de Gauss Jordan lo utilizaremos para la obtención de la inversa de una matriz.

**Sí** estimamos conveniente que en cada situación *quien resuelve* analice qué operaciones elementales (y trucos) se pueden usar.

**Ejemplo**

Resolvamos el sistema: $S:\begin{cases}\Pi_1\\ \Pi_2\\ \Pi_3\\ \Pi_4\\ \Pi_5\end{cases} \equiv S':\begin{cases}\Pi_3\\ \Pi_5\\ \Pi_1\\ \Pi_2\\ \Pi_4\end{cases} \rightarrow \quad S':\begin{cases}-x + 4y + 2z = 1\\ 3y + 2z = -7\\ 2x + y - z = 1\\ 3x - 2y - 4z = 11\\ -5x - y + 6z = -26\end{cases}$

$$M=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -7\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & -4 & 11\\ -5 & -1 & 6 & -26\end{array}\right]\begin{array}{l}f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\\ f_5\end{array}$$

ya que el $m_{11}$ es un –1 lo usamos de pivote y a través de él tratamos de anular los valores restantes de la primera columna. Ese –1 apareció pues al armar la matriz M a *nuestro gusto* el mismo no fue azaroso.

Tener un 1 o –1 suele ser conveniente, pero no determinante; si en alguna matriz los elementos de la columna fueran 6, –3, 3, 12 y 15 tanto el 3 como el –3 serían óptimos para desarrollar el proceso de triangulación.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -7\\ 0 & 9 & 3 & 3\\ 0 & 10 & 2 & 14\\ 0 & -21 & -4 & -31\end{array}\right]\begin{array}{l}f_1\\ f_2\\ 2f_1+f_3\\ 3f_1+f_4\\ -5f_1+f_5\end{array}$$

siempre usamos $+f_i$ –la *fila i* es la que cambiamos-

Nuestra atención se dirige a la submatriz que nos queda al ir a la fila y columna siguientes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & 14 \\ 0 & -21 & -4 & -31 \end{array}\right]$$

y aquí vemos que tanto los coeficientes de las filas 2 y 3 son múltiplos de 3 y 2 respectivamente; por lo tanto, los hacemos más pequeños usando la operación elemental b).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 21 & 4 & 31 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ f_3 \div 3 \\ f_4 \div 2 \\ -f_5 \end{array} \rightarrow$$

el 3 en $m_{22}$ será nuestro pivote; ¿cómo hacemos para conseguir un 0 donde hay un 5?

Debemos a $f_4$ sumarle k veces $f_2$, pero con cual k:

$3.k + 5 = 0 \rightarrow k = -\dfrac{5}{3}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -7/3 & 56/3 \\ 0 & 0 & -10 & 80 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -f_2 + f_3 \\ -5/3\, f_2 + f_4 \\ -7 f_2 + f_5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-7/3} & \mathbf{56/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-10} & \mathbf{80} \end{array}\right]$$

Ahora nos focalizamos en la submatriz que se obtiene al “bajar” a una nueva fila y desplazarnos un lugar hacia la derecha.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 56 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ 3 f_4 \\ f_5 \div 10 \end{array}$$

Hemos multiplicado por 3 la $f_4$ por comodidad en las cuentas.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ -7 f_3 + f_4 \\ -f_3 + f_5 \end{array}$$

Se ha **triangulado** –o escalonado- nuestro sistema de ecuaciones llegando a una matriz triangular superior. Las últimas dos ecuaciones ya no nos son útiles pues representan una tautología:

es siempre cierto que 0.x + 0.y + 0.z = 0 para cualquier terna x, y, z de números reales.

Podemos ahora encontrar la solución del sistema yendo desde el final al principio:

$-z = 8 \to z\boxed{=-8}$

$3y + 2.(-8) = -7 \to 3y = -7 + 16 \to \boxed{y = 3}$

$-x + 4.3 + 2.(-8) = 1 \to -x = 1 - 12 + 16 \to \boxed{x = -5}$

El sistema resultó ser ***compatible determinado*** o sea tiene solución única $\{\boxed{(-5;\ 3;\ -8)}\}$.

Allí se intersecan los 5 planos.

**Comentarios**

**a)** La forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Podríamos haber permutado al principio el $-5$ de la $f_5$ y usarlo de pivote. No serían muy lindas las cuentas, pero la triangulación sirve igual.

**b)** Podemos continuar desde la matriz escalonada para llegar a la solución sin resolver hacia atrás "a mano". Es la esencia del ***método de Gauss-Jordan***.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A partir del $-1$ en la tercera fila buscamos conseguir ceros arriba de dicho coeficiente; podemos olvidarnos de las últimas dos filas para la resolución de nuestro sistema de ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2f_3 + f_1 \\ 2f_3 + f_2 \\ \phantom{0} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \phantom{0} \\ f_2 \div 3 \\ -f_3 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} -4f_2 + f_1 \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} -f_1 \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array}$$

; de aquí se tiene $x = -5, y = 3, z = -8$

**c)** A veces puede ser útil presentar las incógnitas en otro orden.

Nuestra matriz $M$ presupone un orden por columna $x; y; z$ pero en alguna ocasión puede ser que convenga permutar.

Si en $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 21 & 4 & 31 \end{array}\right)$ permutamos la columna $y$ por $z$ y tenemos $\rightarrow$ $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 21 & 31 \end{array}\right) \end{array}$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 21 & 31 \end{array}\right) \end{array} f_2 \leftrightarrow f_3 \quad \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 21 & 31 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -2f_2 + f_3 \\ -f_2 + f_4 \\ -4f_2 + f_5 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -1/3\, f_3 \\ 1/2\, f_4 \\ 1/9\, f_5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} & a \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ f_4 - f_3 \\ f_5 - f_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

podemos eliminar las dos últimas filas pues están repetidas y despejar $y, z$ y $x$ (en ese orden). Aquí el permutar columnas facilitó un poco las cuentas (*no* usamos fracciones).

**Otro Ejemplo**

Resolver el sistema de ecuaciones de 3 x 4 S: $\begin{cases} x + 3y - 5z + w = 4 \\ 2x + 5y - 2z + 4w = 6 \\ -x - 2y - 3z - 3w = -2 \end{cases}$

Armamos la matriz M de los coeficientes, ampliada con los términos independientes.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 + f_1 \rightarrow f_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ f_3 + f_2 \rightarrow f_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Reescribimos el sistema $\begin{cases} x + 3y - 5z + w = 4 \\ \quad - y + 8z + 2w = -2 \end{cases}$ y despejamos de abajo hacia arriba.

$y = 8z + 2w + 2$ Reemplazamos en la primera ecuación y despejamos x en función de z y w

$x + 3(8z + 2w + 2) - 5z + w = 4 \quad \rightarrow \quad x + 24z + 6w + 6 - 5z + w = 4 \quad \rightarrow \quad x + 19z + 7w + 6 = 4$
$\rightarrow \quad x = -19z - 7w - 2$

Resultando $\begin{cases} x = -19z - 7w - 2 \\ y = 8z + 2w + 2 \end{cases}$

$S=\{(x;y;z;w)=(-19z-7w-2;8z+2w+2;z;w)\wedge z\in R\wedge w\in R\}$

Con "$z$" y "$w$" cualquier par de números reales. El sistema es ***compatible indeterminado***.

Las variables "$x$" e "$y$" que corresponden a las posiciones de los pivotes suele llamárselas ***variables principales*** y las variables "$z$" y "$w$" son las ***variables libres o independientes.***
De acuerdo a los infinitos valores que pueden tomar las variables libres se van obteniendo el correspondiente valor para cada variable principal.

¿Qué hubiera ocurrido si al escalonar se llegara a la matriz $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$?

La misma está triangulada (escalonada) y la cuarta ecuación se interpreta así:

0.x+ 0.y +0.z + 0.w = 3 0 = 3

La misma no tiene solución. El sistema es ***incompatible***.

**Rango fila de una matriz**

Dada una matriz de $m\times n$ se denomina *rango fila* de ella a la cantidad de filas no nulas luego de haber triangulado (escalonado) la matriz.

Pensamos a la matriz formada por <u>*m vectores*</u> de n componentes y los triangulamos: ***sólo los vectores no nulos cuentan*** para el rango fila de la matriz.

**Ejemplo**

Busquemos el rango de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

(I) $rgf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}=rgf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ -2f_1+f_2 \\ 3f_1+f_3 \\ -5f_1+f_4 \end{array}=rgf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ f_2\div 3 \\ \\ f_4\div 5 \end{array}=$

$rgf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -f_2+f_3 \\ -f_2+f_4 \end{array}=2$

(II) $rgf\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}=4$ [ya está triangulada]

**Comentarios:**

Si consideramos a las columnas como vectores de ***m*** **componentes** –de arriba hacia abajo, por ejemplo, la columna 1 del ejemplo I es $(1, 2, -3, 5)$– podemos definir el *rango columna* de una matriz como la cantidad de vectores columnas no nulos que sobreviven al triangularlos.

Más adelante se verá que el rango fila y el rango columna son ***idénticos*** y al dar un mismo número se habla directamente del ***rango de una matriz***.

La noción de rango fila está íntimamente ligada al ***concepto de independencia y dependencia lineal*** volveremos con este tema, más adelante

**Teorema de Rouche-Fröbenius**

Vamos a vincular el rango fila de una matriz con la posibilidad de existencia de solución a un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

Un sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ puede escribirse matricialmente como A.X = B

donde $A$ es la **matriz de coeficientes** del sistema $(m \times n)$, X la **matriz columna de incógnitas** $(n \times 1)$ y B la **matriz columna de términos independientes** $(m \times 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

Asimismo, tenemos a M, **matriz ampliada** del sistema de dimensión $m \times (n+1)$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

Analicemos algunos casos particulares para ver si ciertos resultados pueden ser generalizados ("#" representa un número real no nulo y "•" uno cualquiera o sea que puede anularse).

**Ejemplo**

a) ¿Qué sucede si tuviéramos un sistema con $n = 2$ incógnitas de este tipo $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \end{bmatrix}$?

De la segunda obtendríamos $x_2$ y luego sustituyendo en la primera saldría $x_1$; el sistema es compatible determinado (SCD).

Veamos los rangos de las matrices $A = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & \# \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \end{bmatrix}$.

Al estar ambas trianguladas tenemos $rgf(A) = 2$ y $rgf(M) = 2;\ n = 2$.

b) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# \end{bmatrix}$.

El sistema es incompatible pues la segunda ecuación significa $0.x_1 + 0.x_2 = \#$ (SI).

Aquí $rgf(A) = 1, rgf(M) = 2, n = 2$.

c) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; el sistema es compatible indeterminado (SCI); $x_1$ queda en función de $x_2$; $rgf(A) = 1, rgf(M) = 1, n = 2$.

*Cuestión: ¿Podríamos asegurar que $x_2$ se puede poner en función de $x_1$?*

d) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; SI; nos imaginamos a $A$ y tenemos: $rgf(A) = 1, rgf(M) = 2, n = 2$.

e) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & \bullet \end{bmatrix}$; $SCD$; $rgf(A) = 4, rgf(M) = 4, n = 4$.

f) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}$; $SI$; $rgf(A) = 3, rgf(M) = 4, n = 4$.

g) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $SCI$; $rgf(A) = 2, rgf(M) = 2, n = 4$.

El teorema de Rouche-Fröbenius da un marco teórico a lo ejemplificado.

Tabulemos lo obtenido –tener en cuenta que $rgf(A) \leq rgf(M)$ pues $M$ se obtiene agregando una columna adicional a A-.

| **Ejemplo** | **Rango A** | **Rango M** | **n** | **Tipo de solución** |
|---|---|---|---|---|
| (a) | 2 | 2 | 2 | SCD |
| (b) | 1 | 2 | 2 | SI |
| (c) | 1 | 1 | 2 | SCI |
| (d) | 1 | 2 | 2 | SI |
| (e) | 4 | 4 | 4 | SCD |
| (f) | 3 | 4 | 4 | SI |
| (g) | 2 | 2 | 4 | SCI |

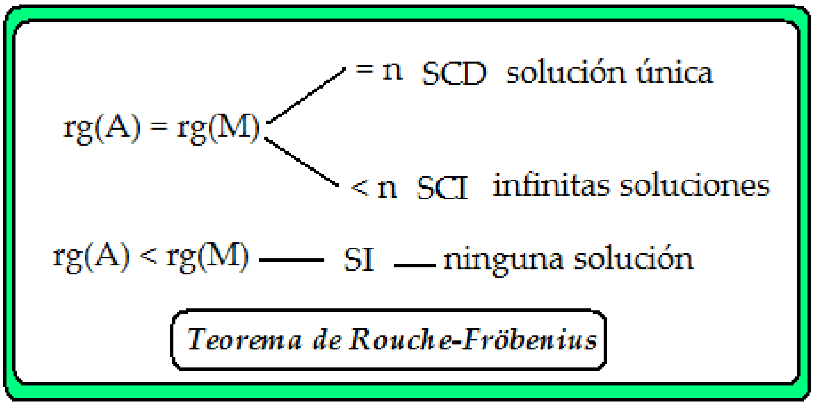
**Si $\boldsymbol{rg(A) = rg(M)}$ hay solución**:

a) **única si $\boldsymbol{rg(A) = rg(M) = n}$**

b) **infinitas si $\boldsymbol{rg(A) = rg(M)} < n$** y la diferencia entre $n$ y el $rg(A)$ indica la cantidad de variables libres que deben usarse para expresar la solución.

**Recordar que los rangos filas y columnas coinciden; el número de columnas está dado por el número de incógnitas y por eso $\boldsymbol{rgA \leq n}$ en cualquier caso.**

**Si $\boldsymbol{rg(A)} < rg(M)$ no tenemos solución**.




Videos de la cátedra que pueden ayudarte a comprender los temas:

3.1 Método de Gauss y Gauss Jordan

https://www.youtube.com/watch?v=nnyFXuxcrGM

3.2 Método de Gauss y Gauss Jordan

https://www.youtube.com/watch?v=DDJEycKwGyc

3.3 Teorema de Rouche Fröbenius

https://www.youtube.com/watch?v=-HY_Ugv30v0

Clasificación de sistemas. Teorema de Rouche Fröbenius

https://www.youtube.com/watch?v=1iyv5f14trM

## EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

¿Cómo podemos saber si dos sistemas de ecuaciones $S_1$ y $S_2$ son equivalentes, es decir, que tienen el mismo conjunto solución?
Lo primero que debemos hacer es triangular cada conjunto de ecuaciones por separado y quedarnos con las ecuaciones independientes (cuya cantidad coincide con el rango de cada matriz de coeficientes y de cada matriz ampliada). Después de hacer esto puede pasar que:

- En alguno de los sistemas, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliadas no sean iguales y por lo tanto sería un sistema incompatible. En este caso, los dos sistemas serán equivalentes ***<u>SOLO</u>*** si ambos lo son. Si, en cambio, uno fuera compatible y el otro incompatible, no son equivalentes.
- Ambos sistemas resultan compatibles pero los rangos de las matrices ampliadas son diferentes. En este caso, los sistemas NO serán equivalentes ya que tienen distinto conjunto solución.
- Ambos sistemas resultan compatibles con el mismo rango en sus matrices ampliadas. Si este es el caso, tenemos que seguir trabajando, ya que podrían tener, o no, el mismo conjunto solución.

Si ya sabemos que ambos sistemas son compatibles y ambos tienen rango $k$, ¿cómo seguimos?

Ubicamos las $k$ ecuaciones de uno de ellos y a continuación las $k$ del otro (*<u>y éstas no son intercambiadas con ninguna de las del primero</u>*) y comenzamos a triangularlas. Si los sistemas son equivalentes las últimas $k$ deben anularse por completo.

**Ejemplo 1:**
Compruebe que $S: \begin{cases} -3x+2y-z=8 \\ 2x-y+3z=-12 \end{cases}$ y $S': \begin{cases} -x+2y+9z=-24 \\ -11x+9y+8z=-4 \end{cases}$ son equivalentes.

Cuando un sistema tiene solo 2 ecuaciones, el sistema será de rango 1 (si las ecuaciones son múltiplos una de la otra) o de rango 2 (si las ecuaciones no son múltiplos una de la otra). El rango de ambos sistemas es 2 pues las dos ecuaciones son linealmente independientes (no múltiplos). Como tienen igual rango, seguimos trabajando.

Triangulemos ubicando por comodidad las de $S'$ arriba y luego las de $S$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ -11 & 9 & 8 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+(-11)F_1 \to F_2 \\ F_3+(-3)F_1 \to F_3 \\ F_4+2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -13 & -91 & 260 \\ 0 & -4 & -28 & 80 \\ 0 & 3 & 21 & -60 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{13}F_2 \to F_2 \\ \frac{1}{4}F_3 \to F_3 \\ \frac{1}{3}F_4 \to F_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3-F_2 \to F_3 \\ F_4+F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Toda solución de S cumple con las ecuaciones de S' y como ambos tienen igual rango representan al mismo sistema de ecuaciones; tiene idéntico conjunto solución. Los dos sistemas de ecuaciones son equivalentes.

**Ejemplo 2:**

Decidir si los siguientes sistemas son equivalentes:

$$:\begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=-2 \\ x-2y+z=8 \end{cases} \qquad S':\begin{cases} 3x-2y-3z=-2 \\ -2x+2y+2z=0 \\ 2x-y-2z=-2 \end{cases}$$

Primero analizamos el rango de ambos sistemas:

Trabajamos con $S$: $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=-2 \\ x-2y+z=8 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+2F_1\to F_2 \\ F_3+F_1\to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right) F_3+F_2\to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Vemos que, este sistema tiene rango 3.

Trabajamos con $S'$: $\begin{cases} 3x-2y-3z=-2 \\ -2x+2y+2z=0 \\ 2x-y-2z=-2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) F_2\leftrightarrow F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \frac{1}{2}F_2\to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2+3F_1\to F_2 \\ F_3+2F_1\to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) F_3+(-1)F_2\to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que, este sistema tiene rango 2.

Como ambos sistemas tienen rangos diferentes, concluimos que: **No son equivalentes**.

**OBSERVACIÓN:** Notemos la importancia que analizar los rangos como primer paso.
Miremos, en este último ejemplo, lo que se consiguió después de triangular:

El sistema $S$ quedó: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$, y el sistema $S'$ nos quedó $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

¡Las dos primeras filas son iguales!

Si no hubiésemos analizado los rangos de ambos sistemas por separado, y hubiésemos puesto ambos sistemas juntos, formando un gran sistema, las ecuaciones del sistema $S'$ se hubiesen anulado con las ecuaciones de $S$, lo que nos hubiera llevado a una conclusión errónea. El sistema $S$ es $SCD$ (Recordar las condiciones del teorema de Rouché-Frobenius) lo que quiere decir que la solución es única; sin embargo, el sistema $S'$ es un $SCI$, es decir que tiene infinitas soluciones. Ambos sistemas, no son equivalentes: no tienen el mismo conjunto solución. Sin embargo, si nos hubiésemos salteado el paso de analizar los rangos de manera independiente, podríamos haber llegado a la conclusión equivocada. ¡¡No te olvides de ese paso!!

**SISTEMAS DE ECUACIONES CON PARÁMETROS**

Un sistema como el que sigue se denomina un sistema con parámetros (en este caso tiene un solo parámetro, **α**); aparte de las incógnitas $x_1$ y $x_2$ hay un número, un parámetro α que según el valor que tome _puede influir en el tipo de solución_.

$$S_1: \begin{cases} \alpha . x_1 + 2x_2 = -6 \\ (\alpha^2 - 4)x_2 = (2+\alpha) \end{cases}$$

Analicemos la matriz M: $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 2 & -6 \\ 0 & \alpha^2 - 4 & 2+\alpha \end{array}\right)$.

Siempre que queremos clasificar un sistema (con o sin parámetros), tenemos que remitirnos al teorema de Rouché Frobenius. Para aplicarlo, necesitamos el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada. Recordamos que para calcular el rango, necesitamos que la matriz esté triangulada. La matriz M _parece_ estar triangulada pero no lo es en todos los casos: si $a_{11}$ (que vale $\alpha$) fuera nulo no está escalonada.

De hecho, el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada dependen directamente del valor del parámetro $\alpha$:

Si $\alpha$ y $\alpha^2 - 4$ _**son diferentes de cero**_ podemos concluir que el rango de ambas matrices son iguales, y coincide con la cantidad de incógnitas: $rg(A) = rg(M) = n = 2$ y el sistema es $SCD$.

Si $\alpha = 0$ nos queda: $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$, nos falta seguir triangulando para calcular el rango de las matrices:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 2 \end{array}\right) F_2 + 2F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Entonces: $rg(A) = 1$; $rg(M) = 2$ lo que, por el teorema de Rouché Frobenius, se trata de un sistema incompatible (SI).

Que $\alpha^2 - 4 = 0$ implica dos opciones: $\alpha = 2$ ó $\alpha = -2$

Si $\alpha = 2$, nos queda $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ que ya está escalonada y verifica: $rg(A) = 1$; $rg(M) = 2$, lo que corresponde a un sistema incompatible (SI)

Si $\alpha = -2$, nos queda $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ que ya está escalonada y verifica $rg(A) = rg(M) = 1$, pero como $n = 2$ corresponde a sistema compatible indeterminado (SCI).

Resumiendo:

| *Valor de α* | *Tipo de solución* |
|---|---|
| $\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$ | $SCD$ |
| 0 | $SI$ |
| 2 | $SI$ |
| −2 | $SCI$ |

**Nota:** En otro archivo encontrarás más ejemplos de sistemas con parámetros (con uno y con más parámetros y más ecuaciones).

**LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEOS Y NO HOMOGÉNEOS.**

Un sistema de ecuaciones se llama homogéneo, si todos los términos independientes son iguales a 0 (cero).
Un sistema homogéneo **siempre es compatible** pues asignando valor cero simultáneamente a cada una de las variables todas las ecuaciones se satisfacen.
Puede ser determinado, si la única solución es todas las incógnitas iguales a cero o indeterminado.

**Relación entre los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos**

Si $A.X = B$ representa un sistema $\boldsymbol{S}$ de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas y $B$ no es la matriz nula de $m \times 1$ ($N^{m\times 1}$) diremos que $\boldsymbol{S}$ es un sistema lineal *no homogéneo*; si $B$ fuera $N^{m\times 1}$ (matriz nula) se dice que $\boldsymbol{S}$ es un sistema lineal *homogéneo*.

Por ejemplo:

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \quad \text{es un sistema no homogéneo y,}$$

$$\boldsymbol{S_H}: \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \quad \text{es homogéneo.}$$

Como dijimos antes, un sistema homogéneo **siempre es compatible** pues asignando valor cero simultáneamente a cada una de las variables todas las ecuaciones se satisfacen.
En el ejemplo observamos que ambos sistemas comparten la misma matriz $A$ de coeficientes del sistema; diremos que $\boldsymbol{S_H}$ es el sistema homogéneo asociado a $\boldsymbol{S}$. Si $\boldsymbol{S}$ fuera homogéneo tendríamos que $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S_H}$ coincidirían. Vamos a tratar de *vincular* las soluciones de $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S_H}$.

Supongamos que tenemos $X'$ y $X''$ dos soluciones de $\boldsymbol{S}$ es decir que:

$$A.X' = B$$

$$A.X'' = B$$

Si restamos miembro a miembro:

$$A.X' - A.X'' = B - B = N\ (matriz\ nula)$$

Recordamos que, mientras las matrices estén multiplicando en el mismo lado, se puede sacar factor común, entonces:

$$A.(X' - X'') = N$$

Es decir que $X' - X''$ (al que llamamos, a partir de ahora $H_1$) es una solución del sistema $\boldsymbol{S_H}$; esto es:

$$A.H_1 = N$$

Podemos tomar un número real $\alpha$ y efectuar $\alpha H_1$ y si multiplicamos esto con la matriz $A$:

$$A.(\alpha.H_1) = (A.\alpha).H_1 = \alpha.(A.H_1) = \alpha.N = N.$$

Es decir que α.H1 es otra solución del sistema homogéneo asociado.

Este razonamiento que hicimos se hizo partiendo de dos soluciones (podemos imaginar, diferentes, aunque no es necesario) del sistema $\boldsymbol{S}$. Si llamamos $X$ a una solución cualquiera (y que representa a todas las soluciones), podemos repetir el mismo razonamiento usando como soluciones a $X$ y a $X''$; de esta forma, llegaríamos a que, de la misma forma que $X' - X'' = H_1$, podemos pensar que para cada solución $X$ se verifica que

$$X - X'' = \alpha H_1$$

Que, despejando nos da:

$$X = \alpha H_1 + X''$$

Es decir que, el conjunto de soluciones de $\boldsymbol{S}$ se obtiene tomando una solución particular de $\boldsymbol{S}$ y sumando cada vez una solución del sistema $\boldsymbol{S_H}$ asociado. A cada una de las infinitas posibilidades de $\boldsymbol{S_H}$ –si fuera un SCI– le vamos sumando $X''$ y conseguimos una nueva solución $X$ de $\boldsymbol{S}$ .

**Ejemplo**

Sean $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $X'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ dos soluciones de un sistema $\boldsymbol{S}$: $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Dar tres soluciones adicionales de $\boldsymbol{S}$.

b) ¿Cuál de las soluciones anteriores del sistema $\boldsymbol{S}$: $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ cumple, además, que: $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 32$?

c) Si $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $\boldsymbol{S'}$: $A.X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, indicar otras 3 soluciones del sistema $\boldsymbol{S''}$: $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Arrancamos con el 1er ítem: Dar tres soluciones adicionales de $\boldsymbol{S}$.

Si $X'$ y $X''$ son soluciones, entonces: $X' - X'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = H_1$, es solución del sistema $\boldsymbol{S_H}$ (El sistema homogéneo asociado a la misma matriz de coeficientes) y, como dedujimos antes: $\alpha H_1$ que, en nuestro caso sería: $\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, también es solución del sistema homogéneo $\boldsymbol{S_H}$.

Entonces otras soluciones $X$ de $\boldsymbol{S}$ son de la forma: $X = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Como el enunciado pide, dar TRES soluciones del sistema $S$, podemos darle 3 valores diferentes a $\alpha$

Si $\alpha = 2 \rightarrow X_2 = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Si $\alpha = -2 \rightarrow X_{-2} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

Si $\alpha = 3 \rightarrow X_3 = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}$

Ahora continuemos con el ejercicio. El siguiente ítem pregunta ¿Cuál de las soluciones anteriores $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ cumple que $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 32$?

Del ítem anterior, habíamos obtenido que:

$$X = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es decir que:

$$X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -4\alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ 5\alpha + 2 \end{pmatrix}$$

Que, usando la notación del enunciado:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -4\alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ 5\alpha + 2 \end{pmatrix}$$

Queremos que:

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 32$$

Entonces, se tiene:

$$2.(-\alpha) - (-4\alpha - 1) + \alpha + 1 - 3.(5\alpha + 2) = 32$$

$$-2\alpha + 4\alpha + 1 + \alpha + 1 - 15\alpha - 6 = 32$$
$$-12\alpha - 4 = 32$$

$$-12\alpha = 36$$
$$\boxed{\alpha = -3}$$

Reemplazando en $X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -4\alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ 5\alpha + 2 \end{pmatrix}$, queda que el punto buscado es: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}$

Para el ítem siguiente, tenemos que $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $\boldsymbol{S'}$: $A.X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, indicar otras 3 soluciones del sistema $\boldsymbol{S''}$: $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

El sistema $\boldsymbol{S''}$ tiene el mismo sistema homogéneo $\boldsymbol{SH}$ que los sistemas $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S'}$ ; por lo tanto, la cantidad infinita de soluciones de $\boldsymbol{S''}$ las obtendremos sumando una solución particular del mismo a $\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Tratamos de "rearmar" la ecuación $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sabemos que:

$$A.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y también sabemos que:

$$A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por 3 ambos miembros:

$$3A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A.3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A.\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sumando los dos resultados:

$$A.\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$+\qquad A.\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$A.\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}+A.\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Lo que, acomodamos, sacando la matriz de coeficientes de factor común:

$$A.\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$A.\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Es decir que $\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema $A.X\ =\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, entonces, para encontrar todas las soluciones, sumamos esta solución particular a los múltiplos de la solución del sistema homogéneo:

$$Y=\alpha\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\end{pmatrix}$$

Repitiendo lo que se hizo en el primer ítem, le damos valores a $\alpha$ y conseguimos las distintas soluciones pedidas. Cuando $\alpha$ igual, por ejemplo, a 1, 2 y 3 obtenemos $\begin{pmatrix}2\\-5\\2\\10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-9\\3\\15\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\-13\\4\\20\end{pmatrix}$ respectivamente.

**INVERSA DE UNA MATRIZ**

Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}4&-9\\-1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2&-9\\-1&-4\end{pmatrix}$ obtener $A.B$ y $B.A$.

$$A.B=\begin{pmatrix}4&-9\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-9\\-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la situación planteada el producto ha dado la matriz identidad (aquí de dimensión 2).

> ***Definición:*** Si $A$ es una matriz cuadrada de orden $n$ y existe $B$ cuadrada del mismo orden tal que $A.B = I_n \;\wedge\; B.A = I_n$ ($I_n$ es la identidad de orden $n$) entonces $B$ es la inversa de $A$ y se anota $B = A^{-1}$.
> Si $A$ tiene inversa se dice que es **inversible, no singular o regular**.

Veamos que obtener la inversa de una matriz conlleva resolver un sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$).

Sea $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$; la intención es obtener $B$ de orden 2 tal que $C.B = I_2$ (luego se comprueba que $B.C = I_2$).
Se toma a $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ y se plantea $C.B = I_2$.
Esto nos lleva al siguiente par de sistemas de ecuaciones[3]:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x + 4y & -2z + 4w \\ 4x - 7y & 4z - 7w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos separar lo obtenido en 2 sistemas de ecuaciones, de acuerdo a las variables involucradas:

$$S_1 = \begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ 4x - 7y = 0 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} -2z + 4w = 0 \\ 4z - 7w = 1 \end{cases}$$

Resuélvelos y comprueba que las soluciones son $(x; y) = \left(\frac{7}{2}; 2\right)$ y $(z; w) = (2; 1)$.
Esto significa que $B = C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y debe ocurrir que $C.C^{-1} = I_2 \;\wedge\; C^{-1}.C = I_2$ (¡Hacerlo!).

Al resolver los sistemas $S_1$ y $S_2$ se habrá notado que las operaciones por filas en ambos sistemas fueron idénticos y sólo cambiaron los resultados de los términos independientes. Esto permite ahorrar trabajo efectuando lo que se llama ***resolución simultánea de ecuaciones.***

Ejemplifiquemos con el caso presentado:

$$S_1 = \begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ 4x - 7y = 0 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} -2z + 4w = 0 \\ 4z - 7w = 1 \end{cases}$$

[3] Una ecuación del tipo C.X= D donde C, X y D son matrices de órdenes tales que las operaciones se pueden efectuar y X es la matriz incógnita se denomina ***ecuación matricial***.

Se escribe la matriz de coeficientes –coinciden para ambos sistemas- y se forma la matriz ampliada con las dos columnas de términos independientes; la línea vertical es para separar visualmente los términos independientes:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Que, una vez escalonado, puede separarse en dos sistemas:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -2z + 4w = 0 \\ w = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ w = 1 \end{cases}$$

Este "super" sistema de ecuaciones conviene resolverlo por el método de Gauss Jordan, se trata de resolver en forma simultánea varios sistemas de ecuaciones lineales con diferentes términos independientes**.**

**Ejemplo:**

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Resolvemos por Gauss-Jordan buscando obtener la identidad del lado izquierdo de la matriz ampliada M.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ reordenamos } F_2, F_3 \text{ y } F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 + (-2)F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 - F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 + 2F_2 \rightarrow F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 + F_3 \rightarrow F_1 \\ F_2 + F_3 \rightarrow F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) (-1)F_2 \rightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

La inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ [¡Verificarla!]

**Nota:** Si al resolver llegamos a un sistema incompatible significa que no existe la inversa de la matriz dada y la dada no es inversible, es una matriz singular

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es inversible pues al plantear $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ en la última ecuación, el rango de la matriz de coeficientes es 2, pero el de la matriz ampliada, para la 3er columna es 3, lo que nos da un sistema incompatible.

$$\boxed{\text{Una matriz cuadrada de } n \times n \text{ es inversible si y sólo sí su rango es } n}$$

**PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA**

Analizaremos ahora las propiedades que tienen las matrices inversas, en los casos que sea posible, está la demostración de la propiedad.
Para todas las propiedades supondremos $A, B, C$ y $D$ matrices cuadradas de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

**•La inversa es única**

Demostración: Sean $B$ y $C$ inversas de $A$, o sea que $A.B = B.A = I_n$ y $A.C = C.A = I_n$
Partimos de $A.B = I_n$ y multipliquemos por izquierda la igualdad:
$C.(A.B) = C.I_n = C$ ($I_n$ es elemento neutro para el producto de matrices)
$(C.A).B = C$ (propiedad asociativa del producto)
$I_n.B = C$ ($C$ es la inversa de $A$)
$B = C$ ($I_n$ neutro)

**• Si una matriz es inversible la inversa de su inversa es ella misma.**

Demostración: $A.B = I_n$ y $B.A = I_n$ entonces $B$ es la inversa para $A$ y $A$ es la inversa para $B$. Si notamos a $B$ como $A^{-1}$ resulta que $A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$

**• La inversa de una matriz multiplicada por un escalar cumple:** $(c.A)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$

Demostración: Sea $B = A^{-1}$ y pensemos a $A$ como filas y $B$ como columnas $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ y $B = (B^1 \quad B^2 \quad \ldots \quad B^n)$.

Como $A.B = I_n$ se tiene que:

Al efectuar $c.A$ tenemos: $c.A = \begin{pmatrix} cA_1 \\ cA_2 \\ \vdots \\ cA_n \end{pmatrix} (A_i).(B^j) = \begin{cases} 0 & si\ \ i \neq j \\ 1 & si\ \ i = j \end{cases}$ $con\ i = 1,2,\ldots,n$

veamos que $c^{-1}B = (c^{-1}B^1 \quad c^{-1}B^2 \quad \ldots \quad c^{-1}B^n)$ es la inversa de $c.A$.

Si efectuamos $((cA)_i).((c^{-1}B)^j) = \left(c(A_i)\right).\left(c^{-1}(B^j)\right) = c.c^{-1}(A_i).(B^j)$, pues en un producto escalar un factor constante puede salir del mismo. Pero:

$$(A_i).(B^j) = \begin{cases} 0 & si \;\; i \neq j \\ 1 & si \;\; i = j \end{cases}$$

Y como $c.c^{-1} = 1$ queda:

$$((cA)_i).((c^{-1}B)^j) = \begin{cases} 0 & si \;\; i \neq j \\ 1 & si \;\; i = j \end{cases}$$

Por lo tanto vale que $(c.A)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$

• **Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{D}$ son inversibles vale que $\boldsymbol{A.D}$ también lo es y además $(\boldsymbol{A.D})^{-1} = \boldsymbol{D^{-1}.A^{-1}}$**

Demostración: Por un lado, $(A.D).(A.D)^{-1} = I_n$, por definición de inversa.
Si al multiplicar $(A.D).D^{-1}.A^{-1}$ obtenemos la identidad, podemos afirmar que la inversa de $A.D$ es $D^{-1}.A^{-1}$. Es decir que $(A.D)^{-1} = D^{-1}.A^{-1}$,

$$(A.D).(D^{-1}.A^{-1}) = \quad A.D.D^{-1}.A^{-1}$$ por asociatividad

Por propiedad asociativa del producto de matrices:

$$= A.(D.D^{-1}).A^{-1} =$$

Por definición de inversa de $D$

$$A.I_n.A^{-1} =$$

Que, por ser $I_n$ el neutro para el producto de matrices:

$$A.A^{-1} = I_n$$

Es decir que, efectivamente, $(A.D)^{-1} = D^{-1}.A^{-1}$ y, como la inversa es única, vale la propiedad.

**Videos que pueden ayudarte con estos temas:**

Sistemas de ecuaciones equivalentes.

https://www.youtube.com/watch?v=A-CjGwpfR_c Sistemas de ecuaciones lineales 1

3.5 Sistemas con parámetros II (Con un solo parámetro)

https://www.youtube.com/watch?v=JQNiP8hVTSs

3.4 Sistemas con parámetros I (Con dos parámetros)

https://www.youtube.com/watch?v=PUJJ8BmDs5U

3.6 Algunos atajos en Sistemas de Ecuaciones

https://www.youtube.com/watch?v=qsuf2B49YuM&t=172s

**EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES**
**MATRIZ INVERSA Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

Si tenemos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas podemos representarlo como A.X= B con A$\in R^{nxn}$, X y B $\in R^{nx1}$.

Si A es inversible resulta que $A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B$ premultiplicando por la inversa de A

$\rightarrow$ $(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$ por asociatividad del producto de matrices

$\rightarrow$ $(I^{nxn}).X = A^{-1}.B$ por definición de inversa de una matriz

$\rightarrow$ $X = A^{-1}.B$ por elemento neutro del producto matricial

La expresión obtenida nos permite hallar X. $\boxed{X = A^{-1}.B}$

Si lo dicho anteriormente te resulta nuevo, relee páginas 4 y 5 del archivo "MÓDULO 1- SEL-SEGUNDA CLASE" que lo encuentras en la carpeta de la CLASE 2

**Ejemplo:**

Sea el sistema $\begin{cases} 2x-3y-5z=0 \\ x-y-2z=0 \\ -x+3y+5z=1 \end{cases}$.

a) Resolverlo por Gauss (tarea para el lector).

b) El sistema puede expresarse como $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

La matriz A de coeficientes del sistema es cuadrada y vale $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; su inversa (la obtuvimos en la tercera clase) es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Por ende $X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ x= 1; y= –1; z= 1 (compararlo con el resultado obtenido en a)

Una cuestión puede haber surgido:
¿Qué tan conveniente es obtener a *X* de este modo, donde hallar la inversa resultó ser más largo que resolver el sistema de ecuaciones?

La **ventaja** puede radicar en la necesidad de hallar la solución para varios sistemas con _igual matriz A_ y diferentes B (B, B', B'', …); cada solución (X, X', X'', …) se obtiene efectuando el producto de $A^{-1}$ por la matriz de términos independientes correspondiente.

Así para el ***nuevo*** sistema $\begin{cases} 2x-3y-5z=-3 \\ x-y-2z=2 \\ -x+3y+5z=-4 \end{cases}$ la solución es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ -16 \end{pmatrix}$

→ x= –7; y= 23; z= –16.

**ECUACIONES CON MATRICES**

Una ecuación que contiene matrices y su incógnita es una matriz se llama ecuación matricial.
Ya hemos resuelto algunas, por ejemplo, recientemente

A.X= B que al aplicar la inversa de A, que debe existir para que la ecuación tenga solución , resulta

$X = A^{-1}.B$

Para resolver una ecuación matricial, se deben aplicar las operaciones y propiedades de las matrices, vistas fundamentalmente en la clase 1.

Veamos algunos ejemplos:

1) Calcular la matriz $X \in R^{2x3}$ , si existe, que cumpla que $(4.X+B)^t = C$ Siendo

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Procederemos primero a despejar X , aplicando las operaciones y propiedades:
Como cualquier ecuación, se debe respetar la jerarquía de las operaciones, buscando siempre cual es la última operación u operador que se aplica.

En $(4.X+B)^t = C$ el último operador es la trasposición, para poder eliminarla del primer miembro, aplicamos la traspuesta miembro a miembro

$\left[(4.X+B)^t\right]^t = C^t$ la traspuesta de la traspuesta es la misma matriz

$4.X + B = C^t$ ahora para eliminar *B* del primer miembro, sumamos a ambos miembros la matriz opuesta de *B (-B)* , sabemos que para cualquier matriz existe su opuesta

| | |
|---|---|
| $(4.X+B)+(-B)=C^t+(-B)$ | aplicamos asociativa de la suma de matrices y la definición de resta de matrices |
| $4.X+\left(B+(-B)\right)=C^t-B$ | la suma de una matriz y su opuesta es la matriz nula N |
| $4.X+N=C^t-B$ | La matriz nula es la neutro en la suma de matrices |
| $4.X=C^t-B$ | Por último, para despejar la X debemos eliminar el escalar que la está multiplicando. Para ello multiplicamos, miembro a miembro, por su inverso multiplicativo. Y sabemos que el inverso multiplicativo de 4 es el $\frac{1}{4}$ . |
| $\frac{1}{4}.(\ 4.X)=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$ | aplicamos asociatividad mixta |
| $\left(\frac{1}{4}.4\right)X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$ | el producto de un número por su recíproco es 1 |
| $1.X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$ | por la propiedad de elemento unidad, resulta |
| $X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$ | |

Nota que en este ejemplo hemos especificado cada paso con la propiedad usada.

Ahora que logramos X, vamos a hacer las cuentas con las matrices $X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$

Primero la traspuesta de C $C^t=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$C^t-B=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}$ y por último multiplicamos por $\frac{1}{4}$

$$X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

La solución entonces es : $X=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$

Como cualquier ecuación, es posible verificarla

$$(4.X+B)^t=C \qquad \left(4.\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)^t=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 4 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)^t=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 4 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\mathrm{C}$$

La matriz X hallada cumple la ecuación , es la solución pedida

**Otro ejemplo:**

Hallar la matriz $X \ / \ X.A+C=X.B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 5 & -3 & 5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 5 & -3 & 4\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Analicemos primero el tamaño que debe tener *X*:

La matriz X está multiplicando a A y el producto sumado a C , como C es de 2x3, para poder sumarlas, X.A también debe ser de 2x3

$$\underbrace{X}_{mxn} \times \underbrace{A}_{3x3} = \underbrace{X.A}_{2x3}$$

*A* es de 3x3 resulta entonces que *X* debe tener 2 filas, igual que la cantidad de filas de *C*, y debe tener 3 columnas igual que la cantidad de filas de A (para que se puedan multiplicar)

La matriz buscada X debe ser de 2x3

$$\underbrace{X}_{2x3} \times \underbrace{A}_{3x3} = \underbrace{X.A}_{2x3}$$

Procedamos a resolver la ecuación:

$X.A+C=X.B$

Necesitamos que las dos apariciones de la incógnita estén en el mismo miembro, sumamos los opuestos. Y usamos propiedad asociativa de la suma

$X.A+C+(-C)+(-X.B)=X.B+(-X.B)+(-C)$

$X.A+N+(-X.B)=N+(-C)$

la suma de una matriz y su opuesta es la matriz nula, conmutando y sabiendo que la matriz nula es elemento neutro en la suma, resulta:

$X.A+(-X.B)=-C$

$X.(A+(-B))=-C$

Aplicamos distributividad del producto de matrices con respecto a la suma. Como si sacáramos la matriz X de factor común

$X.(A-B)=-C$

Si la matriz A-B es inversible, multiplicamos a derecha por su inversa

$X.(A-B).(A-B)^{-1}=-C.(A-B)^{-1}$

asociando, usando la matriz Identidad, resulta:

$X.I_3=-C.(A-B)^{-1}$

$I_3$ es el neutro para el producto de matrices

$\rightarrow \quad X=-C.(A-B)^{-1}$ siempre que $\exists \ (A-B)^{-1}$

Realicemos las cuentas: $A-B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&2\\5&-3&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&0\\1&3&2\\5&-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Buscamos la inversa de A-B

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}f_1\\f_2\\f_3\end{array}$$ el único cero que falta es en el elemento 1,3

$\rightarrow \quad f_1-f_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&1&0&-1\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$ $\rightarrow$Multiplicamos las dos primeras filas por -1 y resulta:

$\begin{array}{c}-f_1\\-f_2\\ \ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$ entonces $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Observa que la matriz A-B es igual a su inversa.

Ahora premultiplicamos por – C (la opuesta de C)

$X=-C(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&1\\3&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}-2&4&3\\-3&1&3\end{pmatrix}$

Verifica que la matriz X obtenida, cumple la ecuación y es la solución pedida.

**DETERMINANTES**

No obstante ser el concepto de determinantes uno de los primeros en surgir en el Algebra Lineal lo abordaremos instrumentalmente pues su uso se relaciona con la *inversa de una matriz*, *la solución única de un sistema de ecuaciones lineales de nxn*, *la independencia y dependencia lineal de vectores* y a la *obtención de autovalores* (tema que queda más allá de nuestro curso, Y abordarán en Álgebra II).

El determinante se define para **matrices cuadradas de orden n y n** y su resultado es un número que, en nuestro caso es un número real pues sólo trabajaremos con matrices de coeficientes reales. El determinante es una función que tiene como conjunto Dominio al conjunto de las matrices cuadradas y como conjunto de llegada, al conjunto de los números reales.

Si la matriz es de orden 1x1: su determinante coincide con su único elemento

$A=(a_{11}) \rightarrow \det(A)=|a_{11}|=a_{11}$

Es conocida la expresión para matrices 2x2; si A es la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ su determinante se define como $a_{11}.a_{22} - a_{12}.\, a_{21}$:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.\, a_{22}-a_{21}.\, a_{12}$$

Deténgase un instante sobre la notación: o antecedemos **"det"** a la matriz o le colocamos unas barras –tipo valor absoluto- a la matriz en vez del corchete –o paréntesis usual. Es decir $[A]$es una matriz y $|A|$ o det (A) es un escalar (un número).

**Ejemplos:**

*a)* $\det\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}=(-5).(-4)-(-7).3=20+21=41$.

*b)* $\det\begin{bmatrix} t-2 & 2 \\ 5t & 6 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 5t & 6 \end{vmatrix}=6.(t-2)-5t.2=6t-12-10t=-4t-12$

La obtención del valor de un determinante puede hacerse de ***tres maneras diferentes***:
Por aplicación de *propiedades*.
A través del *desarrollo de Laplace*.
Un *mix* (mezcla o combinación) de propiedades y el desarrollo de Laplace según nos sea más conveniente.

**PROPIEDADES del DETERMINANTE**

Como hemos dicho, el determinante de una matriz cuadrada real es una operación que involucra a todos los elementos de la matriz y que da por resultado un número real.
Si A es una matriz que pertenece a $R^{nxn}$, definimos como determinante de orden n a una aplicación D: $R^{nxn} \rightarrow R$, que cumple con <u>*ciertas propiedades*</u>. Obviamente puede haber muchas aplicaciones que operando sobre una matriz cuadrada den por resultado un escalar.
Pero además el determinante cumple con las siguientes propiedades que están expresadas sobre las filas, pero se mantienen si las definimos sobre las columnas.

**1)** Si una matriz tiene una fila de ceros el determinante es nulo, $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix} = 0$

**2)** Si una matriz tiene una fila de la cual se puede extraer un número que es factor común de todos los elementos de la fila, el determinante de dicha matriz es igual al producto de dicho factor común por el determinante de la matriz en la cual la fila anterior está simplificada extrayéndole dicho factor común. En el caso que nos ocupa el factor común $\alpha$ que está multiplicando a toda la fila i sale del determinante como un escalar que lo multiplica.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha.a_{i,1} & \alpha.a_{i,2} & . & . & \alpha.a_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix} = \alpha.\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i,1} & a_{i,2} & . & . & a_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

Lógicamente esto puede ocurrir con todas las filas que pueden tener factores comunes diferentes. Luego se extraen todos, se simplifican las filas y el determinante es el producto de todos los factores por el determinante de la matriz simplificada.

**Ejemplo:**

det $(A)$= $\begin{vmatrix} -20 & 2 & -6 \\ -25\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 15\sqrt{2} \\ -30 & -8 & -9 \end{vmatrix} = \sqrt{2}.\begin{vmatrix} -20 & 2 & -6 \\ -25 & 10 & 15 \\ -30 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ ya que……………………………………….

det $(A) = -5.\sqrt{2}.\begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ ya que ……………………………………………………………….

det $(A) = -5.\sqrt{2}.5.\begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = -25.\sqrt{2}.\begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ pues ……………………………………….

det $(A) = -25.\sqrt{2}.2.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = -50.\sqrt{2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ debido a que …………………………..

det $(A) = -50.\sqrt{2}.3.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -150.\sqrt{2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & -3 \end{vmatrix}$ pues …………………………………..

**3)** Observar que si todas las filas de la matriz tienen el mismo factor común, entonces el determinante es igual a ese factor común multiplicado n veces por sí mismo (o sea elevado a la n) por el determinante de la matriz simplificada. O sea $\det(k.A) = k^n.\det A$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

Esta propiedad nos dice que : $\det(3.A) = 3^3.\det A$ El 3 del exponente se debe a que la matriz es de 3x3, tiene 3 filas y 3 columnas

**4)** Si en una fila de una matriz, sus elementos pueden ser expresados como suma de otros dos números, el determinante de la matriz resulta igual a la suma de los determinantes de dos matrices. En ambas todas las filas son iguales, salvo aquella cuyos elementos pueden expresarse como suma de otros dos números. En la primera matriz se escribe uno de los conjuntos de números que forman esa fila especial y en la segunda se escribe el otro conjunto.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i,1}+b_{i,1} & a_{i,2}+b_{i,2} & . & . & a_{i,N}+b_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i,1} & a_{i,2} & . & . & a_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ b_{i,1} & b_{i,2} & . & . & b_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

En lo señalado más arriba, en la fila i puede considerarse que cada elemento puede expresarse como la suma de otros dos. De ser eso así, es posible separar el determinante en dos, uno conteniendo la fila i de todos los elementos $a_{i,j}; j = 1,...,N$ y el otro conteniendo la fila i de todos los elementos $b_{i,j}; j = 1,...,N$ .

Aplicarlo para obtener $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3-\pi & -1+2\pi & 2+\pi \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

**5)** Si una matriz B se obtiene a partir de una matriz A intercambiando dos de sus filas, se tiene $|\mathrm{B}| = -|\mathrm{A}|$ , o sea los determinantes son números opuestos.

Veámoslo en matrices de 2x2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ se cumple que

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

$$|B| = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = c.b - d.a = b.c - a.d = -(ad - bc)$$

Las dos matrices tienen determinantes opuestos

**6) Si una matriz tiene dos filas iguales su determinante es cero.**

Supongamos que tenemos la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$ y hallamos su determinante $|\mathrm{A}|$

Ahora permutamos sus filas 1 y 2 y la llamamos B (aunque es similar a A)

$$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$ y hallamos su determinante $|\mathrm{B}|$

Por la propiedad anterior , hemos permutado dos filas por lo tanto

$|\mathrm{B}|=-|\mathrm{A}| \rightarrow |\mathrm{B}|+|\mathrm{A}|=0$

pero la matriz B=A (solamente la llamamos diferente para indicar que habíamos permutado las filas)

$|\mathrm{A}|+|\mathrm{A}|=2|\mathrm{A}|=0 \rightarrow |\mathrm{A}|=0$ que es lo que se quería demostrar

**7) El determinante de una matriz triangular superior, inferior o diagonal es el producto de los elementos de la diagonal principal.**

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}; \det(A)=a.e.h.j$$

**8)** $|\mathrm{A}|=|\mathrm{A}^{\mathrm{t}}|$ **; el determinante de la transpuesta de A es igual al determinante de A.**

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a.d-b.c$$

$$|A^t|=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=a.d-c.b$$

**9) Si B se obtiene a partir de A sumándole a una fila de A un múltiplo de otra fila de A el determinante no cambia.**

Sea

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz B se obtiene a partir de la matriz A sumándole a la primera fila de A su segunda fila multiplicada por un escalar *k*. Con $k \in$ a R

Si queremos hallar el det(B) y tenemos en cuanta las propiedades 4), 2) y 6) (en ese orden) resulta:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k.0 =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|$$

El determinante de la matriz que está multiplicada por k es 0 porque tiene dos filas iguales.
Por lo tanto det(B) = det(A) + 0 = det(A)

**10)** $|A.B| = |A||B|$**; el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes individuales.**

Esta propiedad es solamente enunciada pero una demostración de la misma (basada en el uso de matrices elementales) puede ser analizada en el libro "Álgebra Lineal, una introducción moderna de D. Poole".

**11)** Si una matriz tiene filas o columnas proporcionales, su determinante es 0

Calcularemos $|P| = \begin{vmatrix} 3a & b & -a \\ 3d & e & -d \\ 3g & h & -g \end{vmatrix}$ , la columna 1 y 3 son proporcionales $C_1 = -3C_3$

$|P| = -3 \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix}$ por aplicación de la propiedad de extraer un factor en la columna 1 y 3.

Pero ahora resulta que tiene dos columnas iguales, entonces su determinante es 0

$|P| = -3.0 = 0$

**12)** Determinante de la matriz inversa.

Usando las propiedades vamos a probar que si una matriz A tiene inversa –y por ende su determinante es distinto de cero– vale la fórmula:

$$\boxed{\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}}$$

Si A tiene inversa, entonces cumple $A.A^{-1} = I \rightarrow \left|A.A^{-1}\right| = \left|I_n\right|$

Por la propiedad del determinante de un producto de matrices: $\left|A.A^{-1}\right| = |A| . \left|A^{-1}\right|$

El determinante de la identidad $\left|I_n\right|$ es uno pues se trata de una matriz diagonal con todos unos.

Luego $|A| . \left|A^{-1}\right| = 1$, lo cual nos indica que el determinante de una matriz y el de su inversa son inversos multiplicativos (ninguno de esos determinantes puede ser nulo).

Por lo tanto $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.

Esta fórmula deducida, nos permite afirmar que una matriz es inversible, si su deteminante es distinto de 0.

**UNA "NO" PROPIEDAD**

El determinante de la suma de matrices no es necesariamente igual a la suma de los determinantes.

Si A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ su determinante vale 1 , Si B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ su determinante vale 1

Ahora A+B=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante vale cero

Luego $|A| + |B| \neq |A+B|$

*Algunas de las propiedades de esta lista son redundantes porque pueden ser demostradas a partir de otras de la misma lista, pero lo que hemos tratado de hacer es resumir todas las propiedades que cumplen los determinantes que hacen además que la definición de los mismos sea única.*

**Ejemplo:**

Veamos cómo podemos usufructuar de las propiedades para obtener el determinante de una matriz.

Hallaremos el det(T) = det($\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Si hacemos $f_1.(-3) + f_2 \rightarrow f_2$ y $f_1 + f_3 \rightarrow f_3$, resulta que el determinante no cambia

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Si intercambiamos $f_4$ y $f_2$ para obtener un 1 en la posición $t_{22}$ cambia el determinante, es el opuesto:

$$\det(T) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$ y efectuando $f_2.(-3) + f_3 \to f_2$ y $f_2.6 + f_4 \to f_4$

$$\det(T) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 13 \end{vmatrix}$$ ; si realizamos $f_3.\dfrac{11}{4} + f_4 \to f_4$ resulta

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{19}{4} \end{vmatrix} = -1.1.(-4).\frac{19}{4} = 19$$ pues hemos obtenido una matriz triangular superior.

**Videos de la cátedra:**

Determinante y matriz inversa
https://youtu.be/oZ_FryBrnLo

Propiedades del determinante
https://youtu.be/w9mth1pESos

De ejercicio de inversa y propiedades del determinante:
https://www.youtube.com/watch?v=bAmP0mMXyfA

## CÁLCULO DE DETERMINANTES

## MENOR COMPLEMENTARIO

Dada A una matriz cuadrada de orden n, definimos ***menor complementario*** $M_{ij}$ de un elemento $a_{ij}$ de A como el determinante que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j donde se encuentra dicho elemento $a_{ij}$.

**Ejemplo:**

$Si\ A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ obtenemos los nueve menores complementarios, uno por cada de sus elementos:

$M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5+6=1$ ya que hemos suprimido la fila 1 y la columna 1 como muestra el esquema:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0-42=-42$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 0+35=35$ pues se ha eliminado respectivamente:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siguiendo,

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-2=0$, $M_{22} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -4+14=10$, $M_{23} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 4-14=-10$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 12-10=2$, $M_{32} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -24-0=-24$ y $M_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 20-0=20$.

Si B = $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 9 & -2 \\ 11 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & -0{,}4 & 6 \\ 7 & -1 & -9 & 1 \end{bmatrix}$ hay 16 menores complementarios; $M_{23}$ es $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ –que por ahora no tenemos su resultado; - (1)-

**ADJUNTO O COFACTOR DE UN ELEMENTO**

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se define el **adjunto o cofactor** de un elemento $a_{ij}$ de A como el número real

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}}$$

Para nuestra matriz A tenemos:

$A_{22} = (-1)^{2+2}.\ M_{22} = 1.\ 10 = 10$;
$A_{32} = (-1)^{3+2}.\ M_{32} = -1.\ (-24) = 24$,
y así con los otros 7 cofactores.

**Comentarios**

**a)** Al cofactor le “antepone” “**un uno”** o **“un menos uno”** al menor complementario de acuerdo a cual posición ocupa en la matriz. Por ejemplo en una matriz 3x3 los signos que se multiplican a cada menor complementario son:

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

**b)** El resultado puede ser positivo, negativo o cero. Que los ejemplificados fueran positivos es una coincidencia.

## REGLA DE LAPLACE O DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA.

Si A es una matriz cuadrada de orden n, se define su **determinante** como la suma del producto de cada uno de los elementos de una línea cualquiera elegida de la matriz por su correspondiente **adjunto o cofactor**. La línea puede ser una **fila** o una **columna**.

Si A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ y, por ejemplo, desarrollamos por la columna 2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{12}.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Det(A) = $a_{12}.A_{12} + a_{22}.A_{22} + a_{32}.A_{32}$

**Ejemplo:**

Regresemos a nuestra matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y hallemos su determinante.

Primero hagámoslo por la fila 2 y luego por la columna 3 para visualizar la coincidencia de ambos resultados y analizar si en alguno de los dos casos tuvimos alguna ventaja operativa.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ \boxed{0 \quad -5 \quad 6} \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = 0.\ (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-5).\ (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 6.\ (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$$

Det ( A) = 0 – 5.(–4 + 14) –6 . (4 – 14) = –50 +60 = 10.
Usando la tercera columna:

$$|A| = -2.\ (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 6.\ (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 1.\ (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A|$ =–2. 35 – 6. (–10) + 1. 20 = –70 + 60 + 20 = 10.

**Comentarios:**

1) Si una columna –o fila– tiene algún o algunos ceros es más sencillo desarrollar por allí pues el término correspondiente se anula sin importar el valor del cofactor, y sin necesidad de calcularlo.

2) En la página 2 –(1)– debíamos el valor $M_{23}$ que era $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ y que como hemos visto vale 10.

3) Si tenemos una matriz de orden 4 el determinante se consigue a través de cuatro sumandos que involucran determinantes de orden 3 que como hemos visto podemos obtener.
Para una matriz de 5x5 se precisarían hallar 5 determinantes de 4x4 que por lo antedicho puede alcanzarse –a pesar de lo engorroso de las cuentas- y así siguiendo para cualquier matriz de orden n.

4) Si una matriz cuadrada es triangular superior, triangular inferior o diagonal su determinante resulta tener una expresión muy sencilla.

Obtenerla si $T_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$, $T_i = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

5) Se aconseja no utilizar la regla de Sarrus pues la misma es válida solamente para determinantes de orden 3 (si no la conoce mejor).

**Combinación de la regla de Laplace y Propiedades de determinante (Mix)**

Podemos ir alternando el uso de las dos herramientas ya abordadas.
Recalculemos el determinante anterior para mostrar la técnica.

$$\det(T) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ a la fila 2 le restamos 3 veces la fila 1 y a la fila 3 le sumamos la fil 1 , al hacer esto, el determinante no cambia.

y luego desarrollamos por la columna 1: $\det(T) = 1.\begin{vmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

con $t_{31}=1$ y a través de columnas vamos a obtener dos ceros adicionales.

$C_1.(-1) + C_2 \rightarrow C_2$, $C_1.(-2) + C_3 \rightarrow C_3$: $\det(T)= \begin{vmatrix} -6 & 11 & 13 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

y desarrollando por la tercera fila

$$\det(T) = 1.\ (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = (-33 + 52) = 19$$

**Obtención de la matriz inversa por la Adjunta**

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{nxn}$, llamemos $M_{ij}$ a la matriz (n–1) x(n–1) que resulta de eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. Podemos hallar el determinante de $M_{ij}$, dado que es una matriz cuadrada; dicho determinante se lo llama **menor** de $a_{ij}$.

Se llama cofactor $A_{ij}$ de $a_{ij}$ a la siguiente expresión = $(-1)^{i+j}.\det(M_{ij})$ (o sea el producto del menor por (–1) elevado a la suma de los índices de la fila y la columna eliminadas)

Se denomina ***matriz de cofactores*** a la matriz calculada por la siguiente expresión:

$$C_A = \left[\ (-1)^{i+j}\left|M_{i,j}\right|\ \right]_{1\le i\le N, 1\le j\le N}$$

La adjunta de una matriz cuadrada A es la matriz de cofactores transpuesta.

$$\mathrm{Adj}(A) = \left(C_A\right)^t$$

La adjunta nos habilita a conseguir la matriz inversa de una matriz A pues:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)$$

**Ejemplo**

Afiancemos todo lo visto para $U= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det(U) = \det\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-10+2) = 8$$

La matriz de cofactores es $C_U = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ y la $Adj(U) = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$U^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{8} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{2}{8} & -\frac{4}{8} & \frac{6}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$; puede comprobarse que $U.U^{-1} = I$.

Videos de la cátedra:

Determinantes. Cálculo y propiedades
https://youtu.be/2V7coNss5H4

Ejercicios de Inversibilidad de matrices y uso de determinantes
https://www.youtube.com/watch?v=bAmP0mMXyfA