- **Números complejos**
  - Definición:
    - Un número complejo es un par ordenado de números reales
      $$z = (a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$
    - El conjunto de los números complejos es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales, que denotamos $\mathbb{C}$, es decir
      $\mathbb{C} = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{R}\}$ cuyos pares están sometidos a las siguientes definiciones de suma y producto de números complejos: $\forall Z_1 = (a_1, b_1), Z_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$
      1. $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2) \in \mathbb{C}$ (suma de complejos)
      2. $Z_1 . Z_2 = (a_1 . a_2 - b_1 . b_2,\ a_1 . b_2 + a_2 . b_1) \in \mathbb{C}$ (producto de complejos)
  - Notación: $Z = (a, b) \in \mathbb{C}$
    - a se denomina parte real o componente real de Z
      $a = Re(Z) \in \mathbb{R}$
    - b se denomina parte imaginaria o componente imaginaria de Z
      $b = Img(Z) \in \mathbb{R}$
  - Definición igualdad de números complejos:
    - Sean $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(Z_1) = Re(Z_2) \\ Img(Z_1) = Img(Z_2) \end{cases}$
  - Observación:
    $Z \in \mathbb{C}$
    - $Z . Z = Z^2$
    - $Z . Z^2 = Z^3$

    $Z = (a, b) \in \mathbb{C}$
    - $Z^2 = (a, b) . (a, b)$
    - $Z^2 = (a^2 - b^2, 2ab)$
  - Definición:
    - $Z \in \mathbb{C}$ es un complejo real $\Leftrightarrow Img(Z) = 0$ (luego $Z = (a, 0)$ es complejo real)
    - $Z \in \mathbb{C}$ es un complejo imaginario o imaginario puro $\Leftrightarrow Re(Z) = 0$ (luego $Z = (0, b)$ es complejo imaginario)
  - Representación gráfica: dado que un número complejo es un par ordenado de números reales se lo representa mediante un punto en el plano. Para ello usamos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales con igual unidad de medida en ambos ejes
    - Eje horizontal (abscisas)⇒eje real $(a, 0)$
    - Eje vertical (ordenadas)⇒eje imaginario $(0, b)$
  - Propiedades de la suma y producto de los números complejos(c/demo)
    - Suma:
      1. $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$ (conmutativa)
      2. $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}, Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3$ (asociativa)
      3. $\exists!\, e = (0,0) \in \mathbb{C}: \forall Z \in \mathbb{C}, Z + e = e + Z = Z$ (neutro aditivo)
      4. $\forall Z = (a, b) \in \mathbb{C}, \exists Z' = (a', b') \in \mathbb{C}: Z + Z' = Z' + Z = e$ (inverso aditivo)

- Producto:
  5. $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, Z_1.Z_2 = Z_2.Z_1$ (conmutativa)
  6. $\forall\, Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}, Z_1.(Z_2.Z_3) = (Z_1.Z_2).Z_3$ (asociativa)
  7. $\exists!\, u = (1,0) \in \mathbb{C}: \forall Z \in \mathbb{C}, Z.u = u.Z = Z$ (neutro multiplicativo)
  8. $\forall Z = (a,b) \in \mathbb{C}, Z \neq (0,0), \exists Z'' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}: Z.Z'' = Z''.Z = u$ (inverso multiplicativo)
- Leyes distributivas:
  9. $\forall\, Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}, Z_1.(Z_2 + Z_3) = Z_1.Z_2 + Z_1.Z_3$
     $(Z_1 + Z_2).Z_3 = Z_1Z_3 + Z_2.Z_3$

- Definición:
  - $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, Z_1 - Z_2 = Z_2 + (-Z_1)$ resta
  - $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, Z_2 \neq (0,0), \frac{Z_1}{Z_2} = Z_1.{Z_2}^{-1}$ cociente
- Teorema(c/demo): todo número complejo $Z = (a,b)$ puede expresarse como $a + bi$
- Potencias de la unidad imaginaria(c/demo):
  - $i^0 = 1$
  - $i^1 = i$
  - $i^2 = -1$
  - $i^3 = -i$
  - $i^n = i^R$

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \hline R & c \end{array}$$

- Conjugado de un número complejo
  - Definición: sea $Z = (a,b) \in \mathbb{C}$, se define el conjugado de Z y se denota $\overline{Z}$, al complejo $\overline{Z} = (a,-b) \in \mathbb{C}$. Es el simétrico de Z respecto al eje X
  - Propiedades(c/demo):
    1. $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, \overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
    2. $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, \overline{Z_1.Z_2} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$
    3. $\forall Z \in \mathbb{C}, Z + \overline{Z} = 2Re(Z)$
    4. $\forall Z \in \mathbb{C}, Z - \overline{Z} = 2Img(Z)i$
    5. $\forall Z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{Z}} = Z$
    6. $\forall Z \in \mathbb{C}, \overline{(-Z)} = -\overline{Z}$
    7. $\forall Z \in \mathbb{C}, Z \neq (0,0), Z \neq \theta, Z \neq 0, \overline{Z^{-1}} = \overline{Z}^{-1}$
    8. $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C},\ Z_2 \neq (0,0), \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$
    9. $\forall Z \in \mathbb{C}, Z.\overline{Z} \in \mathbb{R}, Z.\overline{Z} \geq 0 \ \wedge\ (Z.\overline{Z} = 0 \Leftrightarrow Z = 0)$
  - Lema(c/demo):
    1. $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}, (Z_1, Z_2)^{-1} = {Z_1}^{-1}.{Z_2}^{-1}$
    2. $\forall\, Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C},\ Z_2, Z_3 \neq (0,0)\ \dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{Z_1.Z_3}{Z_2.Z_3}$

- Módulo de un complejo
  - Definición: el módulo de $Z \in \mathbb{C}$ y denotamos $\|Z\|$ al número real que se obtiene como la raíz cuadrada no negativa de $Z.\overline{Z}$
  - Notación: $Z \in \mathbb{C} \quad \|Z\| = +\sqrt{Z.\overline{Z}}$
  - El módulo de $Z \in \mathbb{C}$ está bien definido puesto que $Z.\overline{Z}$ es real y no negativo. Si $Z = (a,b) \quad \|Z\| = \sqrt{Z.\overline{Z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
  - Geométricamente, el módulo de Z representa la longitud del segmento orientado $\overrightarrow{OZ}$
  - Propiedades(c/demo)
    1. $\forall Z \in \mathbb{C} \quad |Re(Z)| \leq \|Z\| \quad |Img(Z)| \leq \|Z\|$
    2. $\forall Z \in \mathbb{C} \quad \|Z\| \leq |Re(Z)| + |Img(Z)|$
    3. $\forall Z \in \mathbb{C} \quad \|Z\| = \|\overline{Z}\| = \|-Z\|$
    4. $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C} \quad \|Z_1 . Z_2\| = \|Z_1\| . \|Z_2\|$
    5. $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\,,\ Z_2 \neq (0,0) \quad \left\|\frac{Z_1}{Z_2}\right\| = \frac{\|Z_1\|}{\|Z_2\|}$
    6. $\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C} \ \|Z_1 + Z_2\| = \|Z_1\| + \|Z_2\|$
    7. $\forall Z \in \mathbb{C} \ \|Z\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|Z\| = 0 \ si \ Z = (0,0)$
- Argumento de un complejo:
  - Definición: Sea $Z \in \mathbb{C}$, $Z \neq \theta$, se define argumento de Z al ángulo que forma el radio vector de Z con la dirección positiva del eje X, y lo notaremos $\arg(Z)$
  - Notación: $\arg(Z) = \varphi \in \mathbb{R} \quad \|Z\| = \rho \quad Z = (a,b) \neq \theta \quad cos\varphi = {}^{a}/_{\rho}$

    $sen\varphi = {}^{b}/_{\rho}$

    Como tanto el seno como el coseno son funciones periódicas de periodo 2π, entonces el argumento de un complejo no queda unívocamente determinado
  - Argumento principal de un número complejo: Sea $Z = (a,b) \in \mathbb{C}$, $Z \neq \theta$, se define argumento principal de Z al argumento de Z que cumple con:

    $$\begin{cases} cos\varphi = {}^{a}/_{\rho} \\ sen\varphi = {}^{b}/_{\rho} \end{cases} \wedge \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad \varphi = Arg(Z)$$
  - Teorema(c/demo): todo complejo $Z = (a,b) \neq (0,0)$ puede expresarse en la forma $Z = \rho(cos\varphi + i\ sen\varphi)$ llamada forma polar o trigonométrica
  - Observación: $e^{i\varphi} = cos\varphi + i\ sen\varphi$ entonces Z se puede expresar como $Z = \rho e^{i\varphi}$ que se denomina forma exponencial de Z
- Igualdad de complejos en forma polar:
  - Definición: sean $Z_1 = \rho_1(cos\varphi_1 + i\ sen\varphi_1)$ y $Z_2 = \rho_2(cos\varphi_2 + i\ sen\varphi_2)$

    $$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Operaciones con números en la forma polar:
  Sean $Z_1 = \rho_1(cos\varphi_1 + i\ sen\varphi_1)$ y $Z_2 = \rho_2(cos\varphi_2 + i\ sen\varphi_2)$
  - Producto(c/demo):
  $$Z_1.Z_2 = \rho_1.\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ sen\ (\varphi_1 + \varphi_2)] = \rho_1.\rho_2.e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
  - Cociente(c/demo):
  $$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ sen\ (\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2}.e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$
  - Potencia(c/demo): sea $Z = \rho(cos\varphi + i\ sen\varphi)$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces:
  $$Z^n = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\ sen(n\varphi)]$$
  - Radicación(c/demo):

- **Vectores**
  - Definición: un vector de $\mathbb{R}^n$ es una n-upla ordenada de números reales
  $$\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$
  - Igualdad: sean $A = (a_1, a_2, \dots, a_n),\ B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$
  $$A = B \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad a_i = b_i$$
  - Suma de vectores:
    - Definición: sean $A = (a_1, a_2, \dots, a_n),\ B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ se define la suma de vectores de la siguiente manera:
    $$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$
    - Propiedades(c/demo):
      1. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n \quad A + B = B + A$
      2. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n \quad (A + B) + C = A + (B + C)$
      3. $\exists \theta = (0,0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : \forall A \in \mathbb{R}^n, A + \theta = \theta + A = A$
      4. $\forall A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \exists A' = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$
      $A + A' = A' + A = \theta, \quad A' = -A$
  - Producto de un escalar por un vector:
    - Definición: sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se define el producto de un escalar por un vector de la siguiente manera:
    $$\lambda A = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \in \mathbb{R}^n$$
    - Observaciones:
      1. $\forall A \in \mathbb{R}^n,\ 1A = A$
      2. $\forall A \in \mathbb{R}^n, -A = (-1)A$
      3. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^n,\ \lambda A = \theta \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee A = \theta$
    - Propiedades(c/demo):
      1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^n,\ \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$
      2. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}^n,\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
      3. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

- Diferencia de vectores:
  - Definición: $\forall A, B \in \mathbb{R}^n$ se define la diferencia de vectores de la siguiente manera:

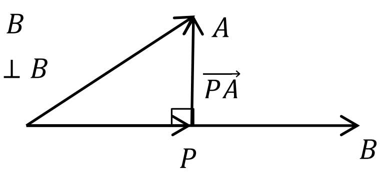
$$A - B = A + (-B)$$

- Gráficamente, la suma de vectores $A + B$ es la diagonal del paralelogramo con origen en el origen de coordenadas. El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene origen en A y extremo en B, y se lo puede calcular como $\overrightarrow{AB} = B - A$. Observaciones:
  - Si $A = \theta \in \mathbb{R}^n,\ B \in \mathbb{R}^n \quad \overrightarrow{\theta B} = B - \theta = B$
  - $\forall A, B \in \mathbb{R}^n \quad \overrightarrow{AB} = B - A = -(A - B) = -\overrightarrow{AB}$
- Producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^n$:
  - Definición: sean $A = (a_1, a_2, \dots, a_n),\ B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ se define el producto escalar de vectores como la suma de los productos de las respectivas componentes. Es decir:

$$A.B = \sum_{i=1}^{n} a_i . b_i = a_1 . b_1 + a_2 . b_2 + \cdots + a_n . b_n$$

  - Propiedades(c/demo):
    1. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad AB = BA$
    2. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n,\ (A + B)C = AC + BC$
    3. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
    4. $\forall A \in \mathbb{R}^n\ A.A \geq 0,\ A.A = 0 \Leftrightarrow A = \theta$
- Norma de un vector:
  - Definición: dado $A \in \mathbb{R}^n$ se define la norma de A (denotamos $\|A\|$), a la raíz cuadrada no negativa del producto escalar de A por el mismo. $\|A\| = \sqrt{A.A}$
  - Observaciones:
    1. La norma de un vector está bien definida pues $\forall A \in \mathbb{R}^n$, el producto de $A.A \geq 0$ por la propiedad 4. Por lo tanto tiene sentido calcular su raíz cuadrada
    2. La norma es igual a la longitud del vector. Por ejemplo en $\mathbb{R}^2$ sea $A = (a_1, a_2), \quad \|A\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$
    3. $\|A\| = 1$ es un vector unitario
    4. $\|A\|^2 = A.A, \qquad A.A \neq A^2$
  - Propiedades(c/demo):
    1. $\forall A \in \mathbb{R}^n,\ \|A\| \geq 0,\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \theta$
    2. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^n \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
    3. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

- Vectores paralelos:
  - Definición: dados $A, B \in \mathbb{R}^n$, $A \parallel B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$: $A = \lambda B$
  - Observaciones:
    1. El único vector paralelo al nulo, es el mismo
    2. Si A, B son distintos del nulo y son paralelos, decimos que tienen la misma dirección. Si λ es positivo, tienen el mismo sentido. Si λ es negativo, tienen sentido opuesto
    3. $A \parallel A$
    4. $A \parallel B,\ B \parallel C \Rightarrow A \parallel C$
- Vectores perpendiculares:
  - Definición: sean $A, B \in \mathbb{R}^n$, $A \perp B \Leftrightarrow A.B = 0$
  - Observación: $\forall A \in \mathbb{R}^n$, $A \perp \theta$ pues $A.\theta = 0$
- Vector unitario (o versor) en la dirección de A:
  - Definición: sea $A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq \theta$, llamaremos vector unitario o versor en la dirección de A al vector que denotamos $E_A \in \mathbb{R}^n$ tal que:
    1. $E_A \parallel A$
    2. $\|E_A\| = 1$
  - Obtención de E_A(c/demo): $E_A = \pm \frac{1}{\|A\|} A$
- Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$(c/demo):
  - Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$ $\quad A \perp B \Leftrightarrow \|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$
- Proyección vectorial ortogonal de un vector sobre otro:
  - Definición: sean $A, B \in \mathbb{R}^n$, $B \neq 0$ se define la proyección vectorial ortogonal de A sobre B al vector $P \in \mathbb{R}^n$ que satisface:
    1. $P \parallel B$
    2. $\overrightarrow{PA} \perp B$



  - Obtención de P(c/demo): $P_{A,B} = \left(\frac{A.B}{\|B\|^2}\right) B$
  - Observación:
    1. Si $A = \theta$ entonces $P = \theta$
    2. Si $A \perp B$ entonces $A.B = 0$ por lo tanto $P = \theta$
- Proyección escalar de A sobre B:
  - Definición: es la norma de la proyección vectorial ortogonal de A sobre B
  - Obtención(c/demo): $\left\|P_{A,B}\right\| = \frac{|A.B|}{\|B\|}$

- Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$:
  - Definición: sean $A, B \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia entre A y B como la norma del vector $\overrightarrow{AB}$

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\|$$

  - Propiedades(c/demo):
    1. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n,\ d(A,B) \geq 0, \quad [d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B]$
    2. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n,\ d(A,B) = d(B,A)$
    3. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n,\ d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$
- Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^n$:
  - Definición: sea $A, B \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$, el ángulo entre A y B (denotado $\sphericalangle(A,B)$) como el número real φ que satisface:
    1. $0 \leq \varphi \leq \pi$
    2. $cos\varphi = \frac{A.B}{\|A\|.\|B\|}$
  - Observaciones(c/demo):
    1. Sea $A, B \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$ si $A \perp B \Rightarrow \sphericalangle(A,B) = \pi/2$
    2. Sea $A, B \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$ si $A \parallel B \Rightarrow \sphericalangle(A,B) = 0$ ó π
- Producto vectorial (sólo en $\mathbb{R}^3$):
  - Definición: sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, el producto vectorial entre A y B (en ese orden) y se denota AXB al siguiente vector de $\mathbb{R}^3$:

$$AXB = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \in \mathbb{R}^3$$

  - Regla práctica:

$$a_3b_1 - a_1b_3$$

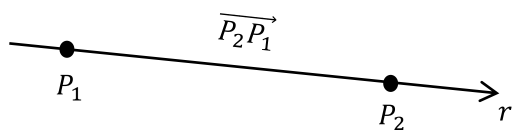
$$\begin{array}{ccccc} \cancel{a_1} & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ \cancel{b_1} & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$a_2b_3 - a_3b_2 \qquad a_1b_2 - a_2b_1$$

  - Propiedades(c/demo):
    1. $\forall A, B \in \mathbb{R}^3, AXB = -(BXA)$
    2. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda A)XB = AX(\lambda B) = \lambda(AXB)$
    3. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3,\ \ AX(B + C) = AXB + AXC$
       $(A + B)XC = AXC + BXC$
    4. $\forall A, B \in \mathbb{R}^3, AXB \perp A\ \wedge\ AXB \perp B$
    5. $\forall A, B \in \mathbb{R}^3, \|AXB\|^2 = \|A\|^2.\|B\|^2 - (A.B)^2$
    6. $\forall A, B \in \mathbb{R}^3, AXB = \theta \Leftrightarrow A \parallel B\ \vee\ A = \theta\ \vee\ B = \theta$
    7. $\forall A, B \in \mathbb{R}^3 - \{\theta\}, \|AXB\| = \|A\|.\|B\|.sen\sphericalangle(A,B)$
    8. $\forall A, B \in \mathbb{R}^3 - \{\theta\},\ A \nparallel B, \|AXB\|$ representa el área del paralelogramo de lados A y B

- Triple producto escalar (o doble producto mixto):
  - Definición: dados $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ se define el triple producto escalar de A por B por C (en ese orden), denotado (ABC) al siguiente número real: $(ABC) = (AXB).C$
  - Propiedades(c/demo):
    1. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3,\ (ABC) = (BCA) = (CAB)$ rotación cíclica
    2. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3,\ (BAC) = (ACB) = (CBA) = -(ABC)$
    3. Dado el paralelepípedo de aristas $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3,\ |(ABC)|$ es el volumen de dicho paralelepípedo
    4. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3 \quad (ABC) = 0 \Leftrightarrow A, B$ y C son coplanares

- **Aplicaciones del álgebra lineal a la geometría analítica**
  - Recta en $\mathbb{R}^n$:
    - Definición: sean $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{A} \in \mathbb{R}^n, A \neq \theta$. Llamaremos recta que pasa por P_0 en la dirección de A al siguiente conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$:
    $$r = \left\{x \in \mathbb{R}^n / x = P_0 + t\vec{A}, t \in \mathbb{R}\right\}$$
    - Observación: una recta queda unívocamente determinada por un punto de paso y un vector dirección. Esto no quiere decir que la ecuación vectorial de la recta sea única
  - Punto que pertenece a la recta r:
    - Definición: sean $r: x = P_0 + t\vec{A},\ t \in \mathbb{R}$ y $Q_0 \in \mathbb{R}^n$:
    $$Q_0 \in r \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}: Q_0 = P_0 + t_0 A$$
    - Observación: $P_0 \in \mathbb{R}$ pues $\exists t_0 = 0: P_0 = P_0 + 0A$
  - Recta que pasa por dos puntos:
    - Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$ puntos diferentes. Se sabe que por dos puntos diferentes pasa una única recta



  - Ángulo entre rectas:
    - Definición: sean $r_1: x = P_1 + tA_1, t \in \mathbb{R}$ y $r_2: x = P_2 + sA_2, s \in \mathbb{R}$ dos rectas en $\mathbb{R}^n$. Se define ángulo entre r_1 y r_2 (denotado $\sphericalangle(r_1, r_2)$) al ángulo φ medido en radianes que satisface:
      1. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
      2. $cos\varphi = \frac{|A_1 A_2|}{\|A_1\|.\|A_2\|}$
    - Definición: sean $r_1: x = P_1 + tA_1, t \in \mathbb{R}$ y $r_2: x = P_2 + sA_2, s \in \mathbb{R}$ dos rectas en $\mathbb{R}^n$ diremos que:
      1. $r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow \sphericalangle(r_1, r_2) = 0$
      2. $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \sphericalangle(r_1, r_2) = \frac{\pi}{2}$
    - Observaciones(c/demo):
      1. $r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow A_1 \parallel A_2$
      2. $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow A_1 \perp A_2$

- Recta en $\mathbb{R}^2$: sea $r: x = P_0 + t\vec{A},\ t \in \mathbb{R}$ la recta que pasa por P_0 en la dirección de $A \neq \theta$. Fijemos un sistema de referencia de tal forma que $X = (x, y),\ P_0 = (x_0, y_0)$ y $A = (a_1, a_2) \neq (0,0)$
  - **1)** $\boldsymbol{r: (x, y) = (x_0, y_0) + t(a_1, a_2), t \in \mathbb{R}}$ (ecuación vectorial de la recta r)

    $(x, y) = (x_0 + t.a_1, y_0 + t.a_2), t \in \mathbb{R}$

  - **2)** $\boldsymbol{r: \begin{cases} x = x_0 + t.a_1 \\ y = y_0 + t.a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$ (ecuaciones paramétricas cartesianas)

    Si a_1 y a_2 son distintos de 0 entonces:

    $x = x_0 + t.a_1 \to t = \dfrac{x - x_0}{a_1}$

    $y = y_0 + t.a_2 \to t = \dfrac{y - y_0}{a_2}$

    Luego:

  - **3)** $\boldsymbol{r: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}}$ (ecuación cartesiana de la recta r o forma continua de r)

  - Ecuación general o forma implícita de r (c/demo):

    $r: ax + by + c = 0\ \ (a \neq 0, b \neq 0)$ **forma implícita**

    $A = (a_1, a_2) = (-b, a)$

    Para encontrar P_0 se le da un valor a x y se obtiene y

  - Forma explícita de r:

    Sea $r: ax + by + c = 0\ \ (a \neq 0, b \neq 0)$ donde $A = (-b, a)$

    $by = -ax - c$

    $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

    Llamemos $-\dfrac{a}{b} = m$ y $-\dfrac{c}{b} = n$

    $r: y = mx + n$ **forma explícita**

    Donde n es la ordenada al origen de la recta r y m es la pendiente de la recta r

    $A = (1, m)$

    $P_0 = (0, n)$

- Observaciones(c/demo): sean $r_1: y = m_1x + n_1 \therefore (A_1 = (1, m_1))$ y $r_2: y = m_2x + n_2 \therefore (A_2 = (1, m_2))$
    1. $r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$
    2. $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$
- Ecuación punto pendiente: sean m la pendiente conocida y P_0 punto de paso conocido de r
$$r: y - y_0 = m(x - x_0)$$
Haz de rectas que pasan por P_0:
$$y - y_0 = m(x - x_0), \forall m \in \mathbb{R}$$
- Recta por dos puntos que no tienen igual abscisa: sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ donde $x_1 \neq x_2$
$$r: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
- Forma normal de la recta:
$$r: (X - P_0).N = 0$$

- Recta en $\mathbb{R}^3$: sea $r: x = P_0 + t\vec{A},\ t \in \mathbb{R}$ la recta que pasa por P_0 en la dirección de $A \neq \theta$. Fijemos un sistema de referencia de tal forma que:
$X = (x, y, z),\ P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $A = (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$
    - **1)** $\boldsymbol{r: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3), t \in \mathbb{R}}$ (ecuación vectorial de la recta r)

    $$(x, y, z) = (x_0 + t.a_1,\ y_0 + t.a_2,\ z_0 + t.a_3), t \in \mathbb{R}$$

    - **2)** $\boldsymbol{r: \begin{cases} x = x_0 + t.a_1 \\ y = y_0 + t.a_2 \\ z = z_0 + t.a_3 \end{cases}}$ $\boldsymbol{, t} \in \mathbb{R}$ (ecuaciones paramétricas cartesianas)

    Si a_1, a_2 y a_3 son distintos de 0 entonces:

    $$x = x_0 + t.a_1 \rightarrow t = \frac{x - x_0}{a_1}$$

    $$y = y_0 + t.a_2 \rightarrow t = \frac{y - y_0}{a_2}$$

    $$z = z_0 + t.a_3 \rightarrow t = \frac{z - z_0}{a_3}$$

    Luego:

    - **3)** $\boldsymbol{r: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}}$ (ecuación cartesiana de la recta r o forma continua de r)
    - Rectas alabeadas: sean $r_1: X = P_1 + tA_1, t \in \mathbb{R}$ y $r_2: X = P_1 + tA_2, t \in \mathbb{R}$ diremos que r_1 y r_2 son alabeadas si no son paralelas y no se intersectan. Entonces: $A_1 \nparallel A_2 \ \wedge\ r_1 \cap r_2 = \emptyset$

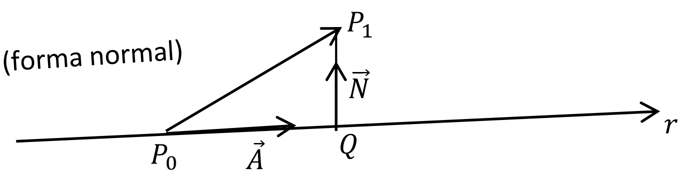
- <u>Posición relativa entre dos rectas de $\mathbb{R}^3$</u>:
    1. En $\mathbb{R}^3$ 2 rectas no coincidentes son paralelas, se intersectan en un punto o son alabeadas
    2. En $\mathbb{R}^3$ una recta tiene infinitas direcciones perpendiculares a ella

- <u>Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^n$</u>(c/demo):
    - Sean $r: X = P_0 + tA, t \in \mathbb{R}$ y $P_1 \in \mathbb{R}^n, P_1 \notin r$:

$$d(P_1, r) = \left\| \overrightarrow{P_0P_1} - P_{\overrightarrow{P_0P_1},A} \right\|$$

    - <u>Fórmula de cálculo en $\mathbb{R}^2$</u>: sean $r: X = P_0 + tA, t \in \mathbb{R}$ y $P_1 \in \mathbb{R}^2, P_1 \notin r$ dada la dirección $A \neq \theta$ existe una única dirección perpendicular a $\vec{A}$ y viene dada por $N \neq \theta$

$r: (X - P_0).N = 0$ (forma normal)



$$d(P_1, r) = \left\| \overrightarrow{QP_1} \right\| = \left\| P_{\overrightarrow{P_0P_1},N} \right\| = \frac{\left| \overrightarrow{P_0P_1}.N \right|}{\|N\|}$$

$$\therefore d(P_1, r) = \frac{|(P_1 - P_0).N|}{\|N\|} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

    - <u>Fórmula de cálculo en $\mathbb{R}^3$</u>(c/demo): sean $r: X = P_0 + tA, t \in \mathbb{R}$ y $P_1 \in \mathbb{R}^n, P_1 \notin r$

$$d(P_1, r) = \frac{\left\| \overrightarrow{P_0P_1} X A \right\|}{\|A\|}$$

- <u>Distancie entre dos rectas</u>: sean $r_1: X = P_1 + tA_1, t \in \mathbb{R}$ y $r_2: X = P_2 + sA_2, s \in \mathbb{R}$ dos rectas:
    - <u>En $\mathbb{R}^2$</u>:
        1. $r_1 \parallel r_2: d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2)$ ó $d(r_1, P_2)$
        2. $r_1 \nparallel r_2 (\therefore r_1 \cap r_2 \neq \emptyset): d(r_1, r_2) = 0$
    - <u>En $\mathbb{R}^3$</u>:
        1. $r_1 \parallel r_2: d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2)$ ó $d(r_1, P_2)$
        2. $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset, d(r_1, r_2) = 0$
        3. Si r_1 y r_2 son alabeadas, $d(r_1, r_2) = \left\| P_{\overrightarrow{P_1P_2},A_1XA_2} \right\| = \dfrac{\left| \overrightarrow{P_1P_2}.(A_1XA_2) \right|}{\|A_1XA_2\|}$

- **<u>Plano</u>**
    - <u>Definición</u>: sean $\vec{N} \in \mathbb{R}^3 - \{\theta\}$ y $P_0 \in \mathbb{R}^3$. Llamaremos plano que pasa por P_0 y cuya dirección normal es N al siguiente conjunto de puntos:
      $\pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \overrightarrow{P_0X} \perp \vec{N} \right\}$
      $\pi: (X - P_0).N = 0$ ecuación del plano
      Fijemos un sistema de referencia:
      $X = (x, y, z), P_0 = (x_0, y_0, z_0), N = (a, b, c)$ y la ecuación del plano quedaría:
      $\pi: ax + by + cz + d = 0$
    - <u>Determinación de planos</u>:
        - Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ tres puntos diferentes no alineados determinan un único plano al cual pertenecen

- Una recta r y un punto $P_1 \notin r$ determinan un único plano al cual pertenecen
- Dos rectas no coincidentes determinan un único plano al cual pertenecen

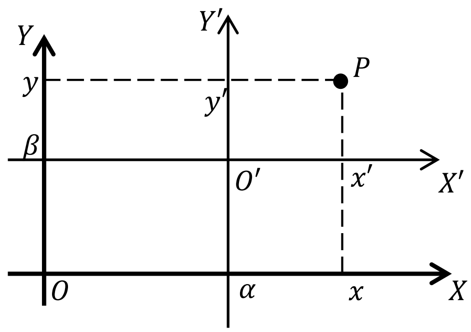
- Ángulo entre dos planos:
  - Definición: dados dos planos $\pi_1: (X - P_1).N_1 = 0$ y $\pi_2: (X - P_2).N_2 = 0$ el ángulo que determinan π_1 y π_2 es el ángulo $\varphi = \sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$ que verifica:
    1. $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
    2. $cos\varphi = \frac{|N_1 N_2|}{\|N_1\|.\|N_2\|}$
  - Dados los planos π_1 y π_2:
    1. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = 0$
    2. $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \frac{\pi}{2}$
  - Consecuencias o equivalencias de la definición(c/demo):
    1. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow N_1 \parallel N_2$
    2. $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow N_1 \perp N_2$
- Ángulo entre recta y plano:
  - Definición: dados en $\mathbb{R}^3$ el plano $\pi: (X - P_0).N_0 = 0$ y la recta r: $X = P_1 + tA$ el ángulo que determinan π y r es el ángulo $\varphi = \sphericalangle(\pi, r)$ que verifica:
    1. $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
    2. $sen\varphi = \frac{|A.N|}{\|A\|.\|N\|}$
- Paralelismo y perpendicularidad entre una recta y un plano:
  - Definición: dados en $\mathbb{R}^3$, la recta r y el plano π:
    1. $r \parallel \pi \Leftrightarrow \sphericalangle(r, \pi) = 0$
    2. $r \perp \pi \Leftrightarrow \sphericalangle(r, \pi) = \frac{\pi}{2}$
  - Equivalencias(c/demo): sean $\pi: (X - P_0).N_0 = 0$ y r: $X = P_1 + tA$
    1. $r \parallel \pi \Leftrightarrow A \perp N$
    2. $r \perp \pi \Leftrightarrow A \parallel N$
- Distancia de un punto a un plano:
  - Definición(c/demo): dados en $\mathbb{R}^3$un plano π y un punto $Q \notin \pi$, la distancia del punto al plano es $d = dist(Q, \pi)$ y su ecuación es:

$$dist(Q, \pi) = \frac{|(Q - P_0).N|}{\|N\|}$$

- Distancia entre dos planes:
  - Definición: sean π_1 y π_2 planos:
    1. $\pi_1 \parallel \pi_2, dist(\pi_1, \pi_2) = dist(P_1, \pi_2) = dist(P_2, \pi_1)$
    2. $\pi_1 \nparallel \pi_2, dist(\pi_1, \pi_2) = 0$
- Distancia entre una recta y un plano:
  - Definición: dados en $\mathbb{R}^3$un plano π y una recta r:
    1. Si $r \parallel \pi$ entonces $dist(r, \pi) = dist(P_1, \pi), \;\; P_1 \in \mathbb{R}$
    2. Si $r \nparallel \pi$ entonces $dist(r, \pi) = 0$
- Recta como intersección de dos planos:
  - Dos planos paralelos π_1 y π_2 determinan una sola recta r contenida en ellos

- Planos particulares
  - La ecuación de cualquier plano paralelo al eje $\overrightarrow{OX}$ tiene una ecuación de la forma $by + cz + d = 0$
  - La ecuación de cualquier plano paralelo al eje $\overrightarrow{OY}$ tiene una ecuación de la forma $ax + cz + d = 0$
  - La ecuación de cualquier plano paralelo al eje $\overrightarrow{OZ}$ tiene una ecuación de la forma $ax + by + d = 0$

- **Cónicas**
  - Traslación de ejes: para ubicar un punto en un plano y dar sus coordenadas es necesario definir un sistema de referencia. Usamos el sistema de coordenadas cartesianas que se define de la siguiente manera: dado un punto en el plano se traza por él dos rectas perpendiculares y al punto de intersección se le llama origen de coordenadas, se lo denota con la letra O y sus coordenadas son $(0,0)$



$O' = (\alpha, \beta)$ en el sistema XY

$P = (x, y)$ en el sistema XY

$P = (x', y')$ en el sistema $X'Y'$

La relación entre ambas coordenadas es:

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

  - Circunferencia:
    - Definición: sean un punto $c \in \mathbb{R}^2$ y r un número real positivo. Se llama circunferencia con centro c y radio de longitud r al siguiente conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 / d(x, c) = r\}$$
$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - c\| = r\}$$

    - Obtención de la ecuación(c/demo):

$x^2 + y^2 = r^2$ (ecuación canónica de la circunferencia con centro en $(0,0)$)

    - Análisis de la ecuación(c/demo):
      1. Dominio: $dom = [-r, r]$
      2. Rango: $ran = [-r, r]$
      3. Simetría: la gráfica es simétrica respecto del eje X, del eje Y y del origen
      4. Intersección con los ejes:
         - Con el eje X intersecta en $(r, 0)$ y $(-r, 0)$
         - Con el eje Y intersecta en $(0, r)$ y $(0, -r)$
      5. Elementos notables:
         - $c = (0,0)$ centro de la circunferencia, $c \notin \mathcal{C}$
         - $r > 0$ radio

- Análisis de la ecuación(c/demo): si tomamos un centro $c(\alpha,\beta)$ ubicado en el primer cuadrante. El nuevo sistema de referencia sería $X'Y'$. La ecuación canónica en este sistema será: $(x')^2+(y')^2=r^2$ que por la traslación de ejes, vendría a ser igual a $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. Su análisis:
  1. Dominio: $dom=[\alpha-r,\alpha+r]$
  2. Rango: $ran=[\beta-r,\beta+r]$
- Ecuación general de la circunferencia:
  Sea $\mathcal{C}:(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,\quad c=(\alpha,\beta)$
  $$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2y\beta+\beta^2-r^2=0$$
  $$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$
  Llamaremos $L=-2\alpha,\ M=-2\beta,\ N=\alpha^2+\beta^2-r^2$
  $\mathcal{C}:x^2+y^2+Lx+My+N=0$ (ecuación general de la circunferencia)
  $$c=(\alpha,\beta)=\left(-\frac{L}{2},-\frac{M}{2}\right),\qquad r=\frac{\sqrt{L^2+M^2-4N}}{2}$$
  Toda circunferencia está representada por la ecuación general, pero no todas estas ecuaciones representan circunferencias. Sólo lo hacen cuando $r>0$ es decir cuando $L^2+M^2-4N>0$

- Elipse:
  - Definición: sean $F_1,F_2\in\mathbb{R}^2$ dos puntos fijos diferentes del plano. Se llama elipse al siguiente conjunto de puntos:
    $$\mathcal{E}=\left\{P\in\mathbb{R}^2/\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\|+\left\|\overrightarrow{F_2P}\right\|=k,\ \ k>\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\|\right\}$$
    Los puntos F_1,F_2 se llaman focos de la elipse. Llamaremos a la constante k $2a$, $a>0$
  - Obtención de la ecuación(c/demo):
    $$\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
    (ecuación canónica de la elipse)
  - Análisis de la ecuación(c/demo):
    1. Dominio: $dom=[-a,a]$
    2. Rango: $ran=[-b,b]$
    3. Simetría: la gráfica es simétrica respecto del eje X, del eje Y y del origen
    4. Intersección con los ejes:
       - Con el eje X intersecta en $(a,0)$ y $(-a,0)$
       - Con el eje Y intersecta en $(0,b)$ y $(0,-b)$

5. Elementos notables:
    - $F_1 = (c, 0), F_2 = (-c, 0)$ focos. La recta que pasa por los dos focos se llama Eje Focal
    - $A_1 = (a, 0), A_2 = (-a, 0)$ vértices del eje mayor
      $\overrightarrow{A_1A_2}$ eje mayor, $\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = 2a$ longitud del eje mayor, $a > 0$ longitud del semieje mayor
    - $B_1 = (0, b), B_2 = (, -b)$ vértices del eje menor
      $\overrightarrow{B_1B_2}$ eje menor, $\left\|\overrightarrow{B_1B_2}\right\| = 2b$ longitud del eje menor, $b > 0$ longitud del semieje menor
    - $\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| = 2c$ distancia focal, $c > 0$ semidistancia focal
    - $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ (relación fundamental)
    - $a > c,\ a > b$
    - $e = \frac{c}{a} < 1$ es la ecuación de la excentricidad (e) de la elipse