

Métodos Computacionales - Trabajo Práctico 1

Resoluciones Numéricas de Ecuaciones Diferenciales

Mariño Martina, Martinez Kiara
Universidad Torcuato Di Tella

23 de septiembre de 2025

Índice

1. Ecuación del Calor	3
1.1. Formulación matemática - Derivación de los métodos explícito e implícito .	3
1.2. Implementación en Python	6
1.3. Resultados	6
1.4. Discusión	6
2. Ecuación de Transporte	6
2.1. Formulación	6
2.2. Resultados y análisis	6
3. Conclusiones	6

1. Ecuación del Calor

1.1. Formulación matemática - Derivación de los métodos explícito e implícito

En esta sección vamos a ver cómo se llega a las fórmulas de los métodos explícito e implícito para resolver la ecuación del calor usando diferencias finitas. La idea es empezar de la ecuación original, discretizarla, y después aproximar las derivadas.

La ecuación que queremos resolver, la ecuación del calor en una dimensión es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

Donde:

- $u(x, t)$ representa la temperatura en el punto x y tiempo t .
- $\alpha > 0$ es la constante de difusión térmica.

Además, tenemos condiciones de frontera de Dirichlet:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

y una condición inicial que nos da la distribución de temperatura al inicio:

$$u(x, 0) = f(x).$$

En palabras, se trata de una barra de longitud 1 donde los extremos se mantienen a temperatura cero. Sabemos cómo estaba la temperatura al comienzo y queremos ver cómo cambia con el tiempo.

Discretización: malla de espacio y tiempo. Para resolver el problema de forma numérica dividimos el espacio y el tiempo en puntos separados por pasos fijos:

- Dividimos el intervalo espacial $[0, 1]$ en N puntos con separación Δx . Así, las posiciones son:

$$x_j = j\Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

donde $\Delta x = \frac{1}{N}$.

- El tiempo se divide en pasos de tamaño Δt . Los instantes de tiempo quedan como:

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M$$

con $M\Delta t = T$ siendo el tiempo final de simulación.

Notación: llamamos u_j^n a la aproximación numérica de $u(x_j, t_n)$. Los nodos de frontera son $j = 0$ y $j = N$ (donde ya conocemos u gracias a las condiciones de borde). Los nodos internos son $j = 1, \dots, N - 1$, que son los que vamos a actualizar.

Aproximación de las derivadas con diferencias finitas. Vamos a reemplazar las derivadas por aproximaciones usando diferencias finitas:

- Para la derivada temporal usamos una **diferencia hacia adelante**:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}.$$

- Para la segunda derivada espacial usamos **diferencias centradas**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Esto introduce un error, pero mientras Δx y Δt sean pequeños, la aproximación es bastante buena.

Sustitución en la ecuación original - Derivación explícito. Si reemplazamos las aproximaciones en la ecuación del calor, nos queda:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Definimos un parámetro muy útil llamado r :

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Este parámetro combina la constante física α con el paso de tiempo Δt y el paso espacial Δx .

Reemplazando esta definición en la ecuación anterior:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

El siguiente objetivo es aislar u_j^{n+1} para que quede explícito. Sumamos u_j^n en ambos lados:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Expandimos el paréntesis:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r u_{j+1}^n - 2r u_j^n + r u_{j-1}^n.$$

Agrupando términos similares, en especial los que dependen de u_j^n :

$$u_j^{n+1} = (1 - 2r)u_j^n + r u_{j-1}^n + r u_{j+1}^n.$$

Esta última ecuación muestra que el nuevo valor de temperatura en la posición j y tiempo $n + 1$ se calcula como una combinación lineal de:

- El valor previo en la misma posición, u_j^n , ponderado por $(1 - 2r)$.
- El vecino de la izquierda, u_{j-1}^n , ponderado por r .
- El vecino de la derecha, u_{j+1}^n , también ponderado por r .

Así, nos queda el esquema **explícito** completo:

$$\boxed{u_j^{n+1} = (1 - 2r)u_j^n + r u_{j-1}^n + r u_{j+1}^n},$$

Condición de estabilidad: Este método solo funciona bien si se cumple:

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Si no se cumple, la solución explota y empieza a oscilar de manera irreal.

Interpretación: La temperatura en j tiende a “suavizarse” dependiendo de cómo están los vecinos $j - 1$ y $j + 1$. Es como un promedio que se va corrigiendo paso a paso.

Derivación Método implícito.

Partimos de las aproximaciones Usamos la misma aproximación temporal (diferencia hacia adelante en el numerador) pero evaluamos la segunda derivada espacial en el tiempo $n + 1$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \approx \alpha \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}.$$

Paso 1. Multiplicar por Δt Multiplicamos ambos lados por Δt para quitar el denominador:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}).$$

Paso 2. Definir r y sustituir Como antes definimos

$$r := \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2},$$

y reemplazamos:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}).$$

Paso 3. Llevar todos los términos con u^{n+1} al mismo lado Queremos agrupar las incógnitas de tiempo $n + 1$ a la izquierda y dejar el término conocido u_j^n a la derecha. Para eso pasamos el término de la derecha al lado izquierdo:

$$u_j^{n+1} - r(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n.$$

Paso 4. Expandir el paréntesis

$$u_j^{n+1} - r u_{j+1}^{n+1} + 2r u_j^{n+1} - r u_{j-1}^{n+1} = u_j^n.$$

Paso 5. Agrupar coeficientes según cada incógnita Agrupamos los coeficientes de $u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}$:

$$(-r) u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2r) u_j^{n+1} + (-r) u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

De forma más explícita:

$$-r u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2r) u_j^{n+1} - r u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

Paso 6. Interpretación local Para cada nodo interior j la ecuación relaciona al nuevo valor u_j^{n+1} con sus vecinos en el mismo nuevo tiempo $n + 1$. No hay una fórmula directa para u_j^{n+1} en términos solo de valores en n ; por eso hay que resolver un sistema.

1.2. Sistemas lineales y forma matricial

1.3. Resultados

En la Figura ?? se observa la evolución temporal de la temperatura usando el método explícito.

[Aquí se incluirá la figura una vez generada]

1.4. Discusión

Comparando los métodos explícito e implícito se observa que...

2. Ecuación de Transporte

2.1. Formulación

La ecuación de transporte está dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (1)$$

2.2. Resultados y análisis

3. Conclusiones

En este trabajo se implementaron métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Se concluye que...