Lezione 2

Guglielmo Bartelloni

28 settembre 2022

Indice

Facciamo vedere che il teorema precedente valeva anche per $n > 1$

Supponiamo che u e v siamo due soluzioni di (1), cioè che:

$Lu = f$ e $Lv = f$ su I

La differenza di queste diventano soluzione su $I = [a, b]$ dell'omogenea associata

Usando la propietà della linearità:

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda Lu + \mu Lv$$

$$L(u - v) = Lu - Lv = f - f = 0$$

Se indichiamo con V_0 l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ($Lw = 0$ su $I = [a, b]$ e V_0 è l'insieme delle $w \in \mathbb{C}^n(I)$) e con $\bar{u}(t)$ una soluzione nota di (1)

$$u(x) = \bar{u}(x) + w(x)$$

L'uguaglianza sopra, al variare di $w(x)$ in V_0 ci da tutte le soluzioni del problema di partenza.

(Il problema quindi, diventa solo di studiare il problema omogeneo)

Torniamo al I ordine

Adesso ritorniamo al problema di I ordine (in forma normale):

$$(1)\ y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

dove $a()$ e $f()$ sono continue su $[a, b]$

$$(2)\ y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Secondo il teorema della prima lezione:

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

Come si determina l'insieme di tutte le soluzioni (integrale generale) di (2), cioè:

$$(2)\ y'(x) + a(x)y(x) = 0, x \in [a, b]$$

Sia $A(x)$ una **primitiva** di $a(x)$:

$$A(x) = \int a(x)\, dx$$

Moltiplichiamo i due membri della (2) per $e^{A(x)}$:

$$e^{A(x)} + e^{A(x)}a(x)y(x) = 0, x \in [a,b]$$

La posso scrivere anche (la derivata di $e^{A(x)}y(x)$):

$$(e^{A(x)}y(x))' = e^{A(x)}a(x)y(x) + e^{A(x)}y'(x)$$

quindi (sempre chiaramente nell'intervallo $[a,b]$):

$$(e^{A(x)}y(x))' = 0$$

Questo mi dice che:

$$e^{A(x)}y(x) = costante = c \in \mathbb{R}$$

porto dall'altra parte:

$$y(x) = ce^{-A(x)}$$

espandendo $A(x)$:

$$y(x) = ce^{\int a(x)\, dx}$$

posso considerare le soluzioni come:

$$y(x) = cz_0$$

dove z_0 è una soluzione particolare di (2).
Infatti $e^{-A(x)}$ è soluzione di (2)

Dimostrazione.

$$e^{-A(x)} = -a(x)e^{-A(x)}$$

ovvero

$$(e^{-A(x)})' + a(x)e^{-A(x)} = 0$$

$\square$

Determinazione dell'integrale particolare

Sappiamo:

$$(1)\ y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$(2)\ y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Cerco l'integrale particolare ad occhio oppure uso il **metodo della variazione della costante**

Metodo della variazione della costante

Cerco questa $c(x)$ in questa forma:

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

Ovviamente la cerco dopo che so che $\bar{y}(x)$ è soluzione del problema.

Dimostrazione. Poichè $\bar{y}(x)$ è soluzione di (1) si ha che $\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$ da cui sostituendo $\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$:

$$(c(x)e^{-A(x)})' + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

Deriviamo:

$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

semplifico

$$c'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

$$c'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

$$c'(x) = f(x)e^{A(x)} \to e(x) = \int f(x)e^{A(x)}\, d$$

e dunque:

$$\bar{y}(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\, dx$$

Cioè l'integrale particolare $\square$

Se metto tutto insieme l'integrale generale diventa:

$$y(x) = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\, dx$$

Osservazioni sulla formula

$A(x)$ è **una** primitiva di $a(x)$ scelta una volta per tutte.

Non occorre mettere una costante arbitraria (ovvero considerare come $A(x) + K, K \in \mathbb{R}$) poiche l'integrale generale non cambia

Non serve neanche nell'integrale perchè verrebbe buttato dentro c dell'integrale generale

Esempi

$$y'(x) = 5y(x) + e^x$$

in questo caso $a(x) = -5$

$$A(x) = -\int 5\,dx = -5x$$

Quindi:

$$e^{-A(x)} = e^{5x}$$

$$y(x) = ce^{5x} + e^{5x}\int e^x e^{-5x}\,dx = ce^{5x} + e^{5x}\int e^{-4x}\,d = ce^{5x} + e^{5x}(\frac{1}{4}e^{-4x}) = ce^{5x} - \frac{1}{4}e^x$$

Esercizio per casa:

$$u' + \frac{u}{t} = e^t$$