Lezione 2

Guglielmo Bartelloni

28 settembre 2022

Indice

Facciamo vedere che il teorema precedente valeva anche per $n > 1$

Supponiamo che u e v siamo due soluzioni di (1), cioè che:

$Lu = f$ e $Lv = f$ su I

La differenza di queste diventano soluzione su $I = [a, b]$ dell'omogenea associata

Usando la propietà della linearità:

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda Lu + \mu Lv$$

$$L(u - v) = Lu - Lv = f - f = 0$$

Se indichiamo con V_0 l'insieme di tutte le soluzioni dell'equzione omogenea associata ($Lw = 0$ su $I = [a, b]$ e V_0 è l'insieme delle $w \in \mathbb{C}^n(I)$) e con $\bar{u}(t)$ una soluzione nota di (1)

$$u(x) = \bar{u}(x) + w(x)$$

L'uguglianza sopra, al variare di $w(x)$ in V_0 ci da tutte le soluzioni del problema di partenza.

(Il problema quindi, diventa solo di studiare il problema omogeneo)

Torniamo al I ordine

Adesso ritorniamo al problema di I ordine (in forma normale):

$$(1)\ y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

dove $a()$ e $f()$ sono continue su $[a, b]$

$$(2)\ y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Secondo il teorema della prima lezione:

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

Come si determina l'insieme di tutte le soluzioni (integrale generale) di (2), cioe:

$$(2)\ y'(x) + a(x)y(x) = 0, x \in [a, b]$$

Sia $A(x)$ una **primitiva** di $a(x)$:

$$A(x) = \int a(x)\, dx$$

Moltiplichiamo i due membri della (2) per $e^{A(x)}$:

$$e^{A(x)} + e^{A(x)}a(x)y(x) = 0, x \in [a,b]$$

La posso scrivere anche (la derivata di $e^{A(x)}y(x)$):

$$(e^{A(x)}y(x))' = e^{A(x)}a(x)y(x) + e^{A(x)}y'(x)$$

quindi (sempre chiaramente nell'intervallo $[a,b]$):

$$(e^{A(x)}y(x))' = 0$$

Questo mi dice che:

$$e^{A(x)}y(x) = costante = c \in \mathbb{R}$$

porto dall'altra parte:

$$y(x) = ce^{-A(x)}$$

espandendo $A(x)$:

$$y(x) = ce^{\int a(x)\, dx}$$