Introduzione Analisi II

Guglielmo Bartelloni

27 settembre 2022

Indice

Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'ingnita è un equazione insieme a qualche sua derivata.

Equazioni differenziali ordinarie

Noi vedremo quelle del primo ordine lineari e di secondo ordine con coefficienti costanti

Problema di Cauchy: problema con codizioni iniziali.

Definizione 1

Una equazione di ordine n è una equazione del tipo:

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0$$

$$x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

dove l'incognita è la qualunque y(x). F è funzione di (n+2) variabili $x, y(x), y'(x)$....

L'**ordine** è dato dal massimo ordine di derivazione che compare.

Per esempio:

$$y''' + 2y'' + 5y = e^x$$

è di ordine 3

Definizione 2 Soluzione (curva) integrale

La soluzione di una EDO di ordine n sull'intervallo I

$$(*)F(x, y(x), y'(x), ...) = 0$$

$$x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$\varphi(x)$ che sia definita (almeno) in I e ivi derivabile fino all'ordine n per cui valga (*), ovvero:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ...) = 0$$

$\forall x \in I$

Chiaramente cambia a seconda dell'intervallo

Definizione 3 Integrale Generale

Si chiama integrale **generale** di (*) in I l'insieme di tutte le soluzioni di (*) in I

E' possibile definire un esepressione piu' esplicita

Definizione 4 Forma normale

Un edo di ordine n si dice in forma normale se è in forma

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}, x \in I$$

Esempio:

$$y''' = -5y' + sinx$$

Quella sopra è un EDO di III ordine normale.

Definizione 5 EDO di ordine n lineare

Una EDO di ordine n si dice lineare se è nella forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0y(x) = f(x), x \in I$$

Dove le funzioni

$$a_0(x), a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x), f(x)$$

sono assegnate (continue) in I
Esempio:

$$xy'' + 5y = sinx$$

Quando $f(x) = 0$ allora l'equazione si dice l'**omogenea associata**
Nel nostro caso le equazioni di secondo ordine lineari saranno a **coefficienti costanti**
Vediamo come si risolve il problema della determinazione delle soluzioni di EDO lineari

I ordine (n=1)

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

La considero in forma normale:

$$(1)\ y'(x) + a(x)y(x) = f(x), x \in [a, b]$$

dove le funzioni $a(x)$ e $f(x)$ sono continue in $[a, b]$
Se $f(x) = 0$ si ottiene omogenea associata:

$$(2)\ y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Come si determina l'integrale generale di (1)?
Il teorema che enunciamo vale per tutte le EDO lineari di ordine n

Teorema 1

L'integrale generale di (1) in $[a,b]$ è dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata (2) con un integrale particolare noto di (1)

$$\int gen(1) = \int gen(2) + \int particolare(1)$$

Dimostrazione

Sia $y(x)$ una soluzione qualsiasi di (1) ($y(x)$ appartiene all'integrale generale di (1)) e sia $\bar{y}(x)$ una soluzione particolare (nota) di (1). Voglio far vedere è che la loro differenza è una soluzione qualsiasi di (2)

Dunque per ipotesi n ha che:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

$$\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$$

Entrambe soddisfano la (1)

Sottraggo membro a membro le due:

$$y'(x) - \bar{y}'(x) + a(x)y(x) - a(x)\bar{y}(x) = f(x) - f(x)$$

$$y'(x) - \bar{y}'(x) + a(x)[y(x) - \bar{y}(x)] = 0$$

Si può scrivere anche (le derivate raccolte):

$$[y(x) - \bar{y}(x)]' + a(x)[y(x) - \bar{y}(x)] = 0$$

E dunque la funzione $y(x) - \bar{y}(x) = z(x)$ è soluzione di (2) Quindi:

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x)$$

Viceversa se $z(x)$ è una qualsiasi soluzione di (2) e $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare di (1) voglio mostrare che la loro somma è soluzione di (1)

Pongo:

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

Devo mostrare che $y(x)$ verifica (1)

sapendo che:

$$z'(x) + a(x)z(x) = 0$$

$$y'(x) + a(x)\bar{y}(x) = g(x)$$

$$y'(x) = (z(x) + \bar{y}(x))' = z'(x) + \bar{y}'(x) = -a(x)z(x) - a(x)\bar{y}(x) + f(x) = -a(x)[z(x) + \bar{y}(x)] + f(x)$$

E quindi ho dimostrato che:

$$y'(x) = -a(x)y(x) + f(x)$$

$$y'(x)a(x)y(x) = f(x)$$

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$