

**Teorema 1**

L'integrale generale di (1) in  $[a, b]$  è dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata (2) con un integrale particolare noto di (1)

$$\int gen(1) = \int gen(2) + \int particolare(1)$$

*Dimostrazione.* Sia  $y(x)$  una soluzione qualsiasi di (1) ( $y(x)$  appartiene all'integrale generale di (1)) e sia  $\bar{y}(x)$  una soluzione particolare (nota) di (1). Voglio far vedere è che la loro differenza è una soluzione qualsiasi di (2)

Dunque per ipotesi n ha che:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

$$\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$$

Entrambe soddisfano la (1)

Sottraggo membro a membro le due:

$$y'(x) - \bar{y}'(x) + a(x)y(x) - a(x)\bar{y}(x) = f(x) - f(x)$$

$$y'(x) - \bar{y}'(x) + a(x)[y(x) - \bar{y}(x)] = 0$$

Si può scrivere anche (le derivate raccolte):

$$[y(x) - \bar{y}(x)]' + a(x)[y(x) - \bar{y}(x)] = 0$$

E dunque la funzione  $y(x) - \bar{y}(x) = z(x)$  è soluzione di (2) Quindi:

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x)$$

Viceversa se  $z(x)$  è una qualsiasi soluzione di (2) e  $\bar{y}(x)$  è una soluzione particolare di (1) voglio mostrare che la loro somma è soluzione di (1)

Pongo:

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

Devo mostrare che  $y(x)$  verifica (1)

sapendo che:

$$z'(x) + a(x)z(x) = 0$$

$$\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$$

$$y'(x) = (z(x) + \bar{y}(x))' = z'(x) + \bar{y}'(x) = -a(x)z(x) - a(x)\bar{y}(x) + f(x) = -a(x)[z(x) + \bar{y}(x)] + f(x)$$

E quindi ho dimostrato che:

$$y'(x) = -a(x)y(x) + f(x)$$

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

□

### Teorema 2

Siano  $f$  e  $g$  continue (sugli opportuni domini) allora:

- $f + g, f \cdot g$  sono continue
- se  $g \neq 0$  allora  $\frac{f}{g}$  è continua
- se  $g > 0$  allora  $f^g$  è continua
- la funzione composta  $g \circ f$  è continua (dove è definita)

### Teorema 3

Sia  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $P_0 = (x_0, y_0) \in D$  allora:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) = l$$

uniformemente rispetto a  $\theta$

*Dimostrazione.* per far vedere che vale il limite è sufficiente mostrare che esiste una funzione  $g$  che dipende solo da  $\rho$  (non negativa)  $g(\rho) \geq 0$  tale che:

$$|f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

dove  $g(\rho) \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow 0^+$

e poi faccio vedere che quindi (per il teorema dei due carabinieri):

$$0 \leq f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - l \leq g(\rho) = 0$$

□

### Teorema 4

$f$  è differenziabile in  $\bar{x}_0 \in A \rightarrow f$  è continua in  $\bar{x}_0$

*Dimostrazione.* Per dimostrare che  $f$  è continua in  $\bar{x}_0$  devo far vedere che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(\bar{x}_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \stackrel{\text{poiché } f \text{ è differenziabile}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \underbrace{o(|h|)}_{\rightarrow 0}]$$

usiamo Cauchy-Schwarz:

$$\langle \nabla f(x_0), h \rangle \leq \underbrace{|\langle \nabla f(x_0), h \rangle|}_{\text{valore assoluto}} \leq \underbrace{|\nabla f(x_0)|}_{\text{lunghezza del vettore}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0} \stackrel{\text{numero moltiplicato } 0}{=} 0$$

quindi abbiamo che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0) + \underbrace{\langle \nabla f(x_0), h \rangle}_{\rightarrow 0} + \underbrace{o(|h|)}_{\rightarrow 0}] = f(x_0)$$

□

### Teorema 5: Teorema del differenziale

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto, derivabile in  $A$ .

Se le derivate parziali  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  sono continue in  $\bar{x} \in A$  allora  $f$  è differenziabile in  $\bar{x}$

*Dimostrazione.* Per  $n = 2$ ,  $f = f(x, y)$  con  $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$

$\bar{h} = (h, k)$ :

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) \stackrel{\text{aggiungo e tolgo } f(x, y+k)}{=} f(x+h, y+k) - f(x, y+k)$$

$$= f(x+h, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y+k) - f(x, y) =$$

$$= [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] + [f(x, y+k) - f(x, y)] \stackrel{\text{uso Lagrange a ognuna delle funzioni}}{=}$$

Applico due volte il teorema di Lagrange sugli intervalli di estremi  $x, x+h$  e  $y, y+k$ :

$$\exists x_1 \in \text{intervallo aperto di estremi } x, x+h$$

$$\exists y_1 \in \text{intervallo aperto di estremi } y, y+k$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y+k)(\cancel{x+h-x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1)(\cancel{y+k-y}) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1)k$$

a questo punto faccio vedere la definizione di differenziabilità e sostituisco quello sopra:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \frac{f_x(x_1, y+k)h + f_y(x, y_1)k - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \frac{[f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)]h + [f_y(x, y_1) - f_y(x, y)]k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

metto tutto in valore assoluto e maggioro:

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{[f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)]h + [f_y(x, y_1) - f_y(x, y)]k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \\ &\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \\ &\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)| \end{aligned}$$

vediamo che succede quando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ :

$(x_1, y_1) \rightarrow (x, y)$  le funzioni  $f_x$  e  $f_y$  sono continue in  $(x, y)$

dunque se passo al limite:

$$\underbrace{|f_x(x, y) - f_x(x, y)|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|f_y(x, y) - f_y(x, y)|}_{\rightarrow 0}$$

□

### Teorema 6: Regola della catena

consideriamo una curva continua  $\gamma : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  curva e supponiamo  $\gamma(t)$  vettore (di  $n$  componenti) sia derivabile, cioè:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

esiste:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

e supponiamo che  $\gamma(0) = x_0 \in A$  e  $\gamma'(0) = \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ,

allora se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $x_0$ , la funzione composta  $F \rightarrow f(\gamma(t))$  da  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F = f \circ g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(t) = (f \circ g)(t) = f(\gamma(t))$$

è differenziabile in 0:

$$F'(0) = \frac{\partial F}{\partial t}(0) = \frac{\partial(f \circ g)}{\partial t}(0) = \langle \nabla f(x_0), \underbrace{\gamma'(0)}_{\text{direzione } \bar{v}} \rangle$$

Questo si chiama **teorema delle derivate delle funzioni composte** o regola della catena.

*Dimostrazione.* Dimostrato dalle considerazioni fatte fino a ora. □

### Teorema 7: Derivazione della funzione composta

Supponiamo  $\gamma(t)$  derivabile  $\forall t \in I$  ovvero  $\gamma'(t)$  è definito  $\forall t \in I$  con  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$  e supponiamo che  $f$  sia differenziabile in  $\gamma(t) \in A$  (data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) allora la funzione composta  $F = f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $t$ .

Inoltre:

$$F'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma'_i(t)$$

*Dimostrazione.* Inizio dimostrando che  $f$  è derivabile, ovvero che esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{F(\gamma(t+h)) - F(\gamma(t))}{h} = \langle \nabla f(\gamma(t+h)), \underbrace{\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}}_1 \rangle + \underbrace{\frac{o(\gamma(t+h) - \gamma(t))}{h}}_2$$

quando  $h \rightarrow 0$ :

1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \gamma'(t)$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|\gamma(t+h) - \gamma(t)|)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|\gamma(t+h) - \gamma(t)|)}{|h|} \cdot \frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{o(|\gamma(t+h) - \gamma(t)|)}{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}}_{0 \text{ per definizione di o-piccolo}} \cdot \underbrace{\frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{|h|}}_{\text{quantità finita}} = 0 \end{aligned}$$

Quantità finita perché:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_i(t+h) - \gamma_i(t)}{h} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma'_i(t))^2} = \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\text{lunghezza di un vettore}} > 0\end{aligned}$$

□

### Teorema 8: Formula del gradiente

Se  $f(x, y)$  è differenziabile in  $P = (x, y)$  allora  $f$  ammette derivate direzionali in  $(x, y)$  per ogni direzione. Inoltre per ogni versore  $\vec{v} = (a, b)$ , vale:

$$D_{\vec{v}} f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), \vec{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot b$$

*Dimostrazione.*

$$e^{-A(x)} = -a(x)e^{-A(x)}$$

ovvero

$$(e^{-A(x)})' + a(x)e^{-A(x)} = 0$$

□

*Dimostrazione.* Poiché  $\bar{y}(x)$  è soluzione di (1) si ha che  $\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$  da cui sostituendo  $\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$ :

$$(c(x)e^{-A(x)})' + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

Deriviamo:

$$c'(x)e^{-A(x)} \cancel{- c(x)a(x)e^{-A(x)}} + \cancel{a(x)c(x)e^{-A(x)}} = f(x)$$

semplifico

$$c'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

$$c'(x) = f(x)e^{A(x)} \rightarrow c(x) = \int f(x)e^{A(x)} dx$$

e dunque:

$$\bar{y}(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)} dx$$

Cioè l'integrale particolare

□

### Teorema 9: Schwarz

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto

e supponiamo che la  $f$  sia derivabile due volte su  $A$ , quindi esistono tutte le  $f_{x_i x_j}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$  e sia  $\bar{x}_0 \in A$ .

Se le  $f_{x_i x_j}$ , e le  $f_{x_j x_i}$  con  $i \neq j$  sono **continue** in  $x_0$ , allora:

$$f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$$

*Dimostrazione.* Sia  $P_0 = (x_0, y_0)$  e  $P = (x, y)$  un punto qualsiasi su  $A$ , con  $P \neq P_0$  (quindi  $x \neq x_0, y \neq y_0$ )

Consideriamo il valore della funzione nei punti:

$$f(x_0, y_0) = f(x, y_0), f(x, y), f(x_0, y)$$

$$\underbrace{F(x)}_{\text{dipende solo da } x \text{ (} y \text{ fissato)}} = f(x, y) - f(x, y_0)$$

$$\underbrace{G(y)}_{\text{dipende solo da } y \text{ (} x \text{ fissato)}} = f(x, y) - f(x_0, y)$$

Applico il teorema di Lagrange (teorema del valore intermedio)

Lagrange a  $F(x)$  nell'intervallo di estremi  $x_0, x$ , si ha che esiste un elemento  $x_1$  in questo intervallo per cui:

$$F(x) - F(x_0) = F'(x_1)(x - x_0) = [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)](x - x_0) \stackrel{\text{applico Lagrange due volte come spiegato sotto}}{=}$$

Sappiamo che  $f$  è derivabile due volte, posso quindi applicare Lagrange a  $f_x(x_1, y)$  nell'intervallo di estremi  $y_0, y$ . Quindi  $\exists y_1$  nell'intervallo tale che:

$$f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x(x_1, y_1))(y - y_0) = f_{xy}(x_1, y_1)(y - y_0)$$

quindi la nostra espressione diventa:

$$= f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0)$$

quindi abbiamo fatto vedere che:

$$F(x) - F(x_0) = f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0)$$

Analogamente per  $G(y)$  applico Lagrange quindi  $\exists y_2$  nell'intervallo di estremi  $y, y_0$  tale che:

$$G(y) - G(y_0) = G'(y_2)(y - y_0) = [f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2)](y - y_0) \stackrel{\text{applico di nuovo Lagrange}}{=}$$

applico quindi Lagrange a  $f_y(x, y_2)$  nell'intervallo di estremi  $x, x_0$  quindi  $\exists x_2$  in questo intervallo:

$$f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2) = f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)$$

infine quindi:

$$= f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0)$$

Notiamo che:

$$F(x) - F(x_0) = G(x) - G(x_0)$$

$$G(x) - G(x_0) = f(x, y) - f(x_0, y) - (f(x, y_0) - f(x_0, y_0))$$

Le due espressioni sono quindi uguali, di conseguenza anche le espressioni ottenute precedentemente

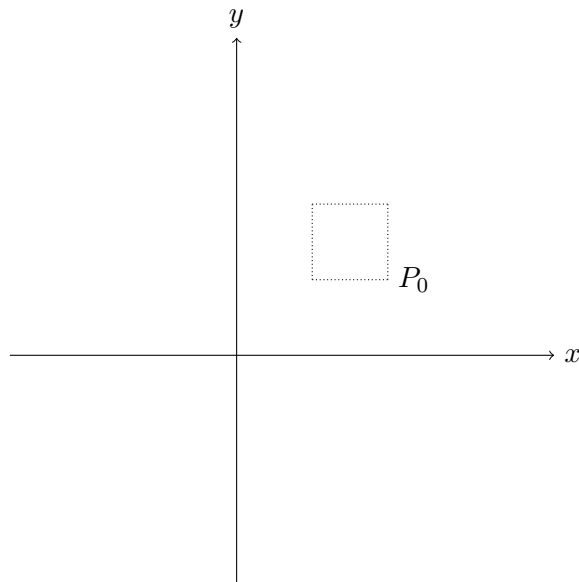
Essendo  $F(x) - F(x_0) = G(x) - G(x_0)$ , segue che:

$$f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0)$$

noi sappiamo che  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$  per ipotesi, quindi deve essere che:

$$f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2)$$

$(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  stanno nell'intervallo del rettangolo tratteggiato:





Passando al limite (per  $P \rightarrow P_0$ ) succede che:

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

$$(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)$$

$$(x_2, y_2) \rightarrow (x_0, y_0)$$

ed essendo la funzione  $f_{xy}, f_{yx}$  continue in  $P_0 = (x_0, y_0)$ , si ha:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

□

*Dimostrazione.* Immediata applicando Taylor con  $k=1$ :

$$F(1) = F(0) + F'(\theta)$$

□

*Dimostrazione.* Di nuovo viene da Taylor per  $k = 2$ :

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(\theta)}{2}$$

□

#### **Teorema 10: Teorema di Fermat per funzioni in più variabili**

Sia  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in A$  punto di estremo locale per  $f$ . Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  allora:

$$\nabla f(x_0) = 0$$

*Dimostrazione.* Supponiamo  $x_0$  punto di massimo relativo. Allora  $x_0$  è punto di massimo relativo anche per la restrizione di  $f$  lungo una qualsiasi retta passante per  $x_0$ . Dunque consideriamo  $v \in \mathbb{R}^n$  la direzione di tale retta, quindi  $x_0 + tv$  sono i punti su tale retta.

La funzione in **una** variabile:

$$F(t) = f(x_0 + tv)$$

è definita in un intorno di  $t = 0$  e per ipotesi, siccome  $x_0$  è punto di massimo per  $f$ , allora  $t = 0$  è punto di massimo per  $F$ .

Per il Teorema di Fermat (in una variabile) su  $F$  si ha:

$$F'(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0$$

per ogni direzione  $v$ . Siccome  $v \neq \emptyset$  (perché  $|v| = 1$ ), allora necessariamente  $\nabla f(x_0) = 0$ .

□

*Dimostrazione.* È basata sull'approssimazione al secondo ordine della nostra funzione attraverso la formula di Taylor (al II ordine) col resto di Peano.

$$\underbrace{f(\bar{x}_0 + \bar{h})}_{f(x, y)} = \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{f(x_0, y_0)} + \underbrace{\langle \nabla f(\bar{x}_0), \bar{h} \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x}_0) \bar{h}, \bar{h} \rangle + o(|\bar{h}|^2)$$

osserviamo che:

$$\frac{1}{2} \langle Hf(\bar{x}_0) \bar{h}, \bar{h} \rangle \quad (1)$$

è un polinomio di II grado in  $h, k$  i cui coefficienti sono le derivate seconde quindi ci fornisce il **segno**

per  $h \rightarrow 0$  abbiamo:

- $\bar{x}_0 + \bar{h} = x$
- $\bar{h} = \bar{x} - \bar{x}_0$
- $\bar{h} = (h, k)$

Vediamo cosa succede:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}_{=0} + \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &\quad + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \end{aligned}$$

Osserviamo adesso 1 forma quadratica dell'hessiana in  $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$  è un polinomio di grado 2 omogeneo nelle variabili  $h_1, \dots, h_n$

Ad ogni forma quadratica è associata una matrice:

$$q(\bar{h}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j \leftrightarrow \langle A\bar{h}, \bar{h} \rangle$$

dove  $A = (a_{ij})$ . Notiamo che tutti i  $h_i^2$  hanno coefficienti  $a_{ii}$  (stanno sulla diagonale).

Nel nostro caso la matrice associata è la matrice Hessiana, che è **simmetrica** ( $a_{ij} = a_{ji}$  per il teorema di Schwarz).

Quindi per avere il coefficiente di posto  $ij$ , siccome  $a_{ij} = a_{ji} \rightarrow a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$ , devo dividere il coefficiente per 2.

**Esempio**

$n = 2$  e  $\bar{h} = (h_1, h_2)$

Sappiamo in generale che:

$$q(h_1, h_2) = a_{11}h_1^2 + \underbrace{2a_{12}h_1h_2}_{\text{A simmetrica}} + a_{22}h_2^2$$

per una matrice  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{a_{11}} & \overbrace{5}^{2a_{12}} \\ \underbrace{5}_{2a_{21}} & \underbrace{4}_{a_{22}} \end{pmatrix} \leftrightarrow q(h_1, h_2) = h_1^2 + 4h_2^2 + 10h_1h_2$$

per una matrice  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow q(\bar{h}) = 2h_1^2 + 3h_2^2 + 4h_3^2 - 4h_1h_2 + 10h_1h_3$$

## Studiamo il segno

Adesso studiamo il segno della quadratica hessiana

### Definizione 1

$q(\bar{h})$  si dice **definita positiva** se  $\forall h \neq 0$  si ha  $q(\bar{h}) > 0$

### Definizione 2

$q(\bar{h})$  si dice **definita negativa** se  $\forall h \neq 0$  si ha  $q(\bar{h}) < 0$

### Definizione 3

$q(\bar{h})$  si dice **indefinita** se  $\exists \bar{h}_1, \bar{h}_2 \in \mathbb{R}^2$  t.c.  $q(\bar{h}_1) < 0 < q(\bar{h}_2)$  cioè cambia segno

## Nota

Per studiare il segno possiamo usare anche il segno degli autovalori.

## Conclusione

Vediamo quindi cosa succede:

- $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \rightarrow$  la forma quadratica corrispondente è definita positiva
- $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \rightarrow$  la forma quadratica corrispondente è definita negativa
- $\det(Hf(x_0, y_0)) < 0 \rightarrow$  la forma quadratica corrispondente è indefinita

□

### Teorema 11: Weistrass

Sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  con  $K$  **limitato e chiuso** di  $\mathbb{R}^2$  continua allora  $f$  è **limitata** ed assume minimo e massimo su  $K$ , ovvero:

$$\exists (x_m, y_m), (x_n, y_n) \in K$$

t.c.

$$f(x_m, y_m) \leq f(x, y) \leq f(x_n, y_n) \forall x, y \in K$$

cioè

- $f(x_m, y_m)$  valore minimo assoluto di  $f$  su  $K$

- $f(x_n, y_n)$  valore massimo assoluto di  $f$  su  $K$

### Teorema 12: Moltiplicatori di Lagrange

Supponiamo che  $f, g \in \mathbb{C}^1(A)$  dove  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto.

Se  $(x_0, y_0) \in A$  è un punto di estremo (minimo o massimo) per la  $f$  nell'insieme  $V$  ( $(x_0, y_0)$  è punto di estremo vincolato):

$$V = \{(x, y) \in A, g(x, y) = k\}$$

e vale anche:

$$\underbrace{\nabla g(x_0, y_0) \neq 0}_{(x_0, y_0) \in V \text{ regolare per } g}$$

allora esiste  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  t.c.:

$$\underbrace{\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)}_{\text{equazione vettoriale}}$$

### Teorema 13

Sia  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, allora  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $R$  ( $f \in \mathbb{R}(R)$ )  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon$  esiste una suddivisione  $D_\varepsilon$  di  $R$  per cui:

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon$$

### Teorema 14: di riduzione

Sia  $f \in \mathbb{R}(R)$  dove  $R = [a, b] \times [c, d]$

1. Se, per ogni  $y \in [c, d]$ , esiste l'integrale:

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

allora la funzione  $y \rightarrow G(y)$  è integrabile in  $[c, d]$  e vale la formula:

$$\iint_R f = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

2. Se, per ogni  $x \in [a, b]$  esiste l'integrale

$$H(x) = \int_c^d f(x, y) \, dx dy$$

allora la funzione  $x \rightarrow H(x)$  è integrabile in  $[a, b]$  e vale la formula:

$$\iint_R f = \int_a^b H(x) \, dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

### Teorema 15: Formule di riduzione

Sia  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora  $f \in R(\mathbb{R})$  e si ha:

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

### Teorema 16: Formule di riduzione

Ogni funzione continua su un'insieme semplice  $D \subset \mathbb{R}^2$  è integrabile su tale insieme e valgono le formule di riduzione:

1. Se  $D$  è y-semplce allora:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy$$

2. Se  $D$  è x-semplce allora:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx$$

### Teorema 17

Consideriamo l'applicazione verticale  $F(\rho, \theta) = (F_1(\rho, \theta), F_2(\rho, \theta))$  in cui  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  in cui  $A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ .

Sia  $S \subset (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  un aperto misurabile nel piano  $(\rho, \theta)$  con  $\bar{S} \subset (0, \infty) \cdot (0, 2\pi)$  e sia  $T = F(S)$  (fig. ??)

Allora per ogni funzione  $f$  integrabile su  $T$ , continua e limitata, vale la seguente formula:

$$\iint_{T=F(S)} f(x, y) dx dy = \iint_{S=F'(T)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \underbrace{\rho}_{\det JF(\rho, \theta)} d\rho d\theta$$

### Teorema 18: Teorema fondamentale dell'algebra

L'equazione di II in  $\mathbb{C}$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \text{ in } \mathbb{C}$$

ha sempre due soluzioni in  $\mathbb{C}$

*Dimostrazione.*  $y$  è soluzione di ??  $\Leftrightarrow Ly = 0$

Se considero  $y(x) = e^{\lambda x}$

Devo dimostrare che:

$$L(e^{\lambda x}) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda) = 0$$

Sostituisco a  $x$   $e^{\lambda x}$ :

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda x}) &= a(e^{\lambda x})'' + b(e^{\lambda x})' + c(e^{\lambda x}) = \\ &= a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) \end{aligned}$$

dunque

$$L(e^{\lambda x}) = 0 \Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

□

### Teorema 19

L'integrale generale dell'equazione omogenea  $ay'' + by' + c = 0$  è dato da:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  dove  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  sono definite come sopra

*Dimostrazione.* 1)  $b^2 - 4ac > 0$  con  $\lambda_1, \lambda_2$  soluzioni dell'equazioni di  $p(\lambda) = 0$   
scrivo la Wronskiana di  $y_1, y_2$ :

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix}$$

che è diverso da zero quindi le soluzioni sono linearmente indipendenti  
sia ora  $y(x)$  una soluzione di ??:

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} u(x)$$

io devo determinare  $u(x)$  per poi dimostrare che  $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$   
Poiché  $y(x) = e^{\lambda_1 x} u(x)$  è soluzione di ?? si ha derivando e sostituendo:

$$a(e^{\lambda_1 x} u(x))'' + b(e^{\lambda_1 x} u(x))' + ce^{\lambda_1 x} u(x) = 0$$

$$a(\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u(x) + e^{\lambda_1 x} u'(x))' + b(\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u(x) + e^{\lambda_1 x} u'(x)) + ce^{\lambda_1 x} u(x) = 0$$

$$e^{\lambda_1 x} [a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c]u(x) + \underbrace{(au''(x) + (2a\lambda_1 + b)u'(x))}_{\text{impongo che sia zero}} = 0$$

estraggo solo l'ultima parentesi e impongo che sia uguale a zero perché il resto è già zero

$$au''(x) + (2a\lambda_1 + b)u'(x) = 0$$

divido per a:

$$u''(x) + (2\lambda_1 + \frac{b}{a})u'(x) = 0$$

sapendo che:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}$$

$$u''(x) + (2\lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2)u'(x) = 0$$

il meno per comodità:

$$u''(x) - (\lambda_1 - \lambda_2)u'(x) = 0$$

se adesso chiamo  $u'(x) = v(x)$  e  $v''(x) = u'(x)$  l'equazione diventa:

$$v' - kv = 0$$



Risolvendo

$$v(x) = ce^{kx}$$

$$v(x) = ce^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$$

Risostituendo:

$$u'(x) = ce^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$$

Integrando:

$$u(x) = c_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + c_2$$

la nostra  $y(x)$  diventa:

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} u(x) = e^{\lambda_1 x} (c_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + c_2) = c_1 e^{\lambda_2 x} + c_2 e^{\lambda_1 x}$$

□

*Dimostrazione.*

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = (x + y) \bullet (x + y) \stackrel{\text{bilinearità}}{=} \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \stackrel{\text{sempre bilinearità}}{=}$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle =$$

$$= |x|^2 + |y|^2 + 2x \bullet y$$

□

*Dimostrazione.* Se

$$y = 0$$

$$y = 0 = (0, \dots, 0)$$

questo caso va bene.

Sia dunque  $\mathbb{R}^n \rightarrow y \neq 0$  e consideriamo la funzione reale di una variabile reale  $t \rightarrow |x + ty|^2 \geq 0$  polinomio di secondo grado in  $t$

$$|x + ty|^2 \stackrel{\text{Carnot}}{=} |x|^2 + |ty|^2 + 2\langle x, ty \rangle = |x|^2 + |y|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t$$

è un polinomio di II grado in  $t$  dove  $|y|^2 > 0$  essendo  $y \neq 0$

Il nostro  $\frac{\Delta}{4}$  deve essere non positivo:

$$(x \bullet y)^2 - |x|^2 |y|^2 \leq 0$$

$$(x \bullet y)^2 \leq |x|^2 |y|^2$$

da cui si ha la tesi.

Si verifica, se si ha che

$$\langle x, y \rangle = |x||y|$$

si ha che il  $\Delta$  del trinomio di II grado è nullo e dunque  $t \in \mathbb{R}$  per cui  $|x + ty|^2 = 0$  ovvero  $x + ty = 0$   
 $\rightarrow x = -ty$

devo mostrare che  $-t \geq 0$

$$t = -\frac{\langle x, y \rangle}{|y|^2}$$

si ricorda che  $|y| > 0$  essendo  $y$  non nullo

$$-t = \frac{|x||y|}{|y|^2} \geq 0$$

□

*Dimostrazione.* Dimostriamo la disuguaglianza triangolare, considero:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \leq \underbrace{|x|^2 + |y|^2 + 2|x| \bullet |y|}_{(|x|+|y|)^2} \end{aligned}$$

estraendo e passando alle radici si ha

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

□