

# Analisi 2

Guglielmo Bartelloni

4 ottobre 2022

## Indice

<b>Lezione 1</b>	<b>2</b>
Equazioni differenziali . . . . .	2
Equazioni differenziali ordinarie . . . . .	2
I ordine ( $n=1$ ) . . . . .	3
<b>Lezione 2</b>	<b>5</b>
Facciamo vedere che il teorema precedente valeva anche per $n > 1$ . . . . .	5
Torniamo al I ordine . . . . .	5
Determinazione dell'integrale particolare . . . . .	7
Osservazioni sulla formula . . . . .	8
Esempi . . . . .	8
<b>Lezione 3</b>	<b>8</b>
Il problema di Cauchy . . . . .	9
Edo a variabili separabili . . . . .	11

# Lezione 1

## Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'incognita è un'equazione insieme a qualche sua derivata.

### Equazioni differenziali ordinarie

Noi vedremo quelle del primo ordine lineari e di secondo ordine con coefficienti costanti

Problema di Cauchy: problema con condizioni iniziali.

#### Definizione 1

Una equazione di ordine  $n$  è una equazione del tipo:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0$$

$$x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

dove l'incognita è la qualunque  $y(x)$ .  $F$  è funzione di  $(n+2)$  variabili  $x, y(x), y'(x), \dots$

L'**ordine** è dato dal massimo ordine di derivazione che compare.

Per esempio:

$$y''' + 2y'' + 5y = e^x$$

è di ordine 3

#### Definizione 2 Soluzione (curva) integrale

La soluzione di una EDO di ordine  $n$  sull'intervallo  $I$

$$(*) F(x, y(x), y'(x), \dots) = 0$$

$$x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$\varphi(x)$  che sia definita (almeno) in  $I$  e ivi derivabile fino all'ordine  $n$  per cui valga  $(*)$ , ovvero:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots) = 0$$

$$\forall x \in I$$

Chiaramente cambia a seconda dell'intervallo

#### Definizione 3 Integrale Generale

Si chiama integrale **generale** di  $(*)$  in  $I$  l'insieme di tutte le soluzioni di  $(*)$  in  $I$

E' possibile definire un'espressione piu' esplicita

#### Definizione 4 Forma normale

Un'edo di ordine  $n$  si dice in forma normale se è in forma

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}), x \in I$$

Esempio:

$$y''' = -5y' + \sin x$$

Quella sopra è un EDO di III ordine normale.

#### Definizione 5 EDO di ordine $n$ lineare

Una EDO di ordine  $n$  si dice lineare se è nella forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0y(x) = f(x), x \in I$$

Dove le funzioni

$$a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$$

sono assegnate (continue) in  $I$

Esempio:

$$xy'' + 5y = \sin x$$

Quando  $f(x) = 0$  allora l'equazione si dice l'**omogenea associata**

Nel nostro caso le equazioni di secondo ordine lineari saranno a **coefficienti costanti**

Vediamo come si risolve il problema della determinazione delle soluzioni di EDO lineari

#### I ordine ( $n=1$ )

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

La considero in forma normale:

$$(1) y'(x) + a(x)y(x) = f(x), x \in [a, b]$$

dove le funzioni  $a(x)$  e  $f(x)$  sono continue in  $[a, b]$

Se  $f(x) = 0$  si ottiene omogenea associata:

$$(2) y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Come si determina l'integrale generale di (1)?

Il teorema che enunciamo vale per tutte le EDO lineari di ordine  $n$

**Teorema 1**

L'integrale generale di (1) in  $[a, b]$  è dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata (2) con un integrale particolare noto di (1)

$$\int gen(1) = \int gen(2) + \int particolare(1)$$

*Dimostrazione.* Sia  $y(x)$  una soluzione qualsiasi di (1) ( $y(x)$  appartiene all'integrale generale di (1)) e sia  $\bar{y}(x)$  una soluzione particolare (nota) di (1). Voglio far vedere è che la loro differenza è una soluzione qualsiasi di (2)

Dunque per ipotesi n ha che:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

$$\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$$

Entrambe soddisfano la (1)

Sottraggo membro a membro le due:

$$y'(x) - \bar{y}'(x) + a(x)y(x) - a(x)\bar{y}(x) = f(x) - f(x)$$

$$y'(x) - \bar{y}'(x) + a(x)[y(x) - \bar{y}(x)] = 0$$

Si può scrivere anche (le derivate raccolte):

$$[y(x) - \bar{y}(x)]' + a(x)[y(x) - \bar{y}(x)] = 0$$

E dunque la funzione  $y(x) - \bar{y}(x) = z(x)$  è soluzione di (2) Quindi:

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x)$$

Viceversa se  $z(x)$  è una qualsiasi soluzione di (2) e  $\bar{y}(x)$  è una soluzione particolare di (1) voglio mostrare che la loro somma è soluzione di (1)

Pongo:

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

Devo mostrare che  $y(x)$  verifica (1)

sapendo che:

$$z'(x) + a(x)z(x) = 0$$

$$\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$$

$$y'(x) = (z(x) + \bar{y}(x))' = z'(x) + \bar{y}'(x) = -a(x)z(x) - a(x)\bar{y}(x) + f(x) = -a(x)[z(x) + \bar{y}(x)] + f(x)$$

E quindi ho dimostrato che:

$$y'(x) = -a(x)y(x) + f(x)$$

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

□

## Lezione 2

**Facciamo vedere che il teorema precedente valeva anche per  $n > 1$**

Supponiamo che  $u$  e  $v$  siano due soluzioni di (1), cioè che:

$$Lu = f \text{ e } Lv = f \text{ su } I$$

La differenza di queste diventano soluzione su  $I = [a, b]$  dell'omogenea associata

Usando la proprietà della linearità:

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda Lu + \mu Lv$$

$$L(u - v) = Lu - Lv = f - f = 0$$

Se indichiamo con  $V_0$  l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ( $Lw = 0$  su  $I = [a, b]$ ) e  $V_0$  è l'insieme delle  $w \in \mathbb{C}^n(I)$  e con  $\bar{u}(t)$  una soluzione nota di (1)

$$u(x) = \bar{u}(x) + w(x)$$

L'uguaglianza sopra, al variare di  $w(x)$  in  $V_0$  ci dà tutte le soluzioni del problema di partenza.

(Il problema quindi, diventa solo di studiare il problema omogeneo)

### Torniamo al I ordine

Adesso ritorniamo al problema di I ordine (in forma normale):

$$(1) \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

dove  $a()$  e  $f()$  sono continue su  $[a, b]$

$$(2) \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Secondo il teorema della prima lezione:

$$y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$$

Come si determina l'insieme di tutte le soluzioni (integrale generale) di (2), cioè:

$$(2) \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0, x \in [a, b]$$

Sia  $A(x)$  una **primitiva** di  $a(x)$ :

$$A(x) = \int a(x) dx$$

Moltiplichiamo i due membri della (2) per  $e^{A(x)}$ :

$$e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}a(x)y(x) = 0, x \in [a, b]$$

La posso scrivere anche (la derivata di  $e^{A(x)}y(x)$ ):

$$(e^{A(x)}y(x))' = e^{A(x)}a(x)y(x) + e^{A(x)}y'(x)$$

quindi (sempre chiaramente nell'intervallo  $[a, b]$ ):

$$(e^{A(x)}y(x))' = 0$$

Questo mi dice che:

$$e^{A(x)}y(x) = \text{costante} = c \in \mathbb{R}$$

porto dall'altra parte:

$$y(x) = ce^{-A(x)}$$

espandendo  $A(x)$ :

$$y(x) = ce^{\int a(x) dx}$$

posso considerare le soluzioni come:

$$y(x) = cz_0$$

dove  $z_0$  è una soluzione particolare di (2).

Infatti  $e^{-A(x)}$  è soluzione di (2)

*Dimostrazione.*

$$e^{-A(x)} = -a(x)e^{-A(x)}$$

ovvero

$$(e^{-A(x)})' + a(x)e^{-A(x)} = 0$$

□

## Determinazione dell'integrale particolare

Sappiamo:

$$(1) \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$(2) \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Cerco l'integrale particolare ad **occhio** oppure uso il **metodo della variazione della costante**

**Metodo della variazione della costante** Cerco questa  $c(x)$  in questa forma:

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

Ovviamente la cerco dopo che so che  $\bar{y}(x)$  è soluzione del problema.

*Dimostrazione.* Poichè  $\bar{y}(x)$  è soluzione di (1) si ha che  $\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$  da cui sostituendo  $\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$ :

$$(c(x)e^{-A(x)})' + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

Deriviamo:

$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

semplifico

$$c'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

$$c'(x) = f(x)e^{A(x)} \rightarrow c(x) = \int f(x)e^{A(x)} dx$$

e dunque:

$$\bar{y}(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)} dx$$

Cioè l'integrale particolare

□

Se metto tutto insieme l'integrale generale diventa:

$$y(x) = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)} dx$$

### Osservazioni sulla formula

$A(x)$  è **una** primitiva di  $a(x)$  scelta una volta per tutte.

**Non** occorre mettere una costante arbitraria (ovvero considerare come  $A(x) + K, K \in \mathbb{R}$ ) poiché l'integrale generale non cambia

**Non** serve neanche nell'integrale perchè verrebbe buttato dentro  $c$  dell'integrale generale

### Esempi

$$y'(x) = 5y(x) + e^x$$

in questo caso  $a(x) = -5$

$$A(x) = - \int 5 \, dx = -5x$$

Quindi:

$$e^{-A(x)} = e^{5x}$$

$$y(x) = ce^{5x} + e^{5x} \int e^x e^{-5x} \, dx = ce^{5x} + e^{5x} \int e^{-4x} \, dx = ce^{5x} + e^{5x} \left( \frac{1}{-4} e^{-4x} \right) = ce^{5x} - \frac{1}{4} e^x$$

Esercizio per casa:

$$u' + \frac{u}{t} = e^t$$

## Lezione 3

Solitamente si suppongono delle condizioni iniziali nel risolvere le equazioni differenziali (problema di Cauchy).

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Praticamente gli integrali della formula generale diventano definiti tra  $x_0$  e  $x$ .

Quindi:

$$y(x) = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) \, dx = ce^{-\int_{x_0}^x a(t) \, dt} + e^{-\int_{x_0}^x a(t) \, dt} \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^s a(t) \, dt} f(s) \, ds$$

$$y(x_0) = y_0 = c$$

Voglio trovare la soluzione generale in questo caso, parto dall'omogenea:

$$y' + x(x)y(x) = 0$$



$$e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} = e^{A(x)}$$

## Il problema di Cauchy

Quindi introduciamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

dove  $x \in I = [a, b]$  e  $x_0 \in I$

con le ipotesi fatte ( $a(x)$  e  $f(x)$  continue in  $I$ ) ha una e una sola soluzione (SOLUZIONE UNICA) con l'espressione esplicita determinata.

### Esempio 1

Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 5y(x) + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$A(x) = \int_0^x a(t) dt = - \int_0^x 5 dt = -5x$$

$$\begin{aligned} y(x) &= 0e^{5x} + e^{5x} \int_0^x e^{-5t} e^t dt = \\ &= e^{5x} \left[ -\frac{1}{4} e^{-4t} \right]_0^x = e^{5x} \left( -\frac{1}{4} e^{-4x} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{5x} \end{aligned}$$

### Esempio 2

Determinare l'integrale generale delle EDO:

$$y' + \frac{1}{\sqrt{x}} y = 1$$

e trovare le eventuali soluzioni tali che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(x) = +\infty$$

Soluzione:

l'equazione è definita per ogni  $x > 0$

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$A(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

L'integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= ce^{-\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} + e^{-\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} \left( \int e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx+1} dx \right) = \\ &= e^{2\sqrt{x}} \left( e + \int e^{2\sqrt{x}} dx \right) \end{aligned}$$

Risolvero l'integrale pongo  $t = 2\sqrt{x}$  quindi  $dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \rightarrow dx = \frac{t}{2} dt$ :

$$\begin{aligned} \int e^{2\sqrt{x}} dx &= \int e^t \frac{t}{2} dt = e^t \frac{t}{2} - \int e^t \frac{1}{2} dt = \\ &= e^t \frac{t}{2} - \frac{1}{2e^t} = \end{aligned}$$

Risostituisco:

$$= e^{2\sqrt{x}} \frac{2\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2} e^{2\sqrt{x}}$$

Ora riscrivo l'integrale generale:

$$y(x) = e^{-2\sqrt{x}} \left[ c + e^{2\sqrt{x}} \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) \right] = ce^{-2\sqrt{x}} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}$$

Adesso soddisfo la richiesta (quali sono le soluzioni che vanno all'infinito)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^{-2\sqrt{x}} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} = +\infty$$

questo vale per  $\forall c \in \mathbb{R}$

### Esempio 3

$$\begin{cases} y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{2} \\ y(-1) = 2 \end{cases} \quad (4)$$

Considero l'intervallo dove sta il  $x_0 = -1$  quindi  $(-\infty, 0)$

$$A(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{t} dt = [2\log|t|]_{-1}^x = 2\log|x| - 2\log|-1| = 2\log|x| =$$

per via dell'intervallo il valore assoluto viene preso col meno:

$$= 2\log(-x)$$

quindi l'integrale generale:

$$y(x) = 2e^{-2\log(-x)} + e^{-2\log(-x)} \left( \int_{-1}^x e^{2\log(-t)} \frac{1}{t^2} dt \right) =$$

uso la proprietà dei logaritmi:

$$= 2e^{\log \frac{1}{x^2}} + e^{\log \frac{1}{x^2}} \int_{-1}^x e^{\log t^2} dt = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \int_{-1}^x 1 dt = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2} [t]_{-1}^x = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}(x+1)$$

## Edo a variabili separabili

Una edo si dice a variabili separabili se è della forma:

$$y'(x) = f(x)g(y(x))$$

Parte che dipende da y viene moltiplicata a quella che dipende da x.

Dove le funzioni f e g sono continue nei loro domini di definizione

Determinare gli eventuali zeri (valori di  $\bar{y}$  tra cui  $g(\bar{y}) = 0$ ) voglio dividere per g per separare le variabili

considerando  $y \neq \bar{y}$  si separano le variabili dividendo per  $g(y)$