

# *ASD Laboratorio 02*

The A(SD)-Team

UniTN

2022-10-18

## ESERCITATORI

- Cristian Consonni ([cristian.consonni@unitn.it](mailto:cristian.consonni@unitn.it))
- Quintino Francesco Lotito ([quintino.lotito@unitn.it](mailto:quintino.lotito@unitn.it))

## TUTOR

- Daniele Cabassi ([daniele.cabassi@studenti.unitn.it](mailto:daniele.cabassi@studenti.unitn.it))
- Gabriele Masina ([gabriele.masina@studenti.unitn.it](mailto:gabriele.masina@studenti.unitn.it))
- Filippo Momesso ([filippo.momesso@studenti.unitn.it](mailto:filippo.momesso@studenti.unitn.it))
- Luca Mosetti ([luca.mosetti-1@studenti.unitn.it](mailto:luca.mosetti-1@studenti.unitn.it))
- Elisa Trento ([elisa.trento@studenti.unitn.it](mailto:elisa.trento@studenti.unitn.it))

## DOMANDE

- Gli esercizi del laboratorio pesano sul voto dell'esame?  
→ No, servono come allenamento.
- E il progetto?  
→ Sì, è necessario passare almeno un progetto per poter fare l'esame; ogni progetto passato dà da 1 a 3 punti bonus.
- Si possono avere i file di input usati su judge?  
→ No, però vi possiamo fornire altri esempi ed aiutarvi a capire quali sono i casi in cui il vostro algoritmo sbaglia. Tenete conto che il primo caso presente su judge è **sempre** il primo esempio fornito nel testo.

20/09	Introduzione
18/10	Ad-hoc
10/11	Grafi 1
24/11	Grafi 2
12/12	Presentazione Progetto 1
13/12	Lab Progetto 1
15/12	Lab Progetto 1

## PROGETTO GRAFI

- Dal 12 al 19 dicembre (consegna ore 18:00);
- Iscrizione dei gruppi al progetto entro **venerdì 9 dicembre**:  
[https://noclick.dev/ASDprog\\_2022-2023](https://noclick.dev/ASDprog_2022-2023) (dovete essere loggati con l'account UniTN)

# CALCOLO COMBINATORIO (I)

Quante sono le **COPPIE** senza ripetizioni e senza tenere conto dell'ordine da un insieme di  $n$  elementi?

NUMERO DI COMBINAZIONI DI 2 ELEMENTI DATI  $n$  SENZA RIPETIZIONI

$$C(n, 2) = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Caso particolare del **COEFFICIENTE BINOMIALE**:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Intuizione (numero di disposizioni di  $k$  elementi da  $n$ , diviso per il numero di permutazioni di  $k$  elementi):

$$C(n, k) = \frac{D(n, k)}{P(k)} = \frac{n!}{(n - k)!} \cdot \frac{1}{k!}$$

## CALCOLO COMBINATORIO (II)

Considerando le ripetizioni:

NUMERO DI COMBINAZIONI DI 2 ELEMENTI DATI  $n$  CON RIPETIZIONE

$$C'(n, 2) = \binom{n+1}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

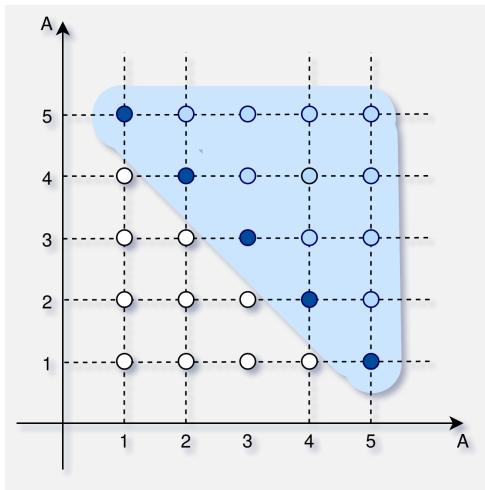
In questo caso:

$$C'(n, k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

Intuizione:

- corrispondenza biunivoca tra combinazione con ripetizioni e combinazioni senza ripetizione  $k$  elementi da  $n + k - 1$

# CALCOLO COMBINATORIO (III)



$$C = \{(i, j) \mid i, j \in A \subseteq N, j \geq i\}$$

## SOTTOSEQ: SOLUZIONE $\mathcal{O}(N^2)$ (I)

### SOLUZIONE $\mathcal{O}(N^2)$

Costruiamo array delle somme:

$$S_i = \sum_{j=1}^i A_j$$

Per ogni sottosequenza, calcoliamo la somma in  $\mathcal{O}(1)$ :

$$\text{Somma da } i \text{ a } j = S_j - S_{i-1}$$



# SOTTOSEQ: SOLUZIONE $\mathcal{O}(N^2)$ (II)

$$S_i = \sum_{j=1}^i A_j$$

Esempio:

5  
2  
-3  
4  
1  
5

Array delle somme:

index	1	2	3	4	5
array	2	-3	4	1	5
S	2	-1	3	4	9

Combinazioni  $(i, j)$ :

$i/j$	1	2	3	4	5
1	2	-1	3	4	9
2	-	-3	1	2	7
3	-	-	4	5	<b>10</b>
4	-	-	-	1	6
5	-	-	-	-	5

La sottosequenza di somma massima conterrà un elemento con indice massimo, sia esso  $i$ :

- $B_i$  la sottosequenza di somma massima che ha come ultimo elemento il numero in posizione  $i$ ;
- assumendo di conoscere  $B_{i-1}$ , procedendo per induzione allora:  
 $B_i = \max(A_i, B_{i-1} + A_i)$ ;
- terminiamo restituendo il valore massimo individuato durante l'induzione:  $\max(B_0, B_1, \dots, B_{N-1})$ .

## ALGORITMO DI KADANE, $\mathcal{O}(N)$

```
int last = 0, mx = 0;
for(int i=0; i<N; i++) {
    in >> cur;
    last = max(cur, cur+last);
    mx = max(mx, last);
}
out << mx << endl;
```

## SOTTOSEQ: SOLUZIONE $\mathcal{O}(N)$ (II)

Esempio:

5  
2  
-3  
4  
1  
5

index	1	2	3	4	5
array	2	-3	4	1	5
last	2	-1	4	5	10
mx	2	2	4	5	<b>10</b>

Soluzione “a forza bruta”  $\mathcal{O}((RC)^3) \sim \mathcal{O}(N^6)$ :

- ❶ Ci sono  $(RC)^2 \sim N^4$  sottomatrici<sup>1</sup>
- ❷ È possibile calcolare la somma di una sottomatrice in meno di  $\mathcal{O}(RC) \sim \mathcal{O}(N^2)$ ?
- ❸ Dobbiamo veramente guardare tutte le sottomatrici?

---

<sup>1</sup>([link di approfondimento](#))

# SOTTOMAT: MATRICE DELLE SOMME (I)

## CALCOLARE LA SOMMA IN $O(1)$

Stessa idea di prima. Riempiamo un array somma ( $O(RC)$ )

$$S[i, j] = \sum_{a=1}^i \sum_{b=1}^j A[a, b]$$

Per calcolare la somma da  $[r_1, c_1]$  a  $[r_2, c_2]$ :

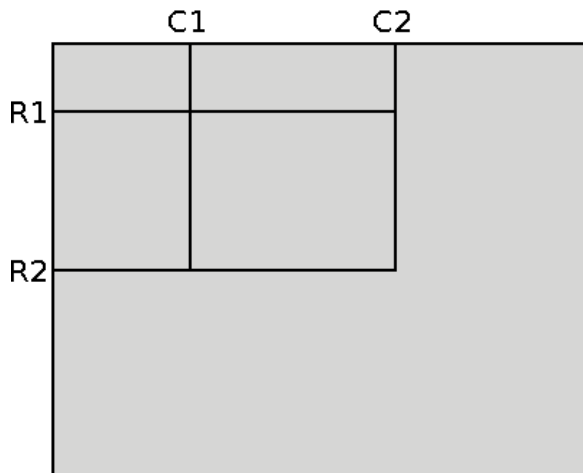
$$S[r_2, c_2] + S[r_1, c_1] - S[r_2, c_1] - S[r_1, c_2]$$

Sfruttando questa idea otteniamo un algoritmo  $O((RC)^2)$ .

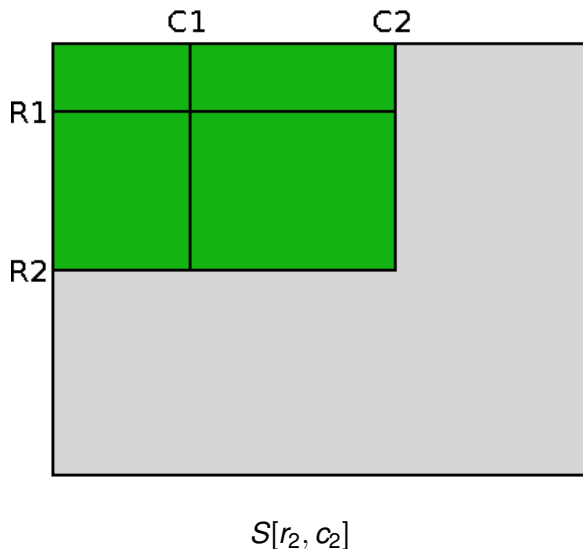
## NOTA IMPLEMENTATIVA

Creando  $S[i, j]$  con un "orlo" di zeri si semplifica la gestione degli indici.

## SOTTOMAT: MATRICE DELLE SOMME (II)

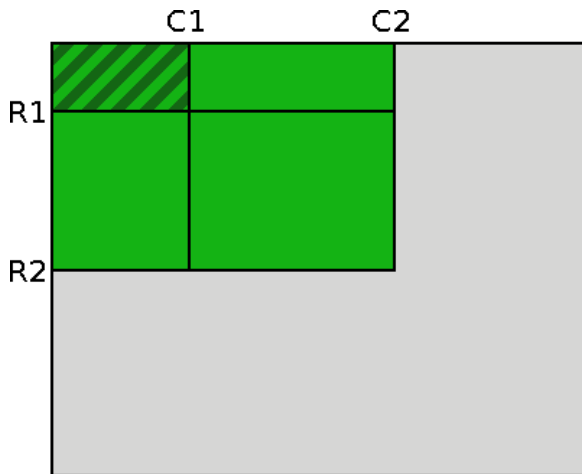


## SOTTOMAT: MATRICE DELLE SOMME (III)



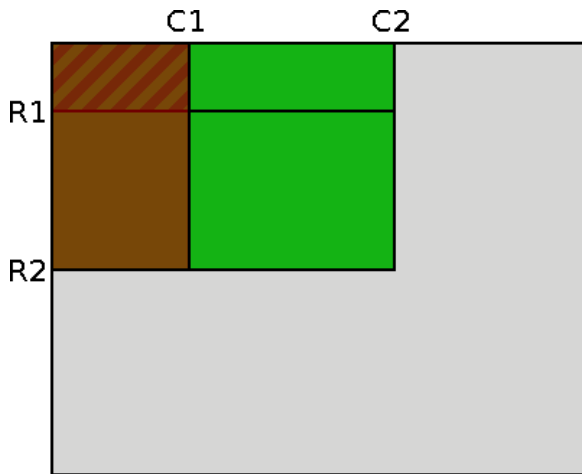


## SOTTOMAT: MATRICE DELLE SOMME (IV)



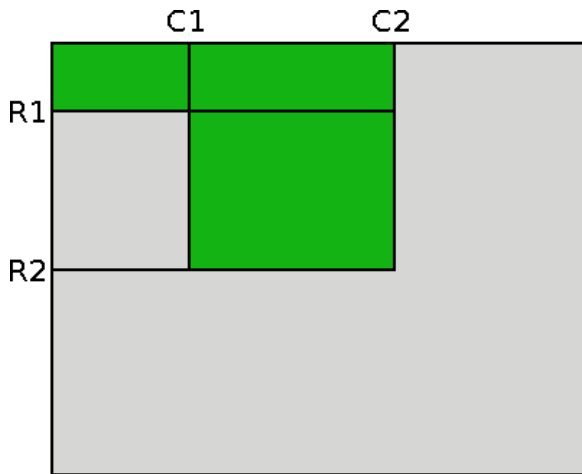
$$S[r_2, c_2] + S[r_1, c_1]$$

## SOTTOMAT: MATRICE DELLE SOMME (V)



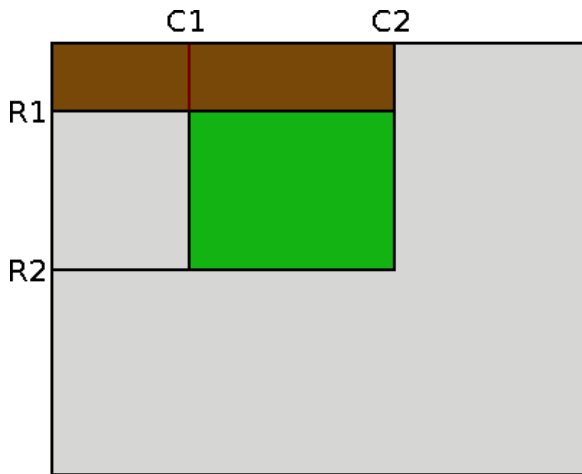
$$S[r_2, c_2] + S[r_1, c_1] - S[r_2, c_1]$$

## SOTTOMAT: MATRICE DELLE SOMME (VI)



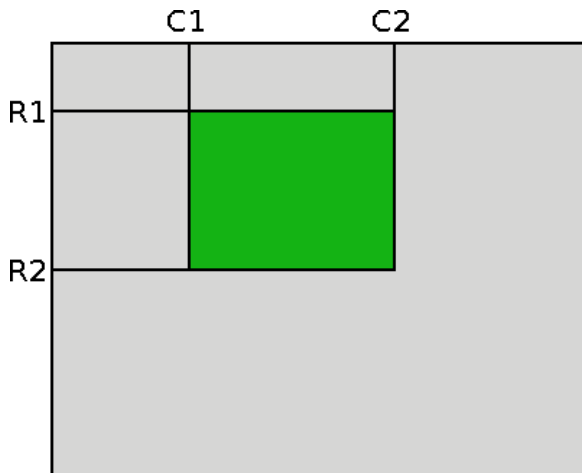
$$S[r_2, c_2] + S[r_1, c_1] - S[r_2, c_1]$$

## SOTTOMAT: MATRICE DELLE SOMME (VII)



$$S[r_2, c_2] + S[r_1, c_1] - S[r_2, c_1] - S[r_1, c_2]$$

## SOTTOMAT: MATRICE DELLE SOMME (VIII)



$$S[r_2, c_2] + S[r_1, c_1] - S[r_2, c_1] - S[r_1, c_2]$$

Potete definire la matrice somma  $S[i, j]$  nel modo seguente:

```
for(int i=0; i<R; i++){  
    for(int j=0; j<C; j++){  
        in>>A[i][j];  
        if(i==0){  
            if(j==0) {  
                S[i][j]=A[i][j];  
            }  
            ...  
            S[i][j]=S[i][j-1] + \  
                    S[i-1][j] - \  
                    S[i-1][j-1] + \  
                    A[i][j];  
            ...  
        }  
    }  
}
```

ma esiste un modo più furbo che vi semplifica la vita.

## SOLUZIONE $\mathcal{O}((RC)^2) \sim \mathcal{O}(N^4)$

- per ogni coppia di righe  $r_s, r_e \rightarrow \mathcal{O}(R^2)$
- per ogni coppia di colonne  $c_s, c_e \rightarrow \mathcal{O}(C^2)$

$\Rightarrow$  calcoliamo la somma  $\rightarrow \mathcal{O}(1)$ :

$$S[r_s, c_s] + S[r_e, c_e] - S[r_e, c_s] - S[r_s, c_e]$$

- possiamo sfruttare la soluzione ottima  $\mathcal{O}(N)$  del problema della sottosequenza di somma massima per trovare la sottomatrice di somma massima?
- consideriamo tutte le sottomatrici che partono dalla colonna<sup>(\*)</sup>  $C_1$  e arrivano alla colonna  $C_2$ , possiamo applicare la sottosequenza di somma massima?
  - ▶ se  $C_1 = C_2$ , stiamo considerando una singola colonna, possiamo applicare facilmente la sottosequenza di somma massima
  - ▶ negli altri casi?

(\*) il discorso è speculare per righe e colonne



# SOTTOMAT: SOLUZIONE $\mathcal{O}(N^3)$ , ESEMPIO (I)

Per ogni coppia  $C_1, C_2$  creiamo un'istanza del problema della sottosequenza di somma massima.

$\Rightarrow$  se  $C_1 = C_2$ :

$$C_1 = C_2 = 2$$

/	1	2	3	4		$(r_1, c_1), (r_2, c_2)$		
1	2	-9	2	3	$\rightsquigarrow$	-9	$(1, 2), (1, 2)$	
2	1	4	5	1		4	$(1, 2), (2, 2)$	$(2, 2), (2, 2)$
3	-2	3	4	1		3	$(1, 2), (3, 2)$	$(2, 2), (3, 2)$ $(3, 2), (3, 2)$

Con Kadane riusciamo a considerare tutte e 6 le possibili sottomatrici.

# SOTTOMAT: SOLUZIONE $\mathcal{O}(N^3)$ , ESEMPIO (II)

Per ogni coppia  $C_1, C_2$  creiamo un'istanza del problema della sottosequenza di somma massima.

$\Rightarrow$  se  $C_1 \neq C_2$ :

$$C_1 = 2; C_2 = 4$$

/	1	2	3	4		$(r_1, c_1), (r_2, c_2)$
1	2	-9	2	3	-4	$(1, 2), (1, 4)$
2	1	4	5	1	10	$(1, 2), (2, 4)$ $(2, 2), (2, 4)$
3	-2	3	4	1	8	$(1, 2), (3, 4)$ $(2, 2), (3, 4)$ $(3, 2), (3, 4)$

Con Kadane troviamo che la sottosequenza massima è 18 ( $10 + 8$ ) e corrisponde alla sottomatrice  $(2, 2), (3, 4)$

# SOLUZIONE $\mathcal{O}(N^3)$

Per ogni coppia di colonne  $C_1, C_2$ :

- 1 Costruiamo l'array  $S[1..R]$ , di dimensione pari al numero di righe  $R$ ;
- 2 Inseriamo in  $S[i]$  *“la somma degli elementi appartenenti alla riga  $i$  e compresi fra le colonne  $C_1, C_2$ ”*. In formula:  
$$S[i] = \sum_{j=C_1}^{C_2} A[i][j];$$
- 3 Usiamo l'algoritmo lineare per la sottosequenza di somma massima su  $S$ .

$\Rightarrow \mathcal{O}(RC^2)$ , oppure  $\mathcal{O}(R^2C)$

I sorgenti sono disponibili su

<http://judge.science.unitn.it/slides/>

- Vecchio progetto di algoritmi
- Slides sul sito (secondo progetto, a. a. 2014/2015):  
<http://judge.science.unitn.it/slides/asd14b/prog2.pdf>
- Esiste soluzione con Programmazione Dinamica
- Esiste anche soluzione ad-hoc.

# PROBLEMI

Testi completi su <https://judge.science.unitn.it/>.

## SORTING

Implementate un algoritmo di ordinamento  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

## INTERVALLI

Dato un insieme di intervalli temporali, scoprire il periodo più lungo non coperto da alcun intervallo.

## SORTING PESATO

Avete un array di  $N$  interi, con i numeri da 1 a  $N$  (in ordine sparso). Ad ogni turno potete scambiare le posizioni di due interi, pagando la loro somma. Qual è il numero minimo di turni per ordinare l'array? Quant'è il prezzo minimo?