

Approccio matematico alla planarità dei grafi

Università degli studi di Trento



Martino Papa

Day Month Year

Indice

0.1	Preconcetti e notazioni	2
0.1.1	Teoria dei grafi	2
0.1.2	Topologia	5
0.2	Risultati teorici sfruttati nell'algoritmo	6

Al momento il documento potrebbe contenere anche definizioni o teoremi “di troppo”. Ho scritto tutto ciò che mi sembrava utile al fine di apprendere fino in fondo l’argomento.

0.1 Preconcetti e notazioni

Per capire sta roba serve sapere ste robe prima

0.1.1 Teoria dei grafi

Definizione 0.1 (Grafo). Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ dove:

- V è un insieme di vertici (**vertex**);
- E è un insieme di coppie di nodi (u, v) , $u, v \in V$ dette archi o lati (**edge**);

Nei grafi **orientati** le coppie in E sono ordinate in quelli non orientati no.

Definizione 0.2 (Adiacenza). Un vertice v si dice adiacente a u se esiste $(u, v) \in E$. NB: nei grafi non orientati l'adiacenza è una relazione simmetrica.

Definizione 0.3 (Arco incidente). Un arco (u, v) si dice incidente da u a v .

Definizione 0.4 (Grado). Nel caso di grafi orientati definiamo:

- **grado entrante** di un nodo come il numero di archi incidenti su esso;
- **grado uscente** di un nodo come il numero di archi incidenti da esso.

Per i grafi non orientati avremo invece un'unica definizione:

- il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.

Definizione 0.5 (Cammino). Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un cammino C di lunghezza k è una sequenza di nodi u_0, u_1, \dots, u_k t.c.

$$(u_i, u_{i+1}) \in E \text{ per } 0 \leq i \leq k-1 \quad (1)$$

Definizione 0.6 (Grafis isomorfi). Siano $G = (V(G), E(G))$, $H = (V(H), E(H))$ due grafi. Diremo G isomorfo a H se $\exists \theta : V(G) \rightarrow V(H)$ t.c. θ è un isomorfismo e

$$\theta(E(G)) \doteq \{\theta(uv) \text{ t.c. } uv \in E(G)\} = E(H) \quad (2)$$

Definizione 0.7 (Grafo completo). Un grafo $G = (V, E)$ si dice completo se

$$\forall u, v \in V \exists (u, v) \in E \quad (3)$$

Definiamo K_n un grafo completo con n vertici.

Definizione 0.8 (Grafo bipartito). Un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice bipartito se V può essere diviso in due sottoinsiemi X, Y t.c.

$$\forall (u, v) \in E \text{ vale } u \in X, v \in Y \text{ oppure } u \in Y, v \in X \quad (4)$$

Un grafo bipartito può avere al più $|X| \cdot |Y|$ archi.

Definiamo inoltre $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo che soddisfa

$$|X| = m, |Y| = n, \varepsilon \doteq |E| = mn \quad (5)$$

Definizione 0.9 (Connessione). Un grafo non orientato $G = (V, E)$ è detto **connesso** se

$$\forall u, v \in V \exists (u, v) \in E \quad (6)$$

Un sottografo connesso massimale di un grafo non orientato è detto **componente connessa**.

Definizione 0.10 (Vertex-connectivity). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo **vertex-connectivity** κ il minimo numero di vertici da eliminare per sconnettere G .

Definizione 0.11 (Grafo k-connesso). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo G **k-connesso** se $|V| > k$ e $\kappa \geq k$ dove κ corrisponde alla vertex-connectivity. Informalmente un grafo è detto k-connesso se rimane connesso rimuovendo $k' < k$ vertici qualsiasi.

Teorema 0.1 (Grafo 2-connesso (Non separabile)). *Un grafo non orientato $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$ è 2-connesso \Leftrightarrow ogni coppia di vertici (u, v) è connessa da almeno 2 cammini internamente disgiunti.*

Definizione 0.12 (Cut vertex). Vertici che se eliminati sconnettono il grafo.

Definizione 0.13 (Blocco). Definiamo blocchi di un grafo i sottografi 2-connessi massimali.

Definizione 0.14 (Cammini internamente disgiunti). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, siano $a, b \in V$ due vertici. Due cammini da a a b a, v_1, \dots, v_n, b e a, u_1, \dots, u_n, b . Essi si dicono internamente disgiunti se

$$v_i \neq u_j \quad \forall i, j \quad (7)$$

Definizione 0.15 (Ciclo di Hamilton). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo ciclo di Hamilton un ciclo che contiene tutti i vertici del grafo una sola volta.

Definiamo G hamiltoniano se G contiene un ciclo di hamilton.

Definizione 0.16 (Suddivisione). Dato un grafo G definiamo suddivisione (subdivision) di G i grafi ottenuti da G rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più. In altre parole una suddivisione di G è un grafo ottenuto da esso inserendo dei vertici “all’interno dei lati”.



Figura 1: esempio suddivisione

Definizione 0.17 (Contrazione). Operazione inversa della suddivisione, consiste nell’contrarre un arco avente un endpoint di grado 2.

Definizione 0.18 (Grafo omeomorfi). Due grafi G_1, G_2 si dicono topologicamente equivalenti o omeomorfi se possono essere trasformati l’uno nell’altro attraverso operazioni di suddivisione o contrazione degli archi.

Denotiamo l’insieme dei grafi omeomorfi a G con TG .

Definizione 0.19 (Minore). H è detto minore di G se H è un grafo ottenuto da G tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi, vertici o contrazione di archi.

Definizione 0.20 (Facial walk). Sia G grafo, G^ψ una sua immersione nel piano. Un cammino chiuso C frontiera di una faccia F di G^ψ è detto facial walk di F .

Definizione 0.21 (Grado di una faccia). Definiamo $\deg(F)$ grado di una faccia F come la lunghezza del suo facial walk.

Definizione 0.22 (Grafo semplice). Grafo contenente un numero finito di nodi.

Definizione 0.23 (Grafo planare). Un grafo non orientato G si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

0.1.2 Topologia

Definizione 0.24 (n-cella chiusa). Spazio topologico omeomorfo ad una palla chiusa n-dimensionale.

Definizione 0.25 (Complesso cellulare (CW-complesso)). Spazio topologico ottenuto incollando tra loro un insieme di celle chiuse.

Definizione 0.26 (Caratteristica di eulero). Sia $\tau \subset \mathbb{R}^n$ un complesso cellulare composto da k_i i-celle $i = 0, \dots, n$. Definiamo caratteristica di eulero

$$\chi(\tau) = k_0 - k_1 + k_2 - \dots - k_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i k_i \quad (8)$$

Definizione 0.27 (Cammini omotopi). Siano $f, g \in \mathcal{C}^0(X; Y)$. Diciamo f e g omotopi $f \sim g$ se esiste $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ t.c.

$$\forall x \in X \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases} \quad (9)$$

Informalmente questo vale se una mappa può essere “deformata con continuità” nell'altra.

Definizione 0.28 (Spazi omotopicamente equivalenti). X, Y si dicono omotopicamente equivalenti ($X \sim Y$) se $\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ t.c.

- $g \circ f \sim id_X$
- $f \circ g \sim id_Y$

Informalmente X, Y saranno omotopicamente equivalenti se possono essere trasformati l'uno nell'altro con operazioni di deformazione.

Lemma 0.1 (Omotopicamente invariante). *La caratteristica di eulero è un omotopicamente invariante, ovvero*

$$X \sim Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \quad (10)$$

Proposizione 0.1 (Invarianza topologica). *La caratteristica di eulero è un invariante topologico, ovvero*

$$X \simeq Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \quad (11)$$

diciamo che $X \simeq Y$ se X e Y sono omeomorfi.

Lemma 0.2. *Ogni poliedro semplice può essere identificato come un grafo planare usando i vertici del poliedro come vertici del grafo e gli spigoli del poliedro come archi del grafo.*

Proposizione 0.2. *Sia τ un poliedro semplice allora $\chi(\tau) = 2$*

Dimostrazione. Questo risultato segue direttamente dal lemma precedente e dal teorema 0.1. \square

0.2 Risultati teorici sfruttati nell'algoritmo

Teorema 0.2. *Sia G un grafo planare avente k componenti connesse. Sia G^φ una immersione di G nel piano, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = k + 1 \quad (12)$$

dove V è il numero di vertici (k_0), ϵ il numero di archi (k_1) e f il numero di facce (k_2).

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di archi ϵ :

caso base $\epsilon = 0$, $V = k$ vertici, $f = 1$ quindi è soddisfatta $V - \epsilon + f = k + 1$

passo induttivo $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$, aggiungiamo un arco al grafo

1. *il nuovo arco è un loop*, in questo caso $V \rightarrow V$, $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$, $f \rightarrow f + 1$, $k \rightarrow k$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \quad (13)$$

2. *il nuovo arco è tra due vertici appartenenti alla stessa componente connessa*, anche in questo caso $V \rightarrow V$, $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$, $f \rightarrow f + 1$, $k \rightarrow k$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \quad (14)$$

3. *il nuovo arco connette due componenti che erano sconnesse*, in questo caso $V \rightarrow V$, $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$, $f \rightarrow f$, $k \rightarrow k - 1$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + f = (k - 1) + 1 = k' + 1 \quad (15)$$

dove $k' = k - 1$ è il numero di componenti connesse dopo l'aggiunta dell'arco.

\square

Corollario 0.1 (Formula di Eulero). *Sia G un grafo planare connesso, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = 2 \quad (16)$$

Dimostrazione. Direttamente dal teorema 0.2 con $k = 1$. \square

Proposizione 0.3. *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare, questo implica anche che i vertici di grado 2 non influenzano la planarità del grafo.*

Dimostrazione. Sia G grafo non planare, a, b due archi che si intersecano nell'immersione G^φ , è evidente che suddividere a o b non andrebbe ad influire sulla non planarità del grafo. \square

Lemma 0.3. *Sia G un grafo planare, G^ψ una sua immersione nel piano, F_1, \dots, F_f le facce di G^ψ allora*

$$\sum_{i=1}^f \deg(F_i) = 2\epsilon \quad (17)$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che ogni arco (u, v) è incidente esattamente su due facce di G^ψ . \square

Proposizione 0.4. *Sia G planare, ϵ il numero di archi, V il numero di vertici. Vale allora*

$$\epsilon \leq 3V - 3 \quad (18)$$

Inoltre se supponiamo $V \geq 3$ vale

$$\epsilon \leq 3V - 6 \quad (19)$$

Dimostrazione. Sia $V < 3$. In questo caso il lemma è una diretta conseguenza della formula di Eulero (Teorema 0.1).

Sia $V \geq 3$. G planare \Rightarrow ogni faccia ha almeno 3 lati ovvero $\deg(F_i) \geq 3 \forall i$. Per il lemma 0.3 vale quindi

$$2\epsilon = \sum_{i=1}^f \deg(F_i) \geq \sum_{i=1}^f 3 = 3f \quad (20)$$

Per la formula di eulero segue inoltre $V + f - \epsilon = 2$ da cui abbiamo, moltiplicando per 3 e riarrangiando i termini

$$3\epsilon = 3V + 3f - 6 \quad (21)$$

applicando ora $3f \leq 2\epsilon$ otteniamo la tesi. \square

Lemma 0.4. K_5 e $K_{3,3}$ sono grafi non planari.

Dimostrazione. K_5 : il grafo completo K_n ha $\epsilon = \frac{n(n-1)}{2}$ archi. Supponendo per assurdo K_5 planare dovrebbe valere la proposizione 0.4 ovvero, essendo $V = 5 \geq 3$

$$10 = \frac{n(n-1)}{2} = \epsilon \leq 3V - 6 = 9 \rightarrow \text{falso} \quad (22)$$

$K_{3,3}$: Supponendo per assurdo $K_{3,3}$ planare, sapendo $\epsilon = 3 * 3 = 9$, $V = 6$ dalla formula di eulero 0.1 otterremmo $f = 2 - V + \epsilon = 5$.

Siccome $K_{3,3}$ è bipartito, esso non contiene cicli composti da 3 archi, quindi ogni faccia ha almeno 4 lati, ovvero $\deg(F) \geq 4 \forall F$ e vale $\sum_{i=1}^f \deg(F_i) \geq 4 * f = 20$. Applicando ora il lemma 0.3 otteniamo l'assurdo

$$20 \leq \sum_{i=1}^f \deg(F_i) = 2\epsilon = 18 \rightarrow \text{falso} \quad (23)$$

□

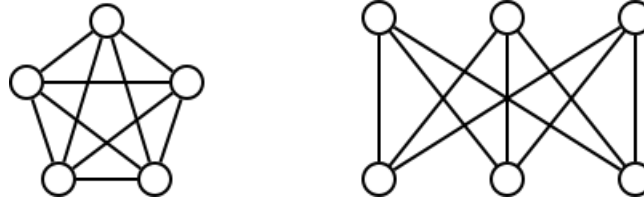


Figura 2: immersione nel piano di K_5 e $K_{3,3}$

Lemma 0.5. Un grafo separabile è planare se e solo se tutti i suoi blocchi sono planari.

Dimostrazione. \Rightarrow : banale, è evidente che se un grafo è planare allora anche i suoi sottografi lo sono. \Leftarrow : notiamo che due blocchi differenti hanno al più un elemento nell'intersezione, se così non fosse i due blocchi sarebbero 2-connessi confutando l'ipotesi di massimalità. Proseguiamo ora per induzione sul numero di blocchi $|B|$, dove $B = \{b_i\}_{i \in I}$ è l'insieme dei blocchi.

- *caso base:* G 2-connesso quindi $|B| = 1$, $B = \{G\}$ e la tesi equivale a “ G planare $\Rightarrow G$ planare”.

- *passo induttivo*: sia G grafo composto da n cicli. Rimuoviamo da G un blocco b che si intersechi solo con un altro blocco b' nel vertice v , questo deve esistere perchè altrimenti sarebbe presente un ciclo di blocchi, essi sarebbero dunque 2-connessi e di conseguenza non massimali \nexists ; potrebbe anche essere che tutti i blocchi siano sconnessi e quindi la loro intersezione sarebbe sempre vuota, tuttavia questo è un caso banale in quanto è evidente che un grafo è planare se e solo se tutte le sue componenti connesse sono planari.

Il grafo G' risultante dalla rimozione del blocco b è per ipotesi induttiva planare, disegniamo ora le immersioni nel piano di b e G' facendo in modo che il punto di intersezione v appaia in entrambe le immersioni nella faccia esterna. Possiamo ora unire tra loro le due immersioni ottenendo che $G = G' \cup b$ è planare.

□

Questo lemma ci permette di scegliere sempre un grafo 2-connesso come grafo di partenza senza perdere generalità.

Lemma 0.6. *Un grafo è planare se e solo se tutte le sue componenti connesse sono planari.*

Dimostrazione. caso banale dimostrato nel lemma precedente (0.5).

□

Teorema 0.3. *Se G ha un minore $K_{3,3}$ allora contiene un sottografo $TK_{3,3}$. Se G ha un minore K_5 allora contiene un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 .*

Dimostrazione. Supponiamo che G abbia un minore $TK_{3,3}$ o TK_5 , se nel ottenere il minore non è stata coinvolta nessuna operazione di contrazione degli archi allora esso sarà anche un sottografo di G . Altrimenti sia G_0, \dots, G_k sequenza di grafi ottenuta da G , G_0 sottografo di G , l'arco e_i di G_{i-1} è contratto per ottenere G_i e G_k è $K_{3,3}$ o K_5 .

□

Teorema 0.4 (Teorema di Kuratowski). *Un grafo G è planare se e solo se non contiene sottografi $TK_{3,3}$ o TK_5 .*

Dimostrazione. “ \Rightarrow ”: dato il lemma 0.4, è evidente che se un grafo G è planare non contiene sottografi omeomorfi a $K_{3,3}$ o K_5 .

“ \Leftarrow ”: per provare questo lato dell'implicazione dimostriamo la tesi equivalente “ G non planare \Rightarrow contiene $TK_{3,3}$ o TK_5 ”.

Consideriamo G grafo semplice, 2-connesso con ϵ archi e procediamo per induzione su ϵ . Notiamo che se $\epsilon \leq 6$, per il lemma 0.4 G è planare e la tesi è vera. Supponiamo quindi il teorema vero per i grafi aventi $\epsilon - 1$ archi.

Consideriamo ora G non planare, $(a, b) \in E(G)$ un arco qualsiasi, $G' = G - (a, b)$. Se G' non planare allora per ipotesi induttiva contiene $TK_{3,3}$ o TK_5 , i quali saranno quindi di conseguenza contenuti anche in G .

Se invece G' planare, denotando con $\kappa(a, b)$ il numero di cammini internamente disgiunti da a a b in G' , siccome G è 2-connesso sappiamo $\kappa(a, b) \geq 1$.

1. *caso* $\kappa(a, b) = 1$: questo implica che G' ha un cut vertex u in ogni cammino da a a b . Aggiungiamo gli archi (a, u) e b, u a G' se non sono già presenti e otteniamo un grafo H . Denotiamo Ha , Hb i blocchi di H contenenti a e b .

Dimostriamo ora che Ha o Hb è non planare, se entrambi fossero planari infatti potremmo disegnare le loro immersioni nel piano lasciando gli archi (a, u) , (b, u) nella faccia esterna, “incollarli” tra loro al vertice u rimuovere (a, u) , (b, u) e ottenere così un’immersione planare di G . Questo è un assurdo essendo G non planare.

Supponiamo quindi Ha non planare, per ipotesi induttiva contiene come sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 . Tale sottografo essendo G' planare conterrà l’arco (a, u) , rimpiazzando quindi (a, u) con il cammino formato dall’arco (a, b) e dal cammino $b \rightarrow u$ in Hb , il risultato sarà un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 in G .

2. *caso* $\kappa(a, b) = 2$: siano $P1$, $P2$ due cammini internamente disgiunti da a a b in G' . Siccome $\kappa(a, b) = 2 \exists v \in P1, u \in P2$ t.c. tutti i cammini da $a \rightarrow b$ contengono uno tra $\{u, v\}$ e $G' - \{u, v\}$ è disconnesso. Siano ora Ka , Kb le due componenti connesse di $G' - \{u, v\}$ contenenti rispettivamente a e b . Denotiamo inoltre $G'_a \doteq Ka \cup \{u, v\}$, $G'_b \doteq Kb \cup \{u, v\}$.

Aggiungiamo ora un vertice x a G'_a adiacente a u, v, a e similmente un vertice y a G'_b adiacente a u, v, b , denotiamo questi grafi Ha , Hb .

Proviamo ora per assurdo almeno uno tra Ha e Hb è non planare. Siccome il vertice x ha grado 3 in Ha , ci sono 3 facce incidenti su esso. Disegniamo un’immersione planare di Ha facendo in modo che le facce contenenti gli archi (u, x) , (v, x) siano le facce esterne. Similmente disegniamo Hb in modo che (u, y) , (v, y) siano nella faccia esterna. Ora “incolliamo” Ha e Hb nei vertici u e v , cancelliamo x e y e aggiungendo l’arco (a, b) otterremmo una immersione planare di $G \rightarrow \mathbb{Z}$. Concludiamo quindi che uno tra Ha e Hb è non planare.

Supponendo Ha non planare allora per ipotesi induttiva contiene un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 . Se tale sottografo non contiene x allora è contenuto anche in G e la dimostrazione è conclusa. Supponiamo quindi che il sottografo contenga x , in questo caso Hb sarà 2-connesso, in quanto G lo è. Hb conterrebbe quindi due cammini internamente disgiunti $b \rightarrow u$, $b \rightarrow v$. Questi due cam-

mini assieme all'arco (a, b) possono essere utilizzati per rimpiazzare gli archi $(u, x), (v, x), (a, x)$ di Ha ottenendo così un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 in G .

3. *caso $\kappa(a, b) \geq 3$* : siano P_1, P_2, P_3 due cammini internamente disgiunti da a a b in G' . Consideriamo una immersione nel piano di G' , ogni coppia di cammini $P_1 \cup P_2, P_1 \cup P_3, P_2 \cup P_3$ crea un ciclo la cui immersione nel piano sarà una curva di Jordan. Uno dei tre cammini sarà quindi contenuto nella curva di Jordan formata dagli altri, supponiamo P_2 contenuto all'interno di $P_1 \cup P_3$. L'arco (a, b) può essere immerso all'interno di $P_1 \cup P_2$, all'interno di $P_2 \cup P_3$ o all'esterno di $P_1 \cup P_3$. Siccome G è non planare ognuna di queste tre regioni P_i deve contenere un cammino da un vertice interno a P_i a uno interno a P_j . Sia P_{12} un cammino da $u_1 \in P_1$ a $u_2 \in P_2$, P_{13} da $v_1 \in P_1$ a $u_3 \in P_3$, P_{23} da $u_2 \in P_2$ a $v_3 \in P_3$.

$\forall i$ se $u_i \neq v_i$ contraiamo l'arco tra essi, aggiungendo ora l'arco (a, b) il grafo risultante sarà un minore TK_5 di G . Quindi per il teorema 0.3 G conterrà un sottografo TK_5 o $TK_{3,3}$.

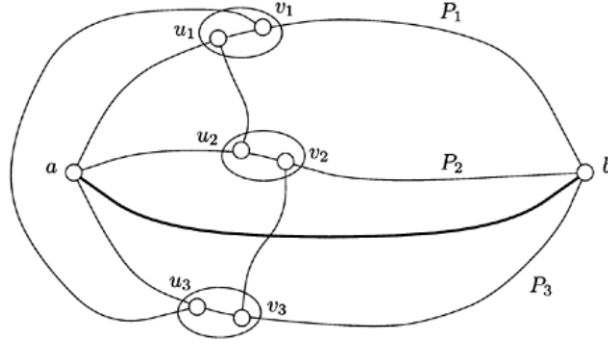


Figura 3: minore TK_5 di G

□

Si può riformulare il teorema precedente in termine di minori.

Teorema 0.5 (Teorema di Wagner). *Un grafo G è planare se e solo se non ha $K_{3,3}$ o K_5 come minori.*