Grafi Planari

Università degli studi di Trento

Martino Papa

Day Month Year

Indice

Al momento il documento potrebbe contenere anche definizioni o teoremi “di troppo”. Ho scritto tutto ciò che mi sembrava utile al fine di apprendere fino in fondo l’argomento.

Definizione 0.1 (Grafo)**.** Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ dove:

- V è un insieme di vertici (**vertex**);
- E è un insieme di coppie di nodi $(u, v),\ u, v \in V$ dette archi o lati (**edge**);

Nei grafi **orientati** le coppie in E sono ordinate in quelli non orientati no.

Definizione 0.2 (Adiacenza)**.** Un vertice v si dice adiacente a u se esiste $(u, v) \in E$.
NB: nei grafi non orientati l'adiacenza è una relazione simmetrica.

Definizione 0.3 (Incidente)**.** Un arco (u, v) si dice incidente da u a v.

Definizione 0.4 (Grado)**.** Nel caso di grafi orientati definiamo:

- **grado entrante** di un nodo come il numero di archi incidenti su esso;
- **grado uscente** di un nodo come il numero di archi incidenti da esso.

Per i grafi non orientati avremo invece un'unica definizione:

- il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.

Definizione 0.5 (Cammino)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un cammino C di lunghezza k è una sequenza di nodi $u_0, u_1 \ldots, u_k$ t.c.

$$(u_i, u_{i+1}) \in E \text{ per } 0 \leq i \leq k-1 \tag{1}$$

Definizione 0.6 (Grafi isomorfi)**.** Siano $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$ due grafi. Diremo G isomorfo a H se $\exists \theta : V(G) \to V(H)$ t.c. θ è un isomorfismo e

$$\theta(E(G)) \doteq \{\theta(uv)\ t.c.\ uv \in E(G)\} = E(H) \tag{2}$$

Definizione 0.7 (Grafo completo)**.** Un grafo $G = (V, E)$ si dice completo se

$$\forall u, v \in V\ \exists (u, v) \in E \tag{3}$$

Definiamo K_n un grafo completo con n vertici.

Definizione 0.8 (Grafo bipartito)**.** Un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice bipartito se V può essere diviso in due sottoinsiemi X, Y t.c.

$$\forall (u, v) \in E \text{ vale } u \in X,\ v \in Y \text{ oppure } u \in Y,\ v \in X \tag{4}$$

Un grafo bipartito può avere al più $|X| \cdot |Y|$ archi.
Definaiamo inoltre $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo che soddisfa

$$|X| = m,\ |Y| = n,\ \varepsilon \doteq |E| = mn \tag{5}$$

Definizione 0.9 (Connessione)**.** Un grafo non orientato $G = (V, E)$ è detto **connesso** se

$$\forall u, v \in V \ \exists (u, v) \in E \tag{6}$$

Un sottografo connesso massimale di un grafo non orientato è detto **componente connessa**.

Definizione 0.10 (Vertex-connectivity)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo **vertex-connectivity** κ il minimo numero di vertici da eliminare per sconnettere G.

Definizione 0.11 (Grafo k-connesso)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo G **k-connesso** se $|V| > k$ e $\kappa \geq k$ dove κ corrisponde alla vertex-connectivity. Informalmente un grafo è detto k-connesso se rimane connesso rimuovendo $k' < k$ vertici qualsiasi.

Teorema 0.1 (Grafo 2-connesso)**.** *Un grafo non orientato $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$ è 2-connesso $\Leftrightarrow$ ogni coppia di vertici (u, v) è connessa da almeno 2 cammini internamente disgiunti.*

Definizione 0.12 (Cammini internamente disgiunti)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, siano $a, b \in V$ due cammini da a a b $a, v_1, \ldots, v_n, b$, $a, u_1, \ldots, u_n, b$. Essi si dicono internamente disgiunti se

$$v_i \neq u_j \ \forall i, j \tag{7}$$

Definizione 0.13 (Ciclo di Hamilton)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo ciclo di Hamilton un ciclo che contiene tutti i vertici del grafo.
Definiamo G hamiltoniano se G contiene un ciclo di hamilton.

Definizione 0.14 (Grafo planare)**.** Un grafo non orientato G si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

Teorema 0.2 (Formula di Eulero)**.** *Sia G un grafo planare connesso con V vertici e ϵ lati. Sia G^φ una immersione di G nel piano avente f faccie. Allora*

$$V + f - \epsilon = 2 \tag{8}$$

Definizione 0.15 (Suddivisione)**.** Dato un grafo G definiamo suddivisione (subdivision) di G i grafi ottenuti da G rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più.
Definiamo inoltre contrazione l'operazione inversa della suddivisione.

Lemma 0.1. *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare.*

Definizione 0.16 (Grafi omeomorfi)**.** Due grafi G_1, G_2 si dicono topologicamente equivalenti o omeomorfi se possono essere trasformati l'uno nell'altro attraverso operazioni di suddivisione o contrazione degli archi.
Denotiamo l'insieme dei grafi omeomorfi a G con TG.

Definizione 0.17 (Minore)**.** Sia H un grafo ottenuto da G tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi o vertici o contrazione di archi. H è detto minore di G.

Teorema 0.3 (Teorema di Kuratowski)**.** *Un grafo G è planare se e solo se non contiene sottografi $TK_{3,3}$ o TK_5.*

Si può riformulare il teorema precedente in termine di minori.

Teorema 0.4 (Teorema di Wagner)**.** *Un grafo G è planare se e solo se non ha $K_{3,3}$ o K_5 come minori.*

Teoria usata direttamente nell'algoritmo Hopcroft Trajan

Lemma 0.2. *Sia G un grafo planare, G^ψ una sua immersione nel piano, $F_1, \ldots, F_f$ le faccie di G^ψ allora*

$$\sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) = 2\epsilon \tag{9}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che ogni arco (u, v) è incedente esattamente su due faccie di G^ψ. □

Lemma 0.3. *Sia G planare, ϵ il numero di archi, V il numero di vertici. Vale allora*

$$\epsilon \leq 3V - 3 \tag{10}$$

Inoltre se supponiamo $V \geq 3$ vale

$$\epsilon \leq 3V - 6 \tag{11}$$

Dimostrazione. Sia $V < 3$. In questo caso il lemma è una diretta conseguenza della formula di Eulero (0.2).
Sia $V \geq 3$. G planare $\Rightarrow$ ogni faccia ha almeno 3 lati ovvero $\deg(F_i) \geq 3\ \forall i$. Per il lemma (9) vale quindi

$$2\epsilon = \sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) \geq \sum_{i=1}^{f} 3 = 3f \tag{12}$$

Per la formula di eulero segue inoltre $V + f - \epsilon = 2$ da cui abbiamo, moltiplicando per 3 e riarrangiando i termini

$$3\epsilon = 3V + 3f - 6 \tag{13}$$

applicando ora $3f \leq 2\epsilon$ otteniamo la tesi. $\square$