Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Elaborato finale

Grafi panari

Algoritmo di Boyer per l'immersione planare e l'isolamento di un sottografo di Kuratowski

Supervisore
Alberto Montresor

Laureando
Martino Papa

Anno accademico 2023/2024

Indice

Al momento il documento potrebbe contenere anche definizioni o teoremi “di troppo”. Ho scritto tutto ciò che mi sembrava utile al fine di apprendere fino in fondo l’argomento.

0.1 Preconcetti e notazioni

Per capire sta roba serve sapere ste robe prima

0.1.1 Teoria dei grafi

Definizione 0.1 (Grafo)**.** Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ dove:

- V è un insieme di vertici (**vertex**);
- E è un insieme di coppie di nodi $(u, v),\ u, v \in V$ dette archi o lati (**edge**);

Nei grafi **orientati** le coppie in E sono ordinate in quelli non orientati no.

Definizione 0.2 (Adiacenza)**.** Un vertice v si dice adiacente a u se esiste $(u, v) \in E$.
NB: nei grafi non orientati l'adiacenza è una relazione simmetrica.

Definizione 0.3 (Arco incidente)**.** Un arco (u, v) si dice incidente da u a v.

Definizione 0.4 (Grado)**.** Nel caso di grafi orientati definiamo:

- **grado entrante** di un nodo come il numero di archi incidenti su esso;
- **grado uscente** di un nodo come il numero di archi incidenti da esso.

Per i grafi non orientati avremo invece un'unica definizione:

- il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.

Definizione 0.5 (Cammino)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un cammino C di lunghezza k è una sequenza di nodi $u_0, u_1 \dots, u_k$ t.c.

$$(u_i, u_{i+1}) \in E \text{ per } 0 \le i \le k-1 \tag{1}$$

Definizione 0.6 (Grafi isomorfi)**.** Siano $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$ due grafi. Diremo G isomorfo a H se $\exists\theta : V(G) \to V(H)$ t.c. θ è un isomorfismo e

$$\theta(E(G)) \doteq \{\theta(uv)\ t.c.\ uv \in E(G)\} = E(H) \tag{2}$$

Definizione 0.7 (Grafo completo)**.** Un grafo $G = (V, E)$ si dice completo se

$$\forall u, v \in V\ \exists(u, v) \in E \tag{3}$$

Definiamo K_n un grafo completo con n vertici.

Definizione 0.8 (Grafo bipartito)**.** Un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice bipartito se V può essere diviso in due sottoinsiemi X, Y t.c.

$$\forall(u, v) \in E \text{ vale } u \in X,\ v \in Y \text{ oppure } u \in Y,\ v \in X \tag{4}$$

Un grafo bipartito può avere al più $|X| \cdot |Y|$ archi.
Definaiamo inoltre $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo che soddisfa

$$|X| = m,\ |Y| = n,\ \varepsilon \doteq |E| = mn \tag{5}$$

Definizione 0.9 (Connessione)**.** Un grafo non orientato $G = (V, E)$ è detto **connesso** se

$$\forall u, v \in V\ \exists(u, v) \in E \tag{6}$$

Un sottografo connesso massimale di un grafo non orientato è detto **componente connessa**.

Definizione 0.10 (Vertex-connectivity)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo **vertex-connectivity** κ il minimo numero di vertici da eliminare per sconnettere G.

Definizione 0.11 (Grafo k-connesso)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo G **k-connesso** se $|V| > k$ e $\kappa \geq k$ dove κ corrisponde alla vertex-connectivity.
Informalmente un grafo è detto k-connesso se rimane connesso rimuovendo $k' < k$ vertici qualsiasi.

Teorema 0.1 (Grafo 2-connesso (Non separabile))**.** *Un grafo non orientato $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$ è 2-connesso $\Leftrightarrow$ ogni coppia di vertici (u, v) è connessa da almeno 2 cammini internamente disgiunti.*

Definizione 0.12 (Cut vertex)**.** Vertoci che se eliminati sconnettono il grafo.

Definizione 0.13 (Blocco)**.** Definiamo blocchi di un grafo i sottografi 2-connessi massimali.

Definizione 0.14 (Cammini internamente disgiunti)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, siano $a, b \in V$ due cammini da a a b $a, v_1, \ldots, v_n, b$, $a, u_1, \ldots, u_n, b$. Essi si dicono internamente disgiunti se

$$v_i \neq u_j \ \forall i, j \tag{7}$$

Definizione 0.15 (Ciclo di Hamilton)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo ciclo di Hamilton un ciclo che contiene tutti i vertici del grafo una sola volta.
Definiamo G hamiltoniano se G contiene un ciclo di hamilton.

Definizione 0.16 (Suddivisione)**.** Dato un grafo G definiamo suddivisione (subdivision) di G i grafi ottenuti da G rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più. In altre parole una suddivisione di G è un grafo ottenuto da esso inserendo dei vertici "all'interno dei lati".

Figura 1: esempio suddivisione

Definizione 0.17 (Contrazione)**.** Operazione inversa della suddivisione, consiste nell'contrarre un arco avente un endpoint di grado 2.

Definizione 0.18 (Grafi omeomorfi)**.** Due grafi G_1, G_2 si dicono topologicamente equivalenti o omeomorfi se possono essere trasformati l'uno nell'altro attraverso operazioni di suddivisione o contrazione degli archi.
Denotiamo l'insieme dei grafi omeomorfi a G con TG.

Definizione 0.19 (Minore)**.** H è detto minore di G se H è un grafo ottenuto da G tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi, vertici o contrazione di archi.

Definizione 0.20 (Facial walk)**.** Sia G grafo, G^ψ una sua immersione nel piano. Un cammino chiuso C frontiera di una faccia F di G^ψ è detto facial walk di F.

Definizione 0.21 (Grado di una faccia)**.** Definaiamo $\deg(F)$ grado di una faccia F come la lunghezza del suo facial walk.

Definizione 0.22 (Grafo semplice)**.** Grafo contentente un numero finito di nodi.

Definizione 0.23 (Grafo planare)**.** Un grafo non orientato G si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

0.1.2 Topologia

Definizione 0.24 (n-cella chiusa)**.** Spazio topologico omeomorfo ad una palla chiusa n-dimensionale.

Definizione 0.25 (Complesso cellulare (CW-complesso))**.** Spazio topologico ottenuto incollando tra loro un insieme di celle chiuse.

Definizione 0.26 (Caratteristica di eulero)**.** Sia $\tau \subset \mathbb{R}^n$ un complesso cellulare composto da k_i i-celle $i = 0, \dots, n$. Definiamo caratteristica di eulero

$$\chi(\tau) = k_0 - k_1 + k_2 - \dots k_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i k_i \tag{8}$$

Definizione 0.27 (Cammini omotopi)**.** Siano $f, g \in \mathcal{C}^0(X; Y)$. Diciamo f e g omotope $f \sim g$ se esiste $H : X \times [0, 1] \to Y$ t.c.

$$\forall x \in X \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases} \tag{9}$$

Informalmente questo vale se una mappa può essere "deformata con continutià" nell'altra.

Definizione 0.28 (Spazi omotopicamente equivalenti)**.** X, Y si dicono omotopicamente equivalenti ($X \sim Y$) se $\exists f : X \to Y, g : Y \to X$ t.c.

- $g \circ f \sim id_X$
- $f \circ g \sim id_Y$

Informalmente X, Y saraano omotopicamente equivalenti se possono essere trasformati l'uno nell'altro con operazioni di deformazione.

Lemma 0.1 (Omotopicamente invariante)**.** *La caratteristica di eulero è un omotopicamente invariante, ovvero*

$$X \sim Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \tag{10}$$

Proposizione 0.1 (Invarianza topologica)**.** *La caratteristica di eulero è un invariante topologico, ovvero*

$$X \simeq Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \tag{11}$$

diciamo che $X \simeq Y$ se X e Y sono omeomorfi.

Lemma 0.2. *Ogni poliedro semplice può essere identificato come un grafo planare usando i vertici del poliedro come vertici del grafo e gli spigoli del poliedro come archi del grafo.*

Proposizione 0.2. *Sia τ un poliedro semplice allora $\chi(\tau) = 2$*

Dimostrazione. Questo risultato segue direttamente dal lemma precedente e dal teorema **??**. □