# Grafi Planari

Università degli studi di Trento

Martino Papa

Day Month Year

# Indice



Al momento il documento potrebbe contenere anche definizioni o teoremi “di troppo”. Ho scritto tutto ciò che mi sembrava utile al fine di apprendere fino in fondo l’argomento.

## 0.1 Teoria dei grafi

**Definizione 0.1** (Grafo)**.** Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ dove:

- $V$ è un insieme di vertici (**vertex**);
- $E$ è un insieme di coppie di nodi $(u, v),\ u, v \in V$ dette archi o lati (**edge**);

Nei grafi **orientati** le coppie in $E$ sono ordinate in quelli non orientati no.

**Definizione 0.2** (Adiacenza)**.** Un vertice $v$ si dice adiacente a $u$ se esiste $(u, v) \in E$. NB: nei grafi non orientati l'adiacenza è una relazione simmetrica.

**Definizione 0.3** (Incidente)**.** Un arco $(u, v)$ si dice incidente da $u$ a $v$.

**Definizione 0.4** (Grado)**.** Nel caso di grafi orientati definiamo:

- **grado entrante** di un nodo come il numero di archi incidenti su esso;
- **grado uscente** di un nodo come il numero di archi incidenti da esso.

Per i grafi non orientati avremo invece un'unica definizione:

- il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.

**Definizione 0.5** (Cammino)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un cammino $C$ di lunghezza $k$ è una sequenza di nodi $u_0, u_1 \ldots, u_k$ t.c.

$$(u_i, u_{i+1}) \in E \text{ per } 0 \leq i \leq k - 1 \tag{1}$$

**Definizione 0.6** (Grafi isomorfi)**.** Siano $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$ due grafi. Diremo $G$ isomorfo a $H$ se $\exists\theta : V(G) \to V(H)$ t.c. $\theta$ è un isomorfismo e

$$\theta(E(G)) \doteq \{\theta(uv)\ t.c.\ uv \in E(G)\} = E(H) \tag{2}$$

**Definizione 0.7** (Grafo completo)**.** Un grafo $G = (V, E)$ si dice completo se

$$\forall u, v \in V\ \exists(u, v) \in E \tag{3}$$

Definiamo $K_n$ un grafo completo con $n$ vertici.

**Definizione 0.8** (Grafo bipartito)**.** Un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice bipartito se $V$ può essere diviso in due sottoinsiemi $X, Y$ t.c.

$$\forall (u, v) \in E \text{ vale } u \in X,\ v \in Y \text{ oppure } u \in Y,\ v \in X \tag{4}$$

Un grafo bipartito può avere al più $|X| \cdot |Y|$ archi.
Definaiamo inoltre $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo che soddisfa

$$|X| = m,\ |Y| = n,\ \varepsilon \doteq |E| = mn \tag{5}$$

**Definizione 0.9** (Connessione)**.** Un grafo non orientato $G = (V, E)$ è detto **connesso** se

$$\forall u, v \in V\ \exists (u, v) \in E \tag{6}$$

Un sottografo connesso massimale di un grafo non orientato è detto **componente connessa**.

**Definizione 0.10** (Vertex-connectivity)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo **vertex-connectivity** $\kappa$ il minimo numero di vertici da eliminare per sconnettere $G$.

**Definizione 0.11** (Grafo k-connesso)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo $G$ **k-connesso** se $|V| > k$ e $\kappa \geq k$ dove $\kappa$ corrisponde alla vertex-connectivity. Informalmente un grafo è detto k-connesso se rimane connesso rimuovendo $k' < k$ vertici qualsiasi.

**Teorema 0.1** (Grafo 2-connesso)**.** *Un grafo non orientato $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$ è 2-connesso $\Leftrightarrow$ ogni coppia di vertici $(u, v)$ è connessa da almeno 2 cammini internamente disgiunti.*

**Definizione 0.12** (Cammini internamente disgiunti)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, siano $a, b \in V$ due cammini da $a$ a $b$ $a, v_1, \ldots, v_n, b$, $a, u_1, \ldots, u_n, b$. Essi si dicono internamente disgiunti se

$$v_i \neq u_j\ \forall i, j \tag{7}$$

**Definizione 0.13** (Ciclo di Hamilton)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo ciclo di Hamilton un ciclo che contiene tutti i vertici del grafo una sola volta.
Definiamo $G$ hamiltoniano se $G$ contiene un ciclo di hamilton.

**Definizione 0.14** (Suddivisione)**.** Dato un grafo $G$ definiamo suddivisione (subdivision) di $G$ i grafi ottenuti da $G$ rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più. In altre parole una suddivisione di $G$ è un grafo ottenuto da esso inserendo dei vertici "all'interno dei lati".

Figura 1: esempio suddivisione

**Definizione 0.15** (Contrazione)**.** Operazione inversa della suddivisione, consiste nell'contrarre un arco avente un endpoint di grado 2.

**Definizione 0.16** (Grafi omeomorfi)**.** Due grafi $G_1, G_2$ si dicono topologicamente equivalenti o omeomorfi se possono essere trasformati l'uno nell'altro attraverso operazioni di suddivisione o contrazione degli archi.
Denotiamo l'insieme dei grafi omeomorfi a $G$ con $TG$.

**Definizione 0.17** (Minore)**.** Sia $H$ un grafo ottenuto da $G$ tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi o vertici o contrazione di archi. $H$ è detto minore di $G$.

**Definizione 0.18** (Facial walk)**.** Sia $G$ grafo, $G^\psi$ una sua immersione nel piano. Un cammino chiuso $C$ in $G$ frontiera di una faccia di $G^\psi$ è detto facial walk di $G^\psi$.

**Definizione 0.19.** Definaiamo grado di una faccia $F$ $\deg(F)$ come la lunghezza del suo facial walk.

## 0.2 Topologia

**Definizione 0.20** (n-cella chiusa)**.** Spazio topologico omeomorfo ad una palla chiusa n-dimensionale.

**Definizione 0.21** (Complesso cellulare (CW-complesso))**.** Spazio topologico ottenuto incollando tra loro un insieme di celle chiuse.

**Definizione 0.22** (Caratteristica di eulero)**.** Sia $\tau \subset \mathbb{R}^n$ un complesso cellulare composto da $k_i$ i-celle $i = 0, \ldots, n$. Definiamo caratteristica di eulero

$$\chi(\tau) = k_0 - k_1 + k_2 - \ldots k_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i k_i \tag{8}$$

**Definizione 0.23** (Cammini omotopi)**.** Siano $f, g \in \mathcal{C}^0(X; Y)$. Diciamo $f$ e $g$ omotope $f \sim g$ se esiste $H : X \times [0, 1] \to Y$ t.c.

$$\forall x \in X \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases} \tag{9}$$

Informalmente questo vale se una mappa può essere "deformata con continutià" nell'altra.

**Definizione 0.24** (Spazi omotopicamente equivalenti)**.** $X, Y$ si dicono omotopicamente equivalenti ($X \sim Y$) se $\exists f : X \to Y, g : Y \to X$ t.c.

- $g \circ f \sim id_X$
- $f \circ g \sim id_Y$

Informalmente $X, Y$ saraano omotopicamente equivalenti se possono essere trasformati l'uno nell'altro con operazioni di deformazione.

**Lemma 0.1** (Omotopicamente invariante)**.** *La caratteristica di eulero è un omotopicamente invariante, ovvero*

$$X \sim Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \tag{10}$$

**Proposizione 0.1** (Invarianza topologica)**.** *La caratteristica di eulero è un invariante topologico, ovvero*

$$X \simeq Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \tag{11}$$

*diciamo che $X \simeq Y$ se $X$ e $Y$ sono omeomorfi.*

**Lemma 0.2.** *Ogni poliedro semplice può essere identificato come un grafo planare usando i vertici del poliedro come vertici del grafo e gli spigoli del poliedro come archi del grafo.*

**Proposizione 0.2.** *Sia $\tau$ un poliedro semplice allora $\chi(\tau) = 2$*

*Dimostrazione.* Questo risultato segue direttamente dal lemma precedente e dal teorema 0.1. $\square$

## 0.3 Grafi planari

**Definizione 0.25** (Grafo planare)**.** Un grafo non orientato $G$ si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

**Teorema 0.2.** *Sia $G$ un grafo planare avente $k$ componenti connesse. Sia $G^\varphi$ una immersione di $G$ nel piano, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = k + 1 \tag{12}$$

*dove $V$ è il numero di vertici ($k_0$), $\epsilon$ il numero di archi ($k_1$) e $f$ il numero di facce ($k_2$).*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sul numero di archi $\epsilon$:
caso base $\epsilon = 0$, $V = k$ vertici, $f = 1$ quindi è soddisfatta $V - \epsilon + f = k + 1$
passo induttivo $\epsilon \to \epsilon + 1$, aggiungiamo un arco al grafo

1. *il nuovo arco è un loop*, in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f + 1$, $k \to k$ e quindi
$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \tag{13}$$
2. *il nuovo arco è tra due vertici appartenenti alla stessa componente connessa*, anche in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f + 1$, $k \to k$ e quindi
$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \tag{14}$$
3. *il nuovo arco connette due componenti che erano sconnesse*, in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f$, $k \to k - 1$ e quindi
$$V - (\epsilon + 1) + f = (k - 1) + 1 = k' + 1 \tag{15}$$
dove $k' = k - 1$ è il numero di componenti connesse dopo l'aggiunta dell'arco.

□

**Corollario 0.1** (Formula di Eulero)**.** *Sia $G$ un grafo planare connesso, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = 2 \tag{16}$$

*Dimostrazione.* Direttamente dal teorema 0.2 con $k = 1$. □

**Proposizione 0.3.** *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare, questo implica anche che i vertici di grado 2 non influenzano la planarità del grafo.*

*Dimostrazione.* Sia $G$ grafo non planare, $a, b$ i due archi che si intersecano nell'immersione $G^\varphi$ è evidente che suddividere $a$ o $b$ non andrebbe ad influire sulla non planarità del grafo. □

**Lemma 0.3.** *Sia $G$ un grafo planare, $G^\psi$ una sua immersione nel piano, $F_1, \dots, F_f$ le facce di $G^\psi$ allora*

$$\sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) = 2\epsilon \tag{17}$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal fatto che ogni arco $(u, v)$ è incedente esattamente su due facce di $G^\psi$. □

**Lemma 0.4.** *Sia $G$ planare, $\epsilon$ il numero di archi, $V$ il numero di vertici. Vale allora*

$$\epsilon \leq 3V - 3 \tag{18}$$

*Inoltre se supponiamo $V \geq 3$ vale*

$$\epsilon \leq 3V - 6 \tag{19}$$

*Dimostrazione.* Sia $V < 3$. In questo caso il lemma è una diretta conseguenza della formula di Eulero (Teorema 0.1).
Sia $V \geq 3$. $G$ planare $\Rightarrow$ ogni faccia ha almeno 3 lati ovvero $\deg(F_i) \geq 3\ \forall i$. Per il lemma 0.3 vale quindi

$$2\epsilon = \sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) \geq \sum_{i=1}^{f} 3 = 3f \tag{20}$$

Per la formula di eulero segue inoltre $V + f - \epsilon = 2$ da cui abbiamo, moltiplicando per 3 e riarrangiando i termini

$$3\epsilon = 3V + 3f - 6 \tag{21}$$

applicando ora $3f \leq 2\epsilon$ otteniamo la tesi. □

**Teorema 0.3** (Teorema di Kuratowski)**.** *Un grafo $G$ è planare se e solo se non contiene sottografi $TK_{3,3}$ o $TK_5$.*

*Dimostrazione.* □

Si può riformulare il teorema precedente in termine di minori.

**Teorema 0.4** (Teorema di Wagner)**.** *Un grafo $G$ è planare se e solo se non ha $K_{3,3}$ o $K_5$ come minori.*