

# Approccio matematico alla planarità dei grafi

Università degli studi di Trento



Martino Papa

Day Month Year

# Indice

0.1	Preconcetti e notazioni . . . . .	2
0.1.1	Teoria dei grafi . . . . .	2
0.1.2	Topologia . . . . .	5
0.2	Risultati teorici sfruttati nell’algoritmo . . . . .	6

Al momento il documento potrebbe contenere anche definizioni o teoremi “di troppo”. Ho scritto tutto ciò che mi sembrava utile al fine di apprendere fino in fondo l’argomento.

## 0.1 Preconcetti e notazioni

Per capire sta roba serve sapere ste robe prima

### 0.1.1 Teoria dei grafi

**Definizione 0.1** (Grafo). Un grafo è una coppia  $G = (V, E)$  dove:

- $V$  è un insieme di vertici (**vertex**);
- $E$  è un insieme di coppie di nodi  $(u, v)$ ,  $u, v \in V$  dette archi o lati (**edge**);

Nei grafi **orientati** le coppie in  $E$  sono ordinate in quelli non orientati no.

**Definizione 0.2** (Adiacenza). Un vertice  $v$  si dice adiacente a  $u$  se esiste  $(u, v) \in E$ . NB: nei grafi non orientati l'adiacenza è una relazione simmetrica.

**Definizione 0.3** (Arco incidente). Un arco  $(u, v)$  si dice incidente da  $u$  a  $v$ .

**Definizione 0.4** (Grado). Nel caso di grafi orientati definiamo:

- **grado entrante** di un nodo come il numero di archi incidenti su esso;
- **grado uscente** di un nodo come il numero di archi incidenti da esso.

Per i grafi non orientati avremo invece un'unica definizione:

- il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.

**Definizione 0.5** (Cammino). Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Un cammino  $C$  di lunghezza  $k$  è una sequenza di nodi  $u_0, u_1, \dots, u_k$  t.c.

$$(u_i, u_{i+1}) \in E \text{ per } 0 \leq i \leq k-1 \quad (1)$$

**Definizione 0.6** (Grafis isomorfi). Siano  $G = (V(G), E(G))$ ,  $H = (V(H), E(H))$  due grafi. Diremo  $G$  isomorfo a  $H$  se  $\exists \theta : V(G) \rightarrow V(H)$  t.c.  $\theta$  è un isomorfismo e

$$\theta(E(G)) \doteq \{\theta(uv) \text{ t.c. } uv \in E(G)\} = E(H) \quad (2)$$

**Definizione 0.7** (Grafo completo). Un grafo  $G = (V, E)$  si dice completo se

$$\forall u, v \in V \exists (u, v) \in E \quad (3)$$

Definiamo  $K_n$  un grafo completo con  $n$  vertici.

**Definizione 0.8** (Grafo bipartito). Un grafo non orientato  $G = (V, E)$  si dice bipartito se  $V$  può essere diviso in due sottoinsiemi  $X, Y$  t.c.

$$\forall (u, v) \in E \text{ vale } u \in X, v \in Y \text{ oppure } u \in Y, v \in X \quad (4)$$

Un grafo bipartito può avere al più  $|X| \cdot |Y|$  archi.

Definiamo inoltre  $K_{m,n}$  il grafo bipartito completo che soddisfa

$$|X| = m, |Y| = n, \varepsilon \doteq |E| = mn \quad (5)$$

**Definizione 0.9** (Connessione). Un grafo non orientato  $G = (V, E)$  è detto **connesso** se

$$\forall u, v \in V \exists (u, v) \in E \quad (6)$$

Un sottografo connesso massimale di un grafo non orientato è detto **componente connessa**.

**Definizione 0.10** (Vertex-connectivity). Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Definiamo **vertex-connectivity**  $\kappa$  il minimo numero di vertici da eliminare per sconnettere  $G$ .

**Definizione 0.11** (Grafo k-connesso). Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Diremo  $G$  **k-connesso** se  $|V| > k$  e  $\kappa \geq k$  dove  $\kappa$  corrisponde alla vertex-connectivity. Informalmente un grafo è detto k-connesso se rimane connesso rimuovendo  $k' < k$  vertici qualsiasi.

**Teorema 0.1** (Grafo 2-connesso (Non separabile)). *Un grafo non orientato  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 3$  è 2-connesso  $\Leftrightarrow$  ogni coppia di vertici  $(u, v)$  è connessa da almeno 2 cammini internamente disgiunti.*

**Definizione 0.12** (Cut vertex). Vertici che se eliminati sconnettono il grafo.

**Definizione 0.13** (Blocco). Definiamo blocchi di un grafo i sottografi 2-connessi massimali.

**Definizione 0.14** (Cammini internamente disgiunti). Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato, siano  $a, b \in V$  due vertici. Due cammini da  $a$  a  $b$   $a, v_1, \dots, v_n, b$  e  $a, u_1, \dots, u_n, b$ . Essi si dicono internamente disgiunti se

$$v_i \neq u_j \quad \forall i, j \quad (7)$$

**Definizione 0.15** (Ciclo di Hamilton). Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Definiamo ciclo di Hamilton un ciclo che contiene tutti i vertici del grafo una sola volta.

Definiamo  $G$  hamiltoniano se  $G$  contiene un ciclo di hamilton.

**Definizione 0.16** (Suddivisione). Dato un grafo  $G$  definiamo suddivisione (subdivision) di  $G$  i grafi ottenuti da  $G$  rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più. In altre parole una suddivisione di  $G$  è un grafo ottenuto da esso inserendo dei vertici “all’interno dei lati”.



Figura 1: esempio suddivisione

**Definizione 0.17** (Contrazione). Operazione inversa della suddivisione, consiste nell’contrarre un arco avente un endpoint di grado 2.

**Definizione 0.18** (Grafì omeomorfi). Due grafì  $G_1, G_2$  si dicono topologicamente equivalenti o omeomorfi se possono essere trasformati l’uno nell’altro attraverso operazioni di suddivisione o contrazione degli archi.

Denotiamo l’insieme dei grafì omeomorfi a  $G$  con  $TG$ .

**Definizione 0.19** (Minore).  $H$  è detto minore di  $G$  se  $H$  è un grafo ottenuto da  $G$  tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi, vertici o contrazione di archi.

**Definizione 0.20** (Facial walk). Sia  $G$  grafo,  $G^\psi$  una sua immersione nel piano. Un cammino chiuso  $C$  frontiera di una faccia  $F$  di  $G^\psi$  è detto facial walk di  $F$ .

**Definizione 0.21** (Grado di una faccia). Definiamo  $\deg(F)$  grado di una faccia  $F$  come la lunghezza del suo facial walk.

**Definizione 0.22** (Grafo semplice). Grafo contenente un numero finito di nodi.

**Definizione 0.23** (Grafo planare). Un grafo non orientato  $G$  si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

### 0.1.2 Topologia

**Definizione 0.24** (n-cella chiusa). Spazio topologico omeomorfo ad una palla chiusa n-dimensionale.

**Definizione 0.25** (Complesso cellulare (CW-complesso)). Spazio topologico ottenuto incollando tra loro un insieme di celle chiuse.

**Definizione 0.26** (Caratteristica di eulero). Sia  $\tau \subset \mathbb{R}^n$  un complesso cellulare composto da  $k_i$  i-celle  $i = 0, \dots, n$ . Definiamo caratteristica di eulero

$$\chi(\tau) = k_0 - k_1 + k_2 - \dots k_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i k_i \quad (8)$$

**Definizione 0.27** (Cammini omotopi). Siano  $f, g \in \mathcal{C}^0(X; Y)$ . Diciamo  $f$  e  $g$  omotopi  $f \sim g$  se esiste  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  t.c.

$$\forall x \in X \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases} \quad (9)$$

Informalmente questo vale se una mappa può essere “deformata con continuità” nell'altra.

**Definizione 0.28** (Spazi omotopicamente equivalenti).  $X, Y$  si dicono omotopicamente equivalenti ( $X \sim Y$ ) se  $\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  t.c.

- $g \circ f \sim id_X$
- $f \circ g \sim id_Y$

Informalmente  $X, Y$  saraano omotopicamente equivalenti se possono essere trasformati l'uno nell'altro con operazioni di deformazione.

**Lemma 0.1** (Omotopicamente invariante). *La caratteristica di eulero è un omotopicamente invariante, ovvero*

$$X \sim Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \quad (10)$$

**Proposizione 0.1** (Invarianza topologica). *La caratteristica di eulero è un invariante topologico, ovvero*

$$X \simeq Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \quad (11)$$

*diciamo che  $X \simeq Y$  se  $X$  e  $Y$  sono omeomorfi.*

**Lemma 0.2.** *Ogni poliedro semplice può essere identificato come un grafo planare usando i vertici del poliedro come vertici del grafo e gli spigoli del poliedro come archi del grafo.*

**Proposizione 0.2.** *Sia  $\tau$  un poliedro semplice allora  $\chi(\tau) = 2$*

*Dimostrazione.* Questo risultato segue direttamente dal lemma precedente e dal teorema 0.1.  $\square$

## 0.2 Risultati teorici sfruttati nell'algoritmo

**Teorema 0.2.** *Sia  $G$  un grafo planare avente  $k$  componenti connesse. Sia  $G^\varphi$  una immersione di  $G$  nel piano, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = k + 1 \quad (12)$$

dove  $V$  è il numero di vertici ( $k_0$ ),  $\epsilon$  il numero di archi ( $k_1$ ) e  $f$  il numero di facce ( $k_2$ ).

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sul numero di archi  $\epsilon$ :

caso base  $\epsilon = 0$ ,  $V = k$  vertici,  $f = 1$  quindi è soddisfatta  $V - \epsilon + f = k + 1$

passo induttivo  $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$ , aggiungiamo un arco al grafo

1. *il nuovo arco è un loop*, in questo caso  $V \rightarrow V$ ,  $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$ ,  $f \rightarrow f + 1$ ,  $k \rightarrow k$  e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \quad (13)$$

2. *il nuovo arco è tra due vertici appartenenti alla stessa componente connessa*, anche in questo caso  $V \rightarrow V$ ,  $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$ ,  $f \rightarrow f + 1$ ,  $k \rightarrow k$  e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \quad (14)$$

3. *il nuovo arco connette due componenti che erano sconnesse*, in questo caso  $V \rightarrow V$ ,  $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$ ,  $f \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow k - 1$  e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + f = (k - 1) + 1 = k' + 1 \quad (15)$$

dove  $k' = k - 1$  è il numero di componenti connesse dopo l'aggiunta dell'arco.

$\square$

**Corollario 0.1** (Formula di Eulero). *Sia  $G$  un grafo planare connesso, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = 2 \quad (16)$$

*Dimostrazione.* Direttamente dal teorema 0.2 con  $k = 1$ .  $\square$

**Proposizione 0.3.** *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare, questo implica anche che i vertici di grado 2 non influenzano la planarità del grafo.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  grafo non planare,  $a, b$  due archi che si intersecano nell'immersione  $G^\varphi$ , è evidente che suddividere  $a$  o  $b$  non andrebbe ad influire sulla non planarità del grafo.  $\square$

**Lemma 0.3.** *Sia  $G$  un grafo planare,  $G^\psi$  una sua immersione nel piano,  $F_1, \dots, F_f$  le facce di  $G^\psi$  allora*

$$\sum_{i=1}^f \deg(F_i) = 2\epsilon \quad (17)$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal fatto che ogni arco  $(u, v)$  è incidente esattamente su due facce di  $G^\psi$ .  $\square$

**Proposizione 0.4.** *Sia  $G$  planare,  $\epsilon$  il numero di archi,  $V$  il numero di vertici. Vale allora*

$$\epsilon \leq 3V - 3 \quad (18)$$

*Inoltre se supponiamo  $V \geq 3$  vale*

$$\epsilon \leq 3V - 6 \quad (19)$$

*Dimostrazione.* Sia  $V < 3$ . In questo caso il lemma è una diretta conseguenza della formula di Eulero (Teorema 0.1).

Sia  $V \geq 3$ .  $G$  planare  $\Rightarrow$  ogni faccia ha almeno 3 lati ovvero  $\deg(F_i) \geq 3 \forall i$ . Per il lemma 0.3 vale quindi

$$2\epsilon = \sum_{i=1}^f \deg(F_i) \geq \sum_{i=1}^f 3 = 3f \quad (20)$$

Per la formula di eulero segue inoltre  $V + f - \epsilon = 2$  da cui abbiamo, moltiplicando per 3 e riarrangiando i termini

$$3\epsilon = 3V + 3f - 6 \quad (21)$$

applicando ora  $3f \leq 2\epsilon$  otteniamo la tesi.  $\square$



**Lemma 0.4.**  $K_5$  e  $K_{3,3}$  sono grafi non planari.

*Dimostrazione.*  $K_5$ : il grafo completo  $K_n$  ha  $\epsilon = \frac{n(n-1)}{2}$  archi. Supponendo per assurdo  $K_5$  planare dovrebbe valere la proposizione 0.4 ovvero, essendo  $V = 5 \geq 3$

$$10 = \frac{n(n-1)}{2} = \epsilon \leq 3V - 6 = 9 \rightarrow \text{falso} \quad (22)$$

$K_{3,3}$ : Supponendo per assurdo  $K_{3,3}$  planare, sapendo  $\epsilon = 3 * 3 = 9$ ,  $V = 6$  dalla formula di eulero 0.1 otterremmo  $f = 2 - V + \epsilon = 5$ .

Siccome  $K_{3,3}$  è bipartito, esso non contiene cicli composti da 3 archi, quindi ogni faccia ha almeno 4 lati, ovvero  $\deg(F) \geq 4 \forall F$  e vale  $\sum_{i=1}^f \deg(F_i) \geq 4 * f = 20$ . Applicando ora il lemma 0.3 otteniamo l'assurdo

$$20 \leq \sum_{i=1}^f \deg(F_i) = 2\epsilon = 18 \rightarrow \text{falso} \quad (23)$$

□

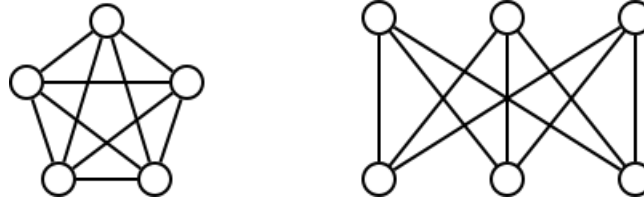


Figura 2: immersione nel piano di  $K_5$  e  $K_{3,3}$

**Lemma 0.5.** Un grafo separabile è planare se e solo se tutti i suoi blocchi sono planari.

*Dimostrazione.* “ $\Rightarrow$ ”: banale, è evidente che se un grafo è planare allora anche i suoi sottografi lo sono.

“ $\Leftarrow$ ”: notiamo che due blocchi differenti hanno al più un elemento nell'intersezione, se così non fosse i due blocchi sarebbero 2-connessi confutando l'ipotesi di massimalità. Proseguiamo ora per induzione sul numero di blocchi  $|B|$ , dove  $B = \{b_i\}_{i \in I}$  è l'insieme dei blocchi.

- *caso base*:  $G$  2-connesso quindi  $|B| = 1$ ,  $B = \{G\}$  e la tesi equivale a “ $G$  planare  $\Rightarrow G$  planare”.

- *passo induttivo*: sia  $G$  grafo composto da  $n$  cicli. Rimuoviamo da  $G$  un blocco  $b$  che si intersechi solo con un altro blocco  $b'$  nel vertice  $v$ , questo deve esistere perchè altrimenti sarebbe presente un ciclo di blocchi, essi sarebbero dunque 2-connessi e di conseguenza non massimali  $\nexists$ ; potrebbe anche essere che tutti i blocchi siano sconnessi e quindi la loro intersezione sarebbe sempre vuota, tuttavia questo è un caso banale in quanto è evidente che un grafo è planare se e solo se tutte le sue componenti connesse sono planari.

Il grafo  $G'$  risultante dalla rimozione del blocco  $b$  è per ipotesi induttiva planare, disegniamo ora le immersioni nel piano di  $b$  e  $G'$  facendo in modo che il punto di intersezione  $v$  appaia in entrambe le immersioni nella faccia esterna. Possiamo ora unire tra loro le due immersioni ottenendo che  $G = G' \cup b$  è planare.

□

Questo lemma ci permette di scegliere sempre un grafo 2-connesso come grafo di partenza senza perdere generalità.

**Lemma 0.6.** *Un grafo è planare se e solo se tutte le sue componenti connesse sono planari.*

*Dimostrazione.* caso banale dimostrato nel lemma precedente (0.5).

□

**Lemma 0.7.** *Sia  $G$  un grafo qualsiasi ottenuto splittando un vertice di  $K_5$  allora  $G$  contiene un sottografo  $TK_{3,3}$ .*

*Dimostrazione.*

□

**Teorema 0.3.** *Se  $G$  ha un minore  $K_{3,3}$  allora contiene un sottografo  $TK_{3,3}$ . Se  $G$  ha un minore  $K_5$  allora contiene un sottografo  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $G$  abbia un minore  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ , se nel ottenere il minore non è stata coinvolta nessuna operazione di contrazione degli archi allora esso sarà anche un sottografo di  $G$ . Altrimenti sia  $G_0, \dots, G_k$  sequenza di grafi ottenuta da  $G$ ,  $G_0$  sottografo di  $G$ , l'arco  $e_i$  di  $G_{i-1}$  è contratto per ottenere  $G_i$  e  $G_k$  è  $K_{3,3}$  o  $K_5$ . Se ogni  $e_i$  ha un endpoint di grado 2 possiamo invertire la contrazione suddividendo gli archi e trovando un sottografo  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ .

Altrimenti sia  $e_i$  l'arco con  $i$  massimo tra quelli con entrambi gli endpoint di grado almeno 3. Tutti gli archi contratti successivamente a  $G_i$  hanno un endpoint di grado 2, quindi  $G_i$  ha un sottografo  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ .  $G_{i-1}$  può essere ottenuto splittando un vertice  $u \in G_i$ , analizziamo ora i 3 casi:

- $u$  appartiene a  $TK_5$ : per il lemma 0.7  $G_{i-1}$  conterrà un sottografo  $TK_{3,3}$ ;

- $u$  appartiene a  $TK_{3,3}$ : anche  $G_{i-1}$  conterrà quindi  $TK_{3,3}$ ;
- $u$  non appartiene a  $TK_{3,3}$  e  $TK_5$ : in  $G_{i-1}$  sarà quindi ancora presente  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ .

□

**Teorema 0.4** (Teorema di Kuratowski). *Un grafo  $G$  è planare se e solo se non contiene sottografi  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ .*

*Dimostrazione.* “ $\Rightarrow$ ”: dato il lemma 0.4, è evidente che se un grafo  $G$  è planare non contiene sottografi omeomorfi a  $K_{3,3}$  o  $K_5$ .

“ $\Leftarrow$ ”: per provare questo lato dell’implicazione dimostriamo la tesi equivalente “ $G$  non planare  $\Rightarrow$  contiene  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ ”.

Consideriamo  $G$  grafo semplice, 2-connesso con  $\epsilon$  archi e procediamo per induzione su  $\epsilon$ . Notiamo che se  $\epsilon \leq 6$ , per il lemma 0.4  $G$  è planare e la tesi è vera. Supponiamo quindi il teorema vero per i grafi aventi  $\epsilon - 1$  archi.

Consideriamo ora  $G$  non planare,  $(a, b) \in E(G)$  un arco qualsiasi,  $G' = G - (a, b)$ . Se  $G'$  non planare allora per ipotesi induttiva contiene  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ , i quali saranno quindi di conseguenza contenuti anche in  $G$ .

Se invece  $G'$  planare, denotando con  $\kappa(a, b)$  il numero di cammini internamente disgiunti da  $a$  a  $b$  in  $G'$ , siccome  $G$  è 2-connesso sappiamo  $\kappa(a, b) \geq 1$ .

1. *caso  $\kappa(a, b) = 1$* : questo implica che  $G'$  ha un cut vertex  $u$  in ogni cammino da  $a$  a  $b$ . Aggiungiamo gli archi  $(a, u)$  e  $b, u$  a  $G'$  se non sono già presenti e otteniamo un grafo  $H$ . Denotiamo  $Ha$ ,  $Hb$  i blocchi di  $H$  contenenti  $a$  e  $b$ .

Dimostriamo ora che  $Ha$  o  $Hb$  è non planare, se entrambi fossero planari infatti potremmo disegnare le loro immersioni nel piano lasciando gli archi  $(a, u)$ ,  $(b, u)$  nella faccia esterna, “incollarli” tra loro al vertice  $u$  rimuovere  $(a, u)$ ,  $(b, u)$  e ottenere così un’immersione planare di  $G$ . Questo è un assurdo essendo  $G$  non planare.

Supponiamo quindi  $Ha$  non planare, per ipotesi induttiva contiene come sottografo  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ . Tale sottografo essendo  $G'$  planare conterrà l’arco  $(a, u)$ , rimpiazzando quindi  $(a, u)$  con il cammino formato dall’arco  $(a, b)$  e dal cammino  $b \rightarrow u$  in  $Hb$ , il risultato sarà un sottografo  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$  in  $G$ .

2. *caso  $\kappa(a, b) = 2$* : siano  $P1$ ,  $P2$  due cammini internamente disgiunti da  $a$  a  $b$  in  $G'$ . Siccome  $\kappa(a, b) = 2 \exists v \in P1, u \in P2$  t.c. tutti i cammini da  $a \rightarrow b$  contengono uno tra  $\{u, v\}$  e  $G' - \{u, v\}$  è disconnesso. Siano ora  $Ka$ ,  $Kb$  le due componenti connesse di  $G' - \{u, v\}$  contenenti rispettivamente  $a$  e  $b$ . Denotiamo inoltre  $G'_a \doteq Ka \cup \{u, v\}$ ,  $G'_b \doteq Kb \cup \{u, v\}$ .

Aggiungiamo ora un vertice  $x$  a  $G'_a$  adiacente a  $u, v, a$  e similmente un vertice  $y$  a  $G'_b$  adiacente a  $u, v, b$ , denotiamo questi grafi  $Ha, Hb$ .

Proviamo ora per assurdo almeno uno tra  $Ha$  e  $Hb$  è non planare. Siccome il vertice  $x$  ha grado 3 in  $Ha$ , ci sono 3 facce incidenti su esso. Disegniamo un immersione planare di  $Ha$  facendo in modo che le facce contenenti gli archi  $(u, x), (v, x)$  siano le facce esterne. Similmente disegniamo  $Hb$  in modo che  $(u, y), (v, y)$  siano nella faccia esterna. Ora “incolliamo”  $Ha$  e  $Hb$  nei vertici  $u$  e  $v$ , cancelliamo  $x$  e  $y$  e aggiungendo l’arco  $(a, b)$  otterremo una immersione planare di  $G \rightarrow \mathbb{Z}$ . Concludiamo quindi che uno tra  $Ha$  e  $Hb$  è non planare.

Supponendo  $Ha$  non planare allora per ipotesi induttiva contiene un sottografo  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ . Se tale sottografo non contiene  $x$  allora è contenuto anche in  $G$  e la dimostrazione è conclusa. Supponiamo quindi che il sottografo contenga  $x$ , in questo caso  $Hb$  sarà 2-connesso, in quanto  $G$  lo è.  $Hb$  conterrebbe quindi due cammini internamente disgiunti  $b \rightarrow u, b \rightarrow v$ . Questi due cammini assieme all’arco  $(a, b)$  possono essere utilizzati per rimpiazzare gli archi  $(u, x), (v, x), (a, x)$  di  $Ha$  ottenendo così un sottografo  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$  in  $G$ .

3. caso  $\kappa(a, b) \geq 3$ : siano  $P1, P2, P3$  due cammini internamente disgiunti da  $a$  a  $b$  in  $G'$ . Consideriamo una immersione nel piano di  $G'$ , ogni coppia di cammini  $P1 \cup P2, P1 \cup P3, P2 \cup P3$  crea un ciclo la cui immersione nel piano sarà una curva di Jordan. Uno dei tre cammini sarà quindi contenuto nella curva di Jordan formata dagli altri, supponiamo  $P2$  contenuto all’interno di  $P1 \cup P3$ . L’arco  $(a, b)$  può essere immerso all’interno di  $P1 \cup P2$ , all’interno di  $P2 \cup P3$  o all’esterno di  $P1 \cup P3$ . Siccome  $G$  è non planare ognuna di queste tre regioni  $Pi$  deve contenere un cammino da un vertice interno a  $Pi$  a uno interno a  $Pj$ . Sia  $P12$  un cammino da  $u_1 \in P1$  a  $u_2 \in P2$ ,  $P13$  da  $v_1 \in P1$  a  $u_3 \in P3$ ,  $P13$  da  $u_2 \in P2$  a  $v_3 \in P3$ .

$\forall i$  se  $u_i \neq v_i$  contraiamo l’arco tra essi, aggiungendo ora l’arco  $(a, b)$  il grafo risultante sarà un minore  $TK_5$  di  $G$ . Quindi per il teorema 0.3  $G$  conterrà un sottografo  $TK_5$  o  $TK_{3,3}$ .

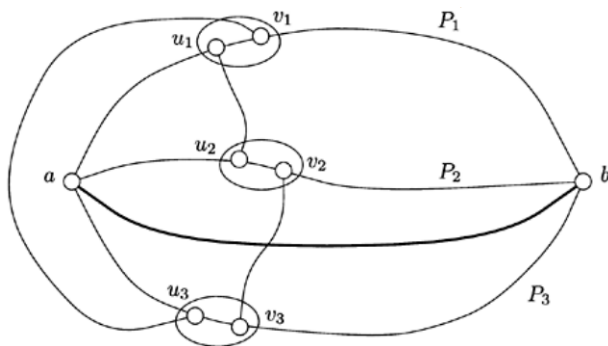


Figura 3: minore  $TK_5$  di  $G$

□

Si può riformulare il teorema precedente in termine di minori.

**Teorema 0.5** (Teorema di Wagner). *Un grafo  $G$  è planare se e solo se non ha  $K_{3,3}$  o  $K_5$  come minori.*

*Dimostrazione.* “ $\Rightarrow$ ”: se  $G$  planare ovviamente non ha come minori  $K_{3,3}$  o  $K_5$ .

“ $\Leftarrow$ ”: se  $G$  non ha  $K_{3,3}$  o  $K_5$  come minori allora non ha nemmeno sottografi  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$  e quindi è planare per il teorema di Kuratowski 0.4. □