

# Grafi Planari

Università degli studi di Trento



Martino Papa

Day Month Year

# Indice

Al momento il documento potrebbe contenere anche definizioni o teoremi “di troppo”. Ho scritto tutto ciò che mi sembrava utile al fine di apprendere fino in fondo l’argomento.

**Definizione 0.1** (Grafo). Un grafo è una coppia  $G = (V, E)$  dove:

- $V$  è un insieme di vertici (**vertex**);
- $E$  è un insieme di coppie di nodi  $(u, v)$ ,  $u, v \in V$  dette archi o lati (**edge**);

Nei grafi **orientati** le coppie in  $E$  sono ordinate in quelli non orientati no.

**Definizione 0.2** (Adiacenza). Un vertice  $v$  si dice adiacente a  $u$  se esiste  $(u, v) \in E$ .

NB: nei grafi non orientati l'adiacenza è una relazione simmetrica.

**Definizione 0.3** (Incidente). Un arco  $(u, v)$  si dice incidente da  $u$  a  $v$ .

**Definizione 0.4** (Grado). Nel caso di grafi orientati definiamo:

- **grado entrante** di un nodo come il numero di archi incidenti su esso;
- **grado uscente** di un nodo come il numero di archi incidenti da esso.

Per i grafi non orientati avremo invece un'unica definizione:

- il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.

**Definizione 0.5** (Cammino). Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Un cammino  $C$  di lunghezza  $k$  è una sequenza di nodi  $u_0, u_1, \dots, u_k$  t.c.

$$(u_i, u_{i+1}) \in E \text{ per } 0 \leq i \leq k-1 \quad (1)$$

**Definizione 0.6** (Grafis isomorfi). Siano  $G = (V(G), E(G))$ ,  $H = (V(H), E(H))$  due grafi. Diremo  $G$  isomorfo a  $H$  se  $\exists \theta : V(G) \rightarrow V(H)$  t.c.  $\theta$  è un isomorfismo e

$$\theta(E(G)) \doteq \{\theta(uv) \text{ t.c. } uv \in E(G)\} = E(H) \quad (2)$$

**Definizione 0.7** (Grafo completo). Un grafo  $G = (V, E)$  si dice completo se

$$\forall u, v \in V \exists (u, v) \in E \quad (3)$$

Definiamo  $K_n$  un grafo completo con  $n$  vertici.

**Definizione 0.8** (Grafo bipartito). Un grafo non orientato  $G = (V, E)$  si dice bipartito se  $V$  può essere diviso in due sottoinsiemi  $X, Y$  t.c.

$$\forall (u, v) \in E \text{ vale } u \in X, v \in Y \text{ oppure } u \in Y, v \in X \quad (4)$$

Un grafo bipartito può avere al più  $|X| \cdot |Y|$  archi.

Definiamo inoltre  $K_{m,n}$  il grafo bipartito completo che soddisfa

$$|X| = m, |Y| = n, \varepsilon \doteq |E| = mn \quad (5)$$

**Definizione 0.9** (Connessione). Un grafo non orientato  $G = (V, E)$  è detto **connesso** se

$$\forall u, v \in V \exists (u, v) \in E \quad (6)$$

Un sottografo connesso massimale di un grafo non orientato è detto **componente connessa**.

**Definizione 0.10** (Vertex-connectivity). Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Definiamo **vertex-connectivity**  $\kappa$  il minimo numero di vertici da eliminare per sconnettere  $G$ .

**Definizione 0.11** (Grafo k-connesso). Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Diremo  $G$  **k-connesso** se  $|V| > k$  e  $\kappa \geq k$  dove  $\kappa$  corrisponde alla vertex-connectivity. Informalmente un grafo è detto k-connesso se rimane connesso rimuovendo  $k' < k$  vertici qualsiasi.

**Teorema 0.1** (Grafo 2-connesso). *Un grafo non orientato  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 3$  è 2-connesso  $\Leftrightarrow$  ogni coppia di vertici  $(u, v)$  è connessa da almeno 2 cammini internamente disgiunti.*

**Definizione 0.12** (Cammini internamente disgiunti). Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato, siano  $a, b \in V$  due vertici. Due cammini da  $a$  a  $b$ ,  $a, v_1, \dots, v_n, b$  e  $a, u_1, \dots, u_m, b$ . Essi si dicono internamente disgiunti se

$$v_i \neq u_j \quad \forall i, j \quad (7)$$

**Definizione 0.13** (Ciclo di Hamilton). Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Definiamo ciclo di Hamilton un ciclo che contiene tutti i vertici del grafo. Definiamo  $G$  hamiltoniano se  $G$  contiene un ciclo di hamilton.

**Definizione 0.14** (Grafo planare). Un grafo non orientato  $G$  si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

**Teorema 0.2** (Formula di Eulero). *Sia  $G$  un grafo planare con  $V$  vertici e  $E$  lati. Sia  $G^\varphi$  una immersione di  $G$  nel piano avente  $F$  faccie. Allora*

$$V + F - E = 2 \quad (8)$$

**Definizione 0.15** (Suddivisione). Dato un grafo  $G$  definiamo suddivisione (subdivision) di  $G$  i grafi ottenuti da  $G$  rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più.

Definiamo inoltre contrazione l'operazione inversa della suddivisione.

**Lemma 0.1.** *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare.*

**Definizione 0.16** (Grafì omeomorfi). Due grafì  $G_1, G_2$  si dicono topologicamente equivalenti o omeomorfi se possono essere trasformati l'uno nell'altro attraverso operazioni di suddivisione o contrazione degli archi.

Denotiamo l'insieme dei grafì omeomorfi a  $G$  con  $TG$ .

**Definizione 0.17** (Minore). Sia  $H$  un grafo ottenuto da  $G$  tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi o vertici o contrazione di archi.  $H$  è detto minore di  $G$ .

**Teorema 0.3** (Teorema di Kuratowski). *Un grafo  $G$  è planare se e solo se non contiene sottografi  $TK_{3,3}$  o  $TK_5$ .*

Si può riformulare il teorema precedente in termine di minori.

**Teorema 0.4** (Teorema di Wagner). *Un grafo  $G$  è planare se e solo se non ha  $K_{3,3}$  o  $K_5$  come minori.*

**Teoria usata direttamente nell'algoritmo Hopcroft Trajan**

**Definizione 0.18.**

**Lemma 0.2.** *Sia  $G$  un grafo planare,  $G^\psi$  una sua immersione nel piano,  $F_1, \dots, F_f$  le faccie di  $G^\psi$  allora*

$$\sum_{i=1}^f \deg(F_i) = 2\epsilon \quad (9)$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal fatto che ogni arco  $(u, v)$  è incidente esattamente su due faccie di  $G^\psi$ .  $\square$

**Lemma 0.3.** *Sia  $G$  planare,  $\epsilon$  il numero di archi,  $V$  il numero di vertici. Vale allora*

$$\epsilon \leq 3V - 3 \quad (10)$$

*Inoltre se supponiamo  $V \geq 3$  vale*

$$\epsilon \leq 3V - 6 \quad (11)$$

*Dimostrazione.* Sia  $V < 3$ . In questo caso il lemma è una diretta conseguenza della formula di Eulero (Teorema 0.2).

Sia  $V \geq 3$ .  $G$  planare  $\Rightarrow$  ogni faccia ha almeno 3 lati ovvero  $\deg(F_i) \geq 3 \ \forall i$ . Per il lemma 0.2 vale quindi

$$2\epsilon = \sum_{i=1}^f \deg(F_i) \geq \sum_{i=1}^f 3 = 3f \quad (12)$$

Per la formula di eulero segue inoltre  $V + f - \epsilon = 2$  da cui abbiamo, moltiplicando per 3 e riarrangiando i termini

$$3\epsilon = 3V + 3f - 6 \quad (13)$$

applicando ora  $3f \leq 2\epsilon$  otteniamo la tesi.  $\square$