Grafi Planari

Università degli studi di Trento

Martino Papa

Day Month Year

Indice

Al momento il documento potrebbe contenere anche definizioni o teoremi "di troppo". Ho scritto tutto ciò che mi sembrava utile al fine di apprendere fino in fondo l'argomento.

0.1 Teoria dei grafi

Definizione 0.1 (Grafo)**.** Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ dove:

- V è un insieme di vertici (**vertex**);
- E è un insieme di coppie di nodi $(u, v),\ u, v \in V$ dette archi o lati (**edge**);

Nei grafi **orientati** le coppie in E sono ordinate in quelli non orientati no.

Definizione 0.2 (Adiacenza)**.** Un vertice v si dice adiacente a u se esiste $(u, v) \in E$. NB: nei grafi non orientati l'adiacenza è una relazione simmetrica.

Definizione 0.3 (Incidente)**.** Un arco (u, v) si dice incidente da u a v.

Definizione 0.4 (Grado)**.** Nel caso di grafi orientati definiamo:

- **grado entrante** di un nodo come il numero di archi incidenti su esso;
- **grado uscente** di un nodo come il numero di archi incidenti da esso.

Per i grafi non orientati avremo invece un'unica definizione:

- il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.

Definizione 0.5 (Cammino)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un cammino C di lunghezza k è una sequenza di nodi $u_0, u_1 \dots, u_k$ t.c.

$$(u_i, u_{i+1}) \in E \text{ per } 0 \leq i \leq k - 1 \tag{1}$$

Definizione 0.6 (Grafi isomorfi)**.** Siano $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$ due grafi. Diremo G isomorfo a H se $\exists \theta : V(G) \to V(H)$ t.c. θ è un isomorfismo e

$$\theta(E(G)) \doteq \{\theta(uv)\ t.c.\ uv \in E(G)\} = E(H) \tag{2}$$

Definizione 0.7 (Grafo completo)**.** Un grafo $G = (V, E)$ si dice completo se

$$\forall u, v \in V\ \exists (u, v) \in E \tag{3}$$

Definiamo K_n un grafo completo con n vertici.

Definizione 0.8 (Grafo bipartito)**.** Un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice bipartito se V può essere diviso in due sottoinsiemi X, Y t.c.

$$\forall (u, v) \in E \text{ vale } u \in X,\ v \in Y \text{ oppure } u \in Y,\ v \in X \tag{4}$$

Un grafo bipartito può avere al più $|X| \cdot |Y|$ archi.
Definaiamo inoltre $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo che soddisfa

$$|X| = m,\ |Y| = n,\ \varepsilon \doteq |E| = mn \tag{5}$$

Definizione 0.9 (Connessione)**.** Un grafo non orientato $G = (V, E)$ è detto **connesso** se

$$\forall u, v \in V\ \exists (u, v) \in E \tag{6}$$

Un sottografo connesso massimale di un grafo non orientato è detto **componente connessa**.

Definizione 0.10 (Vertex-connectivity)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo **vertex-connectivity** κ il minimo numero di vertici da eliminare per sconnettere G.

Definizione 0.11 (Grafo k-connesso)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo G **k-connesso** se $|V| > k$ e $\kappa \geq k$ dove κ corrisponde alla vertex-connectivity. Informalmente un grafo è detto k-connesso se rimane connesso rimuovendo $k' < k$ vertici qualsiasi.

Teorema 0.1 (Grafo 2-connesso)**.** *Un grafo non orientato $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$ è 2-connesso $\Leftrightarrow$ ogni coppia di vertici (u, v) è connessa da almeno 2 cammini internamente disgiunti.*

Definizione 0.12 (Cammini internamente disgiunti)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, siano $a, b \in V$ due cammini da a a b $a, v_1, \ldots, v_n, b$, $a, u_1, \ldots, u_n, b$. Essi si dicono internamente disgiunti se

$$v_i \neq u_j\ \forall i, j \tag{7}$$

Definizione 0.13 (Ciclo di Hamilton)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo ciclo di Hamilton un ciclo che contiene tutti i vertici del grafo una sola volta.
Definiamo G hamiltoniano se G contiene un ciclo di hamilton.

Definizione 0.14 (Suddivisione)**.** Dato un grafo G definiamo suddivisione (subdivision) di G i grafi ottenuti da G rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più. In altre parole una suddivisione di G è un grafo ottenuto da esso inserendo dei vertici "all'interno dei lati".

Figura 1: esempio suddivisione

Definizione 0.15 (Contrazione)**.** Operazione inversa della suddivisione, consiste nell'contrarre un arco avente un endpoint di grado 2.

Definizione 0.16 (Grafi omeomorfi)**.** Due grafi G_1, G_2 si dicono topologicamente equivalenti o omeomorfi se possono essere trasformati l'uno nell'altro attraverso operazioni di suddivisione o contrazione degli archi.
Denotiamo l'insieme dei grafi omeomorfi a G con TG.

Definizione 0.17 (Minore)**.** Sia H un grafo ottenuto da G tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi o vertici o contrazione di archi. H è detto minore di G.

Definizione 0.18 (Facial walk)**.** Sia G grafo, G^ψ una sua immersione nel piano. Un cammino chiuso C frontiera di una faccia F di G^ψ è detto facial walk di F.

Definizione 0.19 (Grado di una faccia)**.** Definaiamo $\deg(F)$ grado di una faccia F come la lunghezza del suo facial walk.

0.2 Topologia

Definizione 0.20 (n-cella chiusa)**.** Spazio topologico omeomorfo ad una palla chiusa n-dimensionale.

Definizione 0.21 (Complesso cellulare (CW-complesso))**.** Spazio topologico ottenuto incollando tra loro un insieme di celle chiuse.

Definizione 0.22 (Caratteristica di eulero)**.** Sia $\tau \subset \mathbb{R}^n$ un complesso cellulare composto da k_i i-celle $i = 0, \dots, n$. Definiamo caratteristica di eulero

$$\chi(\tau) = k_0 - k_1 + k_2 - \dots k_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i k_i \tag{8}$$

Definizione 0.23 (Cammini omotopi)**.** Siano $f, g \in \mathcal{C}^0(X;Y)$. Diciamo f e g omotope $f \sim g$ se esiste $H : X \times [0,1] \to Y$ t.c.

$$\forall x \in X \begin{cases} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \end{cases} \tag{9}$$

Informalmente questo vale se una mappa può essere "deformata con continutià" nell'altra.

Definizione 0.24 (Spazi omotopicamente equivalenti)**.** X, Y si dicono omotopicamente equivalenti ($X \sim Y$) se $\exists f : X \to Y, g : Y \to X$ t.c.

- $g \circ f \sim id_X$
- $f \circ g \sim id_Y$

Informalmente X, Y saraano omotopicamente equivalenti se possono essere trasformati l'uno nell'altro con operazioni di deformazione.

Lemma 0.1 (Omotopicamente invariante)**.** *La caratteristica di eulero è un omotopicamente invariante, ovvero*

$$X \sim Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \tag{10}$$

Proposizione 0.1 (Invarianza topologica)**.** *La caratteristica di eulero è un invariante topologico, ovvero*

$$X \simeq Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \tag{11}$$

diciamo che $X \simeq Y$ se X e Y sono omeomorfi.

Lemma 0.2. *Ogni poliedro semplice può essere identificato come un grafo planare usando i vertici del poliedro come vertici del grafo e gli spigoli del poliedro come archi del grafo.*

Proposizione 0.2. *Sia τ un poliedro semplice allora $\chi(\tau) = 2$*

Dimostrazione. Questo risultato segue direttamente dal lemma precedente e dal teorema 0.1. □

0.3 Grafi planari

Definizione 0.25 (Grafo planare)**.** Un grafo non orientato G si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

Teorema 0.2. *Sia G un grafo planare avente k componenti connesse. Sia G^{φ} una immersione di G nel piano, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = k + 1 \tag{12}$$

dove V è il numero di vertici (k_0), ϵ il numero di archi (k_1) e f il numero di facce (k_2).

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di archi ϵ:
caso base $\epsilon = 0$, $V = k$ vertici, $f = 1$ quindi è soddisfatta $V - \epsilon + f = k + 1$
passo induttivo $\epsilon \to \epsilon + 1$, aggiungiamo un arco al grafo

1. *il nuovo arco è un loop*, in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f + 1$, $k \to k$ e quindi
$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \tag{13}$$

2. *il nuovo arco è tra due vertici appartenenti alla stessa componente connessa*, anche in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f + 1$, $k \to k$ e quindi
$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \tag{14}$$

3. *il nuovo arco connette due componenti che erano sconnesse*, in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f$, $k \to k - 1$ e quindi
$$V - (\epsilon + 1) + f = (k - 1) + 1 = k' + 1 \tag{15}$$
dove $k' = k - 1$ è il numero di componenti connesse dopo l'aggiunta dell'arco.

□

Corollario 0.1 (Formula di Eulero)**.** *Sia G un grafo planare connesso, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = 2 \tag{16}$$

Dimostrazione. Direttamente dal teorema 0.2 con $k = 1$. □

Proposizione 0.3. *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare, questo implica anche che i vertici di grado 2 non influenzano la planarità del grafo.*

Dimostrazione. Sia G grafo non planare, a, b due archi che si intersecano nell'immersione G^{φ}, è evidente che suddividere a o b non andrebbe ad influire sulla non planarità del grafo. □

Lemma 0.3. *Sia G un grafo planare, G^{ψ} una sua immersione nel piano, $F_1, \ldots, F_f$ le facce di G^{ψ} allora*

$$\sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) = 2\epsilon \tag{17}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che ogni arco (u, v) è incedente esattamente su due facce di G^{ψ}. □

Proposizione 0.4. *Sia G planare, ϵ il numero di archi, V il numero di vertici. Vale allora*

$$\epsilon \leq 3V - 3 \tag{18}$$

Inoltre se supponiamo $V \geq 3$ vale

$$\epsilon \leq 3V - 6 \tag{19}$$

Dimostrazione. Sia $V < 3$. In questo caso il lemma è una diretta conseguenza della formula di Eulero (Teorema 0.1).
Sia $V \geq 3$. G planare $\Rightarrow$ ogni faccia ha almeno 3 lati ovvero $\deg(F_i) \geq 3 \ \forall i$. Per il lemma 0.3 vale quindi

$$2\epsilon = \sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) \geq \sum_{i=1}^{f} 3 = 3f \tag{20}$$

Per la formula di eulero segue inoltre $V + f - \epsilon = 2$ da cui abbiamo, moltiplicando per 3 e riarrangiando i termini

$$3\epsilon = 3V + 3f - 6 \tag{21}$$

applicando ora $3f \leq 2\epsilon$ otteniamo la tesi. □

Lemma 0.4. *K_5 e $K_{3,3}$ sono grafi non planari.*

Dimostrazione. $\underline{K_5}$: il grafo completo K_n ha $\epsilon = \frac{n(n-1)}{2}$ archi. Supponendo per assurdo K_5 planare dovrebbe valere la proposizione 0.4 ovvero, essendo $V = 5 \geq 3$

$$10 = \frac{n(n-1)}{2} = \epsilon \leq 3V - 6 = 9 \rightarrow \lightning \tag{22}$$

$\underline{K_{3,3}}$: Supponendo per assurdo $K_{3,3}$ planare, sapendo $\epsilon = 3 * 3 = 9$, $V = 6$ dalla formula di eulero 0.1 otterremmo $f = 2 - V + \epsilon = 5$. Siccome $K_{3,3}$ è bipartito non contiene cicli composti da 3 archi $\rightarrow$ ogni faccia ha almeno 4 lati, ovvero $\deg(F) \geq 4\ \forall F$ vale $\sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) \geq 4 * f = 20$. Per il lemma 0.3 dovrebbe valere però

$$20 \leq \sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) = 2\epsilon = 18 \rightarrow \lightning \tag{23}$$

□

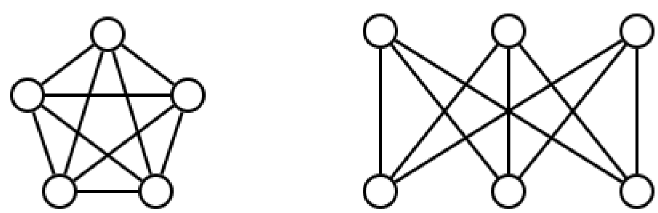

Figura 2: immersione nel piano di K_5 e $K_{3,3}$

Teorema 0.3 (Teorema di Kuratowski)**.** *Un grafo G è planare se e solo se non contiene sottografi $TK_{3,3}$ o TK_5.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": è evidente che se un grafo G è planare non contiene sottografi omeomorfi a $K_{3,3}$ o K_5.
"$\Leftarrow$": per provare questo lato dell'implicazione dimostramo la tesi equivalente "G non planare $\Rightarrow$ contiene $TK_{3,3}$ o TK_5" □

Si può riformulare il teorema precedente in termine di minori.

Teorema 0.4 (Teorema di Wagner)**.** *Un grafo G è planare se e solo se non ha $K_{3,3}$ o K_5 come minori.*