



UNIVERSITÀ DI TRENTO

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

ELABORATO FINALE

GRAFI PLANARI

*Algoritmo di Boyer per l'immersione planare e l'isolamento di un sottografo di
Kuratowski*

Supervisore
Alberto Montresor

Laureando
Martino Papa

Anno accademico 2023/2024

Ringraziamenti

grazie

Indice

Sommario	2
1 Introduzione	3
2 Fondamenti teorici	5
2.1 La formula di Eulero	5
2.2 Formulazione di ipotesi non restrittive	6
2.3 Il teorema di Kuratowski	7
3 L'algoritmo di Boyer-Myrvold	11
3.1 Supposizioni sul grafo in input	11
A Teoria dei grafi	12
B Topologia	15
Bibliografia	15

Sommario

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

Sommario è un breve riassunto del lavoro svolto dove si descrive l'obiettivo, l'oggetto della tesi, le metodologie e le tecniche usate, i dati elaborati e la spiegazione delle conclusioni alle quali siete arrivati.

Il sommario dell'elaborato consiste al massimo di 3 pagine e deve contenere le seguenti informazioni:

- contesto e motivazioni
- breve riassunto del problema affrontato
- tecniche utilizzate e/o sviluppate
- risultati raggiunti, sottolineando il contributo personale del laureando/a

Capitolo 1

Introduzione

In questa tesi andremo ad analizzare l'algoritmo di Boyer-Myrvold per “planarity testing”. Come introduzione all'argomento vi presento il seguente problema.

Problema 1.1 (Problema delle 3 case). Consideriamo 3 case, ognuna di esse ha necessità di essere allacciata a 3 risorse (acqua, luce e gas). È possibile collegare ogni casa a ciascuna delle tre risorse senza creare intersezioni?

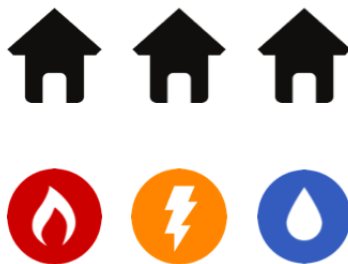


Figura 1.1: problema delle 3 case

Inizialmente si potrebbe ingenuamente cominciare a disegnare i collegamenti nella speranza di trovare una soluzione valida. Tuttavia, come dimostreremo nel lemma 2.15, è impossibile evitare le intersezioni.

Un interessante approccio alla risoluzione di questo quesito è quello di trasformarlo in un problema di planarity testing, per farlo avremo bisogno di una formulazione matematica di esso. Le nozioni di cui ci serviremo furono pubblicate per la prima volta nel 1736 da Leonhard Euler (1707 - 1783) all'interno dell'articolo “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*[1]”. In questo documento Eulero dimostrò la non esistenza della soluzione al problema dei sette ponti di Königsberg, per raggiungere tale obiettivo inventò quella che ad oggi chiamiamo teoria dei grafi.

Definizione 1.2 (Grafo). Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ dove:

- V è un insieme di nodi (**vertex**);
- E è un insieme di coppie di nodi (u, v) , $u, v \in V$ dette archi o lati (**edge**); se un grafo è orientato avremmo che le coppie $\langle u, v \rangle \in E$ saranno ordinate (in questo documento assumeremo sempre G non orientato).

Definizione 1.3 (Grafo planare). Un grafo G si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

Sfruttando queste nozioni possiamo ora dare una formulazione formale al problema delle case. Definiamo G grafo composto da 6 vertici (3 case e 3 risorse), ogni vertice “casa” sarà adiacente a ciascuno dei tre vertici “risorse”. La planarità di G corrisponderà invece alla richiesta di evitare le intersezioni fra le “linee”.

Nonostante la definizione di questo tipo di quesiti sia molto semplice, non sempre le soluzioni risultano banali. Lo studio di algoritmi efficienti per il “*planarity testing*” è stato infatti affrontato da molteplici matematici nel corso del 1900 e dei primi anni 2000.

Il primo algoritmo funzionante in tempo lineare fu “*l'algoritmo di Hopcroft e Tarjan*[2]” pubblicato nel 1974. Esso si limitava però a fornire in output un valore booleano senza “disegnare” una reale immersione planare del grafo.

Definizione 1.4 (Immersione planare). Dato un grafo G , definiamo $\psi : (V, E) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione che mappa i vertici di G nel piano e gli archi di G in curve continue che si intersecano solamente negli endpoint. Allora $G^\psi \doteq \psi(G)$ è chiamata immersione planare di G .

Solamente 30 anni dopo, grazie alla pubblicazione di John M. Boyer e Wendy J. Myrvold “*Simplified $O(n)$ Planarity by Edge Addition*[3]”, è stato scoperto il primo algoritmo lineare in grado di resituire, se G planare, una sua immersione mentre, se G non planare, un sottografo di Kuratowski contenuto in esso. Dimosteremo infatti nel teorema 2.19 che un grafo G è non planare se e solo se contiene un sottografo di Kuratowski.

In questo documento analizzeremo l'algoritmo di Boyer-Myrvold, le basi teoriche su cui è fondato, la sua complessità e le sue applicazioni.

Capitolo 2

Fondamenti teorici

In questo capitolo getteremo le basi teoriche impiegate nell'algoritmo di Boyer-Myrvold. Cominceremo elencando alcuni criteri in grado di escludere a priori la planarità di determinati grafi, per poi procedere con la dimostrazione del teorema di Kuratowski (2.19).

2.1 La formula di Eulero

La formula di Eulero è uno dei risultati più conosciuti nella teoria dei grafi. Essa afferma che la caratteristica di Eulero dei grafi planari connessi è sempre pari a due.

Definizione 2.1 (Caratteristica di eulero). Sia $\tau \subset \mathbb{R}^n$ un complesso cellulare composto da k_i i-celle $i = 0, \dots, n$. Definiamo caratteristica di eulero

$$\chi(\tau) = k_0 - k_1 + k_2 - \dots - k_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i k_i \quad (2.1)$$

Definizione 2.2 (Facce). Le facce di un immersione planare G^ψ sono le regioni connesse che rimangono quando il piano viene “tagliato” dagli archi di G^ψ .

Teorema 2.3. Sia G un grafo planare avente k componenti connesse. Sia G^ψ una immersione di G nel piano, allora

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = k + 1 \quad (2.2)$$

dove V è il numero di vertici (k_0), ϵ il numero di archi (k_1), f il numero di facce (k_2), $\chi(G)$ la caratteristica di eulero 2.1.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di archi ϵ :

caso base $\epsilon = 0$, $V = k$ vertici, $f = 1$ quindi è soddisfatta $V - \epsilon + f = k + 1$

passo induttivo $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$, aggiungiamo un arco al grafo

1. *il nuovo arco è un loop*, in questo caso $V \rightarrow V$, $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$, $f \rightarrow f + 1$, $k \rightarrow k$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \quad (2.3)$$

2. *il nuovo arco è tra due vertici appartenenti alla stessa componente connessa*, anche in questo caso $V \rightarrow V$, $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$, $f \rightarrow f + 1$, $k \rightarrow k$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \quad (2.4)$$

3. *il nuovo arco connette due componenti che erano sconnesse*, in questo caso $V \rightarrow V$, $\epsilon \rightarrow \epsilon + 1$, $f \rightarrow f$, $k \rightarrow k - 1$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + f = (k - 1) + 1 = k' + 1 \quad (2.5)$$

dove $k' = k - 1$ è il numero di componenti connesse dopo l'aggiunta dell'arco.

□

Corollario 2.4 (Formula di Eulero). *Sia G un grafo planare connesso, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = 2 \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Direttamente dal teorema 2.3 con $k = 1$.

□

Notiamo che questi due risultati non forniscono immediate risposte riguardo alla planarità di un determinato grafo G . Per conoscerne il numero di facce è infatti necessario conoscere una immersione planare di esso. Tuttavia il corollario 2.4 sarà fondamentale in alcune dimostrazioni che vedremo successivamente.

2.2 Formulazione di ipotesi non restrittive

Abbiamo stabilito che determinare la planarità di un grafo non sia un quesito facile. Tuttavia ci sono alcuni risultati matematici in grado di fornire risposte immediate per alcuni casi particolari.

Lemma 2.5. *Sia G un grafo planare, G^ψ una sua immersione nel piano, F_1, \dots, F_f le facce di G^ψ allora*

$$\sum_{i=1}^f \deg(F_i) = 2\epsilon \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che ogni arco (u, v) è incidente esattamente su due facce di G^ψ .

□

Combinando i risultati del lemma 2.5 e del corollario 2.4, otteniamo questa importante proposizione che ci permette di stabilire a priori se determinati grafi siano non planari.

Proposizione 2.6. *Sia G planare, ϵ il numero di archi, V il numero di vertici. Vale allora*

$$\epsilon \leq 3V - 3 \quad (2.8)$$

Inoltre se supponiamo $V \geq 3$ vale

$$\epsilon \leq 3V - 6 \quad (2.9)$$

Dimostrazione. Sia $V < 3$. In questo caso il lemma è una diretta conseguenza della formula di Eulero (Teorema 2.4).

Sia $V \geq 3$. G planare \Rightarrow ogni faccia ha almeno 3 lati ovvero $\deg(F_i) \geq 3 \forall i$. Per il lemma 2.5 vale quindi

$$2\epsilon = \sum_{i=1}^f \deg(F_i) \geq \sum_{i=1}^f 3 = 3f \quad (2.10)$$

Per la formula di eulero segue inoltre $V + f - \epsilon = 2$ da cui abbiamo, moltiplicando per 3 e riarrangiando i termini

$$3\epsilon = 3V + 3f - 6 \quad (2.11)$$

applicando ora $3f \leq 2\epsilon$ otteniamo la tesi.

□

Vediamo ora un'altra serie di risultati che ci permetteranno di formulare ulteriori ipotesi non restrittive sul grafo analizzato.

Definizione 2.7 (Suddivisione). Dato un grafo G definiamo suddivisione (subdivision) di G i grafi ottenuti da G rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più. In altre parole una suddivisione di G è un grafo ottenuto da esso inserendo dei vertici "all'interno dei lati".

Definizione 2.8 (Contrazione). Operazione inversa della suddivisione, consiste nell'contrarre un arco avente un endpoint di grado 2.

Proposizione 2.9. *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare, questo implica anche che i vertici di grado 2 non influenzano la planarità del grafo.*

Dimostrazione. Sia G grafo non planare, a, b due archi che si intersecano nell'immersione G^ψ , è evidente che suddividere a o b non andrebbe ad influire sulla non planarità del grafo. \square

Prima di proseguire, per comprendere la proposizione 2.12 necessitiamo di introdurre alcuni concetti teorici.

Definizione 2.10 (Grafo k -connesso). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo G **k -connesso** se $|V| > k$ e $\kappa \geq k$ dove κ corrisponde alla vertex-connectivity.

Informalmente un grafo è detto k -connesso se rimane connesso rimuovendo $k' < k$ vertici qualsiasi.

Definizione 2.11 (Blocco). Definiamo blocchi di un grafo i sottografi 2-connessi massimali.

Proposizione 2.12. *Un grafo è planare se e solo se tutti i suoi blocchi sono planari.*

Dimostrazione. “ \Rightarrow ”: banale, è evidente che se un grafo è planare allora anche i suoi sottografi lo sono.

“ \Leftarrow ”: notiamo che due blocchi differenti hanno al più un elemento nell'intersezione, se così non fosse i due blocchi sarebbero 2-connessi confutando l'ipotesi di massimalità. Proseguiamo ora per induzione sul numero di blocchi $|B|$, dove $B = \{b_i\}_{i \in I}$ è l'insieme dei blocchi.

- *caso base:* G 2-connesso quindi $|B| = 1$, $B = \{G\}$ e la tesi equivale a “ G planare $\Rightarrow G$ planare”.
- *passo induttivo:* sia G grafo composto da n cicli. Rimuoviamo da G un blocco b che si intersechi solo con un altro blocco b' nel vertice v , questo deve esistere perchè altrimenti sarebbe presente un ciclo di blocchi, essi sarebbero dunque 2-connessi e di conseguenza non massimali \nexists ; potrebbe anche essere che tutti i blocchi siano sconnessi e quindi la loro intersezione sarebbe sempre vuota, tuttavia questo è un caso banale in quanto è evidente che un grafo è planare se e solo se tutte le sue componenti connesse sono planari.

Il grafo G' risultante dalla rimozione del blocco b è per ipotesi induttiva planare, disegniamo ora le immersioni nel piano di b e G' facendo in modo che il punto di intersezione v appaia in entrambe le immersioni nella faccia esterna. Possiamo ora unire tra loro le due immersioni ottenendo che $G = G' \cup b$ è planare.

\square

Lemma 2.13. *Un grafo è planare se e solo se tutte le sue componenti conesse sono planari.*

Dimostrazione. Caso banale dimostrato nel lemma precedente (2.12). \square

Grazie alla proposizione 2.12 possiamo sempre supporre G 2-connesso senza perdere generalità.

2.3 Il teorema di Kuratowski

Come accennato in precedenza gli algoritmi di planarity testing moderni non si limitano a fornire una risposta booleana per la planarità, bensì, in caso di risposta negativa, essi restituiscono in output un sottografo di Kuratowski (2.14). Il nome di tali sottografi è dovuto al matematico polacco Kazimierz Kuratowski, fu lui infatti a dimostrare che la presenza di un tale sottografo è equivalente alla non planarità.

Vediamo ora i risultati teorici che permettono di raggiungere tale conclusione.

Definizione 2.14 (Grafo di Kuratowski). Definiamo $K_{3,3}$ e K_5 grafi di Kuratowski.

Lemma 2.15. K_5 e $K_{3,3}$ sono grafi non planari.

Dimostrazione. K_5 : il grafo completo K_n ha $\epsilon = \frac{n(n-1)}{2}$ archi. Supponendo per assurdo K_5 planare dovrebbe valere la proposizione 2.6 ovvero, essendo $V = 5 \geq 3$

$$10 = \frac{n(n-1)}{2} = \epsilon \leq 3V - 6 = 9 \rightarrow \text{falso} \quad (2.12)$$

$K_{3,3}$: Supponendo per assurdo $K_{3,3}$ planare, sapendo $\epsilon = 3 * 3 = 9$, $V = 6$ dalla formula di eulero 2.4 otterremmo $f = 2 - V + \epsilon = 5$.

Siccome $K_{3,3}$ è bipartito, esso non contiene cicli composti da 3 archi, quindi ogni faccia ha almeno 4 lati, ovvero $\deg(F) \geq 4 \forall F$ e vale $\sum_{i=1}^f \deg(F_i) \geq 4 * f = 20$. Applicando ora il lemma 2.5 otteniamo l'assurdo

$$20 \leq \sum_{i=1}^f \deg(F_i) = 2\epsilon = 18 \rightarrow \text{falso} \quad (2.13)$$

□

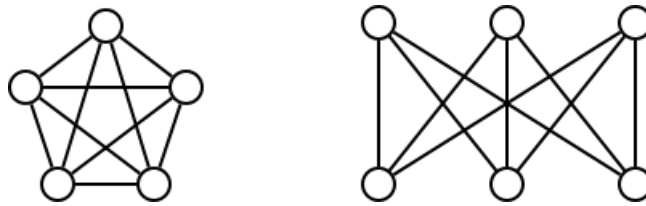


Figura 2.1: K_5 e $K_{3,3}$

Grazie al lemma 2.15 abbiamo dimostrato la non esistenza della soluzione al problema delle 3 case (1.1). Possiamo infatti notare che esso ci chiedeva di disegnare un'immersione planare di $K_{3,3}$.

Lemma 2.16. *Sia G un grafo qualsiasi ottenuto splittando un vertice di K_5 allora G contiene un sottografo $TK_{3,3}$.*

Dimostrazione. Siano u_1, u_2 i due vertici risultanti dallo split di un vertice di K_5 . Per definizione di split ambedue i vertici hanno almeno grado 3. u_1 e u_2 sono adiacenti e assieme sono adiacenti a tutti i rimanenti 4 vertici. Scegliendo ora una partizione dei 4 vertici x, y, w, z t.c. u_1 adiacente a x, y e u_2 adiacente a w, z , otteniamo un sottografo $K_{3,3}$ con bipartizione (u_1, w, z) e (u_2, x, y) . □

Definizione 2.17 (Minore). H è detto minore di G se H è un grafo ottenuto da G tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi, vertici o contrazione di archi.

Teorema 2.18. *Se G ha un minore $K_{3,3}$ allora contiene un sottografo $TK_{3,3}$. Se G ha un minore K_5 allora contiene un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 .*

Dimostrazione. Supponiamo che G abbia un minore $TK_{3,3}$ o TK_5 , se nel ottenere il minore non è stata coinvolta nessuna operazione di contrazione degli archi allora esso sarà anche un sottografo di G . Altrimenti sia G_0, \dots, G_k sequenza di grafi ottenuta da G , G_0 sottografo di G , l'arco e_i di G_{i-1} è contratto per ottenere G_i e G_k è $K_{3,3}$ o K_5 . Se ogni e_i ha un endpoint di grado 2 possiamo invertire la contrazione suddividendo gli archi e trovando un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 .

Altrimenti sia e_i l'arco con i massimo tra quelli con entrambi gli endpoint di grado almeno 3. Tutti gli archi contratti successivamente a G_i hanno un endpoint di grado 2, quindi G_i ha un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 . G_{i-1} può essere ottenuto splittando un vertice $u \in G_i$, analizziamo ora i 3 casi:

- u appartiene a TK_5 : per il lemma 2.16 G_{i-1} conterrà un sottografo $TK_{3,3}$;
- u appartiene a $TK_{3,3}$: anche G_{i-1} conterrà quindi $TK_{3,3}$;
- u non appartiene a $TK_{3,3}$ e TK_5 : in G_{i-1} sarà quindi ancora presente $TK_{3,3}$ o TK_5 .

□

Abbiamo ora tutti i prerequisiti necessari per dimostrare il teorema di Kuratowski.

Teorema 2.19 (Teorema di Kuratowski). *Un grafo G è planare se e solo se non contiene sottografi $TK_{3,3}$ o TK_5 .*

Dimostrazione. “ \Rightarrow ”: dato il lemma 2.15, è evidente che se un grafo G è planare non contiene sottografi omeomorfi a $K_{3,3}$ o K_5 .

“ \Leftarrow ”: per provare questo lato dell’implicazione dimostriamo la tesi equivalente “ G non planare \Rightarrow contiene $TK_{3,3}$ o TK_5 ”.

Consideriamo G grafo semplice, 2-connesso con ϵ archi e procediamo per induzione su ϵ . Notiamo che se $\epsilon \leq 6$, per il lemma 2.6 G è planare e la tesi è vera. Supponiamo quindi il teorema vero per i grafi aventi $\epsilon - 1$ archi.

Consideriamo ora G non planare, $(a, b) \in E(G)$ un arco qualsiasi, $G' = G - (a, b)$.

Se G' non planare allora per ipotesi induttiva contiene $TK_{3,3}$ o TK_5 , i quali saranno quindi di conseguenza contenuti anche in G .

Se invece G' planare, denotando con $\kappa(a, b)$ il numero di cammini internamente disgiunti da a a b in G' , siccome G è 2-connesso sappiamo $\kappa(a, b) \geq 1$.

1. *caso $\kappa(a, b) = 1$* : questo implica che G' ha un cut vertex u in ogni cammino da a a b . Aggiungiamo gli archi (a, u) e b, u a G' se non sono già presenti e otteniamo un grafo H . Denotiamo Ha , Hb i blocchi di H contenenti a e b .

Dimostriamo ora che Ha o Hb è non planare, se entrambi fossero planari infatti potremmo disegnare le loro immersioni nel piano lasciando gli archi (a, u) , (b, u) nella faccia esterna, “incollarli” tra loro al vertice u rimuovere (a, u) , (b, u) e ottenere così un’immersione planare di G . Questo è un assurdo essendo G non planare.

Supponiamo quindi Ha non planare, per ipotesi induttiva contiene come sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 . Tale sottografo essendo G' planare conterrà l’arco (a, u) , rimpiazzando quindi (a, u) con il cammino formato dall’arco (a, b) e dal cammino $b \rightarrow u$ in Hb , il risultato sarà un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 in G .

2. *caso $\kappa(a, b) = 2$* : siano $P1$, $P2$ due cammini internamente disgiunti da a a b in G' . Siccome $\kappa(a, b) = 2 \exists v \in P1, u \in P2$ t.c. tutti i cammini da $a \rightarrow b$ contengono uno tra $\{u, v\}$ e $G' - \{u, v\}$ è disconnesso. Siano ora Ka , Kb le due componenti connesse di $G' - \{u, v\}$ contenenti rispettivamente a e b . Denotiamo inoltre $G'_a \doteq Ka \cup \{u, v\}$, $G'_b \doteq Kb \cup \{u, v\}$.

Aggiungiamo ora un vertice x a G'_a adiacente a u, v, a e similmente un vertice y a G'_b adiacente a u, v, b , denotiamo questi grafi Ha , Hb .

Proviamo ora per assurdo almeno uno tra Ha e Hb è non planare. Siccome il vertice x ha grado 3 in Ha , ci sono 3 facce incidenti su esso. Disegniamo un’immersione planare di Ha facendo in modo che le facce contenenti gli archi (u, x) , (v, x) siano le facce esterne. Similmente disegniamo Hb in modo che (u, y) , (v, y) siano nella faccia esterna. Ora “incolliamo” Ha e Hb nei vertici u e v , cancelliamo x e y e aggiungendo l’arco (a, b) otterremmo una immersione planare di $G \rightarrow \mathbb{Z}$. Concludiamo quindi che uno tra Ha e Hb è non planare.

Supponendo Ha non planare allora per ipotesi induttiva contiene un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 . Se tale sottografo non contiene x allora è contenuto anche in G e la dimostrazione è conclusa. Supponiamo quindi che il sottografo contenga x , in questo caso Hb sarà 2-connesso, in quanto G lo è. Hb conterrebbe quindi due cammini internamente disgiunti $b \rightarrow u$, $b \rightarrow v$. Questi due cammini assieme all’arco (a, b) possono essere utilizzati per rimpiazzare gli archi (u, x) , (v, x) , (a, x) di Ha ottenendo così un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 in G .

3. *caso $\kappa(a, b) \geq 3$* : siano $P1$, $P2$, $P3$ due cammini internamente disgiunti da a a b in G' . Consideriamo una immersione nel piano di G' , ogni coppia di cammini $P1 \cup P2$, $P1 \cup P3$, $P2 \cup P3$ crea un ciclo la cui immersione nel piano sarà una curva di Jordan. Uno dei tre cammini sarà quindi contenuto nella curva di Jordan formata dagli altri, supponiamo $P2$ contenuto all’interno di $P1 \cup P3$. L’arco (a, b) può essere immerso all’interno di $P1 \cup P2$, all’interno di $P2 \cup P3$ o all’esterno di $P1 \cup P3$. Siccome G è non planare ognuna di queste tre regioni Pi deve contenere

un cammino da un vertice interno a P_i a uno interno a P_j . Sia P_{12} un cammino da $u_1 \in P_1$ a $u_2 \in P_2$, P_{13} da $v_1 \in P_1$ a $u_3 \in P_3$, P_{23} da $u_2 \in P_2$ a $v_3 \in P_3$.
 $\forall i$ se $u_i \neq v_i$ contraiamo l'arco tra essi, aggiungendo ora l'arco (a, b) il grafo risultante sarà un minore TK_5 di G . Quindi per il teorema 2.18 G conterrà un sottografo TK_5 o $TK_{3,3}$.

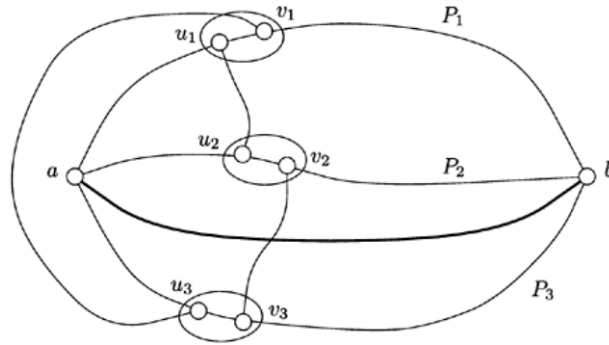


Figura 2.2: minore TK_5 di G

□

Il teorema di Kuratowski può essere riformulato in termini di minori, in questo caso esso prende il nome di teorema di Wagner.

Teorema 2.20 (Teorema di Wagner). *Un grafo G è planare se e solo se non ha $K_{3,3}$ o K_5 come minori.*

Dimostrazione. “ \Rightarrow ”: se G planare ovviamente non ha come minori $K_{3,3}$ o K_5 .

“ \Leftarrow ”: se G non ha $K_{3,3}$ o K_5 come minori allora non ha nemmeno sottografi $TK_{3,3}$ o TK_5 e quindi è planare per il teorema di Kuratowski 2.19. □

Capitolo 3

L'algoritmo di Boyer-Myrvold

3.1 Supposizioni sul grafo in input

Appendice A

Teoria dei grafi

Definizione A.1 (Grafo). Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ dove:

- V è un insieme di vertici (**vertex**);
- E è un insieme di coppie di nodi (u, v) , $u, v \in V$ dette archi o lati (**edge**);

Nei grafi **orientati** le coppie in E sono ordinate in quelli non orientati no.

Definizione A.2 (Adiacenza). Un vertice v si dice adiacente a u se esiste $(u, v) \in E$.

NB: nei grafi non orientati l'adiacenza è una relazione simmetrica.

Definizione A.3 (Arco incidente). Un arco (u, v) si dice incidente da u a v .

Definizione A.4 (Grado). Nel caso di grafi orientati definiamo:

- **grado entrante** di un nodo come il numero di archi incidenti su esso;
- **grado uscente** di un nodo come il numero di archi incidenti da esso.

Per i grafi non orientati avremo invece un'unica definizione:

- il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.

Definizione A.5 (Cammino). Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un cammino C di lunghezza k è una sequenza di nodi u_0, u_1, \dots, u_k t.c.

$$(u_i, u_{i+1}) \in E \text{ per } 0 \leq i \leq k-1 \quad (\text{A.1})$$

Definizione A.6 (Grafis isomorfi). Siano $G = (V(G), E(G))$, $H = (V(H), E(H))$ due grafi. Diremo G isomorfo a H se $\exists \theta : V(G) \rightarrow V(H)$ t.c. θ è un isomorfismo e

$$\theta(E(G)) \doteq \{\theta(uv) \text{ t.c. } uv \in E(G)\} = E(H) \quad (\text{A.2})$$

Definizione A.7 (Grafo completo). Un grafo $G = (V, E)$ si dice completo se

$$\forall u, v \in V \exists (u, v) \in E \quad (\text{A.3})$$

Definiamo K_n un grafo completo con n vertici.

Definizione A.8 (Grafo bipartito). Un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice bipartito se V può essere diviso in due sottoinsiemi X, Y t.c.

$$\forall (u, v) \in E \text{ vale } u \in X, v \in Y \text{ oppure } u \in Y, v \in X \quad (\text{A.4})$$

Un grafo bipartito può avere al più $|X| \cdot |Y|$ archi.

Definiamo inoltre $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo che soddisfa

$$|X| = m, |Y| = n, \varepsilon \doteq |E| = mn \quad (\text{A.5})$$

Definizione A.9 (Connessione). Un grafo non orientato $G = (V, E)$ è detto **connesso** se

$$\forall u, v \in V \exists (u, v) \in E \quad (\text{A.6})$$

Un sottografo connesso massimale di un grafo non orientato è detto **componente connessa**.

Definizione A.10 (Vertex-connectivity). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo **vertex-connectivity** κ il minimo numero di vertici da eliminare per sconnettere G .

Definizione A.11 (Grafo k -connesso). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo G **k -connesso** se $|V| > k$ e $\kappa \geq k$ dove κ corrisponde alla vertex-connectivity.

Informalmente un grafo è detto k -connesso se rimane connesso rimuovendo $k' < k$ vertici qualsiasi.

Teorema A.12 (Grafo 2-connesso (Non separabile)). *Un grafo non orientato $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$ è 2-connesso \Leftrightarrow ogni coppia di vertici (u, v) è connessa da almeno 2 cammini internamente disgiunti.*

Definizione A.13 (Cut vertex). Vertici che se eliminati sconnettono il grafo.

Definizione A.14 (Blocco). Definiamo blocchi di un grafo i sottografi 2-connessi massimali.

Definizione A.15 (Cammini internamente disgiunti). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, siano $a, b \in V$ due cammini da a a b a, v_1, \dots, v_n, b , a, u_1, \dots, u_n, b . Essi si dicono internamente disgiunti se

$$v_i \neq u_j \quad \forall i, j \quad (\text{A.7})$$

Definizione A.16 (Ciclo di Hamilton). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo ciclo di Hamilton un ciclo che contiene tutti i vertici del grafo una sola volta.

Definiamo G hamiltoniano se G contiene un ciclo di hamilton.

Definizione A.17 (Suddivisione). Dato un grafo G definiamo suddivisione (subdivision) di G i grafi ottenuti da G rimpiazzando uno o più archi con cammini di lunghezza 2 o più. In altre parole una suddivisione di G è un grafo ottenuto da esso inserendo dei vertici “all’interno dei lati”.



Figura A.1: esempio suddivisione

Definizione A.18 (Contrazione). Operazione inversa della suddivisione, consiste nell’contrarre un arco avente un endpoint di grado 2.

Definizione A.19 (Grafì omeomorfi). Due grafì G_1, G_2 si dicono topologicamente equivalenti o omeomorfi se possono essere trasformati l’uno nell’altro attraverso operazioni di suddivisione o contrazione degli archi.

Denotiamo l’insieme dei grafì omeomorfi a G con TG .

Definizione A.20 (Minore). H è detto minore di G se H è un grafo ottenuto da G tramite una sequenza di operazioni di rimozione di archi, vertici o contrazione di archi.

Definizione A.21 (Immersione planare). Dato un grafo G , definiamo $\psi : (V, E) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione che mappa i vertici di G nel piano e gli archi in curve continue che si intersecano solamente negli endpoint. Allora $G^\psi \doteq \psi(G)$ è chiamata immersione planare di G .

Definizione A.22 (Facce). Le facce di un immersione planare G^ψ sono le regioni connesse che rimangono quando il piano viene “tagliato” dagli archi di G^ψ .

Definizione A.23 (Facial walk). Sia G grafo, G^ψ una sua immersione nel piano. Un cammino chiuso C frontiera di una faccia F di G^ψ è detto facial walk di F .

Definizione A.24 (Grado di una faccia). Definiamo $\deg(F)$ grado di una faccia F come la lunghezza del suo facial walk.

Definizione A.25 (Grafo semplice). Grafo contenente un numero finito di nodi.

Definizione A.26 (Grafo planare). Un grafo non orientato G si dice planare se può essere rappresentato nel piano evitando che gli archi si intersechino (se non negli endpoint).

Appendice B

Topologia

Definizione B.1 (n-cella chiusa). Spazio topologico omeomorfo ad una palla chiusa n-dimensionale.

Definizione B.2 (Complesso cellulare (CW-complesso)). Spazio topologico ottenuto incollando tra loro un insieme di celle chiuse.

Definizione B.3 (Caratteristica di eulero). Sia $\tau \subset \mathbb{R}^n$ un complesso cellulare composto da k_i i-celle $i = 0, \dots, n$. Definiamo caratteristica di eulero

$$\chi(\tau) = k_0 - k_1 + k_2 - \dots k_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i k_i \quad (\text{B.1})$$

Definizione B.4 (Cammini omotopi). Siano $f, g \in \mathcal{C}^0(X; Y)$. Diciamo f e g omotope $f \sim g$ se esiste $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ t.c.

$$\forall x \in X \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Informalmente questo vale se una mappa può essere “deformata con continuità” nell'altra.

Definizione B.5 (Spazi omotopicamente equivalenti). X, Y si dicono omotopicamente equivalenti ($X \sim Y$) se $\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ t.c.

- $g \circ f \sim id_X$
- $f \circ g \sim id_Y$

Informalmente X, Y saraano omotopicamente equivalenti se possono essere trasformati l'uno nell'altro con operazioni di deformazione.

Lemma B.6 (Omotopicamente invariante). *La caratteristica di eulero è un omotopicamente invariante, ovvero*

$$X \sim Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \quad (\text{B.3})$$

Proposizione B.7 (Invarianza topologica). *La caratteristica di eulero è un invariante topologico, ovvero*

$$X \simeq Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \quad (\text{B.4})$$

dove $X \simeq Y$ se X e Y omeomorfi.

Lemma B.8. *Ogni poliedro semplice può essere identificato come un grafo planare usando i vertici del poliedro come vertici del grafo e gli spigoli del poliedro come archi del grafo.*

Proposizione B.9. *Sia τ un poliedro semplice allora $\chi(\tau) = 2$*

Dimostrazione. Questo risultato segue direttamente dal lemma precedente e dal corollario 2.4. \square

Bibliografia

- [1] Leonhard Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8:128–140, 1735.
- [2] John Hopcroft and Robert Tar Jan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM*, 21:549–568, 1974.
- [3] Wendy J. Myrvold John M. Boyer. Simplified $O(n)$ planarity by edge addition. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 8(3):241–273, 2004.
- [4] Donald L Kocay, William.; Kreher. *Graphs, Algorithms, and Optimization Discrete Mathematics and Its Applications*. CRC Press, first edition edition, 2004.