UNIVERSITÀ DI TRENTO

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Elaborato finale

Grafi planari

Algoritmo di Boyer per l'immersione planare e l'isolamento di un sottografo di Kuratowski

Supervisore
Alberto Montresor

Laureando
Martino Papa

Anno accademico 2023/2024

Ringraziamenti

grazie

Indice

Sommario

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

Sommario è un breve riassunto del lavoro svolto dove si descrive l'obiettivo, l'oggetto della tesi, le metodologie e le tecniche usate, i dati elaborati e la spiegazione delle conclusioni alle quali siete arrivati.

Il sommario dell'elaborato consiste al massimo di 3 pagine e deve contenere le seguenti informazioni:

- contesto e motivazioni
- breve riassunto del problema affrontato
- tecniche utilizzate e/o sviluppate
- risultati raggiunti, sottolineando il contributo personale del laureando/a

Capitolo 1

Introduzione

Capitolo 2

Risultati teorici

Teorema 2.1. *Sia G un grafo planare avente k componenti connesse. Sia G^φ una immersione di G nel piano, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = k + 1 \tag{2.1}$$

dove V è il numero di vertici (k_0), ϵ il numero di archi (k_1) e f il numero di facce (k_2).

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di archi ϵ:
caso base $\epsilon = 0$, $V = k$ vertici, $f = 1$ quindi è soddisfatta $V - \epsilon + f = k + 1$
passo induttivo $\epsilon \to \epsilon + 1$, aggiungiamo un arco al grafo

1. *il nuovo arco è un loop*, in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f + 1$, $k \to k$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \tag{2.2}$$

2. *il nuovo arco è tra due vertici appartenenti alla stessa componente connessa*, anche in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f + 1$, $k \to k$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + (f + 1) = V - \epsilon + f = k + 1 \tag{2.3}$$

3. *il nuovo arco connette due componenti che erano sconnesse*, in questo caso $V \to V$, $\epsilon \to \epsilon + 1$, $f \to f$, $k \to k - 1$ e quindi

$$V - (\epsilon + 1) + f = (k - 1) + 1 = k' + 1 \tag{2.4}$$

dove $k' = k - 1$ è il numero di componenti connesse dopo l'aggiunta dell'arco.

□

Corollario 2.1 (Formula di Eulero)**.** *Sia G un grafo planare connesso, allora*

$$\chi(G) = V + f - \epsilon = 2 \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Direttamente dal teorema 2.1 con $k = 1$. □

Proposizione 2.1. *Ogni suddivisione di un grafo non planare è non planare, questo implica anche che i vertici di grado 2 non influenzano la planarità del grafo.*

Dimostrazione. Sia G grafo non planare, a, b due archi che si intersecano nell'immersione G^φ, è evidente che suddividere a o b non andrebbe ad influire sulla non planarità del grafo. □

Lemma 2.1. *Sia G un grafo planare, G^ψ una sua immersione nel piano, $F_1, \ldots, F_f$ le facce di G^ψ allora*

$$\sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) = 2\epsilon \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che ogni arco (u, v) è incedente esattamente su due facce di G^ψ. $\square$

Proposizione 2.2. *Sia G planare, ϵ il numero di archi, V il numero di vertici. Vale allora*

$$\epsilon \leq 3V - 3 \tag{2.7}$$

Inoltre se supponiamo $V \geq 3$ vale

$$\epsilon \leq 3V - 6 \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Sia $V < 3$. In questo caso il lemma è una diretta conseguenza della formula di Eulero (Teorema 2.1).
Sia $V \geq 3$. G planare $\Rightarrow$ ogni faccia ha almeno 3 lati ovvero $\deg(F_i) \geq 3$ $\forall i$. Per il lemma 2.1 vale quindi

$$2\epsilon = \sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) \geq \sum_{i=1}^{f} 3 = 3f \tag{2.9}$$

Per la formula di eulero segue inoltre $V + f - \epsilon = 2$ da cui abbiamo, moltiplicando per 3 e riarrangiando i termini

$$3\epsilon = 3V + 3f - 6 \tag{2.10}$$

applicando ora $3f \leq 2\epsilon$ otteniamo la tesi. $\square$

Lemma 2.2. *K_5 e $K_{3,3}$ sono grafi non planari.*

Dimostrazione. K_5: il grafo completo K_n ha $\epsilon = \frac{n(n-1)}{2}$ archi. Supponendo per assurdo K_5 planare dovrebbe valere la proposizione 2.2 ovvero, essendo $V = 5 \geq 3$

$$10 = \frac{n(n-1)}{2} = \epsilon \leq 3V - 6 = 9 \rightarrow \lightning \tag{2.11}$$

$K_{3,3}$: Supponendo per assurdo $K_{3,3}$ planare, sapendo $\epsilon = 3 * 3 = 9$, $V = 6$ dalla formula di eulero 2.1 otterremmo $f = 2 - V + \epsilon = 5$.
Siccome $K_{3,3}$ è bipartito, esso non contiene cicli composti da 3 archi, quindi ogni faccia ha almeno 4 lati, ovvero $\deg(F) \geq 4$ $\forall F$ e vale $\sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) \geq 4 * f = 20$. Applicando ora il lemma 2.1 otteniamo l'assurdo

$$20 \leq \sum_{i=1}^{f} \deg(F_i) = 2\epsilon = 18 \rightarrow \lightning \tag{2.12}$$

$\square$

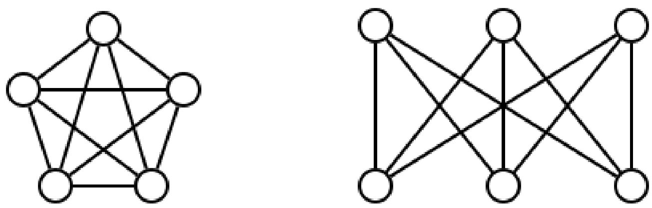

Figura 2.1: immersione nel piano di K_5 e $K_{3,3}$

Lemma 2.3. *Un grafo separabile è planare se e solo se tutti i suoi blocchi sono planari.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": banale, è evidente che se un grafo è planare allora anche i suoi sottografi lo sono.
"$\Leftarrow$": notiamo che due blocchi differenti hanno al più un elemento nell'intersezione, se così non fosse i due blocchi sarebbero 2-connessi confutando l'ipotesi di massimalità. Proseguiamo ora per induzione sul numero di blocchi $|B|$, dove $B = \{b_i\}_{i \in I}$ è l'insieme dei blocchi.

- *caso base*: G 2-connesso quindi $|B| = 1$, $B = \{G\}$ e la tesi equivale a "G planare $\Rightarrow G$ planare".
- *passo induttivo*: sia G grafo composto da n cicli. Rimuoviamo da G un blocco b che si intersechi solo con un altro blocco b' nel veritce v, questo deve esistere perchè altrimenti sarebbe presente un ciclo di blocchi, essi sarebbero dunque 2-connessi e di coneseguenza non massimali $\lightning$; potrebbe anche essere che tutti i blocchi siano sconnessi e quindi la loro intersezione sarebbe sempre vuota, tuttavia questo è un caso banale in quanto è evidente che un grafo è planare se e solo se tutte le sue componenti connesse sono planari.
  Il grafo G' risultante dalla rimozione del blocco b è per ipotesi induttiva planare, disegnamo ora le immersioni nel piano di b e G' facendo in modo che il punto di intersezione v appaia in entrambe le immersioni nella faccia esterna. Possiamo ora unire tra loro le due immersioni ottenendo che $G = G' \cup b$ è planare.

$\square$

Questo lemma ci permette di scegliere sempre un grafo 2-connesso come grafo di partenza senza perdere generalità.

Lemma 2.4. *Un grafo è planare se e solo se tutte le sue componenti conesse sono planari.*

Dimostrazione. Caso banale dimostrato nel lemma precedente (2.3). $\square$

Lemma 2.5. *Sia G un grafo qualsiasi ottenuto splittando un vertice di K_5 allora G contiene un sottografo $TK_{3,3}$.*

Dimostrazione. Siano u_1, u_2 i due vertici risultanti dallo split di un vertice di K_5. Per definizione di split ambedue i vertici hanno almeno grado 3. u_1 e u_2 sono adiacenti e assieme sono adiacenti a tutti i rimanenti 4 vertici. Scegliendo ora una partizione dei 4 vertici x, y, w, z t.c. u_1 adiacente a x, y e u_2 adiacente a w, z, otteniamo un sottografo $K_{3,3}$ con bipartizione (u_1, w, z) e (u_2, x, y). $\square$

Teorema 2.2. *Se G ha un minore $K_{3,3}$ allora contiene un sottografo $TK_{3,3}$. Se G ha un minore K_5 allora contiene un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5.*

Dimostrazione. Supponiamo che G abbia un minore $TK_{3,3}$ o TK_5, se nel ottenere il minore non è stata coinvolta nessuna operazione di contrazione degli archi allora esso sarà anche un sottografo di G. Altrimenti sia $G_0, \ldots, G_k$ sequenza di grafi ottenuta da G, G_0 sottografo di G, l'arco e_i di G_{i-1} è contratto per ottenere G_i e G_k è $K_{3,3}$ o K_5. Se ogni e_i ha un endpoint di grado 2 possiamo invertire la contrazione suddividendo gli archi e trovando un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5.
Altrimenti sia e_i l'arco con i massimo tra quelli con entrambi gli endpoint di grado almeno 3. Tutti gli archi contratti successivamente a G_i hanno un endpoint di grado 2, quindi G_i ha un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5. G_{i-1} può essere ottenuto splittando un vertice $u \in G_i$, analizziamo ora i 3 casi:

- *u appartiene a TK_5*: per il lemma 2.5 G_{i-1} conterrà un sottografo $TK_{3,3}$;
- *u appartiene a $TK_{3,3}$*: anche G_{i-1} conterrà quindi $TK_{3,3}$;
- *u non appartiene a $TK_{3,3}$ e TK_5*: in G_{i-1} sarà quindi ancora presente $TK_{3,3}$ o TK_5.

$\square$

Teorema 2.3 (Teorema di Kuratowski)**.** *Un grafo G è planare se e solo se non contiene sottografi $TK_{3,3}$ o TK_5.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": dato il lemma 2.2, è evidente che se un grafo G è planare non contiene sottografi omeomorfi a $K_{3,3}$ o K_5.
"$\Leftarrow$": per provare questo lato dell'implicazione dimostramo la tesi equivalente "G non planare $\Rightarrow$ contiene $TK_{3,3}$ o TK_5".
Consideriamo G grafo semplice, 2-connesso con ϵ archi e procediamo per induzione su ϵ. Notiamo che se $\epsilon \leq 6$, per il lemma 2.2 G è planare e la tesi è vera. Supponiamo quindi il teorema vero per i grafi

aventi $\epsilon - 1$ archi.
Consideriamo ora G non planare, $(a, b) \in E(G)$ un arco qualsiasi, $G' = G - (a, b)$.
Se G' non planare allora per ipotesi induttiva contiene $TK_{3,3}$ o TK_5, i quali saranno quindi di conseguenza contenuti anche in G.
Se invece G' planare, denotando con $\kappa(a, b)$ il numero di cammini internamente disgiunti da a a b in G', siccome G è 2-connesso sappiamo $\kappa(a, b) \geq 1$.

1. *caso* $\kappa(a, b) = 1$: questo implica che G' ha un cut vertex u in ogni cammino da a a b. Aggiungiamo gli archi (a, u) e b, u a G' se non sono già presenti e otteniamo un grafo H. Denotiamo Ha, Hb i blocchi di H contenenti a e b.
   Dimostriamo ora che Ha o Hb è non planare, se entrambi fossero planari infatti potremmo disegnare le loro immersioni nel piano lasciando gli archi (a, u), (b, u) nella faccia esterna, "incollarli" tra loro al vertice u rimuovere (a, u), (b, u) e ottenere così un immersione planare di G. Questo è un assurdo essendo G non planare.
   Supponiamo quindi Ha non planare, per ipotesi induttiva contiene come sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5. Tale sottografo essendo G' planare conterrà l'arco (a, u), rimpiazziando quindi (a, u) con il cammino formato dall'arco (a, b) e dal cammino $b \to u$ in Hb, il risultato sarà un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 in G.

2. *caso* $\kappa(a, b) = 2$: siano $P1$, $P2$ due cammini internamente disgiunti da a a b in G'. Siccome $\kappa(a, b) = 2$ $\exists v \in P1, u \in P2$ t.c. tutti i cammini da $a \to b$ contengono uno tra $\{u, v\}$ e $G' - \{u, v\}$ è disconnesso. Siano ora Ka, Kb le due componenti connesse di $G' - \{u, v\}$ contenenti rispettivamente a e b. Denotiamo inoltre $G'_a \doteq Ka \cup \{u, v\}$, $G'_b \doteq Kb \cup \{u, v\}$.
   Aggiungiamo ora un vertice x a G'_a adiacente a u, v, a e similmente un vertice y a G'_b adiacente a u, v, b, denotiamo questi grafi Ha, Hb.
   Proviamo ora per assurdo almeno uno tra Ha e Hb è non planare. Siccome il vertice x ha grado 3 in Ha, ci sono 3 facce incidenti su esso. Disegnamo un immersione planare di Ha facendo in modo che le facce contenenti gli archi $(u, x), (v, x)$ siano le facce esterne. Similmente disegnamo Hb in modo che $(u, y), (v, y)$ siano nella faccia esterna. Ora "incolliamo" Ha e Hb nei vertici u e v, cancelliamo x e y e aggiungendo l'arco (a, b) otterremmo una immersione planare di $G \to \lightning$.
   Concludiamo quindi che uno tra Ha e Hb è non planare.
   Supponendo Ha non planare allora per ipotesi induttiva contiene un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5. Se tale sottografo non contiene x allora è contenuto anche in G e la dimostrazione è conclusa. Supponiamo quindi che il sottografo contenga x, in questo caso Hb sarà 2-connesso, in quanto G lo è. Hb conterrebbe quindi due cammini internamente disgiunti $b \to u$, $b \to v$. Questi due cammini assieme all'arco (a, b) possono essere utilizzati per rimpiazzare gli archi $(u, x), (v, x), (a, x)$ di Ha ottenendo così un sottografo $TK_{3,3}$ o TK_5 in G.

3. *caso* $\kappa(a, b) \geq 3$: siano $P1$, $P2$, $P3$ due cammini internamente disgiunti da a a b in G'. Consideriamo una immersione nel piano di G', ogni coppia di cammini $P1 \cup P2, P1 \cup P3, P2 \cup P3$ crea un ciclo la cui immersione nel piano sarà una curva di Jordan. Uno dei tre cammini sarà quindi contenuto nella curva di Jordan formata dagli altri, supponiamo $P2$ contenuto all'interno di $P1 \cup P3$. L'arco (a, b) può essere immerso all'interno di $P1 \cup P2$, all'interno di $P2 \cup P3$ o all'esterno di $P1 \cup P3$. Siccome G è non planare ognuna di queste tre regioni Pi deve contenere un cammino da un vertice interno a Pi a uno interno a Pj. Sia $P12$ un cammino da $u_1 \in P1$ a $u_2 \in P2$, $P13$ da $v_1 \in P1$ a $u_3 \in P3$, $P13$ da $u_2 \in P2$ a $v_3 \in P3$.
   $\forall i$ se $u_i \neq v_i$ contraiamo l'arco tra essi, aggiungendo ora l'arco (a, b) il grafo risultante sarà un minore TK_5 di G. Quindi per il teorema 2.2 G conterrà un sottografo TK_5 o $TK_{3,3}$.

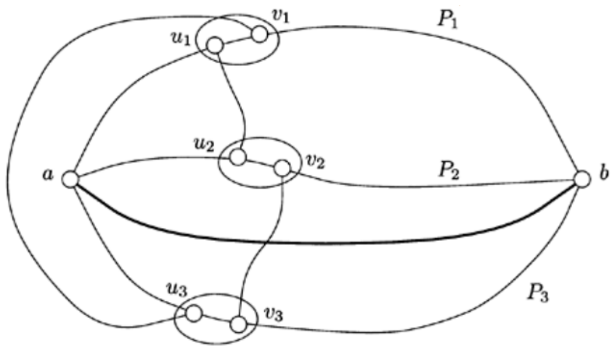

Figura 2.2: minore TK_5 di G

□

Si può riformulare il teorema precedente in termine di minori.

Teorema 2.4 (Teorema di Wagner)**.** *Un grafo G è planare se e solo se non ha $K_{3,3}$ o K_5 come minori.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": se G planare ovviamente non ha come minori $K_{3,3}$ o K_5.
"$\Leftarrow$": se G non ha $K_{3,3}$ o K_5 come minori allora non ha nemmeno sottografi $TK_{3,3}$ o TK_5 e quindi è planare per il teorema di Kuratowski 2.3. □

Bibliografia

[1] Triggs B. Dalal N. Histograms of oriented gradients for human detection. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 886–893, San Diego, USA, 20-26 June 2005.

[2] Donald L Kocay, William.; Kreher. *Graphs, Algorithms, and Optimization Discrete Mathematics and Its Applications*. CRC Press, first edition edition, 2004.

[3] Donoho D. L. Compressed sensing. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 52(4):1289–1306, 2006.

[4] Me. Ict business. http://www.ictbusiness.it/. ultimo accesso 15/06/2015.

Allegato A

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

A.1 Titolo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

A.1.1 Sottotitolo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

Allegato B

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

B.1 Titolo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

B.1.1 Sottotitolo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.