

Meccanica analitica

Martino Papa

3 settembre 2022

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Spazi topologici	3
2	Spaziotempo	5
2.1	Sistemi di riferimento	5
2.2	Cinematica	6
2.2.1	Formula di Poisson	6
2.2.2	Velocità e accelerazione in diversi sistemi di riferimento	8
3	Dinamica Newtoniana	9
3.0.1	Moto relativo di riferimenti inerziali	9
4	Meccanica Lagrangiana	12
4.1	Spaziotempo delle configurazioni in presenza di vincoli olonomi	12
4.1.1	Vincoli ideali	13
4.2	Equazioni di Eulero-Lagrange	13
5	Simmetrie e leggi di conservazione	17
5.1	Momento coniugato e integrali primi	18
5.1.1	Invarianza traslazionale e rotazionale	18
5.1.2	gruppo locale a un paramentro	19
5.1.3	Teorema di Noether	20
6	Teoria della stabilità	21
6.1	Metodi di Lyapunov per la stabilità	22
6.2	Applicazione a sistemi fisici	22
6.2.1	Teorema Lagrange-Dirichlet	23
7	Meccanica Hamiltoniana	25
7.1	Dipendenza della funzione di Hamilton dalle coordinate	26
7.2	Formulazione di Hamilton su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$	27
7.2.1	Prerequisiti di analisi	27
7.2.2	Sistemi Hamiltoniani	28
8	Argomenti più avanzati di Meccanica Lagrangiana	29
8.1	Principio di azione stazionaria	29
8.2	Potenziali generalizzati	29
8.2.1	Condizioni per l'esistenza del potenziale generalizzato	29
9	Equazioni differenziali	31
9.1	Equazioni differenziali di primo ordine	31
9.2	Equazioni differenziali di secondo ordine	31
10	Esercizi	34
10.1	Formule	34

Capitolo 1

Introduzione

spazio affine sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale, uno **spazio affine** su V (**spazio delle traslazioni**) è un insieme $\mathbb{A} \neq \emptyset$ t.c. data un'applicazione $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$ che invia $(P, Q) \rightarrow \overline{PQ}$ essa soddisfi due proprietà:

1. $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V \exists! Q \mid \overline{PQ} = v$
2. $\forall P, Q, R \in \mathbb{A} \overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$

osservazione durante il corso si considererà sempre V di dimensione finita.

spazio metrico sia X un insieme qualunque, chiameremo **distanza** (o **metrica**) su X la funzione

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty] \quad (1.1)$$

che soddisfa $\forall x, y, z \in X$:

- $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positività)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare)

se d è una distanza sull'insieme X allora (X, d) si dice **spazio metrico**

spazio euclideo sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale, \mathbb{A}^n spazio affine su V , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare su V , allora:

\mathbb{A}^n si chiama spazio euclideo e si denota \mathbb{E}^n

negli spazi euclidei definiamo la distanza come la norma standard associata al prodotto scalare:

$$d(P, Q) \doteq \|\overline{PQ}\| = \sqrt{\langle \overline{PQ}, \overline{PQ} \rangle}, \forall P, Q \in \mathbb{E}^n \quad (1.2)$$

teorema sia \mathbb{A}^n uno spazio affine allora $\forall P, Q \in \mathbb{A}^n, \forall u, v \in V^n$ valgono le seguenti proprietà:

- $P - P = O$ (*origine*)
- $(P + u) + v = P + (u + v)$
- $P - Q = -(Q - P)$
- $P - Q = (P + u) - (Q + u)$

sistema di coordinate

sia \mathbb{A}^n spazio affine, $\phi : \mathbb{A}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione iniettiva, $\phi(U)$ aperto allora ϕ identifica biunivocamente i punti di U con le n -ple in $\phi(U)$

in questo caso ϕ si dice **sistema di coordinate locali**

se $U = \mathbb{A}^n$ allora ϕ si dice **sistema di coordinate globale**

Ogni spazio affine \mathbb{A}^n ammette una classe di sistemi di coordinate globali naturali detti **sistemi di coordinate cartesiane**, un tale sistema si costruisce come segue:

- si fissa $O \in \mathbb{A}^n$ detto **origine**
- si sceglie una base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V detta **sistema di assi** delle coordinate

si può definire $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ **biettiva t.c.** in via $\mathbb{A}^n \ni (P - O) \mapsto ((P - O)_1, \dots, (P - O)_n) \in \mathbb{R}^n$

trasformazioni affini

siano $\mathbb{A}_1^n, \mathbb{A}_2^m$ spazi affini con rispettivi spazi delle traslazioni V_1, V_2 , $\phi : \mathbb{A}_1^n \rightarrow \mathbb{A}_2^m$ è detta trasformazione affine se e solo se:

- $\phi(P + u) - \phi(Q + u) = \phi(P) - \phi(Q) \forall P, Q \in \mathbb{A}_1^n, u \in V_1$ (invarianza per traslazioni)
- la funzione $P - Q \mapsto \phi(P) - \phi(Q)$ definisce una trasformazione lineare $d\phi : V_1 \rightarrow V_2$

definizione alternativa sia ϕ definita come sopra, ϕ si dice trasformazione affine se e solo se

- ϕ è biettiva
- $\exists \varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineare e biettiva (**isomorfismo**) t.c. $\forall P, Q \in \mathbb{A}_1^n \overline{f(P)f(Q)} = \varphi(\overline{PQ})$

isometria

siano M_1, M_2 spazi metrici con distanze d_1, d_2 , $f : M_1 \rightarrow M_2$ è detta isometria \Leftrightarrow preserva le distanze

$$d_1(P, Q) = d_2(f(P), f(Q)) \forall P, Q \in M_1 \quad (1.3)$$

definizione alternativa siano $\mathbb{E}_1^n, \mathbb{E}_2^n$ due spazi euclidei, $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$ un'affinità, sia $P \in \mathbb{E}_1^n$ di coordinate $(x_{(1)}^1, \dots, x_{(1)}^n)$ f si dice isometria \Leftrightarrow scelti due sistemi di coordinate cartesiane ortonormali ϕ_1, ϕ_2 rispettivamente a $\mathbb{E}_1^n, \mathbb{E}_2^n$

$$x_{(2)}^k = \sum_{j=1}^n R_j^k x_{(1)}^{j+bj} \quad (1.4)$$

dove $(x_{(2)}^1, \dots, x_{(2)}^n)$ sono le coordinate di $f(P) \in \mathbb{E}_2^n$, $R_j^i \in O(n, \mathbb{R})$, $b^j \in \mathbb{R}$

memo: $O(n, \mathbb{K})$ è il gruppo delle matrici ortogonali $n \times n$ a valori in \mathbb{K}

1.1 Spazi topologici

sia $X \neq \emptyset$, $\tau \in \mathcal{P}(X)$ t.c.

- $\emptyset \in \tau$
- $\cup_i E_i \in \tau, \{E_i\}_{i \in I} \in \tau$ (chiuso per unione)
- $\cap_i E_i \in \tau, \{E_i\}_{i=1}^n \in \tau, n < \infty$ (chiuso per intersezione finita)

allora (X, τ) si dice **spazio topologico** e τ **topologia** di X

insieme aperto sia $A \in X$ allora A si dice aperto in $(X, \tau) \Leftrightarrow A \in \tau$

insieme chiuso sia $A \in X$ allora A si dice chiuso in $(X, \tau) \Leftrightarrow \mathcal{C}_X(A)$ è aperto in (X, τ)

intorno sia $x_0 \in X$, $A \in \tau$ si dice intorno di $x_0 \Leftrightarrow x_0 \in A$

continuità siano $(X, \tau), (Y, \xi)$ spazi topologici, $x_0 \in X$

$$f : X \rightarrow Y \text{ si dice continua in } x_0 \Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{N}_\xi(f(x_0)) \exists A \in \mathcal{N}_\tau(x_0) \text{ t.c. } f(A) \subset C$$

f si dice continua in $J \subset X \Leftrightarrow f$ continua $\forall j_0 \in J$

memo: $\mathcal{N}_\xi(x_0)$ è la famiglia degli intorni di x_0 rispetto alla topologia x_i

teorema $f : X \rightarrow Y$ si dice continua \Leftrightarrow la controimmagine di ogni aperto in Y secondo f è un aperto di X

base topologica sia (X, τ) spazio topologico, $\tau' \subset \tau$ si dice base topologica di $X \Leftrightarrow \forall A \in \tau$

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau' \quad (1.5)$$

se $\{A_i\}_{i \in I}$ è numerabile allora τ' si dice numerabile

esempio sia τ_ϵ la topologia euclidea, essa ammette una base numerabile data dalle famiglie di palle aperte di raggio variabile centrate nei punti razionali (\mathbb{Q})

spazio di Hausdorff (X, τ) spazio topologico è detto di Hausdorff \Leftrightarrow

$$\forall x_0, x_1, x_0 \neq x_1, \exists A_{x_0} \ni x_0, A_{x_1} \ni x_1, \text{ t.c. } A_{x_0}, A_{x_1} \subset \tau \text{ e } A_{x_0} \cap A_{x_1} = \emptyset \quad (1.6)$$

sistema di coordinate su uno spazio topologico sia (X, τ) spazio topologico, $f : \tau \ni U \rightarrow \mathbb{R}^m$ t.c.

- f iniettiva
- $f(U)$ aperto in \mathbb{R}^m
- $f : U \rightarrow f(U)$ continua con inversa continua

allora

- f è detto **sistema di coordinate locali**
- U è detto **dominio della carta**
- (U, f) è detta **carta locale**, una carta si dice **globale** se $U = X$

atlante differenziabile sia M uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile, una famiglia di carte locali $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, $\phi_i : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ è detta **atlante** di ordine **m** e grado **k** \Leftrightarrow

- $\cup_{i \in I} U_i = M$
- prese due carte $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ allora

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \quad (1.7)$$

è una funzione di classe \mathcal{C}^k con inversa di classe \mathcal{C}^k

atlante massimale un'atlante si dice massimale \Leftrightarrow presa una qualsiasi carta locale (U, ϕ) su M essa è tale che

$$\phi \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U) \rightarrow \phi(U_i \cap U) \quad (1.8)$$

$$\phi_i \circ \phi^{-1} : \phi(U_i \cap U) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U) \quad (1.9)$$

sono funzioni di classe \mathcal{C}^k con inversa di classe \mathcal{C}^k

NB: la seguente condizione corrisponde a richiedere $(U, \phi) \in \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, $\forall (U, \phi)$

varietà differenziabile un'atlante massimale si dice varietà differenziabile

definizione siano M, N due spazi di Hausdorff, $f : M \rightarrow N$ si dice di **classe** \mathcal{C}^k se $\forall (U, \phi), (V, \psi)$ nei rispettivi atlanti M, N

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ è di classe } \mathcal{C}^k \quad (1.10)$$

f si dice **differenziabile** se è di classe \mathcal{C}^∞

omeomorfismo f si dice omeomorfismo $\Leftrightarrow f$ biettiva, continua e con inversa continua

Capitolo 2

Spaziotempo

¹ lo spaziotempo della fisica classica \mathbb{V}^4 è una varietà differenziabile i cui punti sono detti **eventi**.

\mathbb{V}^4 è dotato di una funzione $T : \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ detta **tempo assoluto** t.c. T è suriettiva, differenziabile (\mathcal{C}^∞) e non singolare.

Per $t \in \mathbb{R}$ fissato, definiamo inoltre lo **spazio assoluto al tempo t** come

$$\Sigma_t \doteq T^{-1}(t) \quad (2.1)$$

ogni Σ_t è dotato della struttura di spazio euclideo e rispetta le seguenti proprietà

- $t \neq t' \Rightarrow \Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \Sigma_t \neq \emptyset$ (T suriettiva)
- $\mathbb{V}^4 = \cup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$

linea di universo (storia) siano $a, b \in \mathbb{R}$, sia $c_\gamma \in \mathbb{R}$ costante, allora $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{V}^4$ curva differenziabile e non singolare t.c.

$$T(\gamma(t)) = t + c_\gamma, \quad \forall t \in (a, b) \quad (2.2)$$

si dice storia o **linea di universo di un punto materiale**

2.1 Sistemi di riferimento

sia (E_R, Π_R) è detto sistema di riferimento se:

- E_R uno spazio euclideo tridimensionale (spazio di quiete)
- $\Pi_R : \mathbb{V}^4 \rightarrow E_R$ suriettiva e t.c.

$$\Pi_R|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_R \text{ è un'isometria} \quad (2.3)$$

proposizione ² sia (E_R, Π_R) un sistema di riferimento allora

$$\mathbb{V}^4 \ni e \mapsto (T(e), \Pi_R(e)) \in \mathbb{R} \times E_R \text{ è biettiva} \quad (2.4)$$

dimostrazione:

- iniettività

$$e \neq e' \Rightarrow \begin{cases} T(e) \neq T(e') & \text{(appartengono a spazi assoluti diversi)} \\ T(e) = T(e') \Rightarrow d_t(e, e') \neq 0 & \text{(appartengono allo stesso spazio assoluto)} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\text{inoltre } \Pi_R|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_R \text{ isometria} \Rightarrow 0 \neq d_t(e, e') = d_t(\Pi_R(e), \Pi_R(e')) \Leftrightarrow \Pi_R(e) \neq \Pi_R(e') \quad \square$$

- suriettività: sia $(t_0, P_0) \in \mathbb{R} \times E_R$

$$\Pi_R|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_R \text{ isometria} \Rightarrow \text{suriettiva} \quad (2.6)$$

$$\text{esiste quindi } e \in \Sigma_{t_0} \text{ t.c. } \Pi_R(e) = P_0 \Rightarrow (T(e), \Pi_R(e)) = (t_0, P_0) \quad \square$$

¹pagina 26 libro

²proposizione 3.6, pagina 34 libro

sistema di coordinate solidali ad un riferimento

vogliamo introdurre particolari carte globali (1.1) su \mathbb{V}^4 associate ad un riferimento R , che diremo solidali con R . Definiamo $E_R = \langle (e_1, e_2, e_3) \rangle$ con coordinate ortonormali (x_1, x_2, x_3) , considero la funzione

$$\mathbb{V}^4 \ni e \mapsto (T(e), \Pi_R(e)) \in \mathbb{R} \times E_R \quad (2.7)$$

fissando $T(e) = x_0(e) + c_R$, per la scelta di coordinate fatta in precedenza possiamo ricavare

$$\mathbb{V}^4 \ni e \mapsto (x_0(e), x_1(e), x_2(e), x_3(e)) \in \mathbb{R} \times E_R \quad (2.8)$$

notiamo che anche questa mappa è biettiva in quanto $T(e), \Pi_R(e)$ biettive

2.2 Cinematica

Consideriamo un sistema di riferimento R e un punto materiale descritto dalla linea di universo (2.2) $I \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{V}^4$. Possiamo rappresentare questa linea di universo in E_R come una curva differenziabile

$$t \mapsto P_\gamma(t) \doteq \Pi_R(\gamma(t)) \quad (2.9)$$

tale curva è detta **legge oraria** della linea di universo γ nel riferimento R .

Definiamo inoltre la **velocità** di γ rispetto a R all'istante t_0 come il vettore

$$v_R(t_0) \doteq \left. \frac{dP_\gamma}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_\gamma(t + \Delta t) - P_\gamma(t)}{\Delta t} \quad (2.10)$$

L'**accelerazione** di γ rispetto a R all'istante t_0 come il vettore

$$a_R(t_0) \doteq \left. \frac{d^2 P_\gamma}{dt^2} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{dv_R}{dt} \right|_{t=t_0} \quad (2.11)$$

osservazione $a_R(t_0), v_R(t_0)$ giacciono in E_R ma posso considerarli in Σ_t tramite $d(\Pi_R|_{\Sigma_t})^{-1}$, questo mi permette di confrontare velocità e accelerazioni in sistemi di riferimento diversi. (Uso la derivata di $\Pi_R|_{\Sigma_t}$ perchè essa agisce sui vettori).

Per trovare la velocità e l'accelerazione in Σ_t useremo quindi

$$v_R(t_0) = d(\Pi_R|_{\Sigma_t})^{-1} \left. \frac{dP_\gamma}{dt} \right|_{t=t_0} \quad (2.12)$$

$$a_R(t_0) = d(\Pi_R|_{\Sigma_t})^{-1} \left. \frac{d^2 P_\gamma}{dt^2} \right|_{t=t_0} \quad (2.13)$$

prodotto vettoriale siano \bar{a}, \bar{b} due vettori, \bar{u} il versore perpendicolare ad \bar{a} e \bar{b} orientato in modo da formare una terna destrorsa, θ l'angolo compreso tra \bar{a} e \bar{b} , definiamo allora il prodotto scalare tra \bar{a} e \bar{b} come

$$\bar{a} \wedge \bar{b} \doteq |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\theta) \bar{u} \quad (2.14)$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una terna destrorsa, $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ allora:

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

2.2.1 Formula di Poisson

dati due sistemi di riferimento R, \hat{R} con rispettive basi destrorse $\{e_1, e_2, e_3\} \subset E_R$, $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \subset E_{\hat{R}}$ definiamo il vettore **velocità angolare**

$$w_{\hat{R}}|_R(t) \doteq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \hat{e}_k(t) \wedge \left. \frac{d}{dt} \right|_R \hat{e}_k(t) \quad (2.16)$$

allora \forall curva differenziabile $(a, b) \ni t \mapsto \underline{u}(t) \in E_t$ vale la **formula di Poisson**

$$\frac{d}{dt} \Big|_R \underline{u}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{\widehat{R}} \underline{u}(t) + w_{\widehat{R}}|_R(t) \wedge \underline{u}(t) \quad (2.17)$$

dimostrazione: sia $\underline{u}(t)$ una curva divverenziabile del tipo $(a, b) \ni t \mapsto \underline{u}(t) \in E_t$, esso si può scrivere rispetto ai due sistemi di riferimento scelti come

$$\underline{u}(t) = \sum_{k=1}^3 u_j(t) e_j(t) = \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_j(t) \widehat{e}_j(t) \quad (2.18)$$

calcoliamo ora la sua derivata

$$\frac{d}{dt} \Big|_R \underline{u}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_R \left(\sum_{k=1}^3 \widehat{u}_j(t) \widehat{e}_j(t) \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{d\widehat{u}_k}{dt} \widehat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_k(t) \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_k \quad (2.19)$$

notiamo che $\sum_{k=1}^3 \frac{d\widehat{u}_k}{dt} \widehat{e}_k(t)$ corrisponde a $\frac{d}{dt} \Big|_{\widehat{R}} \underline{u}(t)$ in quanto

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\widehat{R}} \underline{u}(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{d\widehat{u}_k}{dt} \widehat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_k(t) \frac{d}{dt} \Big|_{\widehat{R}} \widehat{e}_k = \sum_{k=1}^3 \frac{d\widehat{u}_k}{dt} \widehat{e}_k(t) \quad (2.20)$$

mettendo assieme i risultati di queste ultime due equazioni otteniamo

$$\frac{d}{dt} \Big|_R \underline{u}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{\widehat{R}} \underline{u}(t) + \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_k(t) \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_k \quad (2.21)$$

per concludere la dimostrazione ora è sufficiente provare

$$\frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) = w_{\widehat{R}}|_R(t) \wedge \widehat{e}_j(t) \quad (2.22)$$

supponiamola e controlliamone la veridicità usando la definizione di velocità angolare 2.16

$$\frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) = \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \widehat{e}_k(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_R e_k(t) \right) \wedge \widehat{e}_j(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\widehat{e}_k(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_R e_k(t) \right) \wedge \widehat{e}_j(t) \quad (2.23)$$

usando $\widehat{e}_i(t) \cdot \widehat{e}_j(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ e la formula generale $(a \wedge b) \wedge c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\widehat{e}_k(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_R e_k(t) \right) \wedge \widehat{e}_j(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\delta_{kj} \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_k(t) - \left(\left(\frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_k(t) \right) \cdot \widehat{e}_j(t) \right) \widehat{e}_k(t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\left(\frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_k(t) \right) \cdot \widehat{e}_j(t) \right) \widehat{e}_k(t) \end{aligned}$$

inoltre possiamo notare

$$\left(\frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_k(t) \right) \cdot \widehat{e}_j(t) = \frac{d}{dt} \Big|_R (\widehat{e}_k(t) \cdot \widehat{e}_j(t)) - \widehat{e}_k(t) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) = -\widehat{e}_k(t) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) \quad (2.24)$$

da cui, sostituendo quest'ultimo risultato nell'equazione precedente

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\widehat{e}_k(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_R e_k(t) \right) \wedge \widehat{e}_j(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\widehat{e}_k(t) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) \right) \widehat{e}_k(t) \quad (2.25)$$

usando ora la formula $s = \sum_{n=1}^n f_k \cdot s f_k$, valida per la decomposizione di un vettore s su una base ortonormale f_1, \dots, f_n

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\widehat{e}_k(t) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) \right) \widehat{e}_k(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) = \frac{d}{dt} \Big|_R \widehat{e}_j(t) \quad (2.26)$$

□

proposizione ³ $w_{\hat{R}}|_R$ dipende solo da R e \hat{R} e non dalle basi scelte. Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- $w_{\hat{R}}|_R(t) = -w_R|_{\hat{R}}(t)$ (legge di inversione)
- $w_{\tilde{R}}|_R(t) = w_{\tilde{R}}|_{\hat{R}}(t) + w_{\hat{R}}|_R(t)$ (legge di composizione)
- $\frac{d}{dt}|_R w_{\hat{R}}|_R(t) = \frac{d}{dt}|_{\hat{R}} w_{\hat{R}}|_R(t)$ (assolutezza della derivata)

2.2.2 Velocità e accelerazione in diversi sistemi di riferimento

sia $P \in \Sigma_t$ un punto generico, R, \hat{R} due sistemi di riferimento di origine O, \hat{O} allora valgono le seguenti relazioni

$$v_P|_R = v_P|_{\hat{R}} + w_{\hat{R}}|_R \wedge (P - \hat{O}) + v_{\hat{O}}|_R \quad (2.27)$$

$$a_P|_R = a_P|_{\hat{R}} + 2 \left(w_{\hat{R}}|_R \wedge v_P|_{\hat{R}} \right) + \left(\frac{d}{dt} \Big| w_{\hat{R}}|_R \wedge (P - \hat{O}) \right) + w_{\hat{R}}|_R \wedge \left(w_{\hat{R}}|_R \wedge (P - \hat{O}) \right) + a_{\hat{O}}|_R \quad (2.28)$$

in relazione a queste formule definiamo velocità e accelerazione di trascinamento

$$v_P^{(tr)}|_{\hat{R}}|_R \doteq v_{\hat{O}}|_R + w_{\hat{R}}|_R \wedge (P - \hat{O}) \quad (2.29)$$

$$a_P^{(tr)}|_{\hat{R}}|_R \doteq \left(\frac{d}{dt} w_{\hat{R}}|_R \wedge (P - \hat{O}) \right) + w_{\hat{R}}|_R \wedge \left(w_{\hat{R}}|_R \wedge (P - \hat{O}) \right) + a_{\hat{O}}|_R \quad (2.30)$$

³proposizione 3.28 pagina 57 libro (dimostrazione)

Capitolo 3

Dinamica Newtoniana

principio di inerzia esiste un sistema di riferimento in cui un numero arbitrario di punti materiali, isolati (sufficientemente lontani) tra loro e da tutti gli altri corpi dell'universo, si muovono con velocità costante

moto rettilineo uniforme siano R, \hat{R} sistemi di riferimento, R si dice in moto rettilineo uniforme rispetto ad \hat{R} se la velocità di trascinamento $v_P^{(tr)} \Big|_{\hat{R}}$ di R rispetto a \hat{R} :

- non dipende da $P \in E_R$
- non dipende da $t \in \mathbb{R}$

proposizione¹ siano R, R' sistemi di riferimento in \mathbb{V}^4 , siano (t, x_1, x_2, x_3) coordinate cartesiane ortonormali destrorse solidali con R e (t', x'_1, x'_2, x'_3)

$$\mathbb{V}^4 \ni e \mapsto (t(e), x_1(e), x_2(e), x_3(e)) \in \mathbb{R}^4 \quad (3.1)$$

allora:

- R è in moto rettilineo uniforme rispetto a $R' \iff$ la trasformazione di coordinate tra R e R' è una **trasformazione di Galileo** cioè

$$\begin{cases} t' = t + c \\ x'_i = c_i + tv_i + \sum_{k=1}^3 R_{ik}x_k, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.2)$$

dove $c \in \mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{R}$ e $v_i \in \mathbb{R}$ sono costanti e $R_{ik} \in O(3)$ costante.

memo: $O(n) \doteq \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid AA^T = A^T A = \text{Id}_n\}$ è il gruppo delle matrici ortogonali $n \times n$ con determinante uguale a ± 1

- R in moto rettilineo uniforme rispetto a $R' \iff R'$ in moto rettilineo uniforme rispetto a R (simmetrica)
- $\left. \begin{array}{l} R, R' \text{ in moto rettilineo uniforme} \\ R', R'' \text{ in moto rettilineo uniforme} \end{array} \right\} \Rightarrow R, R'' \text{ in moto rettilineo uniforme}$
- R, R' sono in moto rettilineo uniforme \iff
 - l'accelerazione di trascinamento di R rispetto a R' è nulla: $a_P^{(tr)} \Big|_{R'} = 0$
 - l'accelerazione di Coriolis è nulla: $2(w_{R'} \Big|_R \wedge v_P \Big|_{R'}) = 0$
 - $w_R \Big|_{R'} = 0$

3.0.1 Moto relativo di riferimenti inerziali

ipotesi metafisica per ogni riferimento R ed ogni evento $e \in \mathbb{V}^4$, è disponibile un punto materiale la cui linea di universo attraversa e con velocità di valore e direzione arbitraria e tale che il punto è isolato per qualche intervallo temporale finito attorno a e .

¹proposizione 4.3 pagina 69 libro (dimostrazione)

teorema ² assumendo l'ipotesi metafisica valgono i seguenti fatti:

- se R è un riferimento inerziale allora

$$R' \text{ inerziale} \Leftrightarrow R', R \text{ in moto rettilineo uniforme}$$

- le trasformazioni di coordinate tra riferimenti inerziali sono di Galileo
- R, R' inerziali \Rightarrow i vettori $w_R|_{R'}$, $w_{R'}|_R$, le accelerazioni di Coriolis e quelle di trascinamento sono nulle.

osservazione la fisica Newtoniana ha dei limiti di validità. Non vale infatti per spazi di dimensione maggiore a quella del sistema solare e in vicinanza delle grandi masse.

principio di conservazione dell'impulso e della massa ³ siano P, Q due punti materiali con rispettive masse m_P, m_Q allora

- $m_P v_P|_R + m_Q v_Q|_R$ è costante nel tempo (conservazione dell'impulso)
- Nei processi in cui un punto materiale si decompone in più punti materiali (oppure più punti materiali si fondono in un unico punto materiale), la massa dell'unico punto materiale iniziale (finale) è pari alla somma delle masse dei costituenti finali (iniziali).

definiamo inoltre **quantità di moto** (o impulso) di P come

$$q_P \doteq m_P v_P|_R \quad (3.3)$$

secondo principio della dinamica presi due punti materiali P, Q di massa m_P, m_Q in un riferimento inerziale R allora esistono due funzioni

$$\vec{F}_R \doteq \vec{F}_R(t, P, Q, v_P|_R, v_Q|_R) \quad (3.4)$$

$$\vec{F}'_R \doteq \vec{F}'_R(t, Q, P, v_Q|_R, v_P|_R) \quad (3.5)$$

dette **forze** o leggi di forza t.c. ad ogni istante

$$\begin{cases} m_P a_P|_R = \vec{F}_R(t, P, Q, v_P|_R, v_Q|_R) \\ m_Q a_Q|_R = \vec{F}'_R(t, Q, P, v_Q|_R, v_P|_R) \end{cases} \quad (3.6)$$

nota: queste formule valgono in assenza di **forze reattive** (vincolari)

terzo principio della dinamica (principio azione reazione)

siano \vec{F}_R, \vec{F}'_R definiti come sopra

$$\vec{F}_R(P(t), Q(t), v_P|_R(t), v_Q|_R(t)) = -\vec{F}'_R(Q(t), P(t), v_Q|_R(t), v_P|_R(t)) \quad (3.7)$$

il terzo principio in **forma forte** richiede inoltre che \vec{F}_R, \vec{F}'_R siano applicate lungo la congiungente $P(t) - Q(t)$ e abbiano verso opposto

principio di sovrapposizione delle forze ⁴ siano P, Q_1, \dots, Q_n in un sistema di riferimento inerziale R , vale

$$m_P a_P|_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_R(t, P, Q_i, v_P|_R, v_{Q_i}|_R) \quad (3.8)$$

²teorema 4.5 pagina 72 (dimostrazione)

³pagina 76 libro

⁴pagina 79 libro

determinismo sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ aperti non vuoti, $G : I \times D \times D' \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G \in \mathcal{C}^1(I \times D \times D'; \mathbb{R}^n)$, si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} = G\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (3.9)$$

$\forall (t_0, x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R} \times D \times D'$ esiste un intervallo aperto contenente t_0 sul quale è definita un'unica funzione $x = x(t)$, $x \in \mathcal{C}^2$ t.c. soddisfa le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

osservazioni:

- l'ipotesi $G \in \mathcal{C}^1(I \times D \times D'; \mathbb{R}^n)$ garantisce l'unicità della soluzione
- l'equazioni differenziale assieme alle due condizioni iniziali equivale al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = G\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \\ x(t_0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

assumendo le ipotesi di regolarità sulle funzioni di forza, il secondo principio della dinamica (3.6) determina il moto di un punto materiale se sono assegnate le condizioni iniziali.

teorema di Cauchy (equazioni differenziali) ⁵ sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $D \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{condizione iniziale}) \quad (3.12)$$

cerco una soluzione $x = x(t)$ t.c. $\forall (t, x(t)) \in I \times D$ esista un intervallo aperto contenente t_0 in cui x soddisfi il problema di Cauchy.

Tale soluzione **esiste ed è unica** se si verifica una di queste due ipotesi:

- f continua e localmente lipshitziana in x
- $f \in \mathcal{C}^1(I \times D)$

memo: una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **lipshitziana** su Ω se esiste $K \geq 0$ t.c.

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \leq K, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y \quad (3.13)$$

il minore valore di K che soddisfa l'equazione è detto **costante di Lipschitz**

⁵teorema 13.23 pagina 491 (dimostrazione)

Capitolo 4

Meccanica Lagrangiana

La meccanica Lagrangiana è introdotta per sopperire al **non** determinismo delle equazioni di Newton in presenza di forze reattive dovute alla presenza di **vincoli**. Come osservato in precedenza, le formule enunciate nel secondo principio della dinamica (3.6) non valgono in presenza di **forze vincolari** ϕ_1, \dots, ϕ_n relative ai vincoli agenti sui rispettivi punti materiali P_1, \dots, P_n di masse m_1, \dots, m_n .
Le equazione che descrive questa situazione sarà infatti

$$\begin{cases} m_i a_i|_R = \vec{F}_i(t, x_1, \dots, x_n, v_1|_R, \dots, v_n|_R) + \phi_i \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.1)$$

osservo che queste equazioni valgono \iff

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = G_i(t, x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}) \\ x_i(t_0) = x_{0_i} \\ \frac{dx_i}{dt}(t_0) = \dot{x}_{0_i}, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.2)$$

NB: le equazioni delle forze vincolari ϕ_i non sono note

4.1 Spaziotempo delle configurazioni in presenza di vincoli olonomi

Consideriamo un sistema \mathfrak{S} di N punti materiali P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_n .

Per studiare tale sistema in maniera efficiente, al posto di porci nello spazio \mathbb{V}^4 , è spesso utile considerare la varietà \mathbb{V}^{3N+1} detta **spaziotempo delle configurazioni senza vincoli**.

La struttura di \mathbb{V}^{3N+1} è simile a quella di \mathbb{V}^4 con la differenza che Σ_t (2.1) va pensato come $\Sigma_t^{3N} = \Sigma_t \times \dots \times \Sigma_t$, dove la i -esima copia di Σ_i si deve pensare come lo spazio assoluto di P_i .

Σ_t^{3N} è detto **spazio delle configurazioni senza vincoli**.

funzionalmente indipendenti siano $f_1, \dots, f_C, f_j \doteq f_j(t, x_1, \dots, x_{3N})$ di classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, esse si dicono funzionalmente indipendenti al tempo t se

$$rk \left(\begin{bmatrix} \frac{df_j}{dx_k} \end{bmatrix}_{\substack{j=1, \dots, C \\ k=1, \dots, 3N}} \right) = C \quad (\Leftrightarrow \text{ ha rango massimo}) \quad (4.3)$$

vincoli olonomi Supponiamo ora che gli N punti del sistema \mathfrak{S} siano sottoposti a vincoli posizionali espressi da $0 \leq C < 3N$ funzioni differenziabili descritte dalle equazioni $f_j : \mathbb{V}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano

$$f_j(t, P_1, \dots, P_n) = 0, \quad j = 1, \dots, C \quad (4.4)$$

richiedo inoltre:

• f_j di classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$ (H1)

• f_j funzionalmente indipendenti ad ogni tempo t (H2)

un sistema di vincoli che soddisfa (H1) e (H2) è detto **sistema di vincoli olonomi**

prodotto scalare sia V_t^N lo spazio delle traslazioni di Σ_t^N , definiamo il prodotto scalare su V_t^N come

$$(v_1, \dots, v_N) \cdot (u_1, \dots, u_N) \doteq \sum_{k=1}^N v_k \cdot u_k \quad (4.5)$$

proposizione¹ sia \mathfrak{S} un sistema di N punti materiali descritti in \mathbb{V}^{3N+1} e sottoposto ai vincoli **olonomi** (4.4) descritti da $C \leq 3N$ funzioni f_j di classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$.

Si consideri l'insieme $\mathbb{V}^{n+1} \subset \mathbb{V}^{3N+1}$ individuato dalle condizioni (4.4) con $n \doteq 3N - C$, valgono i seguenti fatti:

- \mathbb{V}^{n+1} è una sottovarietà di \mathbb{V}^{3N+1} di classe \mathcal{C}^k e si dice **spaziotempo delle configurazioni del sistema**
- $\forall t \in \mathbb{R}$ fissato, $\mathbb{Q}_t \doteq \mathbb{V}^{n+1} \cap \Sigma_t^N$ è una sottovarietà di Σ_t^N di dimensione n e classe \mathcal{C}^k
- nell'intorno di ogni $p \in \mathbb{V}^{n+1}$ possiamo sempre scegliere un sistema di coordinate t, q_1, \dots, q_n in cui:
 - t misura il tempo assoluto
 - per ogni valore del tempo assoluto t , (q_1, \dots, q_n) possono essere scelte per rappresentare le coordinate cartesiane dei punti P_1, \dots, P_n in qualche sistema di coordinate

serviranno quindi soltanto $(n = 3N - C) + 1$ (una per il tempo) coordinate per definire la posizione di un punto. Tale sistema di coordinate è detto **sistema di coordinate locali naturali** su \mathbb{V}^{n+1} , q_1, \dots, q_n sono inoltre dette **coordinate libere (o lagrangiane)**.

proposizione siano (q_1, \dots, q_n) coordinate libere allora

$$\det \left[\frac{dq_k}{dq_i} \right]_i, j = 1, \dots, n \neq 0 \quad (\Leftrightarrow \text{ ha rango massimo}) \quad (4.6)$$

osservo inoltre quindi che q_1, \dots, q_n sono funzionalmente indipendenti.

4.1.1 Vincoli ideali

sia \mathfrak{S} un sistema di N punti materiali sottoposto a un sistema di $C < 3N$ vincoli olonomi. Le reazioni vincolari che si esercitano su una linea di universo (2.2) $\Gamma = \Gamma(t)$ del sistema sono dette **ideali** se per ogni tempo t_0 e per ogni configurazione $\Gamma(t_0)$ il vettore delle reazioni veicolari

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in V_t^N \text{ risulta sempre essere normale a } \mathbb{Q}_t \text{ in } \Gamma(t) \quad (4.7)$$

NB: un vettore v si dice **normale** a \mathbb{Q}_t in $\Gamma(t)$ se

$$v \cdot \delta x = 0, \forall \delta x \text{ tangente a } \mathbb{Q}_t \text{ in } \Gamma(t) \quad (4.8)$$

esempi sono vincoli olonomi ideali:

- punti materiali appartenenti a curve o superfici senza attrito
- punti materiali soggetti al vincolo di rigidità
- vincoli di rotolamento tra corpi solidi
- le combinazioni dei casi precedenti

4.2 Equazioni di Eulero-Lagrange

Per arrivare alle equazioni di Eulero-Lagrange dobbiamo definire alcuni concetti della cinematica.

Consideriamo il sistema \mathfrak{S} di N punti materiali P_1, \dots, P_n con masse m_1, \dots, m_n , sottoposto a $C < 3N$ vincoli olonomi e descritto nello spaziotempo delle configurazioni \mathbb{V}^{n+1} . Usando coordinate naturali t, q_1, \dots, q_n possiamo esprimere le posizioni dei punti come $P_i = P_i(t, q_1, \dots, q_n)$. Una linea di universo (2.2) $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{3N+1}$ che rispetta i vincoli può essere descritta localmente tramite una curva differenziabile $q_k = q_k(t)$. Fissato un riferimento R se $P_i(t) = x_i(t) + O$ dove O è in quiete nel riferimento possiamo scrivere la **velocità** come:

$$v_{P_i}|_R(t) = \frac{d}{dt} x_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \quad (4.9)$$

¹pagina 192 libro (dimostrazione)

così facendo, ricordando la formula dell'**energia cinetica** rispetto al riferimento R :

$$\mathcal{K}|_R = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{P_i}|_R^2 \quad (4.10)$$

possiamo riscrivere quest'ultima come:

$$\mathcal{K}|_R = \mathcal{K}_2|_R + \mathcal{K}_1|_R + \mathcal{K}_0|_R \quad (4.11)$$

dove:

$$\mathcal{K}_2|_R \doteq \sum_{h,k=1}^n a_{k,h}(t, q_1, \dots, q_n) \frac{dq_h}{dt} \frac{dq_k}{dt} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{K}_1|_R \doteq \sum_{k=1}^n b_k(t, q_1, \dots, q_n) \frac{dq_k}{dt} \quad (4.13)$$

$$\mathcal{K}_0|_R \doteq c(t, q_1, \dots, q_n) \quad (4.14)$$

con le definizioni:

$$a_{hk}(t, q_1, \dots, q_n) \doteq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (4.15)$$

$$b_k(t, q_1, \dots, q_n) \doteq \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (4.16)$$

$$c(t, q_1, \dots, q_n) \doteq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (4.17)$$

teorema 8.14 ² consideriamo il sistema \mathfrak{S} di N punti materiali P_1, \dots, P_n con masse m_1, \dots, m_n , sottoposto a $C < 3N$ vincoli olonomi ideali di classe \mathcal{C}^2 , descritto nello spaziotempo delle configurazioni \mathbb{V}^{n+1} , definisco $n \doteq 3N - C$. Supponiamo che, fissato un riferimento R , sull' i -esimo punto agisca la forza attiva

$$\vec{F}_i|_R(t, P_1, \dots, P_N, v_{P_1}|_R, \dots, v_{P_N}|_R) \quad (4.18)$$

e quindi la reazione veicolare

$$\phi_i = m_i a_{P_i}|_R - \vec{F}_i|_R \quad (4.19)$$

una linea di universo $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{3N+1}$ del sistema \mathfrak{S} soddisfa le equazioni di **Newoton**

$$m_i a_{P_i}|_R = F_i|_R + \phi_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.20)$$

se e solo se la curva di equazione $\gamma = \gamma(t) \in \mathbb{V}^{n+1}$ corrispondente a Γ e descritta in coordinate locali naturali da $q_k = q_k(t)$ soddisfa le **equazioni di Eulero-Lagrange**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}|_R(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{K}|_R(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_k} = \mathcal{L}_k|_R(t, q(t), \dot{q}(t)) \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}_k(t), \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.21)$$

dove $\mathcal{L}_k|_R$ sono le **componenti lagrangiane delle forze attive**:

$$\mathcal{L}_k|_R(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \doteq \sum_{i=1}^N \vec{F}_i|_R(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (4.22)$$

mentre $\mathcal{K}|_R = \mathcal{K}|_R(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ è l'energia cinetica (4.10) del sistema \mathfrak{S} rispetto a R nella quale per esprimere la velocità dei punti è stata usata l'equazione (4.9).

²pagina 209 libro (dimostrazione)

Definizione alternativa ³ Sia \mathfrak{S} un sistema definito come nel teorema precedente. Sia l'energia potenziale del sistema:

$$\mathcal{U}|_R = \mathcal{U}|_R(P_1, \dots, P_n) \quad (4.23)$$

Definiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L}|_R = \mathcal{K}|_R - \mathcal{U}|_R \quad (4.24)$$

Siano ora F_1, \dots, F_N forze attive che **non ammettono potenziale** e siano

$$\mathcal{L}_k|_R \doteq \sum_{i=1}^N \vec{F}_i|_R \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (4.25)$$

le componenti lagrangiane di tali forze (4.22), le equazioni di E-L possono allora essere scritte nella forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_R(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}|_R(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_k} = \mathcal{L}_k|_R(t, q(t), \dot{q}(t)) \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}_k(t), \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.26)$$

scrittura in forma normale mostriamo che le equazioni di Eulero-Lagrange sono sempre scrivibili in forma normale. Tenendo conto della formula dell'energia cinetica 4.11, notando $a_{hk} = a_{kh}$ le equazioni di Eulero-Lagrange (4.21) hanno forma:

$$\sum_{h=1}^n 2a_{hk}(t, q_1(t), \dots, q_n(t)) \frac{d^2 q^h}{dt^2} = G_k(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)), \quad k = 1, \dots, n \quad (4.27)$$

dove

$$G_k \doteq \mathcal{L}_k|_R - 2 \sum_h \frac{da_{kh}}{dt} \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial \mathcal{K}_0|_R + \mathcal{K}_1|_R}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}_0|_R + \mathcal{K}_1|_R}{\partial \dot{q}_k} \quad (4.28)$$

osservo inoltre che per la regola di Cramer per la matrice inversa, se a fosse una funzione di classe \mathcal{C}^1 , anche a^{-1} lo sarebbe. Supponendo quindi il determinante della matrice associata ad a diverso da 0 possiamo riscrivere la 4.27 come

$$\frac{d^2 q_h}{dt^2} = \sum_{k=1}^n 2(a^{-1})_{hk}(t, q_1(t), \dots, q_n(t)) G_k \left(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \frac{dq_1}{dt}(t), \dots, \frac{dq_n}{dt}(t) \right), \quad k = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

definendo ora

$$z_k \left(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \frac{dq_1}{dt}(t), \dots, \frac{dq_n}{dt}(t) \right) = \sum_{h=1}^n 2(a^{-1})_{hk}(t, q_1(t), \dots, q_n(t)) G_k \left(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \frac{dq_1}{dt}(t), \dots, \frac{dq_n}{dt}(t) \right) \quad (4.30)$$

possiamo scrivere le eqazioni di Eulero-Lagrange nella **forma normale**:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} = z_k \left(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \frac{dq_1}{dt}(t), \dots, \frac{dq_n}{dt}(t) \right) \quad (4.31)$$

teorema esistenza e unicità ⁴ nelle ipotesi del teorema precedente in ogni sistema di coordinate locali naturali (t, q_1, \dots, q_n) su \mathbb{V}^{n+1} la matrice quadrata $n \times n$ definita dai coefficienti $a_{hk}(t, q_1, \dots, q_n)$ (4.15), è strettamente positiva per ogni scelta di (t, q_1, \dots, q_n) . Di conseguenza, come visto in precedenza, le equazioni di Eulero-Lagrange (4.21) sono sempre scrivibili in forma normale

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} = z_k \left(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \frac{dq_1}{dt}(t), \dots, \frac{dq_n}{dt}(t) \right) \quad (4.31)$$

Dove $z_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, è di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ (derivabile) se e solo se

- $\mathcal{K}|_R$ è di classe \mathcal{C}^2 ;
- le componenti lagrangiane (4.22) $\mathcal{L}_k|_R$ sono di classe \mathcal{C}^1 rispetto alle coordinate $(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$;

queste due condizioni equivalgono rispettivamente a:

- i vincoli sono funzioni di classe \mathcal{C}^3 su \mathbb{V}^{N+1} ;

³p.233 libro

⁴pagina 226 libro

- le forze attive $\vec{F}_i|_R$ sono funzioni di classe \mathcal{C}^1 del tempo;

noto che se $z_k \in C^1(\Omega)$, ovvero se si verificano queste condizioni, per il teorema di Cauchy (3.0.1) **esiste un'unica soluzione alle equazioni di Eulero-Lagrange** se sono assegnate le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} q_k(t_0) = q_{k_0} \\ \dot{q}_k(t_0) = \dot{q}_{k_0}, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.32)$$

Capitolo 5

Simmetrie e leggi di conservazione

sia dato un sistema \mathfrak{S} di N punti materiali P_1, \dots, P_N con F_1, \dots, F_N forze agenti su essi in un sistema di riferimento R . Diciamo che il sistema è **conservativo** se esiste una funzione $\mathcal{U}|_R \in \mathcal{C}^1(E_R \times \dots \times E_R)$ detta **energia potenziale** tale che

$$\forall P_k \in E_R, F_k|_R(P_1, \dots, P_N) = -\nabla_{P_k} \mathcal{U}|_R(P_1, \dots, P_N) \quad (5.1)$$

dove, data e_1, e_2, e_3 base ortonormale dello spazio delle traslazioni E_R abbiamo definito

$$\nabla_{P_k} f(P_1, \dots, P_N) \doteq \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f(P_1, \dots, P_N)}{\partial x_k^j} e_j \quad (5.2)$$

per ogni funzione differenziabile $f = f(P_1, \dots, P_N)$ e dove $P_j - O = \sum_{k=1}^3 x_k^j e_j$ è il vettore posizionale di P_k in E_R .

spaziotempo degli stati cinetici lo spaziotempo degli stati cinetici (o **atti di moto**) $A(\mathbb{V}^{n+1})$ è costruito sullo spaziotempo delle configurazioni \mathbb{V}^{n+1} (4.1), è una varietà differenziabile di dimensione $2n + 1$ di classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$ che ammette un atlante privilegiato le cui carte locali sono dette **sistemi di coordinate locali naturali** di $A(\mathbb{V}^{n+1})$

$$\begin{cases} \bar{t} = t + c \\ \bar{q}_k = \bar{q}^k(t, q_1, \dots, q_n) \\ \dot{\bar{q}}_k = \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial t} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial q_h} \dot{q}_h \end{cases} \quad (5.3)$$

integrali primi gli integrali primi sono funzioni $f : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ che sono costanti su ogni soluzione delle equazioni del moto (4.21).

Supponendo di avere una funzione $\gamma : I \ni t \mapsto (t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \in A(\mathbb{V}^{n+1})$ che è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (4.21) allora:

- $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$
- $f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0))$, dove t_0 è costante ma dipende dalla soluzione.

teorema di Jacobi ¹ si consideri un sistema \mathfrak{S} di N punti materiali soggetti a $C = 3N - n$ vincoli olonomi, completamente descritto da una lagrangiana $\mathcal{L}(t, q, \dot{q})$ in coordinate locali naturali $(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ su $A(\mathbb{V}^{n+1})$, se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad (5.4)$$

ovvero se \mathcal{L} non dipende dal tempo, allora

- la **funzione di Hamilton** definita

$$\mathcal{H}(t, q, \dot{q}) \doteq \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k(t, q, \dot{q}) - \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) \quad (5.5)$$

è un **integrale primo di Jacobi** cioè, se $\gamma : I \ni t \mapsto (t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \in A(\mathbb{V}^{n+1})$ è una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (4.21) allora

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\gamma(t)) = 0 \quad (5.6)$$

¹pagina 281 libro (dimostrazione)

- se le forze attive in \mathcal{S} sono tutte conservative in un riferimento R , questo implica $\mathcal{L}|_R = \mathcal{K}|_R - \mathcal{U}|_R$, se i vincoli non dipendono dal tempo e se le coordinate lagrangiane t, q, \dot{q} sono solidali con R , cioè se $x_i = x_i(q_1, \dots, q_n)$ allora

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}|_R + \mathcal{U}|_R \quad (5.7)$$

cioè \mathcal{H} coincide con l'energia meccanica totale in R .

Osservazione Supponiamo che la lagrangiana $\mathcal{L}|_R = \mathcal{K}|_R - \mathcal{U}|_R$ **non descriva completamente il sistema** \mathfrak{S} e che quindi nelle equazioni di Eulero-Lagrange appaiano a secondo membro anche delle componenti lagrangiane di **forze attive non conservative**.

Se $\mathcal{U}|_R$ descrive tutte le forze attive conservative agenti su \mathfrak{S} vale comunque l'identità 5.7. In questo caso però non vale in generale che \mathcal{H} sia un integrale primo.

Conservazione dell'energia meccanica Si consideri un sistema \mathfrak{S} di punti materiali P_k , $k = 1, \dots, N$ di masse m_k che soddisfi primo, secondo, terzo principio della dinamica e il principio di sovrapposizione delle forze (p.10). Si supponga che \mathfrak{S} sia sottoposto a forze conservative con energia potenziale:

$$\mathcal{U}|_R = \mathcal{U}|_R(P_1, \dots, P_N) \quad (5.8)$$

e a forze non conservative $\Phi|_R$.

Allora si definisce **energia meccanica**

$$\mathcal{E}|_R \doteq \mathcal{K}|_R + \mathcal{U}|_R \quad (5.9)$$

e vale

$$\frac{d\mathcal{E}|_R}{dt} = \Pi|_R^{(non\ cons)} \quad (5.10)$$

dove $\Pi|_R^{(non\ cons)}$ è la potenza totale delle forze non conservative in R .

Potenza Sia P un punto materiale di massa m , soggetto a una forza F all'istante t , definiamo la potenza dissipata dalla forza all'istante t come

$$\Pi|_R(t) \doteq v_P|_R(t) \cdot F \quad (5.11)$$

5.1 Momento coniugato e integrali primi

² supponiamo di avere una lagrangiana \mathcal{L} che descrive completamente la dinamica di un sistema \mathfrak{S} , diremo **k-esimo momento coniugato** alla coordinata q_k la funzione

$$p_k \doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(t, q, \dot{q}) \quad (5.12)$$

diremo inoltre q_k **ciclica** o **ignorabile** se

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (5.13)$$

NB: in questo caso \mathcal{L} non dipenderà da q_k , inoltre p_k sarà un integrale primo.

5.1.1 Invarianza traslazionale e rotazionale

Consideriamo ancora un sistema \mathfrak{S} con coordinate naturali $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, N punti materiali P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N sottoposto a vincoli olonomi ideali e a forze date da un potenziale $\mathcal{U}|_R$. Avremo una lagrangiana:

$$\mathcal{L}|_R = \mathcal{K}|_R - \mathcal{U}|_R \quad (5.14)$$

In tal caso il momento coniugato (5.12) sarà esprimibile tramite la formula:

$$p_k \doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^N m_i v_i|_R \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (5.15)$$

proposizione consideriamo ora un sistema \mathfrak{S} di N punti materiali P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N sottoposti a vincoli olonomi ideali e a forze date da un **potenziale** $\mathcal{V}|_R$, R sistema di riferimento con coordinate naturali $(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Avremo una lagrangiana:

$$\mathcal{L}|_R(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \mathcal{K}|_R(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) + \mathcal{V}|_R(q_1, \dots, q_n) \quad (5.16)$$

- ³ Supponendo la coordinata q_j ciclica e **traslazionale** nella direzione \mathbf{n} in R , in altre parole $\forall \Delta q_j \in \mathbb{R}$ ad

²pagina 261

³pagina 264 libro

ogni istante t vale $\forall i = 1, \dots, N$

$$x_i(t, q_1, \dots, q_j - 1, q_j + \Delta q_j, q_{j+1}, \dots, q_n) = x_i(q_1, \dots, q_n) + \Delta q_j \mathbf{n} \quad (5.17)$$

allora $P|_R \cdot \mathbf{n}$ sarà un integrale primo e grazie a (5.15) vale:

$$p_j = p_j = \sum_{i=1}^N m_i v_i|_R \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i v_i|_R \cdot \mathbf{n} = P|_R \cdot \mathbf{n} \quad (5.18)$$

dove $P|_R \doteq \sum_{i=1}^N m_i v_i|_R$ è l'**impulso totale** (3.3)

- ⁴ Supponendo la coordinata q_j ciclica e **rotazionale** attorno all'asse n rispetto al punto O nel riferimento R , in altre parole $\forall \Delta q_j \in \mathbb{R}$ ad ogni istante t vale $\forall i = 1, \dots, N$

$$x_i(t, q_1, \dots, q_j - 1, q_j + \Delta q_j, q_{j+1}, \dots, q_n) = R_{n, \Delta q_j} \cdot x_i(q_1, \dots, q_n) \quad (5.19)$$

dove $R_{n, \Delta q_j} : V^3 \rightarrow V^3$ è l'operatore che ruota il vettore sul quale è applicato di un angolo Δq_j attorno al versore \mathbf{n} .

Allora $\mathbf{n} \cdot L_0|_R$ sarà un integrale primo e grazie a (5.15) vale:

$$p_j = L_0|_R \cdot \mathbf{n} \quad (5.20)$$

dove $L_0|_R \doteq \sum_{i=1}^N x_i \wedge m_i v_i|_R$ è il **momento angolare totale**

5.1.2 gruppo locale a un paramentro

sia $(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ un sistema di coordinate naturali di $A(\mathbb{V}^{n+1})$, sia $\Phi_\epsilon : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{V}^{n+1}$

$$\Phi_\epsilon : \begin{cases} t'_\epsilon = t \\ q'_{\epsilon,1} = q_1 + \epsilon \\ q'_{\epsilon,k} = q_k & k = 2, \dots, n \\ q'_{\epsilon,k} = \dot{q}_k & k = 1, \dots, n \end{cases} \rightarrow \Phi_\epsilon : \begin{cases} t'_\epsilon = t \\ q'_{\epsilon,k} = q'_{\epsilon,k}(t, \epsilon, q_1, \dots, q_n) \\ q'_{\epsilon,k} = \frac{dq'_{\epsilon,k}}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'_{\epsilon,k}}{\partial q_j} \dot{q}_j \end{cases} \quad (5.21)$$

allora vale

$$\begin{cases} \Phi_0 = id \\ \Phi_\epsilon \circ \Phi_{\epsilon'} = \Phi_{\epsilon+\epsilon'} \\ (\Phi_\epsilon)^{-1} = \Phi_{-\epsilon} \\ \Phi_\epsilon \text{ non altera la coordinata } t \Rightarrow \Phi_\epsilon \text{ preserva le fibre temporali} \end{cases} \quad (5.22)$$

inoltre in questo caso $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ si dice **gruppo locale a un parametro** di diffeomorfismi che preservano le fibre di \mathbb{V}^{n+1}

proposizione $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ soddisfa le seguenti proprietà

- $\forall \epsilon$ Φ_ϵ non altera la coordinata t
- $\Phi_0 = Id$
- $\Phi_{\epsilon'} \circ \Phi_\epsilon = \Phi_{\epsilon'+\epsilon}, \forall \epsilon, \epsilon' \in \mathbb{R}$

proposizione sia Φ_ϵ gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi (5.21) allora

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L} \circ \Phi_\epsilon = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \mathcal{L} \circ \Phi_\epsilon = 0 \quad (5.23)$$

sistema lagrangiano invariante diremo che un sistema di punti materiali \mathfrak{S} descritto su \mathbb{V}^{n+1} è invariante sotto a $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ (5.21), se esiste una lagrangiana $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^2$, $\mathcal{L}|_R = \mathcal{K}|_R + \mathcal{V}|_R$ che descrive la dinamica del sistema \mathfrak{S} e tale che

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0, \quad \forall t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n \quad (5.24)$$

dove $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ è un sistema di coordinate locali su $A(\mathbb{V}^{n+1})$ usato per definire $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$. In questo caso $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ è detto **gruppo di simmetria** del sistema \mathfrak{S} .

⁴pagina 267 libro

sistema lagrangiano debolmente invariante diremo che un sistema di punti materiali \mathfrak{S} descritto su \mathbb{V}^{n+1} è debolmente invariante sotto a $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ (5.21) se esiste una lagrangiana $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ che descrive la dinamica del sistema \mathfrak{S} e tale che

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = G(t, q, \dot{q}), \quad \forall t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n \quad (5.25)$$

dove $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ è un sistema di coordinate locali su $A(\mathbb{V}^{n+1})$ usato per definire $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ e G è una funzione di classe \mathcal{C}^2 tale che

$$G(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, q) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_k}(t, q) \dot{q}_k \quad (5.26)$$

In questo caso $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ è detto **gruppo di simmetria debole** del sistema \mathfrak{S} .

5.1.3 Teorema di Noether

⁵ si consideri un sistema di n punti materiali \mathfrak{S} , sia $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locale che preserva le fibre di \mathbb{V}^{n+1} allora:

- se \mathfrak{S} è **invariante** sotto $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$, se $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ è un gruppo di simmetrie di $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathcal{L} descrive completamente un sistema fisico allora sulle soluzioni di Eulero-Lagrange la funzione

$$I(t, q, \dot{q}) \doteq \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q'_{\epsilon, k}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} (t, q, \dot{q}) \quad (5.27)$$

è costante nel tempo quando valutata su una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange e si dice **integrale primo di Noether**.

- se invece \mathfrak{S} è **debolmente invariante** sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locale $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$, sia \mathcal{L} l'equazione soddisfa 5.25, g tale che soddisfi 5.26, sia $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ il sistema di coordinate locali su $A(\mathbb{V}^{n+1})$ usato per definire $\{\Phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ allora

$$I_g(t, q, \dot{q}) \doteq \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q'_{\epsilon, k}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} (t, q, \dot{q}) - g(t, q) \quad (5.28)$$

è costante nel tempo quando valutata su una soluzione delle equazioni Eulero-Lagrange.

⁵pagina 274 libro (dimostrazione)

Capitolo 6

Teoria della stabilità

punto singolare si consideri un sistema di equazioni differenziali del primo ordine su $I \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, D insieme aperto non vuoto, I intervallo aperto non vuoto, $f : I \times D \rightarrow \mathbb{K}^n$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

allora $x_0 \in D$ è detto **punto singolare** (oppure **punto critico**) per f se e solo se $\forall t_0 \in I$, ogni soluzione del problema di Cauchy (6.1) è una restrizione della funzione costante $x(t) = x_0 \forall t \in I$.

proposizione sia f continua e localmente lipshitziana (3.13) nella variabile x allora

$$x_0 \in D \text{ è un punto critico} \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \quad (6.2)$$

punto di equilibrio si consideri un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine su $I \times D \times D'$, $D, D' \subset \mathbb{K}^n$ insiemi aperti non vuoti, I intervallo aperto non vuoto, $F : I \times D \times D' \rightarrow \mathbb{K}^n$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t)) \\ \frac{dx}{dt}|_{t_0} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

allora $x_0 \in D$ è detto **punto di equilibrio** (oppure **configurazione di equilibrio**) per F se e solo se $\forall t_0 \in I$, ogni soluzione del problema di Cauchy (6.3) è una restrizione della funzione costante $x(t) = x_0 \forall t \in I$.

punto singolare stabile si consideri la definizione di punto singolare (6.1), si consideri f indipendente dalla variabile t cioè $f = f(x)$, un punto singolare $y_0 \in D$ è detto:

- **stabile nel futuro** se \forall intorno aperto $U \ni y_0$ esiste un intorno aperto $V \ni y_0$ t.c. ogni soluzione di (6.1) $x : J \rightarrow D$, dove $J \subset I$ è un intervallo aperto che contiene $t_0 = 0$ con $x(t_0) = x_0 \in V$, soddisfa

$$J \ni t \geq 0 \Rightarrow x(t) \in U \quad (6.4)$$

- **stabile nel passato** se \forall intorno aperto $U \ni y_0$ esiste un intorno aperto $V \ni y_0$ t.c. ogni soluzione massimale di (6.1) $x : J \rightarrow D$ dove $J \subset I$ è un intervallo aperto che contiene $t_0 = 0$ con $x(t_0) = x_0 \in V$

$$J \ni t \leq 0 \Rightarrow x(t) \in U \quad (6.5)$$

- **stabile** se stabile nel futuro e stabile nel passato
- **instabile** nel futuro (passato) se non è stabile nel futuro (passato)
- **asintoticamente stabile nel futuro** se è stabile nel futuro ed esiste un intorno aperto $A \ni y_0$ t.c. ogni soluzione massimale di (6.1) x con $x(0) = x_0 \in A$ è completa nel futuro e soddisfa $x(t) \rightarrow y_0$ per $t \rightarrow \infty$
- **asintoticamente stabile nel passato** se è stabile nel passato ed esiste un intorno aperto $A \ni y_0$ t.c. ogni soluzione massimale di (6.1) x con $x(0) = x_0 \in A$ è completa nel futuro e soddisfa $x(t) \rightarrow y_0$ per $t \rightarrow -\infty$

6.1 Metodi di Lyapunov per la stabilità

consideriamo un sistema di equazioni differenziabili su $D \subset \mathbb{K}^n$ aperto, non vuoto

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \quad (6.6)$$

con $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$, consideriamo una funzione $W : U \rightarrow \mathbb{K}$ differenziabile, con $U \subset D$ aperto. Sia $x = x(t)$ soluzione del sistema precedente (6.6), la derivata della funzione composta $t \mapsto W(x(t))$, se esiste, si scrive:

$$\frac{dW(x(t))}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \nabla W(x)|_{x(t)} = [f(x) \cdot \nabla W(x)]|_{x=x(t)} \quad (6.7)$$

definendo ora la funzione

$$\dot{W}(x) \doteq f(x) \cdot \nabla W(x), \quad \forall x \in U \quad (6.8)$$

allora per ogni soluzione $x = x(t)$ del sistema 6.6, se $\dot{W}(x(t))$ è definito vale:

$$\frac{dW(x(t))}{dt} = \dot{W}(x(t)) \quad (6.9)$$

proposizione ¹ sia D aperto, $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ localmente lipshitziana allora $W : U \rightarrow \mathbb{K}$ (con $U \subset D$ aperto) soddisfa

$$\dot{W}(x) < 0, \quad \forall x \in U \Leftrightarrow \frac{dW(x(t))}{dt} < 0, \quad \forall t \in I, \quad x : I \rightarrow U \text{ soluzione del sistema 6.6} \quad (6.10)$$

NB: tale proposizione vale anche con $\leq, =, >, \geq$

teorema Lyapunov-Barbasin ² sia $D \subset \mathbb{K}^n$ aperto, sia $x_0 \in D$ un punto singolare per la funzione localmente lipshitziana $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$

- x_0 è un punto singolare **stabile nel futuro** se in un intorno aperto $G_0 \in D$ di x_0 è definita una funzione differenziabile $W : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:
 - W ha un minimo stretto in x_0
 - $\dot{W}(x) \leq 0, \quad \forall x \in G_0$
- x_0 è un punto singolare **stabile nel passato** se in un intorno aperto $G_0 \in D$ di x_0 è definita una funzione differenziabile $W : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:
 - W ha un minimo stretto in x_0
 - $\dot{W}(x) \geq 0, \quad \forall x \in G_0$
- x_0 è un punto singolare **stabile** se in un intorno aperto $G_0 \in D$ di x_0 è definita una funzione differenziabile $W : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:
 - W ha un minimo stretto in x_0
 - $\dot{W}(x) = 0, \quad \forall x \in G_0$ ovvero se W è un integrale primo su G_0 per il sistema 6.6 associato ad f

NB: la funzione W è detta **funzione di Lyapunov**

6.2 Applicazione a sistemi fisici

sia $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^2$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_R = \mathcal{K}|_R - \mathcal{U}|_R$, R con coordinate naturali t, q_1, \dots, q_n , siano $\mathcal{L}_k|_R = \mathcal{L}_k|_R(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ le componenti lagrangiane delle forze attive

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}|_R(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{K}|_R(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_k} = \mathcal{L}_k|_R(t, q(t), \dot{q}(t)) \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}_k(t), \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.21)$$

allora una configurazione c è detta **configurazione di equilibrio** (6.3) rispetto a R se la soluzione massimale delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizione iniziali $q_k(0) = q_{0_k}$ e $\dot{q}_k(0) = 0$ per $k = 1, \dots, n$ è la soluzione costante

$$q_k(t) = q_{0_k}, \quad \dot{q}(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (6.11)$$

ovvero se

$$(q_{01}, \dots, q_{0n}, 0, \dots, 0) \text{ è punto critico delle equazioni di E-L} \quad (6.12)$$

¹pagina 160 libro (dimostrazione)

²pagina 161 libro (dimostrazione)

proposizione nelle ipotesi sopra (q_{01}, \dots, q_{0n}) determina una *configurazione di equilibrio* rispetto a $R \Leftrightarrow$

$$\mathcal{L}_k|_R(q_{01}, \dots, q_{0n}, 0, \dots, 0) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (6.13)$$

inoltre, nel caso in cui le forze attive siano conservative con energia potenziale $\mathcal{U}|_R(q_1, \dots, q_n)$, tale proposizione è soddisfatta \Leftrightarrow

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}|_R}{\partial q_k} \right|_{(q_{01}, \dots, q_{0n})} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (6.14)$$

6.2.1 Teorema Lagrange-Dirichlet

³ si consideri un sistema di N punti materiali P_1, \dots, P_n di masse m_1, \dots, m_n , $m_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$, le cui equazioni della dinamica nel riferimento R hanno forma

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = -\nabla_{x_k} \mathcal{U}|_R(x_1, \dots, x_n) + F_k \left(x_1, \dots, x_n, \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_R, \dots, \left. \frac{dx_n}{dt} \right|_R \right) \quad (6.15)$$

dove l'energia potenziale $\mathcal{U}|_R = \mathcal{U}|_R(x_1, \dots, x_n)$ corrisponde ad un sistema di forze conservative nel riferimento R e le forze non conservative F_k , se presenti, soddisfano:

$$F_k(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n \text{ e } (x_1, \dots, x_n) \in V_R^n \quad (6.16)$$

Assunte le funzioni $F_k \in \mathcal{C}^1$, $\mathcal{U}|_R \in \mathcal{C}^2$, una *configurazione di equilibrio* (x_{01}, \dots, x_{0n}) è

- **stabile nel futuro** se la restrizione di $\mathcal{U}|_R$ ad un intorno aperto di (x_{01}, \dots, x_{0n}) ha un minimo stretto e vale

$$\sum_{k=1}^n F_k(x_1, \dots, x_n, v_{P_1}|_R, \dots, v_{P_n}|_R) \cdot v_{P_k}|_R \leq 0 \quad (6.17)$$

per ogni scelta dei vettori velocità $v_{P_k}|_R = \left. \frac{dx_k}{dt} \right|_R$

- **stabile** se la restrizione di $\mathcal{U}|_R$ ad un intorno aperto di (x_{01}, \dots, x_{0n}) ha un minimo stretto in (x_{01}, \dots, x_{0n}) e vale

$$\sum_{k=1}^n F_k(x_1, \dots, x_n, v_{P_1}|_R, \dots, v_{P_n}|_R) \cdot v_{P_k}|_R = 0 \quad (6.18)$$

per ogni scelta dei vettori velocità $v_{P_k}|_R = \left. \frac{dx_k}{dt} \right|_R$

corollario consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_R}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}|_R}{\partial q_k} = Q_k|_R(t, q, \dot{q}) \\ \frac{d}{dt} q_k = \dot{q}_k, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6.19)$$

dove $\mathcal{L}|_R$ non descrive completamente il sistema in quanto esistono forze non conservative descritte da $Q_k|_R$. Supponiamo che (q_{01}, \dots, q_{0n}) sia una *configurazione di equilibrio* individuata da un punto stazionario di $\mathcal{U}|_R$ allora (q_{01}, \dots, q_{0n}) è

- **stabile nel futuro** se

$$\sum_{k=1}^n Q_k \dot{q}_k|_{(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)} \leq 0 \quad (\text{forze dissipative})$$

- **stabile** se

$$\sum_{k=1}^n Q_k \dot{q}_k|_{(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)} = 0 \quad (\text{forze girostatiche})$$

Criterio matrice Hessiana Si consideri di N punti materiali P_k con masse, rispettivamente, $m_k > 0$, $k = 1, \dots, N$, le cui equazioni della dinamica hanno forma

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = -\nabla_{x_k} \mathcal{U}|_R(x_1, \dots, x_n) \quad (6.20)$$

dove l'energia potenziale $\mathcal{U}|_R = \mathcal{U}|_R(x_1, \dots, x_n)$, di classe \mathcal{C}^3 , corrisponde ad un sistema di forze conservative nel riferimento R allora:

se in una configurazione di equilibrio x_{01}, \dots, x_{0n} la **matrice hessiana dell'energia potenziale** ha un autovalore negativo, allora x_{01}, \dots, x_{0n} è instabile nel passato e nel futuro.

Se invece la matrice Hessiana risulta strettamente positiva in una configurazione di equilibrio essa sarà stabile.

³pagina 172 libro (dimostrazione)

Criterio di Sylvester Sia $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ simmetrica, A è strettamente positiva \Leftrightarrow il determinante di ogni minore principale di A è positivo.

Determinante e autovalori Sia $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A allora

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (6.21)$$

Capitolo 7

Meccanica Hamiltoniana

Nell'ambito della *meccanica Lagrangiana* avevamo definito il momento coniugato alla coordinata q_k come

$$p_k \doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(t, q, \dot{q}) \quad (5.12)$$

L'idea della meccanica Hamiltoniana è quella di formulare il problema del moto con le coordinate $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ al posto delle Lagrangiane $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$. Il vantaggio di questo metodo sta nel fatto che per trovare le equazioni del moto dovremmo risolvere un'equazione differenziale di primo ordine anzi che di secondo (come nel caso delle equazioni di Lagrange).

NB: la trasformazione (5.12) quando considerata con (t, q_1, \dots, q_n) fissati. Quindi come una trasformazione

$$\mathbb{R}^n \ni (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \rightarrow (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \quad (7.1)$$

è detta **trasformazione di Legendre**.

Riprendendo quindi la definizione di **funzione di Hamilton** vista precedentemente

$$\mathcal{H}(t, q, \dot{q}) \doteq \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k(t, q, \dot{q}) - \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) \quad (5.5)$$

e ricavando quindi

$$\mathcal{H}(t, q, p) \doteq \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} \bigg|_{(t, q, \dot{q}(t, q, p))} \dot{q}_k(t, q, p) - \mathcal{L}(t, q, \dot{q}(t, q, p)) \quad (7.2)$$

dimosteremo (7) la seguente corrispondenza tra meccanica Lagrangiana ed Hamiltoniana

$$t \mapsto (t, q(t), \dot{q}(t)) : \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \\ \frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \iff t \mapsto (t, q(t), p(t)) : \begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \\ \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (7.3)$$

La varietà differenziabile di dimensione $2n + 1$ nella quale le coordinate $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ sono coordinate naturali è detta *spaziotempo delle fasi*.

spaziotempo delle fasi lo spaziotempo delle fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$ e di dimensione $2n + 1$ costruita sullo spaziotempo delle configurazioni \mathbb{V}^{n+1} .

Indicando con $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ le coordinate di una generica carta locale di $F(\mathbb{V}^{n+1})$ valgono le seguenti condizioni:

- le coordinate t, q_1, \dots, q_n si identificano con delle *coordinate naturali* di \mathbb{V}^{n+1} , in particolare la coordinata t si identifica, a meno di costanti additive, con il tempo assoluto.
- il sistema di *coordinate naturali* su \mathbb{V}^{n+1} è univocamente determinato da quello su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ e ogni sistema di coordinate locali naturali di \mathbb{V}^{n+1} può essere completato ad un sistema di coordinate naturali di $F(\mathbb{V}^{n+1})$.
- i sistemi di *coordinate locali naturali* su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ sono connessi da trasformazioni di coordinate \mathcal{C}^k con inversa di classe \mathcal{C}^k della forma:

$$\begin{cases} t' = t + c \\ q'_k = q'_k(t, q_1, \dots, q_n) \\ p'_k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q_h}{\partial q'_k} p_h \end{cases} \quad (7.4)$$

teorema Hamilton-Lagrange

¹ si consideri un sistema fisico \mathfrak{S} descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^2$, sia \mathcal{H} definita come in 7.2. Si considerino due carte naturali:

- $\psi : U \ni a \mapsto (t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ su $A(\mathbb{V}^{n+1})$
- $\varphi : U' \ni s \mapsto (t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ su $F(\mathbb{V}^{n+1})$

connesse dalle trasformazioni

$$\begin{cases} t = t \\ q_k = q_k \\ p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(t, q, \dot{q}), \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (7.5)$$

allora la curva $I \ni t \mapsto (t, q(t), \dot{q}(t))$ di classe \mathcal{C}^1 soddisfa le **equazioni di Eulero-Lagrange**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \\ \frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (7.6)$$

se e solo se la curva $I \ni t \mapsto (t, q(t), p(t))$ ottenuta dalla curva precedente tramite le trasformazioni 7.5 soddisfa le equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \\ \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (7.7)$$

proposizione ² nelle ipotesi del teorema precedente valgono inoltre le seguenti identità:

$$\left. \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right|_{(t,q,p)} = - \left. \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right|_{(t,q,\dot{q})} \quad (7.8)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right|_{(t,q,p)} = \dot{q}_k(t, q, p), \quad k = 1, \dots, n \quad (7.9)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right|_{(t,q,p)} = - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right|_{(t,q,\dot{q})} \quad (7.10)$$

teorema di Jacobi Hamiltoniano considerando il teorema di Jacobi già affrontato in precedenza (5) possiamo ricavare il seguente risultato:

sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$, se $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ allora

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q(t), p(t)) = 0 \text{ se } I \ni t \mapsto (t, q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^{2n+1} \text{ soddisfa le equazioni di E-L} \quad (7.11)$$

7.1 Dipendenza della funzione di Hamilton dalle coordinate

A differenza della *lagrangiana*, la funzione di Hamilton dipende dal sistema di coordinate naturali scelto.

Consideriamo una lagrangiana $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$, siano $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ due funzione hamiltoniane definite su due carte locali naturali con intersezione non vuota ed associate a coordinate naturali locali $(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, $(t', q'_1, \dots, q'_n, p'_1, \dots, p'_n)$, come visto in precedenza avremo quindi

$$\begin{cases} t' = t + c \\ q'_k = q'_k(t, q_1, \dots, q_n) \\ p'_k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q_h}{\partial q'_k} p_h, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (7.4)$$

allora avremo che

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \mathcal{H}(t, q, p) + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial q'_k}{\partial t} \right|_{(t,q,p)} p'_k(t, q, p) \quad (7.12)$$

¹pagina 354 libro (dimostrazione)

²pagina 352 libro (dimostrazione)

oppure equivalentemente

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \mathcal{H}(t, q, p) - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial t'} \Big|_{(t', q', p')} \quad (7.13)$$

NB: se abbiamo un sistema di riferimento R nel quale i vincoli non dipendono dal tempo allora due sistemi di coordinate naturali solidali con R soddisferanno

$$\begin{cases} t' = t + c \\ q'_k = q'_k(q_1, \dots, q_n), \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (7.14)$$

come vediamo nelle q'_k manca la dipendenza dal tempo pertanto, in questo caso, dalla formula precedente (7.12) ricaviamo $\frac{\partial q'_k}{\partial t} = 0$ quindi

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \mathcal{H}(t, q, p) \quad (7.15)$$

teorema ³ si consideri una curva $\gamma : I \ni t \mapsto F(\mathbb{V}^{n+1})$, $\gamma \in \mathcal{C}^1$ che soddisfa le equazioni di Hamilton (7.7) nell'aperto $V \subset F(\mathbb{V}^{n+1})$ dotato di coordinate naturali $(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ rispetto alla funzione $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$, $\mathcal{H} \in \mathcal{C}^1$. Tale curva soddisferà allora le equazioni di Hamilton in ogni altro sistema di coordinate naturali $(t', q'_1, \dots, q'_n, p'_1, \dots, p'_n)$ definito su V e rispetto a $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(t', q', p')$.

NB: questo vale perché, per definizione di *spaziotempo delle fasi*, per due sistemi di coordinate locali naturali in $F(\mathbb{V}^{n+1})$ vale sempre la 7.12.

7.2 Formulazione di Hamilton su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$

7.2.1 Prerequisiti di analisi

sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ intervallo aperto non vuoto, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Diciamo che F è un **campo conservativo** se ammette potenziale cioè se

$$\exists V : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } F = \nabla V \quad (7.16)$$

insieme connesso un insieme Ω è connesso se gli unici sottoinsiemi che sono simultaneamente aperti e chiusi di Ω sono \emptyset e Ω .

insieme semplicemente connesso sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, Ω si dice semplicemente connesso se $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ e per ogni coppia di curve $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ di classe \mathcal{C}^1 tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_1$
 $\exists \Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, $\Gamma \in \mathcal{C}^1$ t.c.

$$\begin{cases} \Gamma(0, t) = \gamma_0(t), \quad \Gamma(1, t) = \gamma_1(t), \quad t \in [0, 1] \\ \Gamma(s, 0) = x_1, \quad \Gamma(s, 1) = x_2, \quad s \in [0, 1] \end{cases} \quad (7.17)$$

teorema A sia $F \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- (a) $\oint_{\gamma} F d\gamma = 0 \quad \forall \gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ di classe \mathcal{C}^1 t.c. $\gamma(0) = \gamma(1)$
- (b) $\int_{\gamma} F d\gamma = 0 \quad \forall \gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(0) = x_0 \in \Omega$, di classe \mathcal{C}^1 dipendente solo da $x = \gamma(1)$

allora F ammette potenziale V e $V(x) = \int_{\gamma} F d\gamma$

teorema B sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ t.c. ammette potenziale allora:

- valgono le condizioni a,b del teorema A
- se $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ allora valgono le condizioni di **irrotazionalità**:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, \quad k, j = 1, \dots, n \quad (7.18)$$

corollario le condizioni di irrotazionalità 7.18 equivalgono a

$$\nabla \wedge F(P) = 0, \quad \forall P \in E_R \quad (7.19)$$

³pagina 364 libro (dimostrazione)

teorema campo conservativo sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$$\Omega \text{ semplicemente connesso, } F \text{ irrotazionale} \Rightarrow F \text{ conservativo} \quad (7.20)$$

gradiente se una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ammette n derivate parziali in un punto $x \in A$, è definito un vettore chiamato gradiente di f in x le cui componenti sono le n derivate parziali

$$\nabla f(x) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (7.21)$$

7.2.2 Sistemi Hamiltoniani

Consideriamo un sistema fisico \mathfrak{S} che ammette descrizione Hamiltoniana nello spazio delle fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$, se fissiamo un sistema di coordinate locali naturali $(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, possiamo identificare lo spazio delle fasi con un aperto dello spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ (dove il primo fattore è l'asse del tempo), sia Ω aperto di \mathbb{R}^{2n} t.c. $F(\mathbb{V}^{n+1}) = \mathbb{R} \times \Omega$. Nella seguente situazione le equazioni di Hamilton (7.7) prendono la seguente forma:

$$\frac{dx}{dt} = S \nabla \mathcal{H}(t, x) \quad (7.22)$$

dove x è il vettore colonna $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^t \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{H} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione hamiltoniana del sistema \mathfrak{S} che soddisfa $\nabla \mathcal{H} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \Omega)$, in modo da assicurare l'esistenza e l'unicità delle soluzioni (3.0.1) ⁴, $S \in M(2n, \mathbb{R})$ è la **matrice simplettica** con struttura:

$$S \doteq \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

dove I_n è la matrice identità $n \times n$.

NB: una questione importate ora è quella di determinare criteri matematici per stabilire se un sistema di equazioni differenziabili di primo ordine su un fissato aperto $\mathbb{R} \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \quad (7.24)$$

si possa ricondurre, almeno localmente, ad un sistema Hamiltoniano.

gruppo simplettico il gruppo simplettico reale di ordine n è definito dal sottogruppo di $GL(2n, \mathbb{R})$

$$Sp(n, \mathbb{R}) \doteq \{A \in M(2n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } A^t S A = S\} \quad (7.25)$$

gruppo delle matrici hamiltoniane è detto insieme delle matrici hamiltoniane di ordine n

$$sp(n, \mathbb{R}) \doteq \{E \in M(2n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } E^t S + S E = 0\} \quad (7.26)$$

teorema ⁵ per $n = 1, 2, \dots$ fissato si consideri il sistema di equazioni differenziali su $\mathbb{R} \times \Omega$, $\Omega \neq \emptyset$ aperto di \mathbb{R}^{2n}

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \quad (7.24)$$

dove $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \Omega)$, allora vale:

(a) se tale sistema si può scrivere in forma di Hamilton (7.22) allora le matrici $D_{(t,x)}$ definite:

$$D_{(t,x)} \doteq \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{(t,x)} \right]_{i,j=1,\dots,2n} \quad (7.27)$$

appartengono a $sp(n, \mathbb{R}) \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$

(b) viceversa se $D_{(t,x)} \in sp(n, \mathbb{R}) \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ e se Ω è semplicemente connesso (7.17) allora il sistema 7.24 può essere scritto in forma Hamiltoniana su $\mathbb{R} \times \Omega$

⁴come sappiamo dal teorema di Cauchy (3.0.1) basterebbe richiedere $\nabla \mathcal{H} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \Omega)$ e localmente lipshitziana

⁵pagina 372 libro (dimostrazione)

Capitolo 8

Argomenti più avanzati di Meccanica Lagrangiana

8.1 Principio di azione stazionaria

punto di stazionarietà sia una funzione differenziabile $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto allora $x_0 \in \Omega$ è detto punto di stazionarietà se $\nabla f(x_0) = \nabla_{x_0} f = 0$

funzionale un'applicazione $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dove D è un insieme di funzioni è detto funzionale.

azione sia \mathfrak{S} un sistema fisico di punti materiali descritto su \mathbb{V}^{n+1} , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e non vuoto, $I = [a, b]$, $a < b$. Supponiamo che \mathfrak{S} sia descritto da una lagrangiana $\mathcal{L} : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^2 , fissando due punti $Q_a, Q_b \in \Omega$ definiamo **azione** il funzionale:

$$I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}[\gamma] \doteq \int_a^b \mathcal{L} \left(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt} \right) dt \quad (8.1)$$

dove le curve $\gamma : I \ni t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$ appartengono al dominio:

$$D_{Q_a, Q_b} \doteq \{ \gamma \in \mathcal{C}^2(I) \text{ t.c. } \gamma(t) \in \Omega \forall t \in I \text{ con } \gamma(a) = Q_a, \gamma(b) = Q_b \} \quad (8.2)$$

teorema¹ sia $\gamma : I \ni t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$, $\gamma \in D_{Q_a, Q_b}$ allora γ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange rispetto a $\mathcal{L} : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^1 se e solo se γ è un punto di stazionarietà del funzionale azione $I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}$

8.2 Potenziali generalizzati

definizione Si consideri un sistema \mathfrak{S} di N punti materiali P_1, \dots, P_N sottoposto a vincoli olonomi ideali e descritto su $A(\mathbb{V}^{n+1})$. Si considerino F_1, \dots, F_M con F_i agente rispettivamente su P_i .

Queste forze ammettono un **potenziale generalizzato** $\mathcal{V} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ se le **componenti lagrangiane** possono essere ottenute da

$$\mathcal{L}_k|_R(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{\partial \mathcal{V}|_R}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}|_R}{\partial \dot{q}_k} \quad (8.3)$$

8.2.1 Condizioni per l'esistenza del potenziale generalizzato

teorema² le componenti lagrangiane $\mathcal{L}_k|_R \in \mathcal{C}^2$ su $A(\mathbb{V}^{n+1})$, lineari nelle coordinate \dot{q}^k ammettono potenziale generalizzato in un intorno di $(t_0, q_{01}, \dots, q_{0n}, \dot{q}_{01}, \dots, \dot{q}_{0n})$ se soddisfano le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_k|_R}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial \mathcal{L}_k|_R}{\partial \dot{q}_k} = 0, \text{ ovunque e } \forall k, h = 1, \dots, n \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_k|_R}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathcal{L}_k|_R}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_k|_R}{\partial \dot{q}_h} \right), \text{ ovunque e } \forall k, h = 1, \dots, n \quad (8.5)$$

¹pagina 307 libro

²pagina 317 libro

In tal caso il **potenziale generalizzato** $\mathcal{V}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ risulta:

$$\mathcal{V} = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (q_k - q_{0_k}) \mathcal{L}_k|_R(t, q_{0_1} + s(q_1 - q_{0_1}), \dots, q_{0_n} + s(q_n - q_{0_n}), \dot{q}_{0_1} + s(\dot{q}_1 - \dot{q}_{0_1}), \dots, \dot{q}_{0_n} + s(\dot{q}_n - \dot{q}_{0_n})) ds \quad (8.6)$$

NB vale anche viceversa: su un sistema di forze ammette potenziale generalizzato allora componenti lagrangiane associate $\mathcal{L}_k|_R \in C^2$ soddisfano in ogni sistema di coordinate locali naturali adattate alle fibre di $A(\mathbb{V}^{n+1})$ le due equazioni precedenti (8.4) (8.5).

Capitolo 9

Equazioni differenziali

un'equazione differenziale ordinaria di ordine n in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è del tipo

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \text{ su } I \quad (9.1)$$

oppure più in generale

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ su } I \quad (9.2)$$

$y = y(x)$ definita e derivabile n volte in I si dice soluzione dell'equazione o **curva integrale** della 9.2 in I

autonoma un'equazione si dice autonoma se f non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente x

integrale generale si denota integrale generale della 9.2 una formula che rappresenta la famiglia di tutte le soluzioni della 9.2

9.1 Equazioni differenziali di primo ordine

- $y' = h$, dove $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua, allora

$$y(x) = \int h(x) dx \quad (9.3)$$

- $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$ allora

$$\frac{y'(x)}{y} = a \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y} dx = \int a dx \Rightarrow \log |y(x)| = ax + c \quad (9.4)$$

$$\Rightarrow y(x) = ke^{ax}, k \in \mathbb{R}, k \neq 0 \quad (9.5)$$

- $y' = h(x)g(y)$, equazione differenziale di primo ordine a variabili separabili

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c), c \in \mathbb{R} \quad (9.6)$$

- $y' = a(x)y + b(x)$, $a(x), b(x) \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ (a funzioni continue) ¹

$$y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int b(x)e^{-A(x)} dx \right), c \in \mathbb{R}, x \in I \quad (9.7)$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$

9.2 Equazioni differenziali di secondo ordine

$$y'' + ay' + by = f(x), a, b \in \mathbb{R}, f \in C(I) \text{ assegnati} \quad (9.8)$$

omogenea 9.8 si dice omogenea se $f(x) = 0$

¹pagina 363 appunti De Franceschi

teorema

- l'insieme delle soluzioni dell'omogenea di 9.8 in un dato intervallo è uno spazio vettoriale di dimensione 2
- l'integrale generale di 9.8 si ottiene sommando l'integrale generale dell'omogenea e una soluzione particolare dell'equazione completa

metodo risolutivo

- troviamo le soluzioni in \mathbb{C} dell'**equazione caratteristica** associata all'omogenea di 9.8

$$z^2 + az + b = 0 \Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad (9.9)$$

- consideriamo l'equazione omogenea $y'' + ay' + by = 0$, determiniamo due funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ dette **soluzioni fondamentali**

- $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ distinte $\Rightarrow y_1(x) = e^{z_1 x}$, $y_2(x) = e^{z_2 x}$
- $z_1 \in \mathbb{R}$ unica radice (molteplicità 2) $\Rightarrow y_1(x) = e^{z_1 x}$, $y_2(x) = x e^{z_1 x}$
- $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y_1(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

- l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è dato da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (9.10)$$

- se $f(x) \neq 0$ cerco una soluzione particolare di 9.8, procediamo con il **metodo della variazione delle costanti** cercando

$$\bar{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \quad (9.11)$$

imponendo che $\bar{y}(x)$ risolva 9.8 otteniamo $\bar{y}' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$, imponiamo come prima condizione

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \quad (9.12)$$

in questo modo rimane $\bar{y}' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$ e derivando ulteriormente

$$\bar{y}'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' \quad (9.13)$$

imponendo che \bar{y} risolva 9.8 e ricordando che y_1, y_2 sono soluzioni dell'equazione differenziale omogenea otteniamo che $c_1(x), c_2(x)$ devono verificare il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (9.14)$$

tale sistema è sempre risolubile quindi

$$W(x) \doteq \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

ha sempre determinante diverso da 0 e possiamo ricavare (metodo di Cramer)

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\det(W(x))} \quad (9.16)$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\det(W(x))} \quad (9.17)$$

per integrazione ricaviamo poi c_1 e c_2 , quindi l'espressione

$$\bar{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \quad (9.18)$$

NB: esiste inoltre un **caso particolare**: se $f(x)$ è della forma

$$f(x) = P(x) e^{\gamma x} \cos(\theta x) \text{ oppure } f(x) = P(x) e^{\gamma x} \sin(\theta x) \quad (9.19)$$

con P polinomio di grado n , poniamo $\xi = \gamma + i\theta$

- se ξ **non** è soluzione dell'equazione caratteristica (9.9) allora si cerca una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(x) = e^{\gamma x} (Q_1(x) \cos(\theta x) + Q_2(x) \sin(\theta x)) \quad (9.20)$$

con $Q_1(x), Q_2(x)$ polinomi di grado n , da determinare imponendo \bar{y} soluzione di 9.8

- se ξ è radice della caratteristica con molteplicità 1 la soluzione è del tipo

$$\bar{y}(x) = x e^{\gamma x} (Q_1(x) \cos(\theta x) + Q_2(x) \sin(\theta x)) \quad (9.21)$$

con $Q_1(x), Q_2(x)$ polinomi di grado n , da determinare imponendo \bar{y} soluzione di 9.8

- se ξ è radice della caratteristica con molteplicità 2 (allora $\theta = 0$) la soluzione è del tipo

$$\bar{y}(x) = x^2 e^{\gamma x} Q(x) \quad (9.22)$$

con $Q(x)$ polinomio di grado n , da determinare imponendo \bar{y} soluzione di 9.8

- l'integrale generale dell'equazione differenziabile 9.8 è dato da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (9.23)$$

casi semplici

- $y'' = x$

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (9.24)$$

- $y'' = -y$

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (9.25)$$

Capitolo 10

Esercizi

10.1 Formule

forza elastica k costante elastica, Q punto base

$$F_e = -k(P - Q) \quad (10.1)$$

mentre la formula per l'energia potenziale elastica è

$$U_e = \frac{k}{2}(P - Q)^2 \quad (10.2)$$

accelerazione normale R raggio, ω velocità angolare

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \quad (10.3)$$

energia potenziale centrifuga

$$U_c = -\frac{m}{2}(\omega \wedge r)^2 \quad (10.4)$$

dove $r = (x, y, z)$ è il vettore del raggio

accelerazione tangenziale R raggio, α accelerazione angolare

$$a_t = R\alpha \quad (10.5)$$

centro di massa sia R sistema di riferimento con origine O , siano P_1, \dots, P_n di massa m_1, \dots, m_n . Il loro centro di massa G sarà

$$G \doteq \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - O)m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m_1(P_1 - O) + \dots + m_n(P_n - O)}{m_1 + \dots + m_n} \quad (10.6)$$

coordinate cilindriche Sia $x^2 + y^2 = R^2$ un cilindro, e_x, e_y, e_z coordinate cartesiane, e_r versore radiale, e_ϕ versore tangenziale

$$e_r = \cos \phi e_x + \sin \phi e_y$$

$$e_\phi = -\sin \phi e_x + \cos \phi e_y$$

$$e_z = e_z$$

$$e_x = \cos \phi e_r - \sin \phi e_\phi$$

$$e_y = \sin \phi e_r + \cos \phi e_\phi$$

$$e_z = e_z$$

coordinate spirale sia e_x, e_y, e_z il sistema di assi cartesiani standard, sia Γ una spirale liscia di equazione

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = u, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (10.7)$$

possiamo usare l'**ascissa curvilinea** $s \doteq \sqrt{2}u$ della spirale per trovare le nuove coordinate t, n, b t.c. l'ascissa curvilinea sia una coordinata libera del nostro sistema.

$$\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}) & \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

NB: per l'operazione inversa basta calcolare la matrice trasposta.

coordinate sferiche sia e_x, e_y, e_z il sistema di assi cartesiani standard, sia Γ la sfera definita da

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}, \quad \rho \in (0, +\infty), \theta \in (0, 2\pi), \phi \in (0, 2\pi) \quad (10.9)$$

possiamo ricavare le coordinate sferiche tramite la trasformazione

$$\begin{pmatrix} e_\phi \\ e_\theta \\ e_\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

NB: per l'operazione inversa basta calcolare la matrice trasposta.

formule trigonometriche siano $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos(\theta) \cos(\varphi) \mp \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad (10.11)$$

$$\sin(\theta \pm \varphi) = \sin(\varphi) \cos(\theta) \pm \cos(\varphi) \sin(\theta) \quad (10.12)$$

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \quad (10.13)$$

$$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \quad (10.14)$$

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 \tan(\varphi)}{1 - \tan^2(\varphi)} \quad (10.15)$$

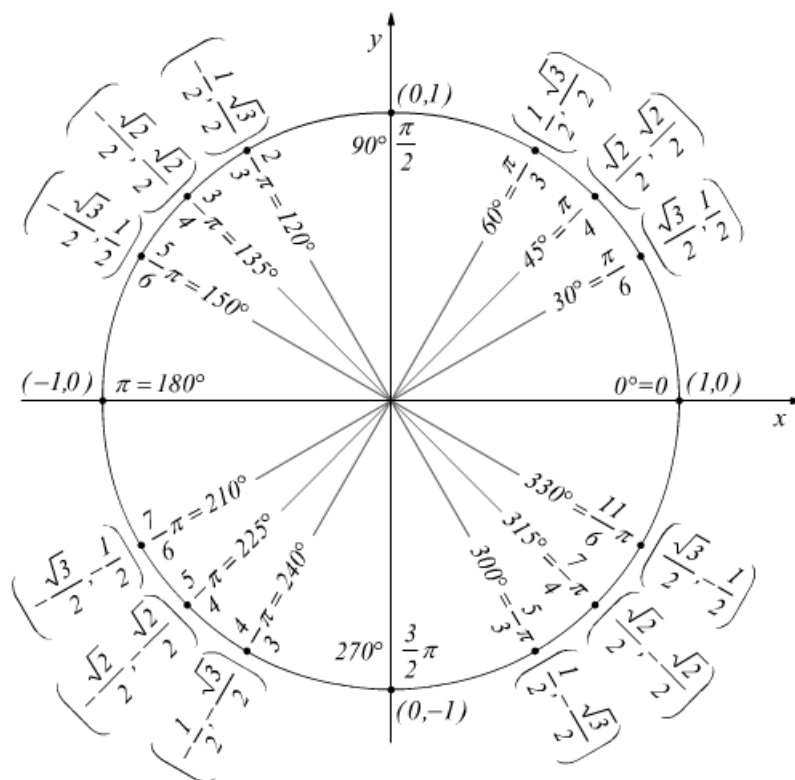


Figura 10.1: (cos,sin)