Analisi A modulo 2

Martino Papa

January 18, 2022

Contents

Chapter 1

Spazi

1.1 Spazi Vettoriali

1.1.1 introduzione

Sia ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$) un campo. Si chiama K-spazio vettoriale ad un insieme V munito di due operazioni:

- un'operazione di composizione interna
$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
tale che (V, $+$) sia un gruppo abeliano;
- un'operazione di composizione esterna, chiamata prodotto per scalari
$$\bullet : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$
tale che si soddisfano le seguenti proprietà:
(D1) (distributiva) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2, \forall k \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V$;
(D2) (distributiva) $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v, \forall k_1, \forall k_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V$;
(P) (pseudo-associativa) $k_1(k_2v) = (k_1k_2)v, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V$;
(U) (unità) $1v = v$, $1 \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

1.1.2 spazi normati

definizione di norma

sia V uno spazio $\mathbb{R} - vettoriale$ (o $\mathbb{C}$-vettoriale), si dice **norma** su V una funzione
$$|| \bullet || : V \longrightarrow [0, +\infty[$$
che soddifa le seguenti poprietà:

- $||x|| \geq 0, \ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $||\lambda x|| = |\lambda| \ ||x||$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

definizione spazio normato

Uno spazio vettoriale normato è uno spazio vettoriale munito di una **norma** $(V, || \bullet ||)$

osservazione la norma di un vettore può essere pensata come la sua lunghezza (intensità)

esempi

- $V = \mathbb{R}^n$ le norme principali sono:

$$\boldsymbol{||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}}$$
$$\boldsymbol{||x||_\infty = max|X_i|, i \in [1, n]}$$

- $V = \mathbb{R}^2$ è detta norma euclidea:

$$||x||_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

- $V = \mathbb{C}^0([a, b])$, lo spazio delle funzioni continue in [a,b]

$$||f||_2 = (\int_a^b f(x)^2\, dx)^{1/2}$$
$$||f||_\infty = max|f(x)|, x \in [a, b]\ ^1$$

definizione di palla

sia $(V, ||\cdot||)$ uno spazio normato, una palla (aperta) di centro X_0 e raggio $r > 0$ è l'insieme:

$$B_r(X_0) = \{x \in V t.c. ||x|| < r\} \tag{1.1}$$

$B_r(X_0)$ è un **insieme convesso** $\subset V$, cioè:

$$\forall x, y \in B_r(X_0), \forall \lambda \in [0, 1]\ \lambda x + (1-\lambda)y \in B_r(X_0) \Leftrightarrow \forall x, y \in B_r(X_0)\ [x, y] \subset B_r(X_0) \tag{1.2}$$

norme equivalenti

sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}(o\,\mathbb{C}$ con norme $||x_1||$, $||x_2||$; esse di dicono equivalenti se:

$$\exists \alpha, \beta\ t.c\ \ 0 < \alpha < \beta\ \wedge\ \alpha||x||_1 \le ||x||_2 \le \beta||x||_1 \tag{1.3}$$

1.1.3 spazi pre-hilbertiani

definizione prodotto scalare

sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ chiameremo **prodotto scalare** su V una funzione

$$< \cdot\, ,\ \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$$

che soddisfi $\forall x, y, z \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $< x, x > \ge 0,\ < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $< x, y >=< y, x >$
- $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$
- $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$

definizione si chiama spazio pre-hilbertiano uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare.

osservazione ogni spazio pre-hilbertiano diventa uno spazio normato definendo:

$$||x|| \doteq \sqrt{< x, x >} \tag{1.4}$$

dimostrazione: ||x|| deve soddisfare le *prorpietà della norma*:

- $||x|| \ge 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (segue dalla defnizzione di prodotto vettoriale)
- $||\lambda x|| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{\lambda^2 < x, x >} = |\lambda|||x||$
- la disuguaglianza triangolare segue dal teorema successivo

[1] il massimo esiste sempre per il teorema weierstrass

prodotto scalare euclideo $< x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$

teorema sia $(V, < \cdot\ ,\ \cdot >)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare. Sia $||x|| = \sqrt{< x, y >}\ \forall x \in V$ $\Rightarrow \forall x, y \in V$ vale

- $| < x, y > | \leq ||x||\ ||y||$ *(disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)*
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(disuguaglianza di Minkowski)*

dimostrazione disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

caso x=0 oppure y=0 (banali);
supponiamo $x \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$, segue:
$0 \leq < \lambda x - y\ ,\ \lambda x - y > =\ \lambda^2 < x, x > -2\lambda < x, y > + < y, y > =\ \lambda^2 ||x||^2 - 2\lambda < x, y > + ||y||^2$
$\Rightarrow < x, y >^2 - ||x||^2 ||y||^2 \leq 0$
$\Rightarrow < x, y >^2 \leq ||x||^2 ||y||^2$
$\Rightarrow | < x, y > | \leq ||x||\ ||y||$ □

dimostrazione disuguaglianza di Minkovski:

$\forall x, y \in V$
$||x + y||^2 = < x + y, x + y > = < x, x > +2 < x, y > + < y, y > = ||x||^2 + 2 < x, y > + ||y||^2$
(utilizzo Cauchy-Shwarz) $\leq ||x||^2 + 2||x||\ ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$
$\Rightarrow ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ □

angolo dato V spazio vettoriale dotato di $< \cdot\ ,\ \cdot >$ possiamo introdurre l'angolo θ compreso tra due vettori non nulli:

$$\cos\theta = \frac{< x, y >}{||x||\ ||y||} \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi \tag{1.5}$$

vettori ortogonali due vettori x, y si dicono ortogonali se $< x, y >= 0$ infatti: $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

teorema di pitagora

sia $V = \mathbb{R}^2,\ < x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i,\ < x, y >= 0 \Rightarrow \boldsymbol{||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2}$

base canonica $< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ δ_{ij} è detto *simbolo di Kronecker*

identità del parallelogramma

sia $V, < \cdot\ ,\ \cdot >)$ uno spazio vettoriale (reale), $||x|| = \sqrt{< x, x >} \Rightarrow$

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \tag{1.6}$$

dimostrazione:
$< x + y, x + y > + < x - y, x - y >$
$= < x + x > +2 < x, y > + < y, y > + < x, x > -2 < x, y > + < y, y >$
$= 2 < x, x > +2 < y, y > =\ 2||x||^2 + 2||y||^2$ □

1.2 Spazi Metrici

1.2.1 introduzione

distanza sia X un insieme qualunque, chiamaremo **distanza** (o metrica) su X la funzione

$$d : X \times X \to [0, +\infty] \tag{1.7}$$

che soddisfa $\forall x, y, z \in X$:

- $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(positività)*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *(simmetria)*
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(disuguaglianza triangolare)*

definizione se d è una distanza sull'insieme X $\Rightarrow$ (X,d) si dice **spazio metrico**

proprietà in $\mathbb{R}$ le distanze in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) soddisfano $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ due ulteriori proprietà:

- $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ *(invarianza per traslazione)*
- $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x,y)$ *(omogeneità)*

osservazione se $(X, ||\cdot||)$ è uno spazio normato $\Rightarrow d(x,y) \doteq ||x-y||$

sottospazio metrico sia (X,d) sottospazio metrico $\Rightarrow \forall X_1 \subset X (X_1, d)$ è sottospazio metrico

metrica discreta $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

metriche equivalenti sia X un insieme $\neq \emptyset$, d_1, d_2 due metriche assegnate in X. Diremo che due metriche sono equivalenti se:

$$\exists\, 0 < \alpha < \beta \text{ t.c. } \alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)\ \forall x,y \in X$$

1.2.2 intorni sferici

sia (X,d) uno spazio metrico. Fissando $x_0 \in X$ e $r > 0$ si dice intorno sferico (**palla aperta**) di centro x_0 e raggio r l'insieme:

$$B_{r,d}(x_0) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\} \tag{1.8}$$

sarà invece definita **palla chiusa** l'insieme:

$$\overline{B}_{r,d}(x_0) = \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq r\} \tag{1.9}$$

più in generale è definito **intorno** di x_0 ogni sottoinsieme X contenente un intorno sferico di centro x_0

convergenza

sia (X,d) uno spazio metrico, $(X_n)_n \subset X$ diremo che $(X_n)_n$ **converge** ad $x \in X \Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0 \tag{1.10}$$

ovvero:

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \overline{n}_\varepsilon,\ d(x_n, x) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \overline{n}_\varepsilon,\ x_n \in B_\varepsilon(x)$
- $\forall$ intorno U di $X\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \overline{n}\ x_n \in U$

in particolare se una successione $(X_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ converge ad $x \in \mathbb{R}$ scriveremo $lim_{x\to+\infty}\, x_n = n$

1.3 Elementi base di topologia

sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ il suo **complementare**, $\overline{x_0} \in \mathbb{R}^n$

- il punto $\overline{x_0}$ si dice **interno** ad E $\Leftrightarrow \exists\, r > 0 \mid B_r(\overline{x_0}) \subseteq E$. $\mathring{\boldsymbol{E}}$ è detto **insieme dei punti interni**
- il punto $\overline{x_0}$ si dice **esterno** ad E $\Leftrightarrow x_0$ è interno a $\boldsymbol{E^c}$
- il punto $\overline{x_0}$ si dice **punto di frontiera** per E $\Leftrightarrow \forall r > 0$ in $B_r(\overline{x_0})$ cadono sia punti appartenenti ad E che punti del suo complementare E^c. $\boldsymbol{\delta E}$ è detto **insieme dei punti di frontiera**
- il punto $\overline{x_0}$ si dice **punto di accumulazione** per E $\Leftrightarrow \forall r > 0$ in $B_r(\overline{x_0})$ cadono punti di $E \neq x_0$
- il punto $\overline{x_0}$ si dice **punto isolato** per $E \Leftrightarrow$ non è punto di accumulazione per $E \Leftrightarrow \exists B_r(\overline{x_0}) \mid E \cap B_r(\overline{x_0}) = \{\overline{x_0}\}$

libro analisi 1 pag 118

osservazione $\overline{x_0}$ punto interno $\Rightarrow \overline{x_0} \in E$, $\overline{x_0}$ punto esterno $\Rightarrow \overline{x_0} \notin E$

proprietà generali

- $(\mathring{E})^\circ = \mathring{E}$
- $\delta E = \delta(E^c)$
- $\mathbb{R}^n = \mathring{E} \cup \delta E \cup (\mathring{E^c})$
- i punti $\in \mathring{E}$ sono di accumulazione per E, quelli di E^c non lo sono
- se $x_0 \in \delta E \setminus E \Rightarrow x_0$ è punto di accumulazione per E

insieme aperto sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ E è definito aperto $\Leftrightarrow \forall \overline{x} \in E$, $\overline{x}$ è un punto interno ad $E \Leftrightarrow E = \mathring{E}$

insieme chiuso sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ E è definito chiuso $\Leftrightarrow E^c$ è aperto

teorema di unione ed interezione di aperti e chiusi

- L'unione qualunque di aperti è aperta; l'intersezione finita di aperti è aperta
- l'intersezione qualunque di chiusi è chiusa; l'unione finita di chiusi è chiusa

teorema (2) sia $E \subseteq \mathbb{R}^m$ E è chiuso $\Leftrightarrow \forall$ successione $(x_n)_n \subseteq E$ convergente ad un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$, $\overline{x} \in E$ [2]

teorema (3) sia $E \subseteq \mathbb{R}^m$ le seguenti soluzioni sono equivalenti:

- E è chiuso
- $\delta E \subseteq E$
- ogni punto di accumulazione di E appartiene ad E

1.3.1 chiusura di E

sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è denotata $\overline{E}$ la chiusura di E definita: $\boldsymbol{\overline{E} = E \cup \delta E}$

proprietà della chiusura [3]

- $\mathring{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$
- $\overline{E} = \mathring{E} \cup \delta E$
- $\overline{E}$ è l'insieme dei punti $\underline{x_0}$ t.c. in ogni intorno di $\underline{x_0}$ cadono punti di E
- $\overline{E}$ è chiuso
- E è chiuso $\Leftrightarrow E = \overline{E}$
- $E \subseteq F \Rightarrow \overline{E} \subseteq \overline{F}$ *(F un insieme qualunque)*

teorema aperti (o chiusi) [4] sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *(equivalentemente per chiusi)*

$$f \text{ è continua in } \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{la controimmagine di ogni aperto di } \mathbb{R}^m \text{ è un aperto di } \mathbb{R}^n \tag{1.11}$$

proposizione sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\overline{E}$ è il più piccolo chiuso contenente E. $(E \subseteq F) \wedge$ (F chiuso) $\Rightarrow \overline{E} \subseteq F$
- $\overline{E} = \bigcap_{E \subseteq C} C$ (C *chiuso*)

[2] dimostrazione nella Lezione 3 (pag 30)
[3] dimostrazioni nella lezione 4 (pag 33)
[4] dimostrazione nella lezione 9

insieme denso sia $A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$, se $\overline{A} = E$ diremo che A è *denso* in E

insieme limitato sia (X, d) uno spazio metrico. $E \subseteq X$ si dice limitato $\Leftrightarrow \exists\, x_0 \in X, r > 0 \mid E \subseteq B_r(x_0)$
NB: se $E \subseteq B_r(x_0) \Rightarrow \forall x \in X\ E \subseteq B_{\overline{r}}(x)$, scegliendo $\overline{r} = r + d(x_0, x)$

diametro

- se E non limitato $\Rightarrow$ $diam(E) = +\infty$
- se E limitato $\Rightarrow diam(E) = sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\}$

Chapter 2

Successioni

definizione una successione dato un insieme $\mathbb{A}$ è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{A}$, $a_n \doteq f(n)$

convergenza sia (X, d) uno spazio metrico, (x_n) una successioni a valori in X; essa si dirà *convergente* ad X se vale una delle seguenti affermazioni tra loro equivalenti

1. fissato un qualunque intorno V di x, per $n \to +\infty$, x_n appartiene definitivamente a V
2. $\forall \epsilon > 0$, esiste un intero positivo N tale per cui $n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$
3. $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$

sottosuccesione sia $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ una successione, si dice *sottosuccessione* di $(a_n)_n$ una successione ottenuta per composizione

$$: \mathbb{N} \overset{\sigma}{\to} \mathbb{N} \overset{a}{\to} \mathbb{R}, \ (\sigma(n) \text{ strettamente crescente}) \tag{2.1}$$

teorema Bolzano-Weierstrass ogni successione limitata in $\mathbb{R}^m$ ammette una sottosuccessione convergente
dimostrazione:

1. supponiamo m=1, $(x_n)_n$ assuma infiniti valori. $(x_n)_n$ limitata $\Rightarrow \exists a_0, b_0 \in \mathbb{R} \mid x_n \in [a_0, b_0] \ \forall n$
   Sia $c = \frac{a_0+b_0}{2}$ pt. medio di $[a_0, b_0]$, siccome $[a_0, b_0]$ contiene tutti gli elementi di x_n
   $\Rightarrow [a_0, c] \vee [c, b_0]$ contiene degli x_n per infiniti indici n (supponiamo $[a_1, b_1]$)
   $\Rightarrow b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$
   Procedendo in questo modo costruiamo una successione di intervalli contenuti ciascuno nel precedente:
   $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \subset ... \subset [a_0, b_0]$, $\ b_k - a_k = \frac{b_0-a_0}{2^k} \ \forall k \geq 0$
   $\Rightarrow$ per costruzione abbiamo $a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_K \leq ... \leq b_0$
   $\Rightarrow a_k, b_k$ convergono perchè monotone e limitate. $\lim_{k\to+\infty} a_k = \sup a_k = l_1$, $\lim_{k\to+\infty} b_k = \inf b_k = l_2$
   $0 \leq l_2 - l_1 \leq \frac{b_0-a_0}{2^{k+1}}$, $\frac{b_0-a_0}{2^{k+1}} \overset{+\infty}{\to} 0 \Rightarrow l_2 = l_1 \doteq l$
   scegliamo $(x_{n_k})_k \mid x_{n_k} \in [a_k, b_k] \ k \geq 0$, $n_0 = 0$ e $x_{n_0} \in [a_0, b_0]$, siccome $[a_1, b_1]$ contiene termini x_n per infiniti indici di n $\Rightarrow \exists n_1 > n_0 \mid x_{n_1} \in [a_1, b_1]$, procedendo per induzione otteniamo
   $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < ... \mid x_{n_k} \in [a_k, b_K] \ \forall k \in \mathbb{N}$, quindi per il teorema del confronto anche (x_{n_k}) converge allo stesso limite l.

2. supponiamo m=1, $\exists \gamma \in \mathbb{R} \mid a_n = \gamma$ per infiniti valori dell'indice n
   in questo caso basta estrarre la successione convergente a γ.

3. supponiamo $m > 1$, $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ limitata e costituita da punti distinti *(altrimenti come nel passo 2)*
   $(x_n)_n$ limitata $\Rightarrow$ $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n, ..., (x_n^m)_n$ sono limitate. (per il caso m=1) $\exists$ $(\underline{x}_{n_k})_k \subseteq (\underline{x}_n)_n$ *t.c.* $(\underline{x}^1_{n_k})_k$ converge ad un limite $x^1 \in \mathbb{R}$, continuando ad estrarre ulteriori successioni avremo una sottosuccessione di tutte le precedenti (indichiamola x_{n_k})
   x_{n_k} *t.c.* $x^1_{n_k} \to x^1$, $x^2_{n_k} \to x^2$, ..., $x^m_{n_k} \to x^m$ in $\mathbb{R}$
   posto $\underline{x} = (x^1, ..., x^m)$ la successione $(x_{n_k})_k$ è una sottosuccessione di $(x_n)_n$ e converge a $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ □

corollario 1 ogni sottoinsieme limitato e infinito in $\mathbb{R}^m$ ammette almeno un punto di accumulazione

corollario 2 i punti di accumulazione di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^m$ sono i limiti delle successioni di E che non sono definitivamente costanti

corollario 3 sia $(\underline{x}_n)_n$ è una successione contenuta in un "plurirettangolo" chiuso e limitato $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_m, b_m]$, allora esiste una sottosuccesssione $(\underline{x}_{n_k})_k$ convergente ad un certo limite $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$

insieme compatto [1] Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che ogni successione in K abbia una sottosuccessione convergente ad un elemento di K si dice *sequenzialmente compatto* (o compatto per successioni)

teorema di Heine-Borel [2] sia $E \subseteq \mathbb{R}^m$, le seguenti condizioni sono equivalenti

$$\text{E compatto} \Leftrightarrow \text{E è chiuso e limitato} \tag{2.2}$$

osservazione gli insieme chiusi e limitati possiedono minimo e massimo in $\mathbb{R}$

successione di Cauchy sia $(\underline{x}_n)_n$ una successione a valori in $\mathbb{R}^N$, diciamo che $(\underline{x}_n)_n$ è una successione di Cauchy se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ t.c. \ \forall m, n > \overline{n} \Rightarrow ||\underline{x}_n - \underline{x}_m|| < \epsilon \tag{2.3}$$

criterio di convergenza di Cauchy una successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ è convergente $\Leftrightarrow$ è di Cauchy

2.1 limite di una successione

sia $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, definiamo il *massimo limite* ed il *minimo limite* di $(x_n)_n$

- $l_+ \doteq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x_n} \doteq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$
- $l_- \doteq \lim_{n\to+\infty} \inf x_n \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$

corollario 1

- $(x_n)_n$ illimitato superiormente $\Rightarrow l_+ < +\infty$
- $(x_n)_n$ illimitato inferiormente $\Rightarrow l_- > -\infty$

corollario 2 sia $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ limitato $\Rightarrow$ esistono finiti l_-, l_+ e $l_- \leq l_+$

proposizione sia $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ e sia $l_+ = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k \in \mathbb{R}$

- $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ t.c. \ x_n < l_+ + \epsilon \ \forall n \geq n_\epsilon$
- $\forall \epsilon > 0$ esistono infiniti indici in n t.c. $x_n > l_+ - \epsilon$

sia $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ e sia $l_- = \sup n \in \mathbb{N} \inf_{k\geq n} x_k \in \mathbb{R}$

- $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ t.c. \ x_n > l_- - \epsilon \ \forall n \geq n_\epsilon$
- $\forall \epsilon > 0$ esistono infiniti indici in n t.c. $x_n < l_- + \epsilon$

osservazione sul massimo limite sia $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ $L \in \mathbb{R}$ sarà il massimo limite di $(x_n)_n$ se

- $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ t.c. \ x_n < L + \epsilon \ \forall n \geq n_\epsilon$
- $\forall \epsilon > 0$ esistono infiniti indici di n tale che $x_n > L - \epsilon$

2.1.1 limiti sottosuccessioni

teorema 1 sia $(x_{n_j})_j$ una sottosuccesione di $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ che converge ad un limite l ($\in \mathbb{R}$ o $\pm\infty$) allora

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{j\to+\infty} x_{n_j} \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n \tag{2.4}$$

teorema 2 *(analogo per* $\limsup_{n\to+\infty} x_n$*)* Esiste una sottosuccessione $(x_{n_j})_j$ di $(x_n)_n$ che ammette limite e t.c.

$$\lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = \liminf_{n\to+\infty} x_n \tag{2.5}$$

[1] pagina 128 analisi 1
[2] dimostrazioni nella Lezione 5

corollario 1 $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ e $\limsup_{n\to+\infty} x_n$ sono rispettivamente il più piccolo ed il più grande limite sottosuccessionale di $(x_n)_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$

teorema 3 la successione $(x_n)_n$ ammette limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = l \tag{2.6}$$

classe limite la classe limite di una successione $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ è il sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ di tutti i suoi limiti sottosuccessionali

lemma sia $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ limitata $\Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} x_n = inf(E)$ *(analogo per* $\liminf_{n\to+\infty} x_n$*)*

Chapter 3

Funzioni reali in più variabili

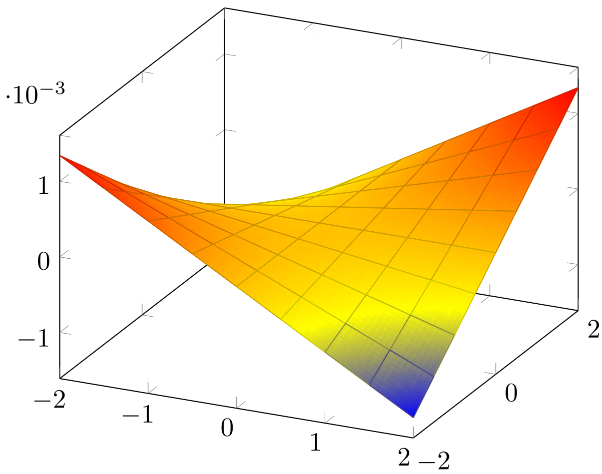
3.1 introduzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{3.1}$$

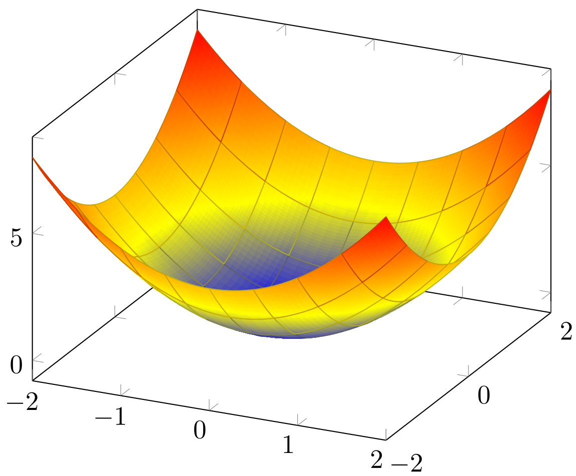
grafico di f sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\text{graf}(f) = G_f = \{(\underline{x},\ \underline{z}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \underline{x} \in A, \underline{z} \in f(x)\} \tag{3.2}$$

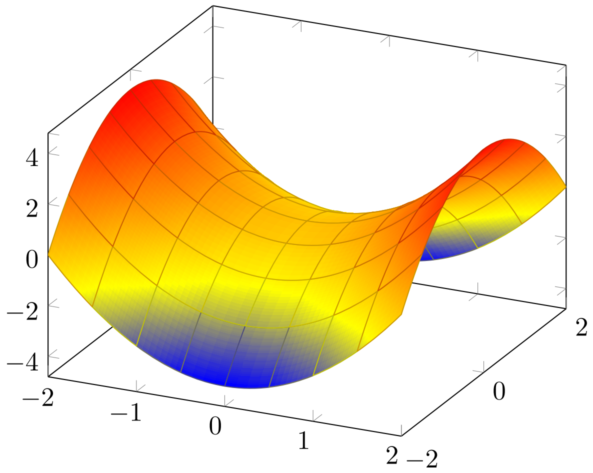
esempi



- $f(x, y) = xy * e^{(-x^2-y^2)}$



- $f(x, y) = x^2 + y^2$



- $f(x, y) = x^2 - y^2$

curve di livello $E_c = \{(x, y) \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x, y) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$

3.1.1 limite

sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A, sia $l \in \mathbb{R}^m$. Diremo che l è limite di $f(x)$, per $x \to x_0$ e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{3.3}$$

se si verificano queste due condizioni equivalenti:

- $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0\ t.c\ \forall x \in A,\ 0 < ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - l|| < \epsilon$
- $\forall$ intorno V di l $\exists$ un intorno U di x_0 $t.c.$ $\forall x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

proprietà

- il limite di una funzione (se esiste) è unico
- $\lim_{x \to x_o}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_f + \beta l_g,\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

3.1.2 continuità

[1] sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sia $x_0 \in A$

- se x_0 è un punto isolato allora f si dice continua in x_0
- se x_0 è punto di accumulazione per A allora f si dice continua in $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{3.4}$$

- f si dice continua in A $\Leftrightarrow$ è continua in tutti i punti di A

teorema di composizione sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, x_0 punto di accumulazione per A, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e g continua in $l \Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l) \tag{3.5}$$

corollario

- La somma di funzioni continue è una funzione continua
- La composizione di funzioni continue è una funzione continua

limite delle restrizioni sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sia $T \subset A$ avente x_0 come punto di accumulazione allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f|_T(x) = l \tag{3.6}$$

[1]pagina 199 libro analisi 1

teorema ponte [2]sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, x_0 punto di accumulazione per A allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \text{ successione } (x_h)_h \subset A \setminus \{x_0\}, x_h \to x_0 \Rightarrow \lim_{h \to +\infty} f(x_h) = l) \tag{3.7}$$

corollario sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sia $x_0 \in A$ allora

$$\text{f è continua in } x_0 \Leftrightarrow \forall \text{ successione } (x_h) \subseteq A, x_h \to x_0 \text{ si ha } \lim_{x \to +\infty} f(x_h) = f(x_0) \tag{3.8}$$

teoremi continuità sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua in $x_0 \in A$, avendo osservato

- f è continua in $x_0 \Leftrightarrow f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 $\forall i = 1, ..., m$
- le proiezioni $\pi_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\pi_i(x) = x_i$ sono funzioni continue
- la composizione di funzioni continue è una funzione continua

dalle prorprietà del limite per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seguono

- **teorema di permanenza del segno** sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, $x_0 \in A$, $f(x_0) > 0$ allora

$$\exists \text{un intorno U di } x_0 \mid f(x) > 0 \ \forall x \in U \tag{3.9}$$

- **continuità delle operazioni algebriche** siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in A$ allora anche

$$f \pm g,\ fg,\ \frac{f}{g}\ (g(x_0) \neq 0),\ |f|,\ min\{f, g\},\ max\{f, g\} \text{ sono continue in } x_0 \tag{3.10}$$

3.1.3 definizioni

intorno sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x_0} \in E$, U intorno di $\underline{x_0}$ in $\mathbb{R}^n$, chiameremo *intorno di* x_0 *in* E ogni $V \subseteq E$ t.c.

$$V = E \cap U \tag{3.11}$$

segmento dati $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ ricordiamo che il *segmento* $[\underline{x}, \underline{y}]$ in $\mathbb{R}^n$ di esterni $\underline{x}$ e $\underline{y}$ è l'insieme

$$[\underline{x}, \underline{y}] = \{\lambda \underline{y} + (1 - \lambda)\underline{x} \mid \lambda \in [0, 1]\} = \{\underline{x} + \lambda(\underline{y} - \underline{x}) \mid \lambda \in [0, 1]\} \tag{3.12}$$

poligonale siano $\underline{x}^1, ..., \underline{x}^k$, $k \geq 2$ punti di $\mathbb{R}^n$ con $\underline{x}^i \neq \underline{x}^{i+1}$ $\forall i = 1, ..., k - 1$, chiameremo *poligonale* di $\mathbb{R}^n$ con vertici $\underline{x}^1, ..., \underline{x}^k$ l'unione dei segmenti $[\underline{x}^i, \underline{x}^{i+1}]$ per $i = 1, ..., k - 1$

$$\bigcup_{i=1}^{k-1} [\underline{x}^i, \underline{x}^{i+1}] \tag{3.13}$$

definizione: i punti x^1, x^k sono detti *estremi*

insieme connesso per poligonali sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diremo che A *connesso per poligonali* $\Leftrightarrow$ per ogni coppia di punti di A esiste una poligonale di estremi nei due punti tutta contenuta in A

osservazione A convesso $\Rightarrow$ A connessso per poligonali

teorema dell'esistenza dei valori intermedi [3] sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme connesso per poligonali, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continuta su A $\Rightarrow$ f assume tutti i valori compresi tra $\underset{A}{inf}\ f$ e $\underset{A}{sup}\ f$ ovvero

$$\forall l \in \mathbb{R}, \underset{A}{inf}\ f < l < \underset{A}{sup}\ f\ \exists \underline{x} \in A \mid f(\underline{x}) = l \tag{3.14}$$

teorema sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $f : K \to \mathbb{R}^m$, continua, $m \geq 1 \Rightarrow f(K)$ è *compatto*

teorema di weierstrass sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $f : K \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f ammette *massimo e minimo* ovvero

$$\exists x_0, x_1 \in K \mid f(x_0) = \underset{x \in K}{min}\ f(x),\ f(x_1) = \underset{x \in K}{max}\ f(x) \tag{3.15}$$

[2]dimostrazione nella lezione 8
[3]dimostrazione lezione 9 pagina 100

teorema continuità sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $f : K \to \mathbb{R}^m$ iniettiva, continua allora

$$f^{-1} : f(K) \to K \text{ è continua} \tag{3.16}$$

uniformemente continua [4] sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f si dice *uniformemente continua* in A $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \mid \forall x, x_0 \in A, ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon \tag{3.17}$$

teorema limitatezza sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, A limitato e f uniformemente continua $\Rightarrow$ f è limitata

teorema di Heine-Cantor sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $f : K \to \mathbb{R}^m$ continua $\Rightarrow$

$$f \text{ è } \textit{uniformamente continua} \text{ su } K \tag{3.18}$$

3.2 calcolo differenziale

direzione si chiama *direzione* in $\mathbb{R}^n$ un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ *t.c.* $||\underline{v}|| = 1$ (versore)

rapporto incrementale di f nella direzione v [5]

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{g_v(t) - g_v(0)}{t} \tag{3.19}$$

posto $g_v(t) \doteq f(x + tv)$ definita in un intorno di 0

derivata nella direzione v se esiste finito il

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \tag{3.20}$$

si chiama *derivata nella direzione v* di f nel punto x e si denota $\boldsymbol{D_v f(x)}$

corollario sia $g_v(t)$ come nella definizione (3.19)

$$D_v f(x) = g_v'(0) \tag{3.21}$$

definizione sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in A$, se esiste la derivata nella direzione e_i di f in $x \Rightarrow$ tale derivata si dice *derivata parziale* rispetto ad x_i di f in x e si denota

$$D_{e_i} f(x), \quad f_{x_i}(x), \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \tag{3.22}$$

se esistono tutte le n derivate parziali di f in $x \Rightarrow f$ è **derivabile in x**

gradiente se una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ammette n derivate parziali in un punto $x \in A$ è definito un vettore chiamato **gradiente di f in x** le cui componenti sono le n derivate parziali

$$\nabla f(x) \doteq (f_{x_1}(x), ..., f_{x_n}(x)) \tag{3.23}$$

proprietà

$$\nabla(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha \nabla f(x_0) + \beta \nabla g(x_0) \tag{3.24}$$

$$\nabla(fg)(x_0) = g(x_0)\nabla f(x_0) + f(x_0)\nabla g(x_0) \tag{3.25}$$

$$\nabla(\frac{f}{g})(x_0) = \frac{g(x_0)\nabla f(x_0) - f(x_0)\nabla g(x_0)}{g^2(x_0)} \text{ se } g(x_0) \neq 0 \tag{3.26}$$

[4] analisi 1 pag 207
[5] pagina 313 analisi 1

regolarità

- **n=1** f derivabile $\Rightarrow$
  - f continua
  - in un intorno di x_0 il grafico di f è ben approssimato da una retta tangente:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0 \tag{3.27}$$

- **n $\geq$ 2** l'esistenza di tutte le derivate parziali o perfino di tutte le derivate direzionali in x_0 non implica la continuità di f in x_0

è necessario introdurre il concetto di differenziabilità

3.2.1 differenziabilità

[6] sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, diciamo che f è differenziabile in $x_0 \in A$ se $\exists$ un vettore $a \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - < a, h >}{||h||} = 0 \tag{3.28}$$

differenziale l'applicaziione lineare $L(h) =< a, h >$ si chiama *differenziale* di f in x_0 e si denota df_{x_0}

teorema sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile, A aperto, allora

- f è continua in x_0
- f derivabile in x_0 lungo ogni direzione v
- $D_v f(x_0) =< \nabla f(x_0), v >$

nota se f è differenziabile in x_0 possiamo scrivere

$$df_{x_0}(h) =< \nabla f(x_0), h >= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n \tag{3.29}$$

funzioni composte se f, g differenziabili in x_0 allora $\alpha f + \beta g,\ fg,\ \frac{f}{g}(g(x_0) \neq 0)$ sono differenziabili in x_0 e continuano a valere le proprietà del gradiente

osservazione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in x_0, $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ è differenziabile in x_0 e

$$\nabla(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0))\nabla f(x_0) \tag{3.30}$$

derivata funzioni composte siano g e $\underline{f}$ differenziabili

$$(g \circ \underline{f})'(t) =< \nabla g(\underline{f}(t)), \underline{f}'(t) > \tag{3.31}$$

teorema differenziale totale [7] sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ se in un intorno U di $x \in A$

- f è derivabile in U
- tutte le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono continue in x

$\Rightarrow f$ è differenziabile in x

3.2.2 teoremi in $\mathbb{R}^n$

teorema di Rolle [8] sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e limitato ($\neq \emptyset$), sia $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ continua su $\overline{A}$, differenziabile su A

$$f \text{ costante su } \partial A \Rightarrow \exists\ \underline{x_0} \in A \mid \nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0} \tag{3.32}$$

[6] pagina 317 analisi 1
[7] pag 320 analisi 1
[8] dimostrazione lezione 13 pag 143

teorema di Lagrange [9] sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, siano $x, y \in A,\ x \neq y \mid [x, y] \subseteq A$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua su [x,y] e differenziabile su $]x, y[$ allora

$$\exists\, \xi \in]x, y[\ t.c.\ f(y) - f(x) = < \nabla f(\xi), y - x > = D_v f(\xi)||y - x|| \tag{3.33}$$

corollario sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, connesso per poligonali. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile

$$\nabla f(x) = 0\ \forall x \in A \Rightarrow f \text{ costante su } A \tag{3.34}$$

teorema derivazione funzioni composte sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è derivabile in x_0 (ogni f_i lo è), se $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $y_0 = f(x_0)$ allora $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e

$$(g \cdot f)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial f}(f(x_0)) f_i'(x_0) = < \nabla g(f(x_0)), f'(x_0) > \tag{3.35}$$

3.2.3 integrali

integrali dipendenti da un parametro sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)dx,\ g : [c, d] \to \mathbb{R} \tag{3.36}$$

continuità sia $f \in C([a, b] \times [c, d])$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ definita come sopra (3.36) $\Rightarrow g$ continua su $[c, d]$

derivabilità siano f, g come nella proposizione precedente, se f ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ continua in $[a, b] \times [c, d] \Rightarrow g$ è derivabile su $[c, d]$ e

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx \tag{3.37}$$

3.2.4 derivate di ordine superiore

sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A un aperto, f derivabile in $A \Rightarrow$ in A esistiono $\frac{\partial f}{\partial x_i}\ \forall i = 1, ..., n,\ \forall x \in A$
se per qualche i, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è a sua volta derivabile, chiameremo derivate seconde di f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})\ \forall j = 1, ..., n \tag{3.38}$$

classe C^k scriviamo $f \in C^k(A)$ se f possiede tutte le derivate parziali fino all'ordine k (incluso) inoltre

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A) \tag{3.39}$$

teorema di Schwarz [10] sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $\underline{x_0} = (x_0, y_0) \in A$, sia $f : A \to \mathbb{R}$ t.c.

- esistono $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in un intorno U di $\underline{x_0}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sono continue in $\underline{x_0}$

allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{x_0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underline{x_0}) \tag{3.40}$$

osservazione il teorema di Schwarz si estende a n variabili e ad ordini superiori

matrice hessiana sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiamo

$$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\underline{x}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\underline{x}) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{x}) \end{pmatrix} \in M_{n \times n} \tag{3.41}$$

[9] dimostrazione lezione 13 pag 147
[10] lezione 15 pag 157

corollario sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A) \Rightarrow H_f(\underline{x})$ è simmetrica

operatore di laplace si dice operatore di laplace

$$\triangle : C^2(A) \to \mathbb{R}, \triangle = \nabla^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{3.42}$$

funzione armonica una funzione f si dice armonica su $A \Leftrightarrow \triangle f = 0$ su A

3.2.5 foruma di taylor in più variabili

polinomio di taylor [11] sia $\underline{x_0} = (x_0, y_0)$, $\underline{h} = (h, k)$

$$P_{n,\underline{x_0}}(\underline{h}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^k \Big|_{(x_0,y_0)} f \tag{3.43}$$

$$= f(x_0, y_0) + ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})\Big|_{(x_0,y_0)} f) + \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2\Big|_{(x_0,y_0)} f + \cdots + \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n\Big|_{(x_0,y_0)} f \tag{3.44}$$

teorema resto di Lagrange sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^n(A)$, $\underline{x_0} = (x_0, y_0)$, $\underline{h} = (h, k) \in A$ tali che $[\underline{x_0}, \underline{x_0} + \underline{h}] \subset A \Rightarrow \exists \vartheta \in]0, 1[$ $t.c.$

$$f(\underline{x_0} + \underline{h}) = P_{n-1,\underline{x_0}}(\underline{h}) + R_n(\underline{h}) \tag{3.45}$$

dove

$$R_n(\underline{h}) = \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n\Big|_{(x_0+\vartheta h,\ y_0+\vartheta k)} f \tag{3.46}$$

proposizione nelle stesse ipotesi del teorema sopra abbiamo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_n(\underline{h})}{||\underline{h}||^{n-1}} = 0 \tag{3.47}$$

teorema resto di Peano sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^n(A)$, $\underline{x_0} \in A$, $\underline{x_0} + \underline{h} \in A$ $t.c.$ $[\underline{x_0}, \underline{x_0} + \underline{h}] \subset A$ allora

$$f(\underline{x_0} + \underline{h}) = P_{n,\underline{x_0}}(\underline{h}) + o(||\underline{h}||^n) \text{ per } \underline{h} \to \underline{0} \tag{3.48}$$

3.2.6 forme quadratiche

[12] una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ è un polinomio omogeneo di grado 2 della forma

$$Q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \;\; a_{ij} \in \mathbb{R},\ \underline{h} \in \mathbb{R}^n \tag{3.49}$$

NB: si può sempre supporre $a_{ij} = a_{ji}$

matrice associata ad ogni forma quadratica è associata una matrice *simmetrica* $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{n\times n}$ t.c.

$$Q(\underline{h}) = \underline{h}^t A \underline{h} \tag{3.50}$$

$$Q(\underline{h}) =< A\underline{h}, \underline{h} > \tag{3.51}$$

definizioni una forma quadratica $Q(\underline{h})$ si dice

- definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow Q(\underline{h}) > 0\ \forall \underline{h} \neq 0\ (Q(\underline{h}) < 0))$
- semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow Q(\underline{h}) \geq 0\ \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n\ (Q(\underline{h}) \leq 0) \wedge \exists h \neq 0\ t.c.\ Q(\underline{h}) = 0$
- indefinita $\Leftrightarrow \exists \underline{h}^+, \underline{h}^- \in \mathbb{R}^n\ t.c.\ Q(\underline{h}^+) > 0 \wedge Q(\underline{h}^-) < 0$

[11] lezione 16
[12] nota lezione 17

teorema caratterizzazione forme quadratiche

- una forma quadratica è definita positiva $\Leftrightarrow \exists m > 0 \; t.c. \; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \geq m ||\underline{h}||^2 \; \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$
- una forma quadratica è definita negativa $\Leftrightarrow \exists m > 0 \; t.c. \; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \leq -m ||\underline{h}||^2 \; \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$

proposizione $n = 2, \; Q(\underline{h}) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$ è

- definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow det(A) > 0 \wedge a > 0 \; (a < 0)$
- semi definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow det(A) = 0 \wedge a > 0 \; (a < 0)$
- indefinita $\Leftrightarrow det(A) < 0$

criterio di Sylvester $n \geq 2, \; Q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \; \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ è

- definita positiva $\Leftrightarrow det(A_k) > 0 \; \forall k \; 1, \ldots, n$
- definita negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \; det(A_k) > 0 \; \forall k \; 1, \ldots, n$

corollario $n \geq 2, \; Q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \; \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ è

- semidefinita positiva $\Leftrightarrow det(A_k) \geq 0 \; \forall k \; 1, \ldots, n$
- semidefinita negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \; det(A_k) \geq 0 \; \forall k \; 1, \ldots, n$

autovalori $Q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \; \underline{h} \in \mathbb{R}^n$

- definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono positivi (negativi)
- semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono ≥ 0 (≤ 0) ed almeno uno di essi è nullo
- indefinita $\Leftrightarrow \exists$ due autovalori di segno opposto

3.2.7 massimi e minimi

punto di estremo i punti di massimo o minimo sono detti punti di estremo

proposizione sia x_0 un punto di estremo per f in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora si verifica uno dei seguenti casi

- **(punto critico)** $\underline{x_0}$ è un punto interno ad A, $\exists \nabla f(\underline{x_0}), \nabla f(\underline{x_0} = \underline{0})$
- **(punto singolare)** $\underline{x_0}$ è un punto interno ad A, $\nexists \nabla f(\underline{x_0})$
- $\underline{x_0} \in \delta A$

punto di sella $\underline{x_0} \in A$ punto di sella $\Leftrightarrow \underline{x_0}$ punto critico nè di massimo nè di minimo locale per f

$$x_0 \text{ punto di sella} \Leftrightarrow \forall \text{ intorno } U \text{ di } x_0 \; \exists \underline{x_1}, \underline{x_2} \in U \; t.c. \; f(\underline{x_1}) > f(\underline{x_0}) \wedge f(\underline{x_2}) < f(\underline{x_0}) \tag{3.52}$$

teorema (condizione necessaria) sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; f \in C^2$ in un intorno di $B_r(\underline{x_0})$, $\underline{x_0} \in \overset{\circ}{A}$, $Q(\underline{h}) = \underline{h}^t H_f(\underline{x_0}) \underline{h}$

$$\underline{x_0} \text{ punto di minimo} \Rightarrow Q(\underline{h}) \geq 0 \tag{3.53}$$

$$\underline{x_0} \text{ punto di massimo} \Rightarrow Q(\underline{h}) \leq 0 \tag{3.54}$$

teorema (condizione sufficente) [13] sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; f \in C^2$ in un intorno di $\underline{x_0} \in \overset{\circ}{A}$, $\underline{x_0}$ punto critico per f, se $Q(\underline{h}) = \underline{h}^t H_f(\underline{x_0}) \underline{h}$ è

- definita positiva (negativa) $\Rightarrow \underline{x_0}$ è un punto di minimo (massimo) locale stretto
- indefinita $\Rightarrow \underline{x_0}$ è un punto di sella

[13] dimostrazione lezione 18 pag 181

condizione sufficente in n=2 sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f \in C^2$ in un intorno di $\underline{x_0} \in \mathring{A}$, supponiamo $\underline{x_0}$ punto critico per f, $H_f(x_0, y_0)$ la matrice Hessiana definita

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

- $det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ allora

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ [equivalentemente } f_{yy}(x_0, y_0) > 0] \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di minimo locale stretto} \tag{3.56}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ [equivalentemente } f_{yy}(x_0, y_0) < 0] \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di massimo locale stretto} \tag{3.57}$$

- $det(H_f(x_0, y_0)) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di sella
- se $det(H_f(x_0, y_0)) = 0$ non possiamo concludere nulla

3.3 funzioni a valori vettoriali

$$\underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{pmatrix},\ n, m \geq 1 \tag{3.58}$$

precedentemente abbiamo già visto la definizione di *limite* e di *continuità*

osservazioni sia $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A, sia $\underline{l} \in \mathbb{R}^m$ allora

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l} \Leftrightarrow \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f_i(\underline{x}) = l_i\ \forall i = 1, \ldots, m \tag{3.59}$$

$$\underline{f} \text{ continua in } \underline{x_0} \Leftrightarrow \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x_0}) \Leftrightarrow \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x_0})\ \forall i = 1, \ldots, m \tag{3.60}$$

$$\underline{f} \text{ continua in } A \Leftrightarrow f_i : A \to \mathbb{R} \text{ continua in } A\ \forall i = 1, \ldots, m \tag{3.61}$$

curva definiamo *curva in* $\mathbb{R}^m$ ogni funzione <u>continua</u> $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^m$ con I intervallo contenuto in $\mathbb{R}$

arco di curva se I è chiuso e limitato ($I = [a, b]$) $\underline{r}$ è definito *arco di curva*

sostegno della curva sia $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^m$ una curva, si dice *sostegno della curva* l'immagine di $\underline{r}$

$$\underline{r}(I) = \{\underline{r}(t) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^m\} \tag{3.62}$$

curva cartesiana sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice curva cartesiana

$$\underline{r}(t) = (t, f(t))\ t \in [a, b] \tag{3.63}$$

derivata sia $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^m$ una curva, sia $t_0 \in I$ chiamiamo *derivata di* $\underline{r}$ *in* t_0

$$\underline{r}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^m \tag{3.64}$$

osservazione

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{r}'(t_0) = \begin{pmatrix} r_1'(t_0) \\ \vdots \\ r_m'(t_0) \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

interpretazione geometrica la derivata $\underline{r}'(t_0)$ è interpretabile come **vettore tangente** alla curva nel punto $\underline{r}(t_0)$

retta tangente l'equazione della retta tangente alla curva $\underline{r}$ in $\underline{r}(t_0)$ ha l'equazione

$$\xi(s) = \underline{r}(t_0) + \underline{r}'(t_0)(s - t_0),\ s \in \mathbb{R} \tag{3.66}$$

campi di vettori un campo di vettori in una regione $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è una funzione $\underline{\varphi} : A \to \mathbb{R}^n$

superfici parametriche chiamiamo superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$ una funzione $\underline{\phi} : A \to \mathbb{R}^3$ tale che $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, l'immagine di ϕ è detta **sostegno** di ϕ definito come $\sum = \underline{\phi}(A)$.
Ogni ϕ avente sostegno $\sum$ è detta **rappresentazione parametrica** di $\sum$

3.3.1 coordinate

coordinate polari [14]

$$\underline{\phi} : [0, +\infty[\times[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \underline{\phi}(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \tag{3.67}$$

coordinate sferiche (polari nello spazio)

$$\underline{\phi} : [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ \underline{\phi}(\rho, \theta, \gamma) = \begin{pmatrix} \rho\sin\gamma\cos\theta \\ \rho\sin\gamma\sin\theta \\ \rho\cos\gamma \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

coordinate cilindriche

$$\underline{\phi} : [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \underline{\phi}(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

3.3.2 differenziabilità per funzioni in più variabili

sia $\underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sia $\underline{x_0} \in \overset{\circ}{A}$, $\underline{f}$ si dice *differenziabile* in $\underline{x_0}$ se $\exists$ una applicazione lineare $\underline{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{\underline{f}(\underline{x_0} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x_0}) - \underline{L}(\underline{h})}{||\underline{h}||} = \underline{0} \tag{3.70}$$

NB: posto $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m)$, $\underline{L} = (L_1, \dots, L_m)$ la 3.70 equivale a

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{f_i(\underline{x_0} + \underline{h}) - f_i(\underline{x_0}) - L_i(\underline{h})}{||\underline{h}||} = 0\ \forall i = 1, \dots, m \tag{3.71}$$

sappiamo $L_i(\underline{h}) = df_i(\underline{x_0})(\underline{h}) =< \nabla f_i(\underline{x_0}), \underline{h} >$, chiamiamo J la matrice associata ad $\underline{L}$

$$J = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\underline{x_0}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\underline{x_0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

J è detta **matrice Jacobiana** di $\underline{f}$ in $\underline{x_0}$ e si indica con $J_{\underline{f}}(\underline{x_0}),\ D\underline{f}(\underline{x_0}),\ J\underline{f}(\underline{x_0})$ inoltre,

$$< d\underline{f}(\underline{x_0}), \underline{h} >= J_{\underline{f}}(\underline{x_0})\underline{h} \tag{3.73}$$

proposizione la matrice Jacobiana si dice **singolare** $\Leftrightarrow det(J) = 0$

funzioni composte sia $\underline{f} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{g} : F \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $\underline{f}(E) \subseteq F$, siano $\underline{x_0} \in \overset{\circ}{E}$, $\underline{y_0} = \underline{f}(\underline{x_0}) \in \overset{\circ}{F}$
$\underline{f}$ differenziabile in $\underline{x_0}$, $\underline{g}$ differenziabile in $\underline{y_0} \Rightarrow \underline{g} \circ \underline{f}$ è differenziabile in x_0 inoltre,

$$d(\underline{g} \circ \underline{f})_{\underline{x_0}} = (d\underline{g})_{\underline{f}(\underline{x_0})} \circ d\underline{f}_{\underline{x_0}} \tag{3.74}$$

sostituendo in questa equazione le matrici associate otteniamo:

$$J_{\underline{g}\circ\underline{f}}(\underline{x_0}) = J_{\underline{g}}(\underline{f}(\underline{x_0})) \cdot J_{\underline{f}}(\underline{x_0}) \tag{3.75}$$

3.3.3 rette e piani tangenti

retta tangente ad una curva di livello sia $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $g \in C^1(A)$, sia C una curva di livello di g, $C : g(x, y) = c$, $\underline{x_0} = (x_0, y_0) \in C$, $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, la retta *tangente* a C in $\underline{x_0}$ è data dall'equazione

$$g_x(\underline{x_0})(x - x_0) + g_y(\underline{x_0})(y - y_0) = 0 \tag{3.76}$$

[14] lezione 21 pag 209

piano tangente ad una superficie di livello sia $g : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, A aperto, $g \in C^1(A)$, sia C una curva di livello di g, $\Sigma_c : g(x,y,z) = c$, $\underline{x_0} = (x_0, y_0, z_0) \in C$, $\nabla g(\underline{x_0}) \neq 0$, il piano *tangente* a C in $\underline{x_0}$ è dato dall'equazione

$$g_x(\underline{x_0})(x - x_0) + g_y(\underline{x_0})(y - y_0) + g_z(\underline{x_0})(z - z_0) = 0 \tag{3.77}$$

spazio tangente sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, sia Σ_c la superficie di livello di g, sia $\underline{x_0} = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma_c$, sia g differenziabile in $\underline{x_0}$ allora chiamiamo ($\boldsymbol{T_{\underline{x_0}}\Sigma_c}$) *spazio tangente a* Σ_c in $\underline{x_0}$ l'insieme dei vettori tangenti a curve su Σ_c passanti per $\underline{x_0}$

3.3.4 teorema di Dini

[15] sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $g : A \to \mathbb{R}$, supponiamo

- g e $\frac{\partial g}{\partial y}$ continue in A
- $(x_0, y_0) \in A,\ g(x_0, y_0) = 0,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, U$ intorno di x_0 e V intorno di y_0 con $U \times V \subseteq A$ e $\exists!\ \varphi : U \to V$ continua t.c.

$$y_0 = \varphi(x_0),\ g(x, \varphi(x)) = 0\ \forall x \in U \tag{3.78}$$

inoltre $\frac{\partial g}{\partial x}$ è continua in $A \Rightarrow$

$$\varphi \in C^1(U) \wedge \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \forall x \in U \tag{3.79}$$

infine si nota $g \in C^k(A) \Rightarrow \varphi \in C^k(U),\ k \in \mathbb{N}$

definizione la funzione $\varphi : U \to \mathbb{R}$ si dice **funzione implicita** *(funzione definita implicitamente)* in U dall'equazione $g(x,y) = 0$

teorema (estensione Dini $\mathbb{R}^3$) sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$, sia $g : A \to \mathbb{R}$ continua e $\frac{\partial g}{\partial z}$ continua su A supponiamo

- $g(x_0, y_0, z_0) = 0,\ \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, U$ intorno di x_0, y_0 e V intorno di z_0 e $\exists!\ \varphi : U \to V$ t.c.

$$\forall (x,y,z) \in U \times V\ g(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y) \tag{3.80}$$

inoltre $g \in C^1(A) \Rightarrow \forall (x,y) \in U$

$$\varphi_x(x,y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \ \wedge\ \varphi_y(x,y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \tag{3.81}$$

infine $g \in C^k(A) \Rightarrow \varphi \in C^k(U),\ k \in \mathbb{N}$

teorema (estensione Dini funzioni vettoriali) sia $\underline{g} \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$, $A \subseteq \mathbb{R}^4$ aperto, $\underline{g}(\underline{x_0}, \underline{y_0}) = 0$, $rk(J_{\underline{g}}^{\underline{y}}(\underline{x_0}, \underline{y_0})) = 2$ allora
$\exists U$ intorno di $\underline{x_0}$, V intorno di $\underline{y_0}$ e $\exists!\ \underline{\varphi} : U \to V$ continua t.c. $U \times V \subseteq A$ e $\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in U \times V$

$$\underline{g}(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{\varphi}(\underline{x}) \tag{3.82}$$

inoltre $\underline{g} \in C^1(A; \mathbb{R}^2) \Rightarrow \underline{\varphi} \in C^1(U)$ e

$$J_{\underline{\varphi}}(\underline{x}) = -[J_{\underline{g}}^{\underline{y}}(\underline{x}, \underline{\varphi}(\underline{x}))]^{-1} J_{\underline{g}}^{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{\varphi}(\underline{x})),\ \forall x \in U \tag{3.83}$$

teorema di Dini generale sia $\underline{g} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, A aperto, supponiamo

- $\underline{g} \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$
- $\underline{g}(\underline{x_0}, \underline{y_0}) = 0$ e $rk(J_{\underline{g}}^{\underline{y}}(\underline{x_0}, \underline{y_0})) = m$

$\Rightarrow \exists\, U$ intorno di $\underline{x_0} = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$, V intorno di $\underline{y_0} = (y_{01}, \ldots, y_{0m})$ e $\exists!\ \underline{\varphi} : U \to V$ continua t.c. $U \times V \subseteq A$ e $\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in U \times V$

$$\underline{g}(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{\varphi}(\underline{x}) \tag{3.84}$$

inoltre vale

$$J_{\underline{\varphi}}(\underline{x}) = -[J_{\underline{g}}^{\underline{y}}(\underline{x}, \underline{\varphi}(\underline{x}))]^{-1} J_{\underline{g}}^{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{\varphi}(\underline{x})),\ \forall x \in U \tag{3.85}$$

[15] dimostrazione nella lezione 24

3.3.5 invertibilità

teorema di invertibilità locale (n=1) sia $f \in C^1(]a,b[)$, $x_0 \in]a,b[$, $f'(x_) \neq 0 \Rightarrow \exists W \subset]a,b[$ intorno di x_0, V intorno di $y_0 = f(x_0)$ t.c.

$$f : W \to V \text{ è biunivoca t.c. } f^{-1} \in C^1(V) \wedge (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \forall y \in V \tag{3.86}$$

diffeomorfismo locale f si dice *diffeomorfismo locale* in $x_0 \Leftrightarrow f$ biunivoca $\wedge f \in C^1 \wedge\ f^{-1} \in C^1$

osservazione si dice **omomorfismo locale** se si ha solo continuità

teorema invertibilità globale n=1 sia I intervallo, $f \in C(I)$, f localmente invertibile in un intorno di x_0 $\forall x_0 \in I \Rightarrow$

$$f : I \to f(I) \text{ è biunivoca} \Rightarrow f \text{ globalmente invertibile} \tag{3.87}$$

teorema di Cramer (invertibilità globale) sia $A \in M^{n\times n}$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ t.c. $L\underline{x} = A\underline{x} \Rightarrow$

$$L \text{ biunivoca } \Leftrightarrow det(A) \neq 0 \tag{3.88}$$

ed in questo caso $L^{-1}\underline{y} = A^{-1}\underline{y}$

teorema inversione locale n=2 sia $\underline{f} \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x_0} \in A$, $\underline{y_0} = \underline{f}(\underline{x_0})$, $rk(J_{\underline{f}}(\underline{x_0})) = 2 \Rightarrow$ $\exists\, W$ intorno di $\underline{x_0}$, V intorno di $\underline{y_0}$ t.c.

$$\underline{f} : W \to V \text{ è biunivoca} \tag{3.89}$$

inoltre $\underline{f}^{-1} \in C^1(V, W)$ e

$$J_{\underline{f}^{-1}}(\underline{y}) = [J_{\underline{f}}(\underline{f}^{-1}(\underline{y}))]^{-1}\ \forall \underline{y} \in V \tag{3.90}$$

(il teorema si può estendere ad un qualunque numero di variabili)

3.3.6 moltiplicatori di Lagrange

sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, $g : A \to \mathbb{R}$, $g \in C^1$, $M = \{\underline{x} \in A : g(\underline{x}) = 0\}$

punto stazionario (critico) sia $\underline{x_0} \in M = \{\underline{x} \in A : g(\underline{x}) = 0\}$, diciamo $\underline{x_0}$ *punto stazionario (o critico)* per f su M se comunque presa una curva $\underline{r}$ di classe C^1 su M passante per $\underline{x_0}$

$$\underline{r} :]a,b[\to M, t_0 \in]a,b[,\ \underline{r}(t_0) = \underline{x_0} \Rightarrow \frac{d}{dt} f(\underline{r}(t))|_{t=t_0} = 0 \tag{3.91}$$

teorema siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, A aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ di classe C^1, sia $\underline{x_0}$ un punto regoalre di M $(\nabla \underline{g}(\underline{x_0}) \neq 0)$ allora

$$\underline{x_0} \text{ punto estremo di } f\text{su M} \Rightarrow \underline{x_0} \text{ è un punto stazionario per } f \text{ su M} \tag{3.92}$$

teorema moltiplicatore di Lagrange siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (n=2,3) di classe C^1, A aperto, sia $\underline{x_0} \in M$ con $g(\underline{x_0}) \neq 0$ il punto $\underline{x_0}$ è punto stazionario per f su $M \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\nabla f(\underline{x_0}) = \lambda \nabla g(\underline{x_0}) \tag{3.93}$$