Analisi A modulo 1

Martino Papa

December 28, 2021

Contents

Chapter 1

Introduzione

1.1 Insiemistica

proprietà di denstà

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ x < y \Rightarrow \exists \text{ infiniti } z \in \mathbb{Q}\ t.c\ x < z < y \tag{1.1}$$

proprietà di archimede

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ x, y > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ t.c\ y \leq nx \tag{1.2}$$

limitatezza sia $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$

minorante m si dice minorante se

$$m \in \mathbb{R}\ t.c.\ \forall x \in A, m \leq x \tag{1.3}$$

se m esiste A si dice **limitato inferiormente**

maggiorante M si dice maggiorante se

$$M \in \mathbb{R}\ t.c.\ \forall x \in A, M \geq x \tag{1.4}$$

se M esiste A si dice **limitato superiormente**

limitato A si dice limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente

minimo $m \in \mathbb{R}$ si dice minimo di A se

- m minorante
- $m \in A$

massimo $m \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se

- m maggiorante
- $m \in A$

estremo inferiore se A limitato inferiormente definisco

$$inf(A) \doteq max\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ è minorante di } A\} \tag{1.5}$$

estremo superiore se A limitato superiormente definisco

$$sup(A) \doteq max\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ è maggiorante di } A\} \tag{1.6}$$

seno e coseno

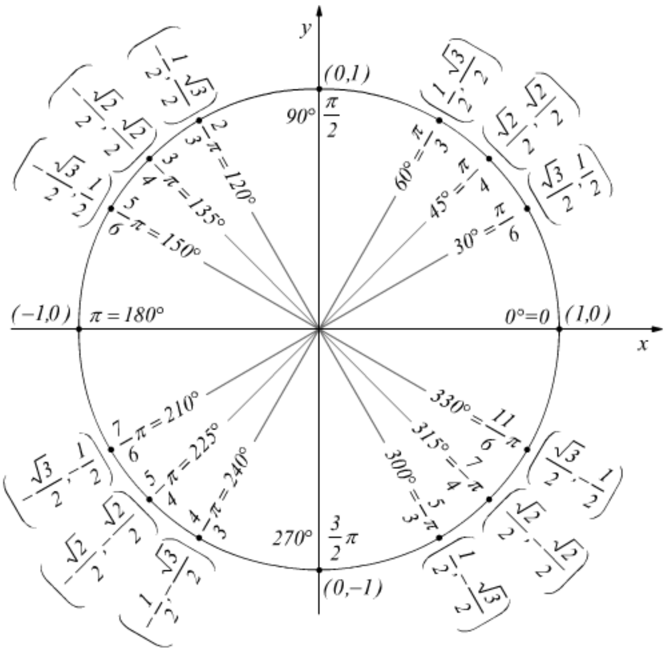

Figure 1.1: circonferenza di raggio unitario

1.2 Numeri complessi

consideriamo $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ e definiamo 2 operazioni $(+,\cdot)$:

- $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

$\mathbb{C} \simeq \boldsymbol{(\mathbb{R}^2, +, \cdot)}$ è un campo con le operazioni definite sopra

- $(a,b) + (0,0) = (a,b)$ (neutro somma)
- $(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$ (inverso somma)
- $(a,b) \cdot (1,0) = (a,b)$ (neutro prodotto)
- $(a,b) \cdot (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (1,0)$ (inverso prodotto)

definisco $i \doteq (0,1)$ e noto $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$
possiamo scrivere $(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + \boldsymbol{(0,1)} \cdot (b,0) \Rightarrow$

$$z = (a,b) = a + \boldsymbol{i}b \tag{1.7}$$

dove a è detta **parte reale** e b **parte immaginaria**

forma trigonometrica $z \in \mathbb{C},\ z = a + ib$
definisco $\theta = arg(z),\ |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ dove

$$a = |z|\cos\theta,\ b = |z|\sin\theta \tag{1.8}$$

ora possiamo porre

$$z = |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) \tag{1.9}$$

forma esponenziale

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{1.10}$$

coniugato sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ diremo coniugato di z

$$\overline{z} = a - ib \tag{1.11}$$

reciproco il reciproco di un un numero complesso $z = a + bi$ è z^{-1} *t.c.* $z \cdot z^{-1} = 1$ e si calcola

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \tag{1.12}$$

operazioni nei numeri complessi

moltiplicazione

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(arg(z_1) + arg(z_2) + 2k\pi) + i\sin(arg(z_1) + arg(z_2) + 2k\pi)] \tag{1.13}$$

divisione

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(arg(z_1) - arg(z_2) + 2k\pi) + i\sin(arg(z_1) - arg(z_2) + 2k\pi)] \tag{1.14}$$

potenza

$$z^n = z^n[\cos(n\ arg(z) + 2k\pi) + i\sin(n\ arg(z) + 2k\pi))] \tag{1.15}$$

radice n-esima, sia $w \in \mathbb{C},\ n \geq 2$

- se $w = 0$ la sola radice n-esima di w è 0
- se $w \neq 0$ w ha n radici n-esime distinte

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}[\cos(\frac{arg(w)}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{arg(w)}{n} + \frac{2k\pi}{n})],\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.16}$$

osservazione

$$-1 = e^{\pi i} \tag{1.17}$$

1.3 Serie numeriche

una serie numerica è la somma formale degli elementi di $(a_n)_n$

condizione necessaria per la convergenza

$$\sum a_n \text{ convergente } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \tag{1.18}$$

serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},\ q \neq 0 \tag{1.19}$$

convergenza

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases} \tag{1.20}$$

serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log(n))^\beta} = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > 1,\ \beta \in \mathbb{R} \\ < +\infty & \text{se } \alpha = 1,\ \beta > 1 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.21}$$

serie telescopica di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \tag{1.22}$$

dimostrazione: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, si può notare che tutti i termini eccetto $1 - \frac{1}{n+1}$ si semplificano. □

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \tag{1.23}$$

in generale le serie telescopiche sono della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n - b_{n+1} \text{ e convergono a } s_n = b_0 - b_{n+1} \tag{1.24}$$

somma di serie

- $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergono $\Rightarrow \sum(a_n + b_n)$ converge
- $\sum a_n = \pm\infty$, $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \Rightarrow \sum(a_n + b_n) = \pm\infty$
- $\sum a_n = +\infty$, $\sum b_n = -\infty \Rightarrow$ non si può concludere nulla sulla convergenza di $\sum(a_n + b_n)$

1.3.1 Criteri di convergenza

criterio del confronto siano $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $\overline{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \geq \overline{n}$ allora:

- $\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$
- $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$

criterio del confronto asintotico siano $(a_n)_n$, $(b_n)_n > 0$ t.c.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[\tag{1.25}$$

allora $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ hanno lo stesso carattere

criterio della radice n-esima sia $(a_n)_n > 0$ t.c.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty[\tag{1.26}$$

allora:

- $l < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$
- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

criterio del rapporto sia $(a_n)_n > 0$

$$\lim_{n\to 0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty[\tag{1.27}$$

allora:

- $l < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$
- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

criterio convergenza assoluta sia $(a_n)_n$ una successione qualsiasi

$$|\sum a_n| \leq \sum |a_n| \tag{1.28}$$

$$\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \tag{1.29}$$

criterio di Leibniz sia $(a_n)_n$ t.c.

- $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ è convergente} \tag{1.30}$$

1.3.2 Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1.31}$$

insieme di convergenza

$$E = \{x \in \mathbb{R}\ t.c.\ \text{la serie converge}\} \tag{1.32}$$

raggio di convergenza

$$r = \sup_{x \in E} |x - x_0|,\ r \in [0, +\infty[\tag{1.33}$$

- $|x - x_0| < r \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la serie converge assolutamente
- $|x - x_0| > r \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la serie non converge

teorema determinazione raggio convergenza sia una serie di potenze come nella 1.31, sia $l \in [0, +\infty]$

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{1.34}$$

oppure

$$l = \lim_{n \to +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \tag{1.35}$$

allora

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l = +\infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } 0 < l < +\infty \end{cases} \tag{1.36}$$

Chapter 2

Studio di funzione

limite sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A, sia $l \in \mathbb{R}^m$. Diremo che l è limite di $f(x)$, per $x \to x_0$ e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{2.1}$$

se si verificano queste due condizioni equivalenti:

- $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0\ t.c\ \forall x \in A,\ 0 < ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - l|| < \epsilon$
- $\forall$ intorno V di l $\exists$ un intorno U di x_0 $t.c.$ $\forall x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

proprietà

- il limite di una funzione (se esiste) è unico
- $\lim_{x \to x_o}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_f + \beta l_g,\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

continuità [1] sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sia $x_0 \in A$

- se x_0 è un punto isolato allora f si dice continua in x_0
- se x_0 è punto di accumulazione per A allora f si dice continua in $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{2.2}$$

- f si dice continua in A $\Leftrightarrow$ è continua in tutti i punti di A

teorema di composizione sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x_0$ punto di accumulazione per A, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e g continua in $l \Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l) \tag{2.3}$$

corollario

- La somma di funzioni continue è una funzione continua
- La composizione di funzioni continue è una funzione continua

teorema di Weierstrass

Sia [a,b] $\subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato non vuoto e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua allora:

f(x) ammette (almeno) un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto nell'intervallo [a,b]

[1] pagina 199 libro analisi 1

2.1 Calcolo differenziale

derivata sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$ definiamo

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \doteq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.4}$$

- se $f'(x_0)$ $\exists$ finito diremo che f è derivabile in x_0
- se f è derivabile $\forall x \in I$ diremo f derivabile in I

retta tangente al grafico sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0, la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.5}$$

teorema f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

algebra delle derivate

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) + f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) - f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{g^2(x)} \tag{2.8}$$

derivata funzioni composte siano I, J intervalli di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R},\ x_0 \in I, f(I) \subset J,\ g : J \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0 e g derivabile in $y_0 = f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \tag{2.9}$$

derivata funzione inversa sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua, strettamente monotona. Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora

$$f^-1 : f(I) \to \mathbb{R} \text{ è derivabile in } y_0 = f(x_0)$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}y_0)} \tag{2.10}$$

differenziale sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, se $\exists A \in \mathbb{R}$ t.c

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0 \tag{2.11}$$

allora f si dice differenziabile in x_0 e definiamo differenziale di f in x_0 la funzione

$$df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ df_{x_0}(h) \doteq Ah \tag{2.12}$$

definizione punto critico sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$, f derivabile in x_0

$$x_0 \text{ punto critico} \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \tag{2.13}$$

teorema di Fermat sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$, f derivabile in x_0

$$x_0 \text{ punto di massimo (minimo)} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \tag{2.14}$$

teorema di Rolle sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- f continua su $[a, b]$
- f derivabile su $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow \exists c \in]a, b[\ t.c.\ f'(c) = 0 \tag{2.15}$$

teorema di Lagrange sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- f continua su $[a, b]$
- f derivabile su $]a, b[$

$$\Rightarrow \exists c \in]a, b[\; t.c. \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{2.16}$$

teorema di Cauchy sia $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- f, g continua su $[a, b]$
- f, g derivabile su $]a, b[$

$$\Rightarrow \exists c \in]a, b[\; t.c. \; (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{2.17}$$

osservo: se $g(a) \neq g(b), \; g'(c) \neq 0$ allora si può riscrivere l'equazione sopra come

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{2.18}$$

teorema di monotonia sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile allora

$$f'(x) \geq (\leq) \; 0 \text{ su }]a, b[\Leftrightarrow f \text{ è crescente (decrescente) su }]a, b[\tag{2.19}$$

$$f'(x) > (<) \; 0 \text{ su }]a, b[\Rightarrow f \text{ è strettamente crescente (decrescente) su }]a, b[\tag{2.20}$$

NB: per f strettamente decrescente non vale "$\Leftarrow$"

funzione convessa sia $f : I \to \mathbb{R}$, f si dice (strettamente) convessa in I se

$$f(x)(<) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = s(x) \; \forall a, b \in I, \; a \leq x \leq b \tag{2.21}$$

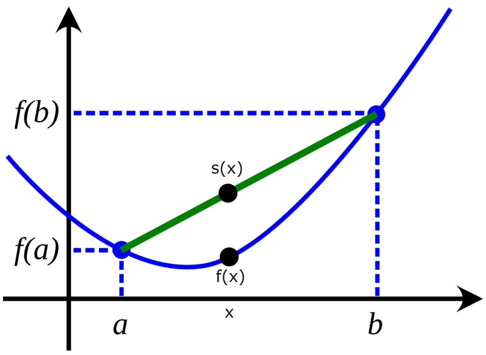

Figure 2.1: funzione convessa

funzione concava

$$f \text{ (strettamente) concava su } I \Leftrightarrow -f \text{ si dice (strettamente) convessa su } I$$

teorema se f è derivabile su $]a, b[$ le seguenti affermazioni sono equivalenti

- f è (strettamente) convessa in $]a, b[$
- $\frac{df}{dx}$ è (strettamente) crescente in $]a, b[$
- $\forall x_0 \in]a, b[$ vale

$$f(x)(>) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \; \forall x \in]a, b[, x \neq x_0 \tag{2.22}$$

teorema sia $f \in C^2(]a,b[$ allora

$$f \text{ convessa in }]a,b[\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \; \forall x \in]a,b[\tag{2.23}$$

$$f''(x) > 0 \; \forall x \in]a,b[\Rightarrow f \text{ strettamente convessa in }]a,b[\tag{2.24}$$

punto di flesso sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}, \; x_0 \in]a,b[$ punto di derivabilità oppure $f'(x_0) = \pm\infty$ allora il punto x_0 si dice punto di flesso per f se $\exists$ un intorno destro di x_0 in cui f è convessa (concava) e $\exists$ un intorno sinistro di x_0 in cui f è concava (convessa)

proposizione sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a,b[$, f è derivabile 2 volte in x_0

$$x_0 \text{ punto di flesso} \Rightarrow f''(x_0) = 0 \tag{2.25}$$

teorema de L'Hopital siano $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabili tali che

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0(\infty), \; \lim_{x\to a^+} g(x) = 0(\infty)$
- $g'(x) \neq 0$ su $]a,b[$
- $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

allora

$$g(x) \neq 0 \text{ su }]a,b[\;\text{ e }\; \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{2.26}$$

2.2 Polinomio di taylor

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{2.27}$$

resto di Peano sia $f : [x_0, x_0+\alpha]$ una funzione derivabile fino all'ordine $n-1$ nell'intervallo $[x_0, x_0+\alpha]$ e avente la derivata n-esima in $x_0 \Rightarrow$

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n) \text{ per } x \to x_0 \tag{2.28}$$

resto di Lagrange sia $f : [x_0, x_0+\alpha]$ una funzione derivabile fino all'ordine $n-1$ nell'intervallo $[x_0, x_0+\alpha]$ e avente la derivata n-esima in $]x_0, x_0+\alpha[$ allora $\forall x \in]x_0, x_0+\alpha[\; \exists c_x \in]x_0, x[$ *t.c.*

$$f(x) = P_{n-1,x_0}(x) + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-x_0)^n \tag{2.29}$$

sviluppi di taylor

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{t!} + 0(t^n) \tag{2.30}$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} + 0(t^{2n+2}) \tag{2.31}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + o(t^{2n+1}) \tag{2.32}$$

$$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 + o(t^5) \tag{2.33}$$

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5) \tag{2.34}$$

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \tag{2.35}$$

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5) \tag{2.36}$$

$$\log 1 + t = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n + o(t^n) \tag{2.37}$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + o(t^3) \tag{2.38}$$

2.3 Integrale secondo Riemman

sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, scegliamo $(n+1)$ punti nell'intervallo $[a,b]$ tali che $a < x_1 < \dots < x_n < b$, prendiamo $D = \{x_1, \dots, x_n\}$ ora definiamo

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x),\ M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x),\ 1 \leq i \leq n \tag{2.39}$$

ora costruiamo due somme

$$s(D,f) \doteq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),\ \text{somma inferiore di } f \text{ relativa a } D \tag{2.40}$$

$$S(D,f) \doteq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),\ \text{somma superiore di } f \text{ relativa a } D \tag{2.41}$$

proprietà

- $\forall$ suddivisione D di $[a,b]$

$$(\inf_{[a,b]} f)(b-a) \leq s(D,f) \leq S(D,f) \leq (\sup_{[a,b]} f)(b-a) \tag{2.42}$$

- $\forall$ suddivisione D_1, D_2 di $[a,b]$

$$D_1 \subset D_2 \Rightarrow s(D_1,f) \leq s(D_2,f) \leq S(D_2,f) \leq S(D_1,f) \tag{2.43}$$

- $\forall$ suddivisione D_1, D_2 di $[a,b]$

$$s(D_1,f) \leq S(D_2,f) \tag{2.44}$$

integrabilità secondo Riemman $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice **integrabile secondo Riemman** $\Leftrightarrow$

$$\sup_D s(D,f) = \inf_D S(D,f) \tag{2.45}$$

se questa equivalenza è rispettata definiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \sup_D s(D,f) = \inf_D S(D,f) \tag{2.46}$$

definamo inoltre $R([a,b])$ insieme delle funzioni integrabili secondo Riemman nell'intervallo $[a,b]$

teorema [2] sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata allora:

- f è Riemman integrabile su $[a,b]$
- $\forall \epsilon > 0 \exists$ una suddivisione D_ϵ di $[a,b]$ t.c.

$$S(D_\epsilon,f) - s(D_\epsilon,f) < \epsilon \tag{2.47}$$

- $\exists I \in \mathbb{R}$ *t.c.* $\forall \epsilon > 0\ \exists \sigma_\epsilon > 0$ t.c. $\forall$ suddivisione D_ϵ di $[a,b]$ con $|D_\epsilon| < \sigma_\epsilon$ e $\forall$ scelta di $\mu_i \in [m_i, M_i]$ vale

$$|\sigma(D,f) - I| < \epsilon,\ \text{dove } \sigma(D,f) \doteq \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i - x_{i-1}) \tag{2.48}$$

teorema sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

- f continua $\Rightarrow f \in R([a,b])$
- f monotona $\Rightarrow f \in R([a,b])$
- f limitata con un numero finito di punti di discontinuità $\Rightarrow f \in R([a,b])$

[2] dimostrazione teo 1.3,1.4 Pagani, Salasa pagina 395

teorema siano $f, g \in R([a,b])$ allora

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in R([a,b])$ inoltre
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx \tag{2.49}$$
- se $f(x) \leq g(x)$ su $[a,b] \Rightarrow$
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \tag{2.50}$$
- $\forall c \in]a,b[$ vale $f \in R([a,c]), R([c,b])$ inoltre
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \tag{2.51}$$
- $f_+, f_-, |f| \in R([a,b])$ inoltre
$$|\int_a^b f(x)\, dx| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{2.52}$$

media integrale sia $f \in R([a,b])$, siano
$$m = \inf_{[a,b]} f,\ M = \sup{[a,b]} f \tag{2.53}$$
allora
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M \tag{2.54}$$
in particolare, se f continua su $[a,b]$
$$\exists c \in [a,b]\ t.c.\ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c) \tag{2.55}$$

primitiva sia I un intervallo, $F : I \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di $f : I \to \mathbb{R}$ se F derivabile in I e
$$F'(x) = f(x) \forall\ x \in I \tag{2.56}$$

teorema Torricelli-Barrow sia $f \in R([a,b])$ e sia G una primitiva di f su $]a,b[$ t.c.
$$G(a^+) = \lim_{x \to a^+} G(x),\ G(b^-) = \lim_{x \to b^-} G(x) \tag{2.57}$$
esistono finiti, allora
$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b^-) - G(a^+) \doteq [G(x)]_a^b \tag{2.58}$$

funzione integrale sia $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \in R([a,b])$. Sia $c \in [a,b[$ fissato. La funzione $F_c : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\, dt \tag{2.59}$$
si chiama funzione integrale di f relativa al punto c

teorema fondamentale del calcolo integrale [3] sia $f \in R([a,b]),\ c \in [a,b]$ allora

- la funzione integrale F_c è continua in $[a,b]$
- se f è continua in $x_0 \in [a,b]$ allora la funzione integrale è derivabile in x_0 inoltre
$$F_c'(x_0) = f(x_0) \tag{2.60}$$
- se $f \in C^0([a,b])$ allora $F_c \in C^1([a,b])$ e $F_c'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$

[3] dimostrazione pagina 306 appunti

tabella delle primitive

$$\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1 \tag{2.61}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + c \tag{2.62}$$

$$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x)dx = -\cos(f(x)) + c \tag{2.63}$$

$$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x)dx = \sin(f(x)) + c \tag{2.64}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(f(x))} \cdot f'(x)dx = \tan(f(x)) + c \tag{2.65}$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c \tag{2.66}$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c \tag{2.67}$$

$$\int \sinh(f(x)) \cdot f'(x)dx = \cosh(f(x)) + c \tag{2.68}$$

$$\int \cosh(f(x)) \cdot f'(x)dx = \sinh(f(x)) + c \tag{2.69}$$

$$\int \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)dx = \arctan(f(x)) + c \tag{2.70}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)dx = \arcsin(f(x)) + c \tag{2.71}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)dx = \arccos(f(x)) + c \tag{2.72}$$

integrazione per parti siano $f, g \in C^1([a,b])$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx \tag{2.73}$$

integrazione per sostituzione

sia $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \in C^0([a,b])$ sia $\phi : [c,d] \to [a,b],\ \phi \in C^1([c,d]),\ \phi(t) \doteq x\ \forall t \in [c,d]$ allora

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\ dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\ dt \tag{2.74}$$

se ϕ invertibile

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\ dt,\ t = \phi^{-1}(x) \tag{2.75}$$

sostituzioni speciali per funzioni razionali in $\sin x$ e $\cos x$

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt \tag{2.76}$$

noto ora

$$\sin x = \sin(2\arctan t) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \cos(2\arctan t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{2.77}$$

2.3.1 Integrali generalizzati (impropri)

sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ $t.c.$ $\forall \sigma > 0, f \in R([a+\sigma, b])$

- si dice che f è integrabile in senso improprio in $]a,b]$ se $\exists$ finito

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \int_{a+\sigma}^{b} f(x)\ dx \doteq \int_a^b f(x)\ dx \tag{2.78}$$

- si dice che l'integrale improprio di f in $]a,b]$ è divergente positivamente (negativamente) se

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \int_{a+\sigma}^{b} f(x)\ dx = +\infty(-\infty) \tag{2.79}$$

- si dice che l'integrale improprio di f in $]a,b]$ non esiste se

$$\nexists \lim_{\sigma \to 0^+} \int_{a+\sigma}^{b} f(x)\ dx \tag{2.80}$$

note:

- se f integrabile in senso improprio si dice anche che l'integrale improprio di f è convergente
- se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ valgono le stesse definizioni ponendo se convergente

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\ dx \doteq \int_a^M f(x)\ dx \tag{2.81}$$

esempi

- $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \lim_{\sigma \to 0^+} \int_\sigma^1 \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{2.82}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{2.83}$$

- $f(x) = \frac{1}{x(-\log(x))^\beta}$

$$\text{sia } n \in \mathbb{R}, \int_0^n \frac{1}{x(-\log(x))^\beta}\ dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \geq 1 \end{cases} \tag{2.84}$$

- $f(x) = \frac{1}{x(\log(x))^\beta}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^\beta}\ dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \geq 1 \end{cases} \tag{2.85}$$

definizione sia f non limitata nell'intorno di un punto c nell'intervallo $[a,b]$ diremo che f è integrabile in senso improprio in $[a,b]$ se lo è in $[a,c[$ e $]c,b]$ e poniamo

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \tag{2.86}$$

2.3.2 Criteri di convergenza

criterio del confronto siano $f, g : [a,b[\to \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ f,g \in R([a,\omega],\ \forall \omega \in [a,b[$ allora

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b[\Rightarrow \begin{cases} \int_a^b g(x)\ dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx < +\infty \\ \int_a^b f(x)\ dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b g(x)\ dx = +\infty \end{cases} \tag{2.87}$$

criterio confronto asintotico siano $f, g : [a,b[\to \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ f,g \in R([a,\omega],\ \forall \omega \in [a,b[$, siano $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ in un intorno sinistro di b e tali che $f \sim g$ per $x \to b^-$

$$\Rightarrow\ f \text{ integrabile in senso improprio su } [a,b[\Leftrightarrow g \text{ lo è}$$

assolutamente integrabile $f, g : [a, b[\to \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, diremo che f è assolutamente integrabile in senso improprio su $[a, b[$ se

$$\int_a^b |f(x)|\ dx < +\infty \tag{2.88}$$

teorema se f assolutamente integrabile su I allora f è integrabile su I e

$$\left|\int_I f(x)\ dx\right| \leq \int_I |f(x)|\ dx \tag{2.89}$$

2.3.3 Serie numeriche e integrali generalizzati

sia $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, f decrescente, poniamo $a_n = f(n)\ \forall n$ allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \text{ è convergente} \tag{2.90}$$

inoltre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{2.91}$$

Chapter 3

Equazioni differenziali

un'equazione differenziale ordinaria di ordine n in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è del tipo

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}\right) \text{ su } I \tag{3.1}$$

oppure più in generale

$$F\left(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \text{ su } I \tag{3.2}$$

$y = y(x)$ definita e derivabile n volte in I si dice soluzione dell'equazione o **curva integrale** della 3.2 in I

autonoma un'equazione si dice autonoma se f non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente x

integrale generale si denota integrale generale della 3.2 una formula che rappresenta la famiglia di tutte le soluzioni della 3.2

3.1 Problema di Cauchy

un problema di Cauchy di ordine n è dato da un sistema del tipo

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)} \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad \text{con } x_0 \in I, y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ assegnati} \tag{3.3}$$

una soluzione y del problema di Cauchy è una funzione $y \in C^n(I)$ che soddisfa l'equazione differenziale $\forall x \in I$ e soddisfa tutte le $n-1$ condizioni iniziali

teorema di Cauchy supponiamo $n = 1$ allora il probelema di Cauchy sarà della forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad \text{con } x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

sia ora $A = I \times J$, I, J intervalli e sia

- $f : A \to \mathbb{R}$ continua $\forall (x, y) \in A$
- $f_y(x, y)$ continua in A

allora

$$\forall (x_0, y_0) \in A \; \exists \gamma > 0 \; t.c. \; \exists! \text{ funzione } y \in C^1([x_0 - \gamma, x_0 + \gamma]), \; y \text{ soluzione del problema di Cauchy} \tag{3.5}$$

3.2 Metodi risolutivi

3.2.1 Equazioni differenziali di primo ordine

- $y' = h$, dove $h : I \to \mathbb{R}$ funzione continua, allora

$$y(x) = \int h(x)\, dx \tag{3.6}$$

- $y' = ay,\ a \in \mathbb{R}$ allora

$$\frac{y'(x)}{y} = a \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y}\, dx = \int a\, dx \Rightarrow \log|y(x)| = ax + c \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow y(x) = ke^{ax},\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0 \tag{3.8}$$

- $y' = h(x)g(y)$, equazione differenziale di primo ordine a variabili separabili

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),\ c \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

- $y' = a(x)y + b(x),\ a(x), b(x) \in C(I),\ I \subset \mathbb{R}$ (a funzioni continue) [1]

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int b(x)e^{-A(x)}\, dx\right),\ c \in \mathbb{R},\ x \in I \tag{3.10}$$

  dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$

3.2.2 Equazioni differenziali di secondo ordine

equazione differenziale di secondo ordine a coefficenti costanti

$$y'' + ay' + by = f(x),\ a, b \in \mathbb{R}, f \in C(I) \text{ assegnati} \tag{3.11}$$

omogena 3.11 si dice omogenea se $f(x) = 0$

teorema

- l'insieme delle soluzioni dell'omogenea di 3.11 in un dato interveallo è uno spazio vettoriale di dimensione 2
- l'integrale generale di 3.11 si ottiene sommando l'integrale generale dell'omogenea e una soluzione particolare dell'equazione completa

metodo risolutivo

- troviamo le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'**equazione caratteristica** associata all'omogenea di 3.11

$$z^2 + az + b = 0 \Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{3.12}$$

- consideriamo l'equazione omogenea $y'' + ay' + by = 0$, determiniamo due funzioni $y_1(x),\ y_2(x)$ dette **soluzioni fondamentali**
  - $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ distinte $\Rightarrow\ y_1(x) = e^{z_1 x},\ y_2(x) = e^{z_2 x}$
  - $z_1 \in \mathbb{R}$ unica radice (molteplicità 2) $\Rightarrow\ y_1(x) = e^{z_1 x},\ y_2(x) = xe^{z_1 x}$
  - $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow\ y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
- l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è dato da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

[1] pagina 363 appunti De Franceschi

- se $f(x) \neq 0$ cerco una soluzione particolare di 3.11, procediamo con il **metodo della variazione delle costanti** cercando
$$\overline{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x) + y_2(x) \tag{3.14}$$
imponendo che $\overline{y}(x)$ risolva 3.11 otteniamo $\overline{y}' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'$, imponiamo come prima condizione
$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{3.15}$$
in questo modo rimane $\overline{y}' = c_1y_1' + c_2y_2'$ e derivando ulteriormente
$$\overline{y}'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' \tag{3.16}$$
imponendo che $\overline{y}$ risolva 3.11 e ricordando che y_1, y_2 sono soluzioni dell'equazione differenziale omogenea otteniamo che $c_1(x), c_2(x)$ devono verificare il sistema
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{3.17}$$
tale sistema è sempre risolubile quindi
$$W(x) \doteq \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$
ha sempre determinante diverso da 0 e possiamo ricavare (metodo di Cramer)
$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{det(W(x)} \tag{3.19}$$
$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{det(W(x)} \tag{3.20}$$
per integrazione ricaviamo poi c_1 e c_2, quindi l'espressione
$$\overline{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{3.21}$$
NB: esiste inoltre un **caso particolare**: se $f(x)$ è della forma
$$f(x) = P(x)e^{\gamma x}\cos(\theta x) \text{ oppure } f(x) = P(x)e^{\gamma x}\sin(\theta x) \tag{3.22}$$
con P polinomio di grado n, poniamo $\xi = \gamma + i\theta$
  - se ξ **non** è soluzione dell'eqazione caratteristica (3.12) allora si cerca una soluzione particolare del tipo
$$\overline{y}(x) = e^{\gamma x}\left(Q_1(x)\cos(\theta x) + Q_2(x)\sin(\theta x)\right) \tag{3.23}$$
con $Q_1(x), Q_2(x)$ polinomi di grado n, da determinare imponendo $\overline{y}$ soluzione di 3.11
  - se ξ è radice della caratteristica con molteplicità 1 la soluzione è del tipo
$$\overline{y}(x) = xe^{\gamma x}\left(Q_1(x)\cos(\theta x) + Q_2(x)\sin(\theta x)\right) \tag{3.24}$$
con $Q_1(x), Q_2(x)$ polinomi di grado n, da determinare imponendo $\overline{y}$ soluzione di 3.11
  - se ξ è radice della caratteristica con molteplicità 2 (allora $\theta = 0$) la soluzione è del tipo
$$\overline{y}(x) = x^2e^{\gamma x}Q(x) \tag{3.25}$$
con $Q_x(x)$ polinomio di grado n, da determinare imponendo $\overline{y}$ soluzione di 3.11
- l'integrale generale dell'equazione differenziabile 3.11 è dato da
$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \overline{y}(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \tag{3.26}$$

casi semplici

- $y'' = x$
$$y(x) = \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \tag{3.27}$$
- $y'' = -y$
$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \tag{3.28}$$