Geometria A modulo 2

Martino Papa AKA Intotino

September 16, 2021

Contents

Chapter 1

Forme bilineari

1.1 Introduzione

Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Definiamo la forma bilineare b come:

$$b : V \times W \to \mathbb{K}$$

Proprietà:

- $b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b(v_2, w)$
- $b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w)$
- $b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2)$
- $b(v, \lambda w) = \lambda b(v, w)$

Forme simmetriche e antisimmetriche.

Una forma bilineare si dice **simmetrica** nel caso in cui l'applicazione su due vettori v e w produca lo stesso risultato dell'applicazione sui vettori w e v:

$$\texttt{Sym} \Leftrightarrow b(v, w) = b(w, v)$$

Si definisce invece **antisimmetrica** una forma bilineare che applicata a v e w produca l'*opposto* della stessa applicata a w e v:

$$\texttt{Anti-Sym} \Leftrightarrow b(v, w) = -b(w, v)$$

sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare, $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ base di V, $\dim(V) < +\infty$, $A \doteq b(e_i, e_j) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e siano v,w $\in V$ t.c

$$v = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$$
$$w = y_1 e_1 + ... + y_n e_n$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{b(v, w) = x^t A y}$$

dimostrazione: $b(v, w) = b(x_1 e_1 + ... + x_n e_n, y_1 e_1 + ... + y_n e_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j) = x^t A y$ $\square$

radicale (nucleo) il radicale (o nucleo) N_b di una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{K}$ è definito

$$N_b = \{v \in V | b(v, w) = 0 \ \forall w \in V\} \tag{1.1}$$

1.1.1 vettori ortogonali e isotropi

Siano due vettori $v, w \in V$. v e w si dicono ortonormali se e solo se:

$$b(v, w) = b(w, v) = 0$$

Allo stesso modo, $v \in V$, si dice isotropo se e solo se

$$b(v, v) = 0$$

1.1.2 spazio ortogonale

sia $S \subset V$, S è detto sottospazio ortogonale se:

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \; \forall w \in S\}$$

proposizione $\forall S \subset V$, $S^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V

dimostrazione

1. $v \in S^{\perp} \Rightarrow b(v, w) = 0 \; \forall w \in S$
   $\Rightarrow \; b(\lambda v, w) \; = \; \lambda \, b(v, w) \; = \; 0$
   $\Rightarrow \lambda v \in S^{\perp} \; \forall \lambda \in \mathbb{K}$
2. $v_1, v_2 \in S^{\perp} \Rightarrow b(v_1, w) = 0, \; b(v_2, w) = 0 \; \forall w \in S$
   $\Rightarrow b(v_1 + v_2, w) \; = \; b(v_1, w) + b(v_2, w)) \; = \; 0$

1.1.3 caratteristica di un vettore

sia $v \in V$ non isotropo, dato un vettore $w \in V$ definiamo

$$a_v(w) = \frac{b(v,w)}{b(v,v)}$$

osservazione $w - a_v(w)v \in V$ è un vettore ortogonale a v

1.2 Matrici associate ad una forma bilineare

sia V un K-spazio vettoriale, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare, $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$, $\beta' = \{f_1, ..., f_n\}$, A la matrice associata a b in β, A la matrice associata a b in β' allora

$$\text{preso } M = M_{\beta\beta'}(I)$$

$$B = M^t A M$$

rango di una forma bilineare

preso $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare, $\forall A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ siano matrici associate a b
$\Rightarrow rk(A) = rk(B)$
$\Rightarrow$ si può definire il rango di b come il rengo di una sua matrice associata

forma non degenere una forma bilineare b è detta non degenere se rk(b)=dimV=n

matrice ortogonale

$$A \text{ ortogonale} \Leftrightarrow A^t A = A A^t = Id_n \tag{1.2}$$

sia A ortogonale allora:

- $det(A) = \pm 1$
- A invertibile e $A^{-1} = A^t$
- gli autovettori di A associati ad autovalori distinti sono ortogonali

1.3 forma quadratica

sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare, $q(v) \doteq b(v, v) \; \forall v \in V$ si dice forma quadratica associata a b

proprietà forma quadratica

- $\forall k \in \mathbb{K}, \forall v \in V \; q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$
- $\forall v, w \in V \; 2b(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$

[1] una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ è un polinomio omogeneo di grado 2 della forma

$$Q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \;\; a_{ij} \in \mathbb{R}, \; \underline{h} \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

NB: si può sempre supporre $a_{ij} = a_{ji}$

matrice associata ad ogni forma quadratica è associata una matrice *simmetrica* $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{n \times n}$ t.c.

$$Q(\underline{h}) = \underline{h}^t A \underline{h} \tag{1.4}$$

$$Q(\underline{h}) =< A\underline{h}, \underline{h} > \tag{1.5}$$

definizioni una forma quadratica $Q(\underline{h})$ si dice

- definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow Q(\underline{h}) > 0 \; \forall \underline{h} \neq 0 \; (Q(\underline{h}) < 0))$
- semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow Q(\underline{h}) \geq 0 \; \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \; (Q(\underline{h}) \leq 0) \wedge \exists h \neq 0 \; t.c. \; Q(\underline{h}) = 0$
- indefinita $\Leftrightarrow \exists \underline{h}^+, \underline{h}^- \in \mathbb{R}^n \; t.c. \; Q(\underline{h}^+) > 0 \wedge Q(\underline{h}^-) < 0$

teorema caratterizzazione forme quadratiche

- una forma quadratica è definita positiva $\Leftrightarrow \exists m > 0 \; t.c. \; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \geq m ||\underline{h}||^2 \; \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$
- una forma quadratica è definita negativa $\Leftrightarrow \exists m > 0 \; t.c. \; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \leq -m ||\underline{h}||^2 \; \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$

proposizione $n = 2, \; Q(\underline{h}) = a h_1^2 + 2b h_1 h_2 + c h_2^2$ è

- definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow det(A) > 0 \wedge a > 0; (a < 0)$
- semi definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow det(A) = 0 \wedge a > 0; (a < 0)$
- indefinita $\Leftrightarrow det(A) < 0$

criterio di Sylvester $n \geq 2, \; Q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \; \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ è

- definita positiva $\Leftrightarrow det(A_k) > 0 \; \forall k \; 1, \ldots, n$
- definita negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \; det(A_k) > 0 \; \forall k \; 1, \ldots, n$

corollario $n \geq 2, \; Q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \; \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ è

- semidefinita positiva $\Leftrightarrow det(A_k) \geq 0 \; \forall k \; 1, \ldots, n$
- semidefinita negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \; det(A_k) \geq 0 \; \forall k \; 1, \ldots, n$

autovalori $Q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \; \underline{h} \in \mathbb{R}^n$

- definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono positivi (negativi)
- semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono ≥ 0 (≤ 0) ed almeno uno di essi è nullo
- indefinita $\Leftrightarrow \exists$ due autovalori di segno opposto

[1] nota lezione 17

polinomio omogeneo

sia $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ una base di V, $v \in V$ allora $q(v) = q(x_1, ..., x_n) = \sum a_{i,j}\ x_i\ x_j$

viceversa un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili $(x_1, ..., x_n)$ t.c. $q(x_1, ..., x_n) = \sum a_{i,j}\ x_i\ x_j$ corrisponde ad una **forma quadratica** su V una volta definita una base β

1.3.1 teorema esistenza matrice diagonale

sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica

- $\exists$ una base $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ di V formata da vettori ortogonali, ovvero: $b(e_i, e_j) = 0$ se i $\neq$j
- $\exists$ una base nella quale la matrice associata è diagonale
- $\exists$ una base nella quale la forma quadratica è della forma $q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ x_i^2$

dimostrazione esistenza matrice diagonale

se $b(v, w) = 0\ \forall v, w$ la dimostrazione è banale
supponiamo quindi che b non sia la forma nulla
$\Rightarrow \exists v, w \in V\ t.c.\ b(v, w) \neq 0$
$\Rightarrow \exists$ un vettore **non** isotropo (*)
dimostro (*)
$b(v + w, v + w) = b(v, v) + b(w, w) + 2b(v, w)$ quindi:

- $b(v, v) \neq 0$ oppure $b(w, w) \neq 0\ \Rightarrow$ v oppure w non isotopo
- se invece sono entrambi $= 0 \Rightarrow b(v + w, v + w) = 2b(v, w) \Rightarrow b(v, w) \neq 0 \Rightarrow v + w$ non isotopo □

procedo per induzione su n=dimV

- passo base: n=1 *banale* (la matrice è ovviamente diagonale)
- passo induttivo, dimostriamo l'implicazione $p(n-1) \Rightarrow p(n)$
  considero e_1 non isotopo e $W = e_1^{\perp} \Rightarrow dimW = n - 1$ ($\star$)
  per ipotesi induttiva esiste una base di W $\{e_2, ..., e_n\}$ ortogonale $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\{e_1, e_2, ..., e_n\}} \textbf{ è una base ortogonale di V}$$

□

Lemma ($\star$) sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, dimV= n$< \infty$, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare *simmetrica*, $v \in V$ vettore non isotropo

- $V = <v> \bigoplus V^{\perp}$
- $dimV^{\perp} = n - 1$

dimostrazione sia $w \in V$

$$\boldsymbol{w = a_v(w)v + (w - a_v(w)v)}$$
dove $a_v(w)v \in <v>$ e $(w - a_v(w)v) \in V^{\perp}$

esercizio $V = \mathbb{R}^2,\ e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1),\ q(x, y) = 3x^2 - 8xy - 3y^2$ forma quadratica rispetto a β'

A=$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $q(x, y) = 3(x - \frac{4}{3}y)^2 - (\frac{16}{3} + 3)y^2$, scelgo $x' = x - \frac{4}{3}y,\ y' = y$
$\Rightarrow q(x, y) = 3x'^2 - \frac{25}{3}y'^2$
$x = x' + \frac{4}{3}y\ \wedge\ y = y' \Rightarrow M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{3} \end{pmatrix}$

teorema degli uni e degli zeri

sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettorale, $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare simmetrica, $b(f_i, f_i) \neq 0 \Rightarrow$

$\exists$ una base in cui b si può rappresentare come una matrice diagonale formata da soli uni e zeri

dimostrazione:

data $\{f_1, ..., f_n\}$ base diagonalizzante, denoto $g_i = \frac{1}{\sqrt{b(f_i,f_i)}} f_i$

$\Rightarrow b(g_i, g_i) \ = \ b(\frac{1}{\sqrt{b(f_i,f_i)}} f_i, \frac{1}{\sqrt{b(f_i,f_i)}} f_i) \ = \ (\frac{1}{\sqrt{b(f_i,f_i)}})^2 b(f_i, f_i) \ = \ \frac{b(f_i,f_i)}{b(f_i,f_i)} = 1$ □

1.3.2 teorema di Sylvester

[2]dato V $\mathbb{R}$ spazio vettoriale, $b : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica, $dimV = n$ allora:

- $\exists$ una base nella quale b si rappresenta come una matrice diagonale composta da 1, -1, 0
- il numero di 1, -1, 0 non dipende dalla base scelta

dimostrazione:

il numero di zeri è sempre costante ed uguale a $n - rk(b)$ □
sapendo che il numero di zeri è costante basterà dimostrare che il numero di positivi (o negativi) sia costante; supponiamo $\{e_1, ..., e_n\} = \beta, \ \{f_1, ..., f_n\} = \beta'$,

$b(e_i, e_i) = 1 \ i = 1, ..., t$
$b(f_j, f_j) = 1 \ j = 1, ..., s$

per assurdo supponiamo $t > s$
denotiamo $T =< e_1, ..., e_t >, \ S =< f_{s+1}, ..., f_n >, \ dimT = t, \ dimS = n - s$. Per Grassman:
$dim(S \cap T) = dim(S) + dim(T) - dim(S + T) \ \geq \ dim(S) + dim(T) - n \ = \ n - s + t - n = -s + t$
$t > s \Rightarrow dim(S \cap T) > 0$
prendendo $v \in S \cap T, \ v = \sum_{i=1}^{t} a_i e_i = \sum_{j=s+1}^{n} b_j f_j \Rightarrow b(v, v) = \sum_{i=1}^{t} a_i^2 = \sum_{j=s+1}^{n} b_j^2$
essendo $\sum_{j=s+1}^{n} b_j^2 \neq 1$ e $\sum_{i=1}^{t} a_i^2 = 1$ si ricava una contraddizione
supponendo s>t si giungerà alla stessa conclusione □

indice di positività l'indice di positività è dato dal numero di 1 in una rappresentazione diagonale matriciale

indice di negatività l'indice di negatività è dato dal numero di -1 in una rappresentazione diagonale matriciale

osservazione indice positività + indice negatività = rk(b)

segnatura la segnatura di una forma bilineare b è data da (indice di positività, indice di negatività)

1.4 prodotto scalare

sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ chiameremo **prodotto scalare** su V una funzione

$$< \cdot \, , \, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$$

che soddisfi $\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $< x, x > \geq 0, \ < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $< x, y >=< y, x >$
- $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$
- $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$

[2]libro geometria pag 224

proposizione sia $:V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica, A la matrice associata a b in una base qualunque

$$b \text{ è definita positiva} \Leftrightarrow \text{tutti i suoi minori principali } D_1, ...D_n \text{ sono positivi} \tag{1.6}$$

vettori perpendicolari $v \perp w \Leftrightarrow <v, w>= 0$

norma $||v|| = \sqrt{<v, v>}$

teorema di pitagora sia $V = \mathbb{R}^2$, $<x, y>= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $<x, y>= 0 \Rightarrow \boldsymbol{||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2}$

angolo dato V spazio vettoriale dotato di $< \cdot \, , \, \cdot >$ possiamo introdurre l'angolo θ compreso tra due vettori non nulli:

$$\cos\theta = \frac{<x, y>}{||x|| \; ||y||} \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi \tag{1.7}$$

1.4.1 disuguaglianza Cauchy-Shcwartz

sia V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $x, y \in V$ allora:

- $| <x, y> | \leq ||x|| \; ||y||$
- $||x|| \; ||y|| =<x, y> \Leftrightarrow x = \lambda y, \; \lambda \in \mathbb{R}$

dimostrazione:

caso x=0 oppure y=0 (banali);
supponiamo $x \neq 0, \; \lambda \in \mathbb{R}$, segue:
$0 \leq <\lambda x - y \, , \, \lambda x - y> = \; \lambda^2 <x, x> -2\lambda <x, y> + <y, y> = \; \lambda^2 ||x||^2 - 2\lambda <x, y> + ||y||^2$
$\Rightarrow <x, y>^2 - ||x||^2 ||y||^2 \leq 0$
$\Rightarrow <x, y>^2 \leq ||x||^2 ||y||^2$
$\Rightarrow | <x, y> | \leq ||x|| \; ||y||$ □

osservazione sia V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $< \cdot \, , \, \cdot >$ il prodotto scalare, $\{v_1, ..., v_n\}$ un insieme di vettori ortogonali non nulli allora:

$$\{v_1, ..., v_n\} \text{ sono linearmente indipendenti}$$

dimostrazione:
se $a_1 v_1 + ... + a_r v_r = 0 \; \Rightarrow 0 =< a_1 v_1 + ... + a_r v_r, \boldsymbol{v_i} > \forall i \; \Rightarrow a_i < v_i, v_i >= 0 \; \Rightarrow a_i = 0 \forall i$ □

Teorema di ortonormalizzazione di Gram. Schmidt

sia V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\{v_1, ..., v_r\} \in V$ una successione di vettori
$\Rightarrow \exists$ una successione $\{w_1, ..., w_r, ...\} \in V$ di vettori t.c. $\forall r \geq 1$

1. $<v_1, ..., v_r>=<w_1, ..., w_r>$
2. $<w_1, ..., w_r>$ sono ortogonali

dimostrazione: si procede per induzione su r:

passo base (r=1): scelgo $w_1 = v_1$
passo induttivo: supponiamo il teorema vero per r-1, definiamo:

$$w_r \doteq v_r - \frac{<v_r, w_1>}{<w_1, w_1>} w_1 - ..... - \frac{<v_r, w_{r-1}>}{<w_{r-1}, w_{r-1}>} w_{r-1} \tag{1.8}$$

abbiamo quindi $w_r \perp w_i \; \forall i < r \Rightarrow$ (2) vero
inoltre v_r è combinazione lineare dei w_i e w_r combinazione lineare di v_i
$\Rightarrow$ doppia inclusione $\Rightarrow$ (1) vero □

esempio esercizio $v_1 = (1, 2), \; v_2 = (3, 1)$, in $\mathbb{R}^2$ $< \cdot \, , \, \cdot >$ prodotto scalare standard

$w_1 = v_1 = (1, 2)$, $w_2 = v_2 - \frac{<v_2, w_1>}{<w_1, w_1>} w_1 = (2, -1)$

base ortonormale sia $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormale

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ dove } \delta_{ij} \text{ è detto } \textit{simbolo di Kronecker}$$

normalizzazione per normalizzare un vettore e_i

$$e_i = \frac{1}{||e_i||} e_i \tag{1.9}$$

proposizione siano $\{e_1, ..., e_n\} = \beta$, $\{f_1, ..., f_n\} = \beta'$ due basi ortonormali, $M = M_{\beta\beta'} \Rightarrow$

1. $M_{\beta\beta'}$ è una matrice ortogonale
2. ${}^tMM = I,\ M_{\beta'\beta} = {}^tM_{\beta\beta'}$

dimostrazione:

$M_{\beta\beta'} = a_{ij}$ definita: $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$
$\delta_{ij} =< f_i, f_j >=< \sum_{h=1}^n a_{ih} e_h, \sum_{k=1}^n a_{jk} e_k >= \sum_{h=1}^n a_{ih} a_{jh} = ({}^tM_{\beta\beta'} M_{\beta\beta'})_{ij}$ □

proposizione [3] sia V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $< \cdot\ ,\ \cdot >$, dimV = n, $W \triangleleft V$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow$

1. $V = W \bigoplus W^\perp$
2. se $v = w + w^\perp,\ w \in W,\ w^\perp \in W \Rightarrow ||v||^2 = ||w||^2 + ||w^\perp||^2$

1.5 spazi affini

[4] sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, uno **spazio affine** su V è un insieme $\mathbb{A} \neq \emptyset$ t.c. data un'applicazione $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$ che invia $(P, Q) \to \overline{PQ}$ essa soddisfi due proprietà:

1. $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V\ \exists!\ Q \mid \overline{PQ} = v$
2. $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}\ \overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$

dimensione di uno spazio affine sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V definiamo $dim(\mathbb{A}) \doteq dim(V)$

sistema di riferimento sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V, un sistema di riferimento su $\mathbb{A}$ è dato da un punto $0 \in \mathbb{A}$ e da una base $\{e_1, ..., e_n\}$ per V

coordinate dato un sistema di riferimento $\forall P \in \mathbb{A}$ consideriamo $\overline{OP} = a_1 e_1 + ... + a_n e_n$. $\boldsymbol{(a_1, ..., a_n)}$ sono le coordinate di P.

giacitura dato V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\mathbb{A}$ spazio affine su V, $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Un sottospazio affine passante per un punto Q di $\mathbb{A}$ e parallelo a W è il sottoinsieme S definito:

$$S \doteq \{Q \in \mathbb{A} \mid \overline{PQ} \in W\}, \textbf{W è detto giacitura di S} \tag{1.10}$$

NB: la dimensione di S sarà uguale a qulla della sua giacitura (W)

iperpiano S (definito come sopra) è definito iperpiano se $dim(S) = dim(W) = dim(V) - 1$

direzione se la giacitura è bidimensionale essa prende il nome di direzione

sottospazi paralleli sia S passante per P con giacitura W, T passante per Q con giacitura U allora

$$S//T \Leftrightarrow W \triangleleft V \text{ oppure } U \triangleleft W \tag{1.11}$$

[3] dimostrazione a pag 235
[4] libro pag 93

teorema sia $S \subset \mathbb{A}^n$ sottospazio affine, $P \in \mathbb{A}^n$ un punto allora:

$$\exists!\ T \subseteq \mathbb{A}^n \text{ sottospazio affine passante per P t.c P//S } \wedge\ dim(T) = dim(S) \tag{1.12}$$

rette in $\mathbb{R}^3$ due rette in $\mathbb{R}^3$ possono essere:

- sghembe $\Leftrightarrow$ non sono complanari
- parallele o incidenti $\Leftrightarrow$ sono complanari

teorema rette complanari siano $r_1 = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$, $r_2 = \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$

$$r_1 \text{ e } r_2 \text{ sono complanari } \Leftrightarrow det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.13}$$

intersezione di piani siano due piani in $\mathbb{R}^3$, $H_1 :\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $H_2 :\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

- $rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ i due piani si intersecano in una retta
- $rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ i due piani sono paralleli

intersezione piano e retta dato un piano $H : ax+by+cz+d = 0$ e una retta $r = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{cases} = 0 \Rightarrow H \text{ e } r \text{ sono paralleli} \\ \neq 0 \Rightarrow H \cap r \rightarrow \text{punto} \end{cases} \tag{1.14}$$

osservazione vettore parallelo se un vettore (v) è parallelo ad un iperpiano allorà v è soluzione dell'omogenea associata a quell'iperpiano.

giaciture ortogonali due giaciture $U, W \lhd V$ sono ortogonali se:

$$U \subset W^{\perp}, \text{ oppure } W \subset U^{\perp} \tag{1.15}$$

1.5.1 spazio euclideo

sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\mathbb{A}^n$ spazio affine su V, $< \cdot, \cdot >$ prodotto scalare su V, allora:

$$\mathbb{A}^n \text{ si chiama spazio euclideo e si denota } \mathbb{E}^n$$

sistema di riferimento euclideo un sistema di riferimento euclideo è un sistema di riferimento affine $(0, \{e_1, ...; e_n\})$ dove $\{e_1, ..., e_n\}$ è una base ortonormale

distanza siano $P, Q \in \mathbb{E}^n$ definisco la distanza tra P e Q come:

$$d(P, Q) \doteq ||\overline{PQ}|| = \sqrt{< \overline{PQ}, \overline{PQ} >} \tag{1.16}$$

distanza tra un iperpiano ed un punto sia $\mathbb{R}^n$ uno spazio euclideo, $H\ :\ \ a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ un iperpiano, $P = (p_1, ..., p_n)$ un punto, $< \overline{PN}, v >= 0$, $v = \frac{1}{\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}}(a_1, ..., a_n)$ (direzione di r)

$\Rightarrow d(P, H) = d(P, N) = ||(\overline{PN})|| = |< \overline{PQ}, v >|,\ Q \in H$

$$\Rightarrow d(P, H) \doteq \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}} |a_1p_1 + ... + a_np_n + b| \tag{1.17}$$

lemma date r_1, r_2 due rette sghembe, $\exists!$ retta t che incontra perpendicorlarmente sia r_1 che r_2
dimostrazione:

siano v_1, v_2 direzioni di r_1, r_2, $N_1 \in r_1,\ N_2 \in r_2\ t.c.\ <\overline{N_1N_2}, v_1> = <\overline{N_1N_2}, v_2> = 0$
$\begin{cases} \overline{OQ_1} + t_1v_1 = \overline{ON_1} \\ \overline{OQ_2} + t_2v_2 = \overline{ON_2} \end{cases} \Rightarrow \overline{N_1N_2} = \overline{Q_1Q_2} + t_2v_2 - t_1v_1$
$\begin{cases} <\overline{Q_1Q_2} + t_2v_2 - t_1v_1, v_1> = 0 \\ <\overline{Q_1Q_2} + t_2v_2 - t_1v_1, v_2> = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} <\overline{Q_1Q_2}, v_1> + t_2 <v_2, v_1> - t_1 <v_1, v_1> = 0 \\ <\overline{Q_1Q_2}, v_2> + t_2 <v_2, v_2> - t_1 <v_1, v_2> = 0 \end{cases}$
sistema con due incognite t_1, t_2
$\begin{vmatrix} -<v_1, v_1> & <v_2, v_1> \\ -<v_1, v_2> & <v_2, v_2> \end{vmatrix} = -<v_1, v_1><v_2, v_2> - <v_1, v_2>^2 = -||v_1 \wedge v_2||^2 \neq 0$
$\Rightarrow \exists!$ soluzione del sistema □

distanza tra due rette siano r_1, r_2 due rette passanti rispettivamente per Q_1, Q_2 e aventi direzione v_1, v_2

$$d(r_1, r_2) = \frac{1}{||v_1 \wedge v_2||} | <v_1 \wedge v_2, \overline{Q_1Q_2}> | \tag{1.18}$$

dimostrazione:

sia $b = \frac{v_1 \wedge v_2}{||v_1 \wedge v_2||}$ (versore ortogonale ad r_1 e r_2), $N_1 \in r_1,\ N_2 \in r_2\ t.c.\ <\overline{N_1N_2}, v_1> = <\overline{N_1N_2}, v_2> = 0 \Rightarrow$
$d(r_1, r_2) = d(N_1, N_2) = ||\overline{N_1N_2}|| = | <b, \overline{Q_1N_1}> | = | <b, \overline{N_1Q_2}> + <b, \overline{Q_1N_1}> | = | <b, \overline{N}> |$ //rivedo da libro//

affinità [5] $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ si dice affinità $\Leftrightarrow$

- f è biettiva
- $\exists \varphi : V \to V$ lineare e biettiva (**isomorfismo**) t.c. $\forall P, Q \in \mathbb{A}^n\ \overline{f(P)f(Q)} = \varphi(\overline{PQ})$

esempio: se definiamo $Q = t_v(P)$ nel *primo assioma di spazio affine*, questa funzione sarà una affinità
NB: un'affinità di $\mathbb{A}$ è un'isomorfismo di $\mathbb{A}$ su se stesso

definizioni sia $T : V \to V$ lineare, V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con prodotto scalare

- T si dice **simmetrica** $\Leftrightarrow <T(v), w> = <v, T(w)>\ \ \forall v, w \in V$
- T si dice **unitaria** $\Leftrightarrow <T(v), T(w)> = <v, w>\ \ \forall v, w \in V$

proposizione $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ base ortonormale, $A = M_{\beta\beta}(T)$

- T simmetrica $\Leftrightarrow$ A simmetrica
- T unitaria $\Leftrightarrow$ A unitaria $\Leftrightarrow$ A orotgonale

ricordo: A simmetrica $\Leftrightarrow\ A^t = A$; A ortogonale $\Leftrightarrow\ A^t = A^{-1}$

1.5.2 teorema spettrale

sia $T : V \to V$ simmetrica, V con prodotto scalare, dim(V)=n $\Rightarrow \exists$ una **base di autovettori ortonormali**

lemma $T : V \to V$ simmetrica ammette un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$

osservazione sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, per il teorema spettrale esiste una base di autovettori diagonalizzante e ortonormalizzante, esiste quindi $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.c. $M^{-1}AM$ è diagonale e ortonormale

proposizione sia $T : V \to V$ simmetrica, λ_1, λ_2 autovalori con rispettvi autovettori v_1, v_2.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow v_1, v_2 \text{ sono linearmente indipendenti} \tag{1.19}$$

[5] pagina 196 sernesi

proposizione (2) sia $T : V \to V$, le seguenti affermazioni sono equivalenti

- T è unitaria
- T è lineare e $||T(v)|| = ||v|| \; \forall v \in V$
- $T(0) = 0e||T(v) - T(w)|| = ||v - w|| \; \forall v, w \in V$

isometria $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ si dice *isometria* se f è una affinità con isomorfismo associato $\phi : V \to V$ unitario

isometria (2) $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ è un isometria $\Leftrightarrow$ preserva le distanze

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \; \forall P, Q \in \mathbb{E}^n \tag{1.20}$$

definizione sia f un isometria con isomorfismo associato ϕ

- f si dice **diretta** $\Leftrightarrow det(\phi) = 1$
- f si dice **inversa** $\Leftrightarrow det(\phi) = -1$

rotazioni un'isometria f con isomorfismo associato ϕ si dice

$$rotazione \; \Leftrightarrow det(\phi) = 1 \tag{1.21}$$

traslazioni le traslazioni sono particolari isometrie dirette

congruenti sia $\mathbb{E}$ un piano euclideo, due figure geometriche F, F' in $\mathbb{E}$ si dicono congruenti

$$\Leftrightarrow \exists f \in Isom(\mathbb{E}) \; t.c. \; f(F') = F \tag{1.22}$$

geometria 1 pag 262

Chapter 2

Geometria proiettiva

2.1 introduzione

[1] sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita. Lo **spazio proiettivo** associato a V è l'insieme $\boldsymbol{P(V)}$ i cui elementi sono sottospazio vettoriali di dimensione 1 di V

$$P(V) = \{\ [v] \mid v \in V,\ v \neq 0\} \tag{2.1}$$

$$[v] = \{w \in V \mid v = \lambda w,\ \lambda \in \mathbb{K}\} \tag{2.2}$$

$$dim(P(V)) = dim(V) - 1 \tag{2.3}$$

osservazione se $V = \{0\}$ allora $P(V) = \emptyset$ e definiamo $dim(P(V)) = -1$

riferimento proiettivo sia $P = P(V)$ e $\{e_0, ..., e_n\}$ una base di V. Diremo che $\{e_0, ..., e_n\}$ definisce in P una sistema di coordinate omogenee (*riferimento proiettivo*)

$$v = x_0e_0 + ... + x_ne_n \in V \setminus \{0\} \tag{2.4}$$

gli scalari x_0 ... x_n si dicono coordinate omogenee del punto $P = [v] \in P$ rispetto al riferimento e_0 ... e_n

sottospazio proiettivo sia W sottospazio di V allora $P(W) = \{[w] | W \neq 0,\ W \in W\}$ sarà sottospazio priettivo di $P(V)$

$$W \triangleleft V \Rightarrow P(W) \triangleleft P(V) \tag{2.5}$$

osservazione $dim(P(W)) = dim(W) - 1$

codimensione sia $P(W) \triangleleft P(V)$, chiamiamo *codimensione* di $P(W)$ in $P(V)$: $\boldsymbol{dim[P(V)] - dim[P(W)]}$

classificazione sottospazi

- **iperpiani**: sottospazi di codimensione 1
- **piani**: sottospazi di codimensione $n - 2$
- **rette**: sottospazi di codimensione $n - 1$

lemma [2] $\bigcap_{i \in I} P(W_i) = P(\bigcap_{i \in I} W_i)$

teorema intersezione sottospazi siano $P(W_1),\ P(W_2)$ sottospazi proiettivi di $P(V)$ $\Rightarrow$ l'intersezione $P(W_1) \cap P(W_2)$ sarà a sua volta sottospazio proiettivo di $P(V)$

$$P(W_1) \cap P(W_2) \triangleleft P(V) \tag{2.6}$$

[1] geometria 1 pag 302

[2] da questo lemma segue il teorema successivo

definizione sia $J \subset P(V)$ un sottospazio proiettivo, denotiamo $\boldsymbol{L(J)}$ l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi che contengono J

$$L(J) = \bigcap_{i \in I} S_i \mid J \subset S_i \tag{2.7}$$

proprietà

- $L(J)$ è il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene J
- $L(P(W) \cup P(U)) \doteq L(P(W), P(U)) = P(W + U)$ [3]
- siano $S_1 = P(W_1),\ S_2 = P(W_2)$ allora $L(S_1, S_2) = P(W_1 + W_2)$

formula di Grassman proiettiva siano S_1, S_2 sottospazi di $P(V)$

$$dim(L(S_1, S_2)) = dim(S_1) + dim(S_2) - dim(S_1 \cap S_2) \tag{2.8}$$

proiezione sia $H \subset P(V)$ un iperpiano, $P \in P(V) \setminus H$, chiameremo *proiezione* di $P(V)$ su H di centro P l'applicazione

$$\pi_{P,H}:\ P(V) \setminus \{P\} \to H \tag{2.9}$$

$$\pi_{P,H}(Q) = L(P, Q) \cap H \tag{2.10}$$

$\pi_{P,H}$ $\doteq$applicazione che associa a un punto $Q \neq P$ il punto di intersezione fra H e la retta passante per P e Q

proposizione [4] sia $P(V)$ uno spazio proiettivo, $dim(P(V)) = r$, $P_1 = [v_1], ..., P_r = [v_r] \in P(V)$

$$L(P_1, ..., P_r) = P(< v_1, ..., v_r >) \tag{2.11}$$

linearmente indipendenti $P_1, ..., P_r$ si dicono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$

$$dim(L(P_1, ..., P_r)) = r - 1 \tag{2.12}$$

proiezione generale [5] $S, T \in P(V))$, $dim(P(V)) = n$, S, T si dicono in *posizione generale* se si verifica una di queste due affermazioni:

- $dim(S \cap T) \geq n \ \wedge \ dim(S \cap T) = dim(S) + dim(T) - n$
- $dim(S) + dim(T) < n \ \wedge \ S \cap T = \emptyset$

quando l'intersezione di due sottospazi proiettivi ha la dimensione più piccola possibile (*compatibilmente con la formula di Grassman proiettiva*), essi si dicono in posizione generale

proiettività sia $f : P(V) \to P(V)$ è una proiettività $\Leftrightarrow$

- f è biettiva
- $\exists \varphi : V \to V$ isomorfismo lineare t.c. $\forall P = [v] \in P(V)\ f(P) = [\varphi(v)]$

punto fisso sia f una proiettività un punto P si dice fisso per $f \Leftrightarrow f(P) = P$

osservazione i punti fissi sono deterinati dagli autovalori della matrice associata alla proiettività

- ad ogni λ_i con $m_i = 1$ corrisponde un punto fisso
- ad ogni λ_i con $m_i = 2$ corrisponde una retta di punto fissi
- ad ogni λ_i con $m_i = n$ corrisponde uno spazio di dimensione (n-1) di punti fissi

[3] dimostrazione a pagina 307
[4] pagina 307 [24.9]
[5] pagina 308-309

teorema A [6] dati due insiemi di n+2 punti in posizione generale $\{P_0, ..., P_{n+1}\}, \{Q_0, ..., Q_{n+1}\}$

$$\exists! \text{ proiettività } f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n \; t.c. \; f(P_i) = Q_i \forall i \in \{0, ..., n+1\} \tag{2.13}$$

teorema B sia S un sottospazio proiettivo di dimensione s e $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ una proiettività $\Rightarrow$

$$f(S) \text{ è un sottospazio proiettivo di dimensione } s \tag{2.14}$$

inoltre per ogni coppia di sottospazi proiettivi S, S' aventi dimensione s $\exists$ una proiettività $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ t.c. $f(S) = S'$

teorema di Desargues [7] sia $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo e siano $P_1, ..., P_6 \in \mathbb{P}(V)$ punti distinti tali che le rette $L(P_1, P_4), L(P_2, P_5), L(P_3, P_6)$ abbiano in comune un punto P_0 diverso da $P_1, ..., P_6$ $\Rightarrow$ i seguenti punti sono allineati:

$$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6) \quad L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6) \quad L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5) \tag{2.15}$$

proposizione sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ con coorinate standard $[x_0, x_1, x_2]$, $r_0 : x_0 = 0$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) + r_0 \tag{2.16}$$

corollario $P \in r_0 \Rightarrow P$ è detto punto improprio

[6] lezione 13.04.2021
[7] pagina 335, figura a pagina 336

Chapter 3

Curve algebriche piane

3.1 introduzione

nota due polinomi $f, g \in K[x_1, ..., x_n$ si dicono equivalenti $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ *t.c.* $f = \lambda g$

curva algebrica di $A^2(K)$ una curva algebrica di $A^2(K)$ è una classe di proporzionalità di polinomi *non costanti* di $K[X, Y]$, se f(X,Y) è un rappresentante della curva l'equazione

$$f(X, Y) = 0 \text{ è detta } \textbf{equazione della curva} \tag{3.1}$$

il sottoinsieme $\xi \subset A^2(K)$ costituito dai punti le cui cordinate soddisfano la (3.1) è detto **supporto della curva**, il gradi della curva è definito come il grado di $f(X, Y)$

curva algebirca di $P^2(K)$ [1] una curva algebrica di $P^2(K)$ è una classe di proporzionalità di polinomi omogenei di $K[X_0, X_1, X_2]$. Se $F(X_0, X_1, X_2)$ è un rappresentante della curva

$$F(X_0, X_1, X_2) = 0 \text{ è detta } \textbf{equazione della curva} \tag{3.2}$$

il sottoinsieme $\zeta \subset P^2(K)$ costituito da punti le cui coordinate soddisfano la (3.2) si dice **supporto della curva** ($Supp(C)$), il grado di F si dice **grado della curva** ($\delta\zeta = \delta F$)

osservazione curve diverse possono avere lo stesso supporto

affinemente equivalenti [2] sia C una curva di $\mathbb{A}^2(K)$ una curva D si dice *affinemente equivalente* a $C \Leftrightarrow$

$$\exists T \text{ (affinità) t.c. } C = T(D) \tag{3.3}$$

in questo caso D è detta **trasformata** di C e si scrive $T^{-1}(C) = D \vee T(D) = C$

proiettivamente equivalenti sia $T : \mathbb{P}^2_k \to \mathbb{T}^2_k$ una proiettività, $C = [F(x_0, x_1, x_2)]$ la curva $D = [F \circ T]$ è una curva proiettiva t.c. $T(D) = C \Rightarrow$

$$C \text{ e } D \text{ sono proiettivamente equivalenti}$$

proposizione ogni retta affine (o proiettiva) è affinemente (o proiettivamente) equivalente alla retta $r : [x]$

gruppo generale lineare l'insieme $GL_n(\mathbb{K})$ è il gruppo di matrici *invertibili* $n \times n$ in un campo $\mathbb{K}$

3.2 classificazione delle quadriche proiettive

consideriamo in $\mathbb{P}^2_k$ una curva algebrica piana $C = [F]$ di grado 2. F è una forma quadratica e si può quindi rappresentare come

$$F(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, x_2) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ A \in M_{3\times3} \ (simmetrica) \tag{3.4}$$

[1] pagina 357
[2] pagina 359

sia $T:\mathbb{P}^2_k \to \mathbb{P}^2_k$ una proiettività, $T[x_0,x_1,x_2] = M\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $M \in GL_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$F\circ T(x_0,x_1,x_2) = ^t(M\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix})AM\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix} = (x_0,x_1,x_2)^t MAM\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

l'equazione di una conica C di $\mathbb{P}^2_k$ può scriversi nella forma

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2 = 0 \tag{3.6}$$

ponendo $a_{21} = a_{12},\ a_{10} = a_{01},\ a_{20} = a_{02}$ otteniamo la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02}\\ a_{10} & a_{11} & a_{12}\\ a_{20} & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

definiamo inoltre

$$A_0 = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

osservazione A matrice associata a F $\Rightarrow^t MAM$ matrice associata a $F\circ T \wedge rk(A) = rk(^tMAM)$

forma degenere

- $det(A) \neq 0$ $(rk(A) = 3) \Rightarrow$ la conica C è **non degenere**
- $rk(A) = 2 \Rightarrow$ la conica C è **degenere**
- $rk(A) = 1 \Rightarrow$ la conica C è **doppiamente degenere**

teorema supponendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ogni conica C di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è *proiettivamente equivalente* ad una delle seguenti:

- $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ — C è non degenere (generale)
- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ — C è non degenere (generale) a punti non reali
- $\begin{cases}x_0^2 - x_1^2 = 0\\ x_0^2 + x_1^2 = 0\end{cases}$ — C è semplicemente degenere
- $x_0^2 = 0$ — C è doppiamente degenere

se $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso C proiettivamente equivalente a:

- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ — C è non degenere (generale)
- $x_0^2 + x_1^2 = 0$ — C è semplicemente degenere
- $x_0^2 = 0$ — C è doppiamente degenere

queste coniche sono a due a due *non* proiettivamente equivalenti

ipersuperficie $\Im$ in $\mathbb{P}^n_k$ è data da $\Im = [F]$ con F omogeneo

teorema A ogni iperpiano di $\mathbb{P}^n_k$ è proiettivamente equivalente a $H_0 : x_0 = 0$

teorema B una superficie quadrica di $\mathbb{P}^n_k$ è proiettivamente equivalente a

- $x_0^2 + x_1^2 + ... + x_r^2$ — $0 \leq r \leq n,\ K = \mathbb{C}$
- $x_0^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$ — $0 \leq p \leq r \leq n,\ K = \mathbb{R}$

3.3 classificazione quadratiche affini

chiusura proiettiva e traccia affine sia $C = [f]$ una curva piana affine, sia $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f(\frac{x_1}{x_0}, 1\frac{x_2}{x_0}) \Rightarrow$ $\overline{\boldsymbol{C}} = [\boldsymbol{F}]$ è la **chiusura proiettiva** di C e

$$\overline{C} = C \cup \begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \ (punti\ all'\ \infty) \end{cases} \tag{3.9}$$

viceversa sia $\overline{C} = [F]$m prendiamo $f(x, y) = F(1, x, y) \Rightarrow$

$C = [f]$ è la **traccia affine** di $\overline{C}$

definizione sia K algebricamente chiuso, C una quadrica in $\mathbb{A}^2_K$ si dice

- non degenere $\Leftrightarrow rk(A) = 3$
- (semplicemente) degenere $\Leftrightarrow rk(A) = 2$
- (doppiamente) degenere $\Leftrightarrow rk(A) = 1$
- conica a centro $\Leftrightarrow det(A_0) \neq 0$
- parabola $\Leftrightarrow det(A_0) = 0$

se invece $K = \mathbb{R}$ (non algebricamente chiuso), anche il segno del determinante di A_0 va tenuto in considerazione:

- C è una ellisse $\Leftrightarrow det(A_0) > 0$
- C è una iperbole $\Leftrightarrow det(A_0) < 0$
- C è una parabola $\Leftrightarrow det(A_0) = 0$

traccia la traccia di una matrice A è data dalla somma degli elementi lungo la sua diagonale

$$tr(A) = \sum_{i=0} a_{ii} \tag{3.10}$$

punti reali una conica è definita a punti

- reali $\Leftrightarrow tr(A_0) \cdot det(A) < 0$
- non reali $\Leftrightarrow tr(A_0) \cdot det(A) > 0$

teorema [3] sia $C = [f] \subset A^2(K)$ una curva algebrica piana di grado 2 allora è **affinemente equivalente** ad una delle seguenti

1. K algebricamente chiuso ($K = \mathbb{C}$)
   - $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ conica a centro
   - $X^2 + Y^2 = 0$ conica a centro degenere
   - $Y^2 - X = 0$ parabola
   - $Y^2 - 1 = 0$ parabola degenere
   - $Y^2 = 0$ conica doppiamente degenere
2. $K = \mathbb{R}$
   - $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ ellisse
   - $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ ellisse a punti non reali
   - $X^2 + Y^2 = 0$ ellisse degenere
   - $X^2 - Y^2 - 1 = 0$ iperbole
   - $X^2 - Y^2 = 0$ iperbole degenere

[3] pagina 379

- $Y^2 - X = 0$ parabola
- $\begin{cases} Y^2 - 1 = 0 \\ Y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ parabole degeneri
- $Y^2 = 0$ conica doppiamente degenere

le coniche di questi gruppi sono a due a due non affinemente equivalenti

3.3.1 alcuni concetti algebrici

sia $D[x]$ anello dei polinomi a coefficenti in D un dominio a fattorizzazione unica
siano $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\ a_n \neq 0,\ g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m,\ b_n \neq 0,\ f, g \in D[x]$

lemma f e g hanno un fattore comune non costante $\Leftrightarrow$ $\exists \varphi, \psi \in D[x]$ non nulli con $\delta\varphi < n \wedge \delta\psi < m$ *t.c.* $\psi f = \varphi g$

risultante [4] definiamo risultante di f,g il determinante della matrice $M_{(m+n)\times(m+n)}$

$$R \doteq R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & \dots & a_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_m & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_m \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

teorema f e g hanno un fattore in comune $\Leftrightarrow R = 0$

teorema sia $R(x_1, \dots, x_{r-1})$ il risultante di f, g ristretto rispetto a $x_r \Rightarrow$

$$\text{"}R(x_1, \dots, x_{r-1}) \text{ è un polinomio omogeneo di grado } mn\text{"} \vee R(f,g) = 0 \tag{3.12}$$

proposizione sia $K = \mathbb{C}$ (algebricamente chiuso), $F(x_0, x_1)$ polinomio omogeneo di grado $n \Rightarrow \exists\ n$ coppie $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2,\ i \in [1, n]$ diverse da $(0,0)$ t.c. $F(x_0, x_1) = (a_1 x_1 - b_1 x_0) \cdots (a_n x_1 - b_n x_0)$

3.3.2 intersezione di curve algebriche piane

[5] sia $C = [f]$ una curva algebrica piana affine (proiettiva) in $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$)

irriducibile C si dice irriducibile $\Leftrightarrow f(x_0, x_1)$ è irriducibile

componenti irriducibili se $f = f_1 \cdots f_r$ scomposizione di f in irriducibili le curve $C_i = [f_i]$ si diranno *componenti irriducibili* di C, inoltre vale $C = C_1 + \cdots + C_r$

teorema di Bezout (base) siano $C = [F],\ D = [G]$ due curve algebriche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\ \delta C = n,\ \delta D = m$ se hanno più$_{(>)}$ di mn punti in comune $\Rightarrow$ hanno una componente in comune $\Rightarrow$ hanno infiniti punti in comune
NB: il teorema di Bezout vale anche nel piano affine

proposizione sia $C = [F]$, r una retta passante per i punti $P \neq Q \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, un punto $\lambda P + \mu Q,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$F(\lambda P + \mu Q) \doteq F(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow F(\lambda, \mu) \text{ è un polinomio omogeneo in } \lambda,\ \mu \tag{3.13}$$

[4] pagina 458
[5] capitolo 33 pagina 399

molteplicità di intersezione sia $P_0 = \lambda_0 P + \mu_0 Q$ un punto sulla retta r, denotiamo $I(C, r; P_0)$ la molteplicità di (λ_0, μ_0) come radice di $F(\lambda, \mu)$

$$I(C, r, ; P_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } P_0 \notin C \\ \infty & \text{se } r \subset C \text{ (è una sua componente)} \\ m \mid 0 < m \leq n & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{3.14}$$

r e C hanno molteplicità d'intersezione $m = I(C, r, ; P_0)$ nel punto $P_0 = \lambda_0 P + \mu_0 Q \in r$ se (λ_0, μ_0) è una radice di molteplicità m del polinomio $F(\lambda P + \mu Q)$

proprietà siano C, D due curve algebriche, T una proiettività (o affinità)

$$I(C, r; P_0) + I(D, r; P_0) = I(C + D, r; P_0) \tag{3.15}$$

$$I(C, r; P_0) = I(T(C), T(r); T(P_0)) \tag{3.16}$$

teorema di Bezout (retta) [6] siano $C = [f] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica di grado n, $r \not\subset C$ una retta che non è una sua componente, allora

$$\sum_{P_0 \in r} I(C, r; P_0) = n \tag{3.17}$$

teorema du Bezout (completo) siano C, D due curve algebriche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di grado m, n, se non hanno componenti in comune

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^2} I(C, D; P) = m \cdot n \tag{3.18}$$

teorema (caso affine) sia $C = [f]$ una curva algebrica, r una retta in $\mathbb{C}^2$

$$\sum_{P \in r} I(C, r; P) \leq \delta f = n \tag{3.19}$$

NB: $\sum_{P \in r} I(C, r; P) = \delta f \Leftrightarrow$ il punto all'infinito di r non è un punto all'infinito di C

molteplicità [7] sia C una curva algebrica (o proiettiva) e sia P un punto. La molteplicità $m_P(C)$ di C in P è definita

$$m_P(C) = \ min_{P \in r} I(C, r; P) \tag{3.20}$$

al variare di r tra tutte le rette del fascio di centro P, poichè esistono rette contenenti P non contenute in C

$$0 \leq m_P(C) \leq \delta C \text{ (grado di } C\text{)} \tag{3.21}$$

definizioni

- $m_P(C) = 1 \Rightarrow P$ è definito **punto semplice** (o non singolare, liscio) di C
- $m_P(C) > 1 \Rightarrow P$ è definito **punto singolare** (o multiplo) di C, diremo che un punto è *m-uplo* di C se $m_P(C) = m$
- una curva C si dice **non singolare** se tutti i suoi punti sono punti semplici

proposizione *(uguale nel caso proiettivo)* sia $C \subset \mathbb{A}^2$ la curva di equazione $f(X, Y) = 0$, $P \in \mathbb{A}^2$

$$P \text{ è semplice per } C \Leftrightarrow \text{almeno una derivata parziale di } f(X, Y) \text{ è diversa da 0 in } P \tag{3.22}$$

$$P \text{ è singolare per } C \Leftrightarrow f(X, Y) \text{ ha entrambe le derivate parziali uguali a 0 in } P \tag{3.23}$$

proposizione

una quadrica è singolare $\Leftrightarrow$ è degenere

[6] pagina 404
[7] capitolo 34 pagina 408

proposizione *(uguale nel caso proiettivo)* sia $C \subseteq \mathbb{A}^2$ la curva di equazione $f(X, Y) = 0$, un punto $P \in C$ ha molteplicità m per $C \Leftrightarrow$ si annullano in P tutte le derivate parziali di f fino all'ordine $m-1$ e almeno una dellle derivate di ordine m non si annulla

proposizione sia un punto $P \in C = [F] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$$P \text{ è semplice} \Leftrightarrow (F_{x_0}(P), F_{x_1}(P), F_{x_2}(P)) \neq (0,0,0) \tag{3.24}$$

NB: se P è semplice la retta $r : F_{x_0}(P)x_0 + F_{x_1}(P)x_1 + F_{x_2}(P)x_2 = 0$ è l'unica retta passante per P t.c. $I(C, r; P) > m_P(C) = 1$ ed è nominata retta *tangente* a C in P

tangente sia C una curva algebrica e sia $P \in C$ un suo punto u

- sia P un punto semplice una retta r t.c. $I(C, r; P) > 1$ è detta **tangente** a C nel punto P
- una retta r t.c. $I(C, r; P) > m_P(C)$ è detta **tangente principale** a C in P

asintoto sia C una curva affine e sia $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ la sua chiusura proiettiva. Una retta $r \subset \mathbb{A}^2$ la cui chiusura proiettiva è una tangente principale a $\overline{C}$ in uno dei punti impropri di C si dice *asintoto*

proposizione sia $m = m_P(C)$, le tangenti principali nel punto $P = (p_1, p_2)$ sono le rette r il cui vettore direzione (L, M) soddisfa l'equazione

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f_{X^{m-k}Y^k}(p_1, p_2) L^{m-k} M^k = 0 \tag{3.25}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \tag{3.26}$$

dalla 3.25 possiamo notare come il numero ξ di tangenti principali a C in P distinte è tale che

$$1 \leq \xi \leq m_P(C) \tag{3.27}$$

definizioni sia ξ il numero di tangenti principali

- se $\xi = m_P(C) \geq 2$, P si dice **punto multiplo ordinario**
- un punto doppio ordinario si dice **nodo**

in un punto doppio non ordinario P la curva C possiede un'unica tangente principale r ($\xi = 1$) la quale soddisfa $I(C, r; P) \geq 3$. P è definito:

- **cuspide ordinaria** $\Leftrightarrow I(C, r; P) = 3$
- **tacnodo** $\Leftrightarrow I(C, r; P) = 4$

flesso sia P un punto semplice, $P \in C$, τ la tangente in P

$$P \text{ è punto di flesso} \Leftrightarrow I(C, \tau; P) \geq 3 \tag{3.28}$$

un flesso si dice di **specie** $k (\geq 1) \Leftrightarrow I(C, \tau; P) = k + 2$, un flesso di specie $k = 1$ si dice **ordinario**

osservazione una retta r è una curva non singolare che coincide con la sua tangente $\Rightarrow$ ogni suo punto è un punto di flesso, infatti

$$I(r, r; P) = \infty \ \forall P \in r \tag{3.29}$$

hessiana sia $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva proiettiva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, di grado $n \geq 3$ definiamo *hessiana* di C la curva di equazione

$$H(X) = 0 \tag{3.30}$$

dove H(X) è il determinante della matrice hessiana $H \in M_{3\times3}$

$$H(X) = det(H) = det \begin{pmatrix} F_{00}(X) & F_{01}(X) & F_{02}(X) \\ F_{10}(X) & F_{11}(X) & F_{12}(X) \\ F_{20}(X) & F_{21}(X) & F_{22}(X) \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

NB: H(X) ha grado $gr(H(X)) = 3(n-2)$

proposizione [8] i flessi di una curva proiettiva C sono i punti semplici che la curva ha in comune con la sua essiana

$$P \in C \textbf{ flesso } \Leftrightarrow P \text{ liscio } \wedge P \in H \tag{3.32}$$

corollario una curva proiettiva di grado $n \geq 3$

- se non ha infiniti flessi, ha al più $3n(n-2)$
- se è non singolare ha almeno 1 punto di flesso

3.4 cubiche

proposizione sia una cubica $C = [F] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\ F$ omogenea, irriducibile

- $\delta C = 1 \Rightarrow C$ è proiettivamente equivalente a $[x_0]$
- $\delta C = 2 \Rightarrow C$ è proiettivamente equivalente a $[x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$
- *(teorema di Newoton)* $\delta C = 3,\ C$ liscia $\Rightarrow C$ è proiettivamente equivalente ad una cubica con traccia affine
$$y^2 = x(x-1)(x-c)\ c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \tag{3.33}$$
- $\delta C = 3,\ C$ singolare $\Rightarrow C$ è proiettivamente equivalente a una cubica con traccia affine
  a) $y^2 = x^2(x-1)$ *(nodo nell'origine)*
  b) $y^2 = x^3$ *(cuspide nell'origine)*

corollario una cubica non singolare possiede esattamente 9 flessi, una retta passante per due di essi ne contiene un terzo

corollario ogni cubica irriducibile ha almeno un flesso

definizione sia $C : y^2 = x(x+1)(x-c),\ c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

$$d(C) = \frac{(c^2 - c + 1)^3}{c^2(c-1)^2} \tag{3.34}$$

proposizione sia $C : y^2 = x(x+1)(x-c),\ C' : y^2 = x(x+1)(x-c'),\ c, c' \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

$$C, C' \text{ proiettivamente equivalenti} \Leftrightarrow d(C) = d(C') \tag{3.35}$$

definizione [9] sia C una cubica non singolare, $A, B \in C$ due punti, definisco $R(A,B)$ come l'intersezione della retta $L(A,B)$ con C

$$R(A,B) = L(A,B) \cap C \tag{3.36}$$

definendo ora un'operazione $+ : C \times C \to C$ t.c.

$$A + B = R(R(A,B), O) \tag{3.37}$$

otteniamo $(C, +)$ **gruppo abeliano** con neutro O

[8] dimostrazione pagina 418
[9] pagina 436