Equacions i inequacions

3

ACTIVITATS

1. **Escriu un polinomi de grau 3 i amb terme independent -1. Determina'n els termes i el valor numèric per a x = 2 i x = -2.**

Resposta oberta. Per exemple:

$$P(x)=2x^3+3x-1 \rightarrow \begin{cases} P(2)=2\cdot 2^3+3\cdot 2-1=21 \\ P(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)-1=-23 \end{cases}$$

2. **Efectua l'operació de polinomis següent:**

$$(-2x^3 + x^2 + x - 1) + (3x + 1)(x+3)$$

$(-2x^3 + x^2 + x - 1) + (3x + 1)(x+3) = -2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 7x + 5$

3. **Donats els polinomis següents, calcula:**

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ **$Q(x) = 3x^2 - 2x - 2$**

a) **$P(1) + P(-1)$**

b) **$P(0) - 2Q(0)$**

c) **$P(3) + Q(2)$**

d) **$P(-2) \cdot Q(-2)$**

e) **$P(-1) - 3Q(-1)$**

f) **$Q(-4) + Q(1)$**

a) $P(1)+P(-1)=-1-3=-4$

b) $P(0)-2Q(0)=1+4=5$

c) $P(3)+Q(2)=1+6=7$

d) $P(-2)\cdot Q(-2)=(-19)\cdot 14=-266$

e) $P(-1)-3Q(-1)=-3-9=-12$

f) $Q(-4)+4Q(1)=54-4=50$

4. **Efectua les divisions de polinomis següents:**

a) $(10x^4-3x^2+1):(x^2-1)$

b) $(6x^3+5x):(2x^2)$

a) $(10x^4-3x^2+1):(x^2-1)=10x^2+7$ i el residu és 8.

b) $(6x^3+5x):(2x^2)=3xy$ i el residu és 5x.

5. **Divideix aquests polinomis per mitjà de la regla de Ruffini:**

a) $(x^3+3):(x+1)$

b) $(4x^5-12x^3-20x+2):(x+2)$

a) $(x^3+3):(x+1)=x^2-x+1$ i el residu és 2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{2} \end{array}$$

b) $(4x^5-12x^3-20x+2):(x+2)=4x^4-8x^3+4x^2-8x-4$ i el residu és 10.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & 0 & -12 & 0 & -20 & 2 \\ -2 & & -8 & 16 & -8 & 16 & 8 \\ \hline & 4 & -8 & 4 & -8 & -4 & \boxed{10} \end{array}$$

6. Comprova si els nombres següents són arrels del polinomi

$P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

a) x = 1 **b) x = 2** **b) x = -1** **b) x = -4**

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 = 0$

Per tant, x = 1 és una arrel del polinomi.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 36$

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 8 = -18$

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0$

Per tant, x = -4 és una arrel del polinomi.

7. Calcula les arrels enteres dels polinomis que tens a continuació.

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2$ **b)** $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(x^3 + 4x^2 + x - 6) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

	1	4	1	–6
1		1	5	6
	1	5	6	0
–2		–2	–6	
	1	3	0	
–3		–3		
	1	0		

Les arrels enteres són {–3, –2, 0, 1}.

b) S'aplica Ruffini directament:

	1	–5	–29	105
7		7	14	–105
	1	2	–15	0
–5		–5	15	
	1	–3	0	
3		3		
	1	0		

Les arrels enteres són {–5, 3, 7}.

8. Factoritza els polinomis següents:

a) $2x^4 - 2x^2$ **b)** $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x$

a) $2x^4 - 2x^2 = 2x^2(x-1)(x+1)$

b) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2(x^2+1)$

9. Determina les arrels enteres d'aquests polinomis:

a) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 18x$ **b)** $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$

a) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 18x = x(2x^3 - 13x^2 + 27x - 18) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 = 0 \end{cases}$

	2	–13	27	–18
2		4	–18	18
	2	–9	9	$\boxed{0}$
3		6	–9	
	2	–3	$\boxed{0}$	

L'última arrel no és entera: $2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

Per tant, les arrels enteres són {0, 2, 3}.

b) S'aplica Ruffini directament:

	3	–7	–7	3
–1		–3	10	–3
	3	–10	3	$\boxed{0}$
3		9	–3	
	3	–1	$\boxed{0}$	

L'última arrel no és entera: $3x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{3}$

Per tant, les arrels enteres són {–1, 3}.

10. Simplifica les fraccions algèbriques següents:

a) $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ **b)** $\frac{2x^2+2x-12}{4x+12}$

a) $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$

b) $\frac{2x^2+2x-12}{4x+12}=\frac{2(x-2)(x+3)}{4(x+3)}=\frac{x-2}{2}$

11. Redueix a comú denominador aquestes fraccions:

a) $\frac{5}{x^2+2x-3}$ **b)** $\frac{3x}{x^2-1}$ **c)** $\frac{x-1}{x^2+2x+1}$

m.c.m. $(x^2+2x-3, x^2-1, x^2+2x+1)=(x+1)^2(x+3)(x-1)$

$$\frac{5}{x^2+2x-3}=\frac{5(x+1)^2}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$$

$$\frac{3x}{x^2-1}=\frac{3x(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$$

$$\frac{x-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x-1)^2(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$$

12. Opera i simplifica.

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}$$

$$\frac{3}{3^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}=\frac{x^2+4x+18}{6x(x+2)}$$

13. Efectua les operacions següents:

a) $\frac{5}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2-1}{3x}$ **b)** $\frac{x-1}{x^2+2x+1}:\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

a) $\frac{5}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2-1}{3x}=\frac{5(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)\cdot 3x}=\frac{5x+5}{3x^2+9x}$

b) $\frac{x-1}{x^2+2x+1}:\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)(x-2)}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

14. Classifica i resol aquestes equacions de segon grau:

a) $x^2-10x+21=0$

b) $3x^2+20x+12=0$

c) $3x^2+9x-4=0$

d) $4x^2-12x+9=0$

e) $3x^2-18x=0$

f) $4x^2-36=0$

g) $-8x^2+40=0$

h) $-5x^2+30x=0$

a) Equació completa:

$$x^2-10x+21=0\ \to x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 21}}{2\cdot 1}$$

$$\to x=\frac{10\pm 4}{2}\ \to\ \begin{cases}x_1=7\\x_2=3\end{cases}$$

b) Equació completa:

$$x^2+20x+12=0\ \to x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot 3\cdot 12}}{2\cdot 3}$$

$$\to x=\frac{-20\pm 16}{6}\ \to\ \begin{cases}x_1=-\frac{2}{3}\\x_2=-6\end{cases}$$

c) Equació completa:

$$3x^2+9x-4=0\ \to x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}$$

$$\to x=\frac{-9\pm\sqrt{129}}{6}\ \to\ \begin{cases}x_1=0,39\\x_2=-3,39\end{cases}$$

d) Equació completa:

$$4x^2-12x+9=0\ \to x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4}$$

$$\to x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

e) Equació incompleta:

$3x^2-18x=0\ \to 3x(x-6)=0\to x_1=0\quad x_2=6$

f) Equació incompleta:

$4x^2-36=0\ \to x=\sqrt{9}\to x_1=-3\quad x_2=3$

g) Equació incompleta:

$-8x^2+40=0\ \to x=\sqrt{5}$

h) Equació incompleta:

$-5x^2+30x=0\ \to 5x(-x+6)=0\to x_1=0\quad x_2=6$

15. **Resol les equacions següents:**

a) $x^2 + 2x = 15$

b) $2x^2 = 7x + 2$

c) $3x^2 - 3 = 20 - 2(x - 5)$

d) $8x^2 + (2 - x)(5x + 1) = 15x + (3 + x)(x - 1) - 3$

a) $x^2+2x=15 \to x^2+2x-15=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-15)}}{2\cdot1}\to x=\frac{-2\pm8}{2}\to\begin{cases}x_1=-5\\x_2=3\end{cases}$$

b) $2x^2=7x+2\to 2x^2-7x-2=0$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}\to x=\frac{7\pm\sqrt{65}}{4}\to\begin{cases}x_1=\dfrac{7-\sqrt{65}}{4}=-0{,}27\\x_2=\dfrac{7+\sqrt{65}}{4}=3{,}77\end{cases}$$

c) $3x^2-3=20-2\left(x-5\right)\to 3x^2+2x-33=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot3\cdot(-33)}}{2\cdot3}\to x=\frac{-2\pm20}{6}\to\begin{cases}x_1=-\dfrac{11}{3}\\x_2=3\end{cases}$$

d) $8x^2+(2-x)(5x+1)=15x+(3+x)(x-1)-3\to 2x^2-8x+8=0$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot2\cdot8}}{2\cdot2}\to x=\frac{8\pm0}{4}\to x=2$$

16. **Determina el nombre de solucions que tenen aquestes equacions sense resoldre-les:**

a) $-2x^2+5x-8=0$

b) $9x^2+30x+25=0$

c) $-5x^2+9x-6=0$

d) $2x^2-x-3=0$

e) $-x^2+9x-2=0$

f) $0{,}34x^2+0{,}5x-1=0$

Calculem el discriminant:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = -39 < 0$. No té solució real.

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 0$. Té una solució

c) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-6) = -39 < 0$ No té solució real.

d) $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$ Té dues solucions.

e) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 73 > 0$ Té dues solucions.

f) $\Delta = b^2 - 4ac = 0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}34 \cdot (-1) = 1{,}61 > 0$ Té dues solucions.

17. **Resol les equacions biquadrades que tens a continuació:**

a) $x^4+5x^2-36=0$

b) $x^4-x^2+2=16x^2-14$

c) $11(x^4+1)-7=25x^2(1-x^2)$

a) $x^4+5x^2-36=0 \rightarrow z^2+5z-36=0$

$$z=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-36)}}{2\cdot1}\rightarrow z=\frac{-5\pm13}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=-9\\ z_2=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}z_1=-9\rightarrow x^2=-9\rightarrow \text{No té solució real}\\ z_2=4\rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2\end{cases}$$

b) $x^4-x^2+2=16x^2-14\rightarrow x^4-17x^2+16=0\rightarrow z^2-17z+16=0$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}\rightarrow z=\frac{17\pm15}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=1\\ z_2=16\end{cases}\rightarrow\begin{cases}z_1=1\rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1\\ z_2=16\rightarrow x_3=-4 \quad x_4=4\end{cases}$$

c) $11(x^4+1)-7=25x^2(1-x^2)\rightarrow 36x^4-25x^2+4=0\rightarrow 36z^2-25z+4=0$

$$z=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot4\cdot36}}{2\cdot36}\rightarrow z=\frac{25\pm7}{72}\rightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{1}{4}\\ z_2=\dfrac{4}{9}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{1}{4}\rightarrow x_1=-\dfrac{1}{2} \quad x_2=\dfrac{1}{2}\\ z_2=\dfrac{4}{9}\rightarrow x_3=-\dfrac{2}{3} \quad x_4=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

18. Resol aquestes equacions amb fraccions algèbriques:

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{1}{x}$ **b)** $\dfrac{2x^4+4}{x^4}=\dfrac{x^2-3}{x^2}+2$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{2x^4+4}{x^4}=\dfrac{x^2-3}{x^2}+2$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{1}{x}\rightarrow\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}-\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{x-1}{x(x-1)}\rightarrow x=-1$

b) $\dfrac{2x^4+4}{x^4}=\dfrac{x^2-3}{x^2}+2\rightarrow\dfrac{2x^4+4}{x^4}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{x^4}+\dfrac{2x^4}{x^4}\rightarrow x^4-3x^2-4=0$

$x^4-3x^2-4=0\rightarrow z^2-3z-4=0$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}\rightarrow z=\frac{3\pm5}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=-1\\ z_2=4\end{cases}$$

$z_1=-1\rightarrow x^2=-1\rightarrow$ No té solució real

$z_2=4\rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2$

19. Resol les equacions amb radicals següents:

a) $x-41=2\sqrt{x+1}$

b) $1+2\sqrt{x+1}=3\sqrt{4x-3}-4$

a) $x-41=2\sqrt{x+1}\rightarrow x^2-82x+1681=4(x+1)\rightarrow x^2-86x+1677=0$

$$x=\frac{86\pm\sqrt{(-86)^2-4\cdot1\cdot1677}}{2\cdot1}\rightarrow x=\frac{86\pm\sqrt{688}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=43-2\sqrt{43}\\ x_2=43+2\sqrt{43}\end{cases}$$

Comprovem i obtenim que $x_1=43+2\sqrt{43}$ és l'única solució vàlida.

b) $1+2\sqrt{x+1}=3\sqrt{4x-3}-4 \to 4(x+1)=36x-30\sqrt{4x-3}-2 \to$

$\to 900(4x-3)=1024x^2-384x+36 \to 64x^2-249x+171=0$

$$x=\frac{249\pm\sqrt{(-249)^2-4\cdot 64\cdot 171}}{2\cdot 64} \to x=\frac{249\pm 135}{128} \to \begin{cases} x_1=\frac{57}{64} \\ x_2=3 \end{cases}$$

Comprovem i obtenim que $x_2 = 3$ és l'única solució vàlida.

20. Resol les equacions següents, que es troben en forma factoritzada:

a) $2(x - 3)(x + 5)(x - 1) = 0$
b) $x^2(x + 4)(x - 4)(x - 9) = 0$
c) $(3x - 1)(2x + 3)(x + 2) = 0$
d) $3x(x + 5)^3(3x - 1) = 0$
e) $(x^2 + x - 2)(x^2 - 9) = 0$

a) $x_1=-5 \quad x_2=1 \quad x_3=3$

b) $x_1=-4 \quad x_2=0 \quad x_3=0 \quad x_4=4 \quad x_5=9$

c) $x_1=-2 \quad x_2=-\frac{3}{2} \quad x_3=\frac{1}{3}$

d) $x_1=-5 \quad x_2=-5 \quad x_3=-5 \quad x_4=0 \quad x_5=\frac{1}{3}$

e) $x_1=-3 \quad x_2=-2 \quad x_3=1 \quad x_4=3$

21. Factoritza aquestes equacions i soluciona-les:

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$
b) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
c) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 16 = 0$

a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 4) = 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -4$

b) $x(x - 3)^2(x^2 + 1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

c) $(x + 4)^2(x^2 + 1) = 0$

$x_1 = -4$

22. Escriu una equació que tingui com a solucions 2, 3 i 7. Quin és el grau mínim que pot tenir?

Resposta oberta, per exemple:

$(x-2)(x-3)(x-7)=0 \to$ El mínim grau que pot tenir és 3.

23. Resol aquestes equacions logarítmiques:

a) log (x – 2) + log (2x – 1) = log (3x – 4)

b) log (x + 3) = log (7x – 27) – log (x – 4)

a) $\log(x-2)+\log(2x-1)=\log(3x-4)\rightarrow(x-2)(2x-1)=3x-4\rightarrow 2x^2-8x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=3\end{cases}$

b) $\log(x+3)=\log(7x-27)-\log(x-4)\rightarrow(x+3)(x-4)=7x-27\rightarrow x^2-8x+15=0\rightarrow\begin{cases}x_1=5\\x_2=3\end{cases}$

24. Soluciona les equacions següents:

a) $\log_3(2x-1)=1$

b) $\log_2(3x-2)=2$

c) $\log_x 2+\log_x 5=1$

d) $\log_x 12+\log_x 18=3$

a) $\log_3(2x-1)=1\rightarrow 3=2x-1\rightarrow x=2$

b) $\log_2(3x-2)=2\rightarrow 4=3x-2\rightarrow x=2$

c) $\log_x 2+\log_x 5=1\rightarrow\log_x 10=1\rightarrow x=10$

d) $\log_x 12+\log_x 18=3\rightarrow\log_x 216=3\rightarrow x^3=216\rightarrow x=6$

25. Resol les equacions següents:

a) $5^{3x+1}=625$

b) $2^{\frac{3x+1}{4}}=\frac{1}{32}$

c) $3^{x^2-7x+12}=729$

d) $5^{\frac{x-1}{x+2}}=25$

e) $4^{x^3-7x^2+12x+3}=64$

f) $4^{x-6}=32$

g) $3^{\frac{x-2}{3}}=\frac{1}{3}$

h) $6^{2x^2+\frac{3}{5}}=6^{\frac{23x}{10}}$

i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}}=289$

j) $3^{x^4+13x^2+4}=3^{6x^3-12x}$

a) $5^{3x+1}=625\rightarrow 3x+1=4\rightarrow x=1$

b) $2^{\frac{3x+1}{4}}=\frac{1}{32}\rightarrow\frac{3x+1}{4}=-5\rightarrow x=-7$

c) $3^{x^2-7x+12}=729\rightarrow x^2-7x+12=6\rightarrow x^2-7x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-6\\x_2=-1\end{cases}$

d) $5^{\frac{x-1}{x+2}}=25\rightarrow\frac{x-1}{x+2}=2\rightarrow x=-5$

e) $4^{x^3-7x^2+12x+3}=64\rightarrow x^3-7x^2+12x+3=3\rightarrow x(x^2-7x+12)=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=3\\x_3=4\end{cases}$

f) $4^{x-6}=32 \rightarrow 2(x-6)=5 \rightarrow x=\frac{17}{2}$

g) $3^{\frac{x-2}{3}}=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{x-2}{3}=-1 \rightarrow x=-1$

h) $6^{2x^2+\frac{3}{5}}=6^{\frac{23}{10}} \rightarrow 2x^2+\frac{3}{5}=\frac{23}{10} \rightarrow 20x^2+6=23 \rightarrow 20x^2=17 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{17}{20}}$

i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}}=289 \rightarrow \frac{x-3}{3x-2}=2 \rightarrow 5x=1 \rightarrow x=\frac{1}{5}$

j) $3^{x^4+13x^2+4}=3^{6x^3-12x} \rightarrow x^4-6x^3+13x^2+12x+4=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{2} \\ x_2=\sqrt{2} \end{cases}$

26. Calcula el valor de x en aquestes equacions:

a) $4^x=2^{x-6}$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}}=9^{x-2}$

c) $49^x=7^{3-x^2}$

d) $5^{x^4+4}=25^{\frac{5x^2}{2}}$

a) $4^x=2^{x-6} \rightarrow 2x=x-6 \rightarrow x=-6$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}}=9^{x-2} \rightarrow \frac{7x-3}{4}=2(x-2) \rightarrow x=12$

c) $49^x=7^{3-x^2} \rightarrow 2x=3-x^2 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-4 \\ x_2=1 \end{cases}$

d) $5^{x^4+4}=25^{\frac{5x^2}{2}} \rightarrow x^4+4=5x^2 \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \text{ i } x_2=-2 \\ x_3=1 \text{ i } x_4=-1 \end{cases}$

27. Resol les equacions següents:

a) $3^{2x-1}-2^x=0$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}+3^{2-x}=0$

c) $5^{3x+2}=3^{5x+2}$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}}=9^{x-1}$

a) $3^{2x-1}=2^x \rightarrow (2x-1)\log 3=x\log 2 \rightarrow x(2\log 3-\log 2)=\log 3 \rightarrow x=\frac{\log 3}{2\log 3-\log 2}\approx 0{,}7304$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}+3^{2-x}=0 \rightarrow (3-x)\log\left(\frac{1}{2}\right)=(2-x)\log(-3)$

No existeixen logaritmes de nombres més grans o iguals que 0. L'equació no té solució real.

c) $5^{3x+2}=3^{5x+2} \rightarrow (3x+2)\log 5=(5x+2)\log 3 \rightarrow x(3\log 5-5\log 3)=2\log 3-2\log 5 \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{2\log 3-2\log 5}{3\log 5-5\log 3}\approx 1{,}5369$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}}=9^{x-1} \rightarrow 3^{\frac{x^2}{3}}=3^{2(x-1)} \rightarrow x^2-6x+6=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=3+\sqrt{3} \\ x_2=3-\sqrt{3} \end{cases}$

28. **Resol les inequacions següents:**

a) $3x-5<4x-7$

b) $2x-30\le 5x+3$

c) $5-(2-3x)\ge 2(3x-5)+x$

d) $2(2-x)>x-5$

a) $3x-5<4x-7\to x>2\to 2<x<+\infty\to(2,+\infty)$

b) $2x-30\le 5x+3\ \to\ x\ge -11\ \to\ -11\le x<+\infty\ \to\ [-11,+\infty)$

c) $5-(2-3x)\ge 2(3x-5)+x\ \to\ x\le\frac{13}{4}\ \to\ -\infty<x\le\frac{13}{4}\ \to\ \left(-\infty,\frac{13}{4}\right]$

d) $2(2-x)>x-5\ \to\ x<3\ \to\ -\infty<x<3\ \to\ (-\infty,3)$

29. **Resol les inequacions que tens a continuació:**

a) $1-\frac{3-2x}{3}\le\frac{x}{4}$

b) $\frac{2x-5}{3}-\frac{1-3x}{6}>1-\frac{x}{4}$

a) $1-\frac{3-2x}{3}\le\frac{x}{4}\ \to\ x\le 0\ \to\ -\infty<x\le 0\ \to\ (-\infty,0]$

b) $\frac{2x-5}{3}-\frac{1-3x}{6}>1-\frac{x}{4}\ \to\ x>2\ \to\ 2<x<+\infty\ \to\ (2,+\infty)$

30. **Resol les inequacions de segon grau amb una incògnita següents:**

a) $x^2-3x+2\le 0$

b) $x^2-3x+2\ge 0$

c) $x^2-9x>0$

d) $x^2-9<0$

e) $x^2+2\le 0$

f) $(x-3)(x+4)\ge 0$

g) $(x+3)x<4$

h) $x^2-30>x$

i) $x^2+x+3<0$

j) $4x^2-4x+1<0$

a) Resolem l'equació: $x^2-3x+2=0\to\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on la recta queda dividida.

$x=0$ $\quad x=1{,}5$ $\quad x=3$

Si $x=0\to 0^2-3\cdot 0+2>0\to(-\infty,1)$ no és solució de la inequació.

Si $x=1{,}5\to 1{,}5^2-3\cdot 1{,}5+2<0\to(1,2)$ és solució de la inequació.

Si $x=3\to 3^2-3\cdot 3+2>0\to(2,+\infty)$ no és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació ho són també de la inequació.

Per tant, la solució és $[1,2]$.

b) Es dedueix de l'apartat anterior que les solucions de la inequació són:

$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

c) Resolem l'equació: $x^2-9x=0\to\begin{cases}x_1=0\\x_2=9\end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on la recta queda dividida:

x = -1 x = 1 x = 10

Si x = -1 → $(-1)^2 - 9 \cdot (-1) > 0$ → (-∞, 0) és solució de la inequació.

Si x = 1 → $1^2 - 9 \cdot 1 < 0$ → (0,92) no és solució de la inequació.

Si x = 10 → $10^2 - 9 \cdot 10 > 0$ → (9,+∞) és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és (-∞, 0) ∪ (9,+∞)

d) Resolem l'equació: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on la recta queda dividida.

x = -10 x = 0 x = 10

Si x = -10 → $(-10)^2 - 9 > 0$ → (-∞, -3) no és solució de la inequació.

Si x = 0 → $0^2 - 9 < 0$ → (-3, 3) és solució de la inequació.

Si x = 10 → $10^2 - 9 > 0$ → (3,+∞) no és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és (-3, 3).

e) El primer membre de la inequació sempre serà positiu.

Per tant, la inequació no té solució.

f) Resolem l'equació: $(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on la recta queda dividida.

x = -10 x = 0 x = 10

Si x = -10 → (-10 – 3)(-10 + 4) > 0 → (-∞, -4) és solució de la inequació.

Si x = 0 → (0 – 3)(0 + 4) < 0 → (-4, 3) no és solució de la inequació.

Si x = 10 → (10 – 3)(10 + 4) > 0 → (3,+∞) és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació ho són també de la inequació.

Per tant, la solució és (-∞, -4] ∪ [3,+∞)

g) Resolem l'equació: $(x + 3)x = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on la recta queda dividida.

x = -10 x = 0 x = 10

Si x = -10 → (-10 + 3) · (-10) – 4 > 0 → (-∞, -4) no és solució de la inequació.

Si x = 0 → (0 + 3) · 0 - 4 < 0 → (-4, 1) és solució de la inequació.

Si x = 10 → (10 + 3) · 10 + 4) > 0 → (1,+∞) no és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació ho són de la inequació.

Per tant, la solució és (-4,1).

h) Resolem l'equació: $x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on la recta queda dividida.

x = -10 x = 0 x = 10

Si x = -10 → $(-10)^2 - 10 - 30 > 0$ → (-∞, -5) no és solució de la inequació.

Si x = 0 → $0^2 - 0 - 30 < 0$ → (-5, 6) és solució de la inequació.

Si x = 10 → 10^2 - 10 – 30 > 0 → (6,+∞) no és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és (-5,6).

i) El primer membre de la inequació és sempre més gran o igual que zero.

Per tant, la inequació no té solució.

j) El primer membre de la inequació és sempre més gran o igual que zero.

Per tant, la inequació no té solució.

31. Resol aquestes inequacions de grau superior seguint el mètode utilitzat per a les inequacions de segon grau:

a) $(x-2)(x-3)(x^2-2) \geq 0$

b) $x(x-4)(x+1)(x^3-1) \leq 0$

c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

a) Resolem l'equació: $(x-2)(x-3)(x^2-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on queda dividida la recta:

x = -10 x = 0 x = 1,5 x = 2,5 x = 10

Si x = -10 → $(-10-2)(-10-3)((-10)^2-2) > 0$ → $(-\infty, \sqrt{2})$ és solució.

Si x = 0 → $(0-2)(0-3)(0^2-2) < 0$ → $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ no és solució.

Si x = 1,5 → $(1{,}5-2)(1{,}5-3)(1{,}5^2-2) > 0$ → $(\sqrt{2},2)$ és solució.

Si x = 2,5 → $(2{,}5-2)(2{,}5-3)(2{,}5^2-2) < 0$ → (2,3) no és solució.

Si x = 10 → $(10-2)(10-3)(10^2-2) > 0$ → (3, +∞) és solució.

Les solucions de l'equació ho són també de la inequació.

Per tant, la solució és $(-\infty, -\sqrt{2},] \cup [\sqrt{2}, 2] \cup [3,+\infty)$

b) Resolem l'equació: $x(x-4)(x+1)(x^3-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on queda dividida la recta:

x = -10 x = - 0,5 x = 0,5 x = 2 x = 10

Si x = -10 → $-10 \cdot (-10-4)(-10+1)((-10)^3-1) > 0$ → (-∞, -1) no és solució.

Si x = -0,5 → $-0{,}5 \cdot (-0{,}5-4)(-0{,}5+1)((-0{,}5)^3-1) < 0$ → (-1, 0) és solució.

Si x = 0,5 → $0{,}5 \cdot (0{,}5-4)(0{,}5+1)(0{,}5^3-1) < 0$ → (0, 1) no és solució.

Si x = 2 → $2 \cdot (2-4)(2+1)(2^3-1) < 0$ → (1, 4) és solució.

Si x = 10 → $10 \cdot (10-4)(10+1)(10^3-1) > 0$ → (4,+∞) no és solució.

Les solucions de l'equació ho són també de la inequació.

Per tant, la solució és $[-1,0] \cup [1,4]$.

c) Resolem l'equació: $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

Prenem un punt de cada interval on queda dividida la recta:

$x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = 0 \rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 < 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ és solució.

Si $x = 10 \rightarrow 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 6 > 0 \rightarrow (1,+\infty)$ no és solució.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és $(-\infty, 1)$.

d) Resolem l'equació: $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 2{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^4 - 5 \cdot (-10)^3 + 4 \cdot (-10)^2 + 9 \cdot (-10) - 9 > 0 \rightarrow (-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2})$ és solució.

Si $x = 0 \rightarrow 0^4 - 5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 9 < 0 \rightarrow (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 1)$ no és solució.

Si $x = 2 \rightarrow 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 9 > 0 \rightarrow (1, \frac{1+\sqrt{13}}{2})$ és solució.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5^4 - 5 \cdot 2{,}5^3 + 4 \cdot 2{,}5^2 + 9 \cdot 2{,}5 - 9 < 0 \rightarrow (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 3)$ no és solució.

Si $x = 10 \rightarrow 10^4 - 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 - 9 > 0 \rightarrow (3,+\infty)$ és solució.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és $(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \cup (3, +\infty)$.

SABER FER

32. Determina el valor de k per a cadascun dels casos següents:

a) $3x^2 - 6x + k = 0$ tingui 2 solucions. **d) $x^2 + kx + 25 = 0$ tingui 2 solucions.**

b) $3x^2 - 6x + k = 0$ tingui 1 solució. **e) $x^2 + kx + 25 = 0$ tingui 1 solució.**

c) $3x^2 - 6x + k = 0$ no tingui solució. **f) $x^2 + kx + 25 = 0$ no tingui solució.**

a) $(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k > 0 \to 36 - 12k > 0 \to k < 3$

b) $(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k > 0 \to 36 - 12k > 0 \to k < 3$

c) $(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k > 0 \to 36 - 12k > 0 \to k < 3$

d) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 > 0 \to k^2 - 100 > 0$

e) k ha de pertànyer a l'interval $(-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$

f) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 0 \to k^2 - 100 = 0 \to k_1 = -10 \quad k_2 = 10$

g) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 < 0 \to k^2 - 100 < 0$

h) k ha de pertànyer a l'interval $(-10, 10)$

33. Resol les equacions següents:

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ **c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$** **e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$**

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ **d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$** **f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$**

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \to z^2 - 9z + 8 = 0$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \to z = \frac{9 \pm 7}{2} \to \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 8 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \to x^3 = 1 \to x_1 = 1$ $\quad$ $z_2 = 8 \to x^3 = 8 \to x_2 = 2$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \to z^2 + 7z - 8 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \to z = \frac{-7 \pm 9}{2} \to \begin{cases} z_1 = -8 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$z_1 = -8 \to x^3 = -8 \to x_1 = -2$ $\quad$ $z_2 = 1 \to x^3 = 1 \to x_2 = 1$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \to z^2 - 7z - 8 = 0$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \to z = \frac{7 \pm 9}{2} \to \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 8 \end{cases}$$

$z_1 = -1 \to x^3 = -1 \to x_1 = -1$ $\quad$ $z_2 = 8 \to x^3 = 8 \to x_2 = 2$

d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0 \to z^2 + 9z + 8 = 0$

$$z = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \to z = \frac{-9 \pm 7}{2} \to \begin{cases} z_1 = -8 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

$z_1 = -8 \to x^3 = -8 \to x_1 = -2$ $\quad$ $z_2 = -1 \to x^3 = -1 \to x_2 = -1$

e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0 \rightarrow z^2 - 15z - 16 = 0$

$$z = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{15 \pm 17}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$z_1 = -1 \rightarrow x^4 = -1 \rightarrow$ No té solució real $\quad z_2 = 16 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0 \rightarrow z^2 - 17z + 16 = 0$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{17 \pm 15}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \qquad z_2 = 16 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x_3 = -2 \quad x_4 = 2$

34. Resol les equacions amb les fraccions algèbriques següents:

a) $\frac{2x^3 - x^2 - 2x + 25}{x^2 - 1} = 2x$ **b)** $\frac{x^3 + x^2 + 7x + 2}{x^2 + 2x + 4} = x - 2$ **c)** $\frac{x^3 + 5x^2 - 5x - 21}{x^2 + x - 6} = x + 3$

a) $\frac{2x^3 - x^2 - 2x + 25}{x^2 - 1} = 2x \rightarrow x^2 - 25 = 0 \rightarrow x_1 = -5 \quad x_2 = 5$

b) $\frac{x^3 + x^2 + 7x + 2}{x^2 + 2x + 4} = x - 2 \rightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = -5$

c) $\frac{x^3 + 5x^2 - 5x - 21}{x^2 + x - 6} = x + 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

35. Resol aquestes equacions amb fraccions algèbriques:

a) $\frac{x^2 - x}{3x + 1} = \frac{-x}{2x - 1}$ **c)** $\frac{x - 1}{x - 3} = \frac{x - 2}{x - 4}$

b) $\frac{x}{x + 6} = \frac{x - 5}{x - 3}$ **d)** $\frac{x - 3}{x - 1} = \frac{x - 4}{x - 2}$

a) $\frac{x^2 - x}{3x + 1} = \frac{-x}{2x - 1} \rightarrow 2x^3 + 2x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $\frac{x}{x + 6} = \frac{x - 5}{x - 3} \rightarrow 4x - 30 = 0 \rightarrow x = \frac{15}{2}$

c) $\frac{x - 1}{x - 3} = \frac{x - 2}{x - 4} \rightarrow 2 = 0 \rightarrow$ No té solució

d) $\frac{x - 3}{x - 1} = \frac{x - 4}{x - 2} \rightarrow 2 = 0 \rightarrow$ No té solució

36. Resol aquestes equacions:

a) $\sqrt{x^2 - 3} = 1$ **c)** $\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x}{2} + 6}$

b) $x = \sqrt{x + 6}$ **d)** $\sqrt{3x + 19} = x + 3$

a) $\sqrt{x^2-3}=1 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2$

b) $x=\sqrt{x+6} \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=3$

c) $\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{x}{2}+6} \rightarrow x^2-2x-24=0 \rightarrow x_1=-4 \quad x_2=6$

d) $\sqrt{3x+19}=x+3 \rightarrow x^2+3x-10=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=-5$

Si substituïm els parells de solucions obtingudes en l'equació corresponent, podem afirmar que totes són solucions vàlides.

37. **Resol les equacions següents:**

a) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x}=2$

b) $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}=3$

c) $\sqrt{2x}+\sqrt{4x-7}=x+1$

d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+3x+9}=2x+1$

a) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x}=2 \rightarrow x^2-8x+16=0 \rightarrow x=4$

b) $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}=3 \rightarrow x^4-2x^3-23x^2-12x+216=0 \rightarrow x=3$

c) $\sqrt{2x}+\sqrt{4x-7}=x+1 \rightarrow x^4-8x^3-8x+64=0 \rightarrow x=2 \quad x=8$

d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+3x+9}=2x+1 \rightarrow 9x^4-24x^3-90x^2-84x+45=0 \rightarrow x=5$

38. **Resol aquestes equacions:**

a) $x^3-3x^2+2x=0$

b) $3x^5-13x^4+16x^3-4x^2=0$

c) $4x^5-12x^4+9x^3-2x^2=0$

d) $x^4-1=0$

a) $x^3-3x^2+2x=0 \rightarrow x(x-1)(x-2)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=2$

b) $3x^5-13x^4+16x^3-4x^2=0 \rightarrow x^2(3x-1)(x-2)^2=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{3} \quad x_3=2$

c) $4x^5-12x^4+9x^3-2x^2=0 \rightarrow x^2(2x-1)^2(x-2)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{2} \quad x_3=2$

d) $x^4-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$

39. **Calcula el valor de x en els logaritmes que tens a continuació:**

a) $\log_5 x=4$

b) $\log(x-1)=2$

c) $\log_3(7x-1)=3$

d) $\log(x^2+36)=2$

a) $\log_5 x=4 \rightarrow x=5^4=625$

b) $\log(x-1)=2 \rightarrow x-1=100 \rightarrow x=101$

c) $\log_3(7x-1)=3 \rightarrow 7x-1=27 \rightarrow x=4$

d) $\log(x^2+36)=2 \rightarrow x^2+36=100 \rightarrow x^2=64 \rightarrow \begin{cases} x_1=8 \\ x_2=-8 \end{cases}$

40. Calcula el valor de x en les expressions següents:

a) $\log_x 32 = 5$

b) $\log_x 0{,}1 = -1$

c) $\log_{x^2} 64 = 3$

d) $\log_{(x-2)} 27 = 3$

a) $\log_x 32=5 \rightarrow x^5=2^5 \rightarrow x=2$

b) $\log_x 0{,}1=-1 \rightarrow x^{-1}=10^{-1} \rightarrow x=10$

c) $\log_{x^2} 64=3 \rightarrow x^6=2^6 \rightarrow x=2$

d) $\log_{(x-2)} 27=3 \rightarrow (x-2)^3=3^3 \rightarrow x-2=3 \rightarrow x=5$

41. Resol la inequació

$$\frac{x^2-2x+4}{x-4} \geq x$$

$$\frac{x^2-2x+4}{x-4} \geq x \rightarrow \frac{2(x+2)}{x-4} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 2(x+2)=0 \rightarrow x=-2 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

Hi ha tres intervals diferents. Per saber quin és interval solució, s'agafa un punt de cada un i es substitueix en la inequació:

$x=-10 \in (-\infty,-2) \rightarrow \frac{2\cdot(-10+2)}{-10-4}=\frac{-16}{-14}=\frac{8}{7} \geq 0 \rightarrow$ És interval solució

$x=0 \in (-2,4) \rightarrow \frac{2\cdot(0+2)}{0-4}=\frac{4}{-4}=-1<0 \rightarrow$ No és interval solució

$x=10 \in (4,+\infty) \rightarrow \frac{2\cdot(10+2)}{10-4}=\frac{24}{6}=4 \geq 0 \rightarrow$ És interval solució

A continuació, es comprova si els extrems dels intervals són solucions:

$x=-2 \rightarrow \frac{2\cdot(-2+2)}{-2-4}=\frac{0}{-6}=0 \geq 0 \rightarrow$ És solució

$x=4 \rightarrow \frac{2\cdot(4+2)}{4-4}=\frac{12}{0} \rightarrow$ No és solució

Per tant, la solució és $(-\infty,-2]\cup(4,+\infty)$.

ACTIVITATS FINALS

42. Escriu en cada cas un polinomi que et demanem i calcula'n el valor per a x = 3 i x = -1.

a) De grau 4 i sense terme independent.

b) De grau 3 i sense termes de grau 2 ni 1.

c) De grau 2 i que la suma dels coeficients sigui 10.

d) Que sigui un binomi de grau 3 amb terme independent.

Resposta oberta, per exemple:

a) $P(x) = x^4 + x \rightarrow \begin{cases} P(3) = 3^4 + 3 = 84 \\ P(-1) = (-1)^4 - 1 = 0 \end{cases}$

b) $P(x) = 4x^3 + 2 \rightarrow \begin{cases} P(3) = 4 \cdot 3^3 + 2 = 110 \\ P(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 2 = -2 \end{cases}$

c) $P(x) = 2x^2 + 5x + 3 \rightarrow \begin{cases} P(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 3 = 36 \\ P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 3 = 0 \end{cases}$

d) $P(x) = x^3 - 1 \rightarrow \begin{cases} P(3) = 3^3 - 1 = 26 \\ P(-1) = (-1)^3 - 1 = -2 \end{cases}$

43. Efectua les operacions de polinomis següents:

a) $(3x^2 - 2x + 5) + (x^3 - 5x^2 + 2x - 1) - (x^4 + 1)$

b) $\left(-2x^3 + \frac{5}{2}x - 1\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)$

c) $(5 + 3x^2)\left[\left(9 - \frac{x^3}{3}\right) - \left(x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 5\right)\right]$

d) $(3x - 2) \cdot (2x - 3) - \left[\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]$

a) $(3x^2 - 2x + 5) + (x^3 - 5x^2 + 2x - 1) - (x^4 + 1) = -x^4 - 2x^2 + 3$

b) $\left(-2x^3 + \frac{5}{2}x - 1\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) = -2x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

c) $(5 + 3x^2)\left[\left(9 - \frac{x^3}{3}\right) - \left(x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 5\right)\right] = -3x^6 - x^5 - \frac{28}{5}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 11x^2 + 20$

d)
$$(3x-2) \cdot (2x-3) - \left[\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right] = 6x^2 - 9x - 4x + 6 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^6}{8} =$$
$$= -\frac{x^6}{8} + \frac{5}{12}x^5 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 6x^2 - 13x + 6$$

44. **Calcula el valor numèric d'aquest polinomi per als valors de x següents:**

$$P(x) = 6x^4 - 61x^3 + 185x^2 - 158x + 40$$

a) $x = -5$ c) $x = 4$ e) $x = -\frac{1}{2}$ g) $x = -\frac{2}{3}$

b) $x = 5$ d) $x = -4$ f) $x = \frac{1}{2}$ h) $x = \frac{2}{3}$

a) $P(-5) = 6\cdot(-5)^4 - 61\cdot(-5)^3 + 185\cdot(-5)^2 - 158\cdot(-5) + 40 = 16830$

b) $P(5) = 6\cdot 5^4 - 61\cdot 5^3 + 185\cdot 5^2 - 158\cdot 5 + 40 = 0$

c) $P(4) = 6\cdot 4^4 - 61\cdot 4^3 + 185\cdot 4^2 - 158\cdot 4 + 40 = 0$

d) $P(-4) = 6\cdot(-4)^4 - 61\cdot(-4)^3 + 185\cdot(-4)^2 - 158\cdot(-4) + 40 = 1264$

e) $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 61\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 185\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 158\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 40 = \frac{693}{4}$

f) $P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 61\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 185\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 158\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 40 = 0$

g) $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4 - 61\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 185\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 158\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 40 = \frac{6664}{27}$

h) $P\left(\frac{2}{3}\right) = 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 61\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 185\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 158\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + 40 = 0$

45. **Fes les divisions de polinomis següents i digues quin el polinomi quocient i el residu en cada cas:**

a) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) : (x^2 - 3)$
b) $(5x^2 - 3x + 2) : (2x - 3)$
c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x^3 - 2x + 1)$
d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x^3 - x + 1)$

a) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) : (x^2 - 3) = x^3 + x^2 + 4x + 4$ amb residu $-12x - 11$

b) $(5x^2 - 3x + 2) : (2x - 3) = \frac{5}{2}x + \frac{9}{4}$ amb residu $\frac{35}{4}$

c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x^3 - 2x + 1) = 3x^3 + 6x + 2$ amb residu $12x^2 - 3x + 1$

d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x^3 - x + 1) = x^5 - x^2 + x - 1$ amb residu $x^2 - 2x + 2$

46. **Divideix els polinomis següents per mitjà de la regla de Ruffini:**

a) $(2x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 1) : (x - 1)$
b) $(4x^2 - x + 1) : (x + 1)$
c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x + 3)$
d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x - 2)$

a)

	2	3	7	−11	0	−1
1		2	5	12	1	1
	2	5	12	1	1	0

Quocient: $2x^4+5x^3+12x^2+x+1$ Residu: 0

b)

	4	−1	1
−1		−4	5
	4	−5	6

Quocient: $4x-5$ Residu: 6

c)

	3	0	0	5	0	−1	3
−3		−9	27	−81	228	−684	2 055
	3	−9	27	−76	228	−685	2 058

Quocient: $3x^5-9x^4+27x^3-76x^2+228x-685$ Residu: 2058

d)

	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1
2		2	4	6	12	26	52	102	204
	1	2	3	6	13	26	51	102	205

Quocient: $x^7+2x^6+3x^5+6x^4+13x^3+26x^2+51x+102$ Residu: 205

47. Comprova si els valors x = -1, x = 0 i x = 1 són arrels d'aquests polinomis:

a) $x^5-x^4-3x^3+x^2+2x$

b) $x^5+4x^4-6x^3-6x^2-7x-10$

c) x^5-1

d) $x^5-x^4-\frac{13}{4}x^3+\frac{13}{4}x^2-3x+3$

	$P(x)$	$P(-1)$	$P(0)$	$P(1)$	Arrels
a)	$x^5-x^4-3x^3+x^2+2x$	0	0	0	$x_1=-1$ $x_2=1$ $x_3=0$
b)	$x^5+4x^4-6x^3-6x^2-7x-10$	0	−10	−24	$x=-1$
c)	x^5-1	−2	−1	0	$x=1$
d)	$x^5-x^4-\frac{13}{4}x^3+\frac{13}{4}x^2-3x+3$	$\frac{21}{2}$	3	0	$x=1$

48. Indica quins dels polinomis següents tenen entre les seves arrels els valors x = -2 i x = 1.

a) $4x^3+3x^2-9x+2$

b) $x^5-3x^4-7x^3+27x^2-18x$

c) $x^5-2x^4-22x^3+8x^2+117x+90$

d) $x^5-6x^4-6x^3+64x^2-27x-90$

	$P(x)$	$P(-2)$	$P(1)$	Arrels
a)	$4x^3+3x^2-9x+2$	0	0	$x=-2$ $x=1$
b)	$x^5-3x^4-7x^3+27x^2-18x$	120	0	$x=1$
c)	$x^5-2x^4-22x^3+8x^2-117x+90$	468	−43	Cap no és arrel.
d)	$x^5-6x^4-6x^3+64x^2-27x-90$	140	−64	Cap no és arrel.

49. Comprova si $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ és divisible entre $x - 2$ i, en cas afirmatiu, troba un polinomi $N(x)$ que permeti escriure $M(x)$ de la forma $M(x) = (x - 2) \cdot N(x)$.

Dividim el polinomi entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & & 4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomi $N(x)$ és quocient:

$N(x) = 2x^2 - x + 2$

50. Determina les arrels dels polinomis següents:

a) $(x - 3)(x + 5)(x - 2)$
b) $x(x - 2)^2(2x + 1)$
c) $(2x - 1)(3x + 2)(x + 3)^2$
d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$
f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$
g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$
h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

a) $x_1 = -5 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$

b) $x_1 = -\dfrac{1}{2} \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2$

c) $x_1 = -3 \quad x_2 = -\dfrac{2}{3} \quad x_3 = \dfrac{1}{2}$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 4$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & -22 & -8 \\ 2 & & 6 & 26 & 8 \\ \hline & 3 & 13 & 4 & \boxed{0} \\ -4 & & -12 & -4 & \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$3x + 1 = 0 \quad x = -\dfrac{1}{3}$

$x_1 = -4 \quad x_2 = -\dfrac{1}{3} \quad x_3 = 2$

g)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -11 & 21 & -16 & 4 \\ 1 & & 2 & -9 & 12 & -4 \\ \hline & 2 & -9 & 12 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 4 & -10 & 4 & \\ \hline & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\ 2 & & 4 & -2 & & \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$2x - 1 = 0 \quad x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$

e)

	1	8	17	10
−1		−1	−7	−10
	1	7	10	0
−2		−2	−10	
	1	5	0	
−5		−5		
	1	0		

$x_1 = -5 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = -1$

h)

	1	−4	−12	32	64
−2		−2	12	0	−64
	1	−6	0	32	0
−2		−2	16	−32	
	1	−8	16	0	
4		4	−16		
	1	−4	0		
4		4			
	1	0			

51. **Calcula les arrels d'aquests polinomis:**

a) $(x+2)(x-5)(x-1)$

b) $x^2(x+2)(3x-1)$

c) $(x^2-4)(x^2-9)$

d) $6x^4+13x^3-18x^2-7x+6$

a) $x_1 = -2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 5$

b) $x_1 = -2 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = \dfrac{1}{3}$

c) $x_1 = -3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = 3$

d) $x_1 = -3 \qquad x_2 = -\dfrac{2}{3} \qquad x_3 = \dfrac{1}{2} \qquad x_4 = 1$

52. **Escriu un polinomi de segon grau, Q(x), que tingui les arrels 1 i 3, i tal que Q(0) = 6.**

$$Q(x) = c(x-1)(x-3) = cx^2 - 4cx + 3c$$

$$Q(0) = 3c = 6 \rightarrow c = 2 \rightarrow Q(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

53. **Determina el valor de m perquè el polinomi $P(x) = mx^3 - 6x^2 - 4x + 8$ tingui arrel.**

$$P(2) = 8m - 24 - 8 + 8 = 0 \rightarrow 8m - 24 = 0 \rightarrow m = 3$$

54. **Calcula perquè el polinomi $x^3 - 2x^2 + qx + 5$ sigui divisible entre el polinomi $x + 1$.**

	1	–2	q	5
–1		–1	3	$-3-q$
	1	–3	$3+q$	$2-q$

$\rightarrow 2 - q = 0 \rightarrow q = 2$

55. **Quin valor ha de prendre a perquè el residu de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre $x - 4$ sigui 67?**

Dividim el polinomi entre x – 4:

	1	a	-3	$-a$
4		4	$16+4a$	$52+16a$
	1	$4+a$	$13+4a$	$52+15a$

Igualem el residu a 67:

$52 + 15a = 67 \rightarrow a = 1$

56. Calcula a i b perquè el polinomi $x^3 + ax^2 + bx - 6$ sigui divisible entre x - 2 i entre x + 3.

Dividim el polinomi entre x – 2:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ 2 & & 2 & 4+2a & 8+4a+2b \\ \hline & 1 & 2+a & 4+2a+b & \boxed{2+4a+2b} \end{array}$$

Dividim el polinomi entre x + 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ -3 & & -3 & 9-3a & -27+9a-3b \\ \hline & 1 & -3+a & 9-3a+b & \boxed{-33+9a-3b} \end{array}$$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2+4a+2b=0 \\ -33+9a-3b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 2 \qquad b = -5$$

57. Escriu dos polinomis de segon grau que tinguin arrels 2 i -3.

Resposta oberta, per exemple:

$P(x) = x^2 + x - 6$ $\qquad\qquad$ $Q(x) = 2x^2 + 2x - 12$

58. Escriu un polinomi de tercer grau que tingui com a única arrel -1

Resposta oberta, per exemple:

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

59. Determina un polinomi P(x) de segon grau que tingui arrels 1 i -2, i tal que P(3) = 30.

$$P(x) = c(x-1)(x+2) = cx^2 + cx - 2c$$

$$P(3) = 9c + 3c - 2c = 30 \rightarrow c = 3 \rightarrow P(x) = 3x^2 + 3x - 6$$

60. Escriu un polinomi Q(x) de tercer grau que tingui arrels 1, -1 i -2, i tal que Q(0) = -6.

$$Q(x) = c(x-1)(x+1)(x+2) = cx^3 + 2cx^2 - cx - 2c$$

$$Q(0) = -2c = -6 \rightarrow c = 3 \rightarrow Q(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$$

61. **Efectua les sumes i les restes següents de fraccions algèbriques:**

a) $\frac{y^2}{x}+\frac{x^3}{y^2}-\frac{3}{x^2}$

b) $\frac{5}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$

c) $\frac{3x^2}{x^2-4}+\frac{2}{x-2}+\frac{5x}{x+2}$

d) $\frac{1-x}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$

a) $\frac{y^2}{x}+\frac{x^3}{y^2}-\frac{3}{x^2}=\frac{xy^4}{x^2y^2}+\frac{x^5}{x^2y^2}-\frac{3y^2}{x^2y^2}=\frac{x^5+xy^4-3y^2}{x^2y^2}$

b) $\frac{5}{x}+\frac{3x-2}{x+1}=\frac{5x+5}{x(x+1)}+\frac{3x^2-2x}{x(x+1)}=\frac{3x^2+3x+5}{x^2+x}$

c) $\frac{3x^2}{x^2-4}+\frac{2}{x-2}+\frac{5x}{x+2}=\frac{3x^2}{x^2-4}+\frac{2x+4}{x^2-4}+\frac{5x^2-10x}{x^2-4}=\frac{8x^2-8x+4}{x^2-4}$

d) $\frac{1-x}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{-x^2+2x-1}{x^2-1}+\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{4x-2}{x^2-1}$

62. **Fes aquestes operacions i simplifica el resultat:**

a) $\frac{3x-1}{4x+12}-\frac{x+2}{4x-12}$

b) $\frac{2-x}{x^2-3x}-\frac{1}{4x-12}+\frac{5}{6x-18}$

c) $\frac{4}{a+b}-\frac{5}{a-b}$

d) $\frac{4-x^2}{x+2}+\frac{9-x^2}{x+3}$

a) $\frac{3x-1}{4x+12}-\frac{x+2}{4x-12}=\frac{2x^2-15x-3}{4(x+3)(x-3)}$

b) $\frac{2-x}{x^2-3x}-\frac{1}{4x-12}+\frac{5}{6x-18}=\frac{5x-24}{12x(3-x)}$

c) $\frac{4}{a+b}-\frac{5}{a-b}=\frac{a+9b}{(a+b)(b-a)}$

d) $\frac{4-x^2}{x+2}+\frac{9-x^2}{x+3}=5-2x$

63. **Comprova si el nombre que hi ha indicat en cada apartat és solució de l'equació.**

a) $2(x^2-x-2)+6(3-x)-2(x-3)-8=0$
$x=-2$

b) $2(-x-2)(1-x)-2(x+1)=0$
$x=\sqrt{3}$

c) $(2+x)5x-(3x-4)+3(x-1)-x^2+2(x+4)=0$
$x=-\frac{3}{2}$

d) $3x(x-2)+2(1+9x)+11=0$
$x=\frac{1}{2}$

a) No, les solucions són $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$.

b) Si, les solucions són $x_1 = -\sqrt{3}$ i $x_2 = \sqrt{3}$.

c) Si, la solució és $x = -\frac{3}{2}$

d) No aquesta equació no té solució real.

64. Resol aquestes equacions de segon grau:

a) $3x^2 - 48 = 0$

b) $3x^2 - 48x = 0$

c) $3x^2 + 48 = 0$

d) $x^2 + 3x + 9 = 0$

e) $x^2 - 3x + 9 = 0$

f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0$

g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0$

h) $x^2 + x - 18 = 0$

a) $3x^2 - 48 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x_1 = -4 \quad x_2 = 4$

b) $3x^2 - 48x = 0 \rightarrow x(3x - 48) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 16$

c) $3x^2 + 48 = 0 \rightarrow x^2 = -16 \rightarrow \text{No té solució real}$

d) $x^2 + 3x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow \text{No té solució real}$

e) $x^2 - 3x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow \text{No té solució real}$

f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-3)} \rightarrow x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{288}}{-6} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 3 - 2\sqrt{2} \quad x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3}}{2 \cdot (-3)} \rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{360}}{-6} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -3 - \sqrt{10} \quad x_2 = -3 + \sqrt{10}$

$\rightarrow x_1 = -3 - \sqrt{10} \quad x_2 = -3 + \sqrt{10}$

h) $x^2 + x - 18 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{73}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{73}}{2} \quad x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{73}}{2}$

65. **Resol aquestes equacions de segon grau amb denominadors:**

a) $\frac{3x^2-1}{2}+\frac{x^2-x}{3}-x^2=0$

b) $\frac{x-2}{2}+1=\frac{3x^2-2x+3}{3}+\frac{19x}{6}$

c) $\frac{x(x+1)-10}{5}=\frac{x^2+2x}{2}-2$

d) $x^2+\frac{11x-5}{6}=\frac{2x^2-1}{3}+x$

a) $\frac{3x^2-1}{2}+\frac{x^2-x}{3}-x^2=0 \rightarrow 5x^2-2x-3=0 \rightarrow x_1=-\frac{3}{5} \quad x_2=1$

b) $\frac{x-2}{2}+1=\frac{3x^2-2x+3}{3}+\frac{19x}{6} \rightarrow x^2+2x+1=0 \rightarrow x=-1$

c) $\frac{x(x+1)-10}{5}=\frac{x^2+2x}{2}-2 \rightarrow 3x^2+8x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\frac{8}{3}$

d) $x^2+\frac{11x-5}{6}=\frac{2x^2-1}{3}+x \rightarrow 2x^2+5x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

66. **La suma de les solucions d'una equació de segon grau és 4 i el producte és – 21.**

a) Escriu l'equació corresponent.

b) Determina aquestes solucions.

a) $x(4-x) = -21$

b) $-x^2 + 4x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot 21}}{2\cdot(-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

Les solucions són – 3 i 7.

67. **Indica el nombre de solucions de cadascuna de les equacions següents:**

a) $3x^2-4x+5=0$

b) $12-2x^2+3x=0$

c) $-x+x^2-3=0$

d) $6x-x^2+9=0$

a) $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 5=-44<0 \rightarrow$ No té solucions reals

b) $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot(-2)\cdot 12=105>0 \rightarrow$ Té dues solucions

c) $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=13>0 \rightarrow$ Té dues solucions

d) $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\cdot(-1)\cdot 9=72>0 \rightarrow$ Té dues solucions

68. **Resol l'equació general de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$ utilitzant les igualtats notables. Relaciona el resultat que obtinguis amb el nombre de solucions que té l'equació de segon grau.**

$a x^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{bx}{a}\right)2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ → No té solució

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ → Té una solució

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ → Té dues solucions

Determina el valor de k perquè aquesta equació tingui solució x = 7.

$x^2 - 13x + k = 0$

Per a aquest valor de k, quina és l'altra solució?

$$7^2 - 13 \cdot 7 + k = 0 \rightarrow k = 42$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 42}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 7$$

69. **Quins són els valors que han de prendre a i b perquè l'equació $ax^2 + bx - 30 = 0$ tingui les solucions, $x_1 = 5$ i $x_2 = -3$?**

Substituïm les dues solucions dins l'equació i formem un sistema on les incògnites son a i b:

25a + 5b – 30 = 0

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{25a + 5b - 30 = 0} \\ \mathbf{9a - 3b - 30 = 0} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \mathbf{x_1 = 3 \rightarrow 75a + 15b = 90} \\ \mathbf{x_2 = 5 \rightarrow 45a - 15b = 150} \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{120a - 0b = 240 \rightarrow a = 2}$$

→ 9· 2 – 3b -30 = 0 → b=-4

70. **Sense resoldre-les, digues quina és la suma i quin és el producte de les arrels de les equacions següents, i després calcula-les per comprovar-ho:**

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$
b) $x^2 + x = 0$
c) $6x^2 + 13x - 5 = 0$
d) $9x^2 + 9x - 10 = 0$
e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
f) $10x^2 + 3x - 1 = 0$

Partim d'una equació de segon grau de solucions a i b: (x – a)(x – b) = 0

Després, multipliquem: $x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Per tant, el producte de les arrels és el terme independent i la suma de les arrels és l'oposat al coeficient del terme de primer grau.

a) El producte de les arrels és -14 i la suma és -5.

   Les arrels són $x_1 = -7$ i $x_2 = 2$.

b) El producte de les arrels és 0 i la suma és -1.

   Les arrels són $x_1 = -1$ i $x_2 = 0$.

c) El producte de les arrels és $-\frac{5}{6}$ i la suma és $-\frac{13}{6}$.

Les arrels són $x_1 = -\frac{5}{2}$ i $x_2 = \frac{1}{3}$.

d) El producte de les arrels és $-\frac{10}{9}$ i la suma és -1

Les arrels són $x_1 = -\frac{5}{3}$ i $x_2 = \frac{2}{3}$.

e) El producte de les arrels és $\frac{1}{4}$ i la suma és 1

L'arrel és $x = \frac{1}{2}$.

f) El producte de les arrels és $-\frac{1}{10}$ i la suma és $-\frac{3}{10}$.

Les arrels són $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{1}{5}$.

71. Escriu equacions de segon grau que tinguin les solucions següents:

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = -4, x_2 = 4$

c) $x_1 = 0, x_2 = -2$

d) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$

a) $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$

b) $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$

c) $x(x+2) = x^2 + 2x$

d) $9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = 9x^2 + 9x + 2$

72. Resol les equacions biquadrades que tens a continuació:

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c) $3x^4 - 30x^2 + 27 = 0$

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0 \rightarrow 25z^2 - 101z + 4 = 0$

$$z = \frac{101 \pm \sqrt{(-101)^2 - 4\cdot 25\cdot 4}}{2\cdot 25} \rightarrow z = \frac{101 \pm 99}{50} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{25} \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{1}{25} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{1}{5} \qquad\qquad z_2 = 4 \rightarrow x_3 = -2 \quad x_4 = 2$$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \rightarrow z^2 - 25z + 144 = 0$

$$z = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\cdot 1\cdot 144}}{2\cdot 1} \rightarrow z = \frac{25 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3 \qquad\qquad z_2 = 16 \rightarrow x_3 = -4 \quad x_4 = 4$$

c) $3x^4-30x^2+27=0 \rightarrow 3z^2-30z+27=0$

$$z=\frac{30\pm\sqrt{(-30)^2-4\cdot3\cdot27}}{2\cdot3} \rightarrow z=\frac{30\pm24}{6} \rightarrow \begin{cases} z_1=1 \\ z_2=9 \end{cases}$$

$z_1=1 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1 \qquad\qquad z_2=9 \rightarrow x_3=-3 \quad x_4=3$

73. Determina les solucions de les equacions següents:

a) $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}-\dfrac{1}{4x}=0$

b) $9(1-x^2)(1+x^2)+80x^2=0$

c) $1-\dfrac{18}{x^2}+\dfrac{81}{x^4}=0$

a) $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}-\dfrac{1}{4x}=0 \rightarrow 4x(x^3-x)-(x^2-1)=0 \rightarrow 4x^4-5x^2+1 \rightarrow$ És una equació biquadrada:

$$z=x^2 \rightarrow 4z^2-5z+1 \rightarrow \begin{cases} z_1=1 \\ z_2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad z_1=1 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases} \qquad z_2=\frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_3=\dfrac{1}{2} \\ x_4=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b) $9(1-x^2)(1+x^2)+80x^2=0 \rightarrow -9x^4+80x^2+9=0 \rightarrow$ És una equació biquadrada:

$$z=x^2 \rightarrow -9z^2+80z+9 \rightarrow \begin{cases} z_1=9 \\ z_2=-\dfrac{1}{9} \end{cases} \qquad z_1=9 \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases} \qquad z_2=-\frac{1}{9} \rightarrow \begin{cases} x_3=\dfrac{1}{3} \\ x_4=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

c) $1-\dfrac{18}{x^2}+\dfrac{18}{x^4}=0 \rightarrow x^4-18x^2+81=0 \rightarrow$ És una equació biquadrada:

$$z=x^2 \rightarrow z^2-18z+81 \rightarrow z=9 \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

74. Resol les equacions biquadrades que hi ha a continuació:

a) $x^8+3x^4-4=0$

b) $x^6-19x^3-216=0$

c) $x^{12}+7x^6+12=0$

d) $36x^{10}+x^5-6=0$

a) $x^8+3x^4-4=0 \rightarrow z^2+3z-4=0$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{-3\pm5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-4 \\ z_2=1 \end{cases}$$

$z_1=-4 \rightarrow x^4=-4 \rightarrow$ No té solució real $\quad z_2=1 \rightarrow x^4=1 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$

b) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0 \rightarrow z^2 - 19z - 216 = 0$

$$z = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-216)}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{19 \pm \sqrt{1225}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{19-35}{2} = -8 \\ z_2 = \frac{19+35}{2} = 27 \end{cases}$$

$z_1 = -8 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x = -2$ $\quad$ $z_2 = 27 \rightarrow x^3 = 27 \rightarrow x = 3$

c) $x^{12} + 7x^6 + 12 = 0 \rightarrow z^2 + 7z + 12 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{-7 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -4 \\ z_2 = -3 \end{cases}$$

$z_1 = -4 \rightarrow x^6 = -4 \rightarrow$ No té solució real

$z_2 = -3 \rightarrow x^6 = -3 \rightarrow$ No té solució real

d) $36x^{10} + x^5 - 6 = 0 \rightarrow 36z^2 + z - 6 = 0$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 36 \cdot (-6)}}{2 \cdot 36} \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{865}}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-1-\sqrt{865}}{72} \simeq -0{,}42 \\ z_2 = \frac{-1+\sqrt{865}}{72} \simeq 0{,}39 \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{865}}{72} \rightarrow x^5 = \frac{-1-\sqrt{865}}{72} \rightarrow x_1 = \sqrt[5]{\frac{-1-\sqrt{865}}{72}} \simeq -0{,}84$$

$$z_2 = \frac{-1+\sqrt{865}}{72} \rightarrow x^5 = \frac{-1+\sqrt{865}}{72} \rightarrow x_2 = \sqrt[5]{\frac{-1+\sqrt{865}}{72}} \simeq 0{,}83$$

75. Busca les solucions de les equacions amb fraccions algèbriques següents i comprova'n, com a mínim, una de les solucions:

a) $\frac{1-x^2}{x} + \frac{3x+1}{4} + \frac{1}{6} = 0$

b) $\frac{x^2+4}{x} + \frac{1-4x}{3} + \frac{8}{15} = 0$

c) $\frac{2-x}{2x} = \frac{5}{6} - \frac{3x^2-2x}{3x}$

a) $\frac{1-x^2}{x}+\frac{3x+1}{4}+\frac{1}{6}=0 \rightarrow 12-12x^2+9x^2+3x+2x=0 \rightarrow -3x^2+5x+12=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-3)\cdot 12}}{2\cdot(-3)} \rightarrow x=\frac{-5\pm 13}{-6} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{4}{3} \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$\frac{1-3^2}{3}+\frac{3\cdot 3+1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{-8}{3}+\frac{10}{4}+\frac{1}{6}=0$$

b) $\frac{x^2+4}{x}+\frac{1-4x}{3}+\frac{8}{15}=0 \rightarrow 15x^2+60+5x-20x^2+8x=0$

$\rightarrow -5x^2+13x+60=0$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} \rightarrow x=\frac{-13\pm 37}{-10} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{12}{5} \\ x_2=5 \end{cases}$$

$$\frac{5^2+4}{5}+\frac{1-4\cdot 5}{3}+\frac{8}{15}=\frac{29}{5}-\frac{19}{3}+\frac{8}{15}=0$$

c) $\frac{2-x}{2x}=\frac{5}{6}-\frac{3x^2-2x}{3x} \rightarrow 6-3x=5x-6x^2+4x \rightarrow x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \rightarrow x=1$$

$$\frac{2-1}{2\cdot 1}-\frac{5}{6}+\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0$$

76. Resol les equacions amb fraccions algèbriques que hi ha a continuació:

a) $\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{7x^2-7-6x}{6x^2-6}$

b) $\frac{x+4}{4x+7}=\frac{x-3}{x^2-x-6}$

c) $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{7}{4x^2-1}=\frac{x}{2x+1}$

d) $\frac{4}{x^2-1}+1=\frac{x}{x+1}$

e) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x^2-9}$

a) $\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{7x^2-7-6x}{6x^2-6} \rightarrow \frac{6x^4-6}{6x(x^2-1)}-\frac{6x^4-6x^2}{6x(x^2-1)}=\frac{7x^3-6x^2-7x}{6x(x^2-1)} \rightarrow$

$\rightarrow 7x^3-12x^2-7x+6=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{22}}{7} \quad x_3=\frac{-1+\sqrt{22}}{7}$

b) $\frac{x+4}{4x+7}=\frac{x-3}{x^2-x-6} \rightarrow (x+4)(x^2-x-6)=(4x+7)(x-3) \rightarrow$

$$\rightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

L'única solució vàlida és $x=-1$, ja que $x=3$ es descarta perquè fa 0 el segon denominador.

c) $\dfrac{x+1}{2x-1} - \dfrac{7}{4x^2-1} = \dfrac{x}{2x+1} \rightarrow \dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2-1} - \dfrac{7}{4x^2-1} = \dfrac{2x^2-x}{4x^2-1} \rightarrow$

$\rightarrow 4x-6=0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{4}{x^2-1} + 1 = \dfrac{x}{x+1} \rightarrow \dfrac{4}{x^2-1} + \dfrac{x^2-1}{x^2-1} = \dfrac{x^2-x}{x^2-1} \rightarrow 3+x=0 \rightarrow x=-3$

e) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{x^2-9} \rightarrow \dfrac{x-3}{x^2-9} - \dfrac{x+3}{x^2-9} = \dfrac{1}{x^2-9} \rightarrow -7=0 \rightarrow$ No té solució real.

77. **Determina les solucions d'aquestes equacions amb fraccions algèbriques:**

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12} = 6$

b) $3x^2(x^2-2) = \dfrac{x^2-2}{3}$

c) $8x + \dfrac{12}{x} = \dfrac{20}{x^3}$

d) $\dfrac{9x}{2x^2} = 1 - 3x^2$

a) $\frac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12} = 6 \rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow (z = x^2) \rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0$

$z = \dfrac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot1\cdot36}}{2\cdot1} = \dfrac{13\pm5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 4 \end{cases}$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

$z_2 = 4 \rightarrow x_3 = -2 \qquad x_4 = 2$

b) $3x^2(x^2-2) = \frac{x^2-2}{3} \rightarrow 9x^4 - 19x^2 + 2 = 0 \rightarrow (z = x^2) \rightarrow 9z^2 - 19z + 2 = 0$

$z = \dfrac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot9\cdot2}}{2\cdot9} = \dfrac{19\pm17}{18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = \frac{1}{9} \end{cases}$

$z_1 = 2 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{3}$

$z_2 = \frac{1}{9} \rightarrow x_3 = -\frac{1}{3} \qquad x_4 = \frac{1}{3}$

c) $8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3} 3 \rightarrow 2x^4 + 3x^2 - 5 = 0 \rightarrow (z = x^2) \rightarrow 2z^2 + 3z - 5 = 0$

$z = \dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2} = \dfrac{-3\pm7}{4} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$

$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$

$z_2 = -\frac{5}{2} \rightarrow$ No té solució real.

d) $\frac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2 \rightarrow 6x^4 - 2x^2 + 9 = 0 \rightarrow \left(z = x^2\right) \rightarrow 6z^2 - 2z + 9 = 0$

$z = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 6\cdot 9}}{2\cdot 6} = \frac{2\pm\sqrt{-212}}{12}$

No té solució real.

78. Resol les equacions amb fraccions algèbriques següents:

a) $\frac{4}{x+3} = \frac{1}{2x+1}$

b) $\frac{x+2}{2-x} + \frac{3x}{2x-1} = 0$

c) $\frac{3}{x-3} - \frac{2}{3x+5} = 0$

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{x-3}{x-2}$

a) $\frac{4}{x+3} = \frac{1}{2x+1} \rightarrow 8x+4 = x+3 \rightarrow 7x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{7}$

b) $\frac{x+2}{2-x} + \frac{3x}{2x-1} = 0 \rightarrow \frac{x+2}{2-x} = \frac{3x}{1-2x} \rightarrow x^2 - 9x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9+\sqrt{73}}{2} \\ x_2 = \frac{9-\sqrt{73}}{2} \end{cases}$

c) $\frac{3}{x-3} - \frac{2}{3x+5} = 0 \rightarrow \frac{3}{x-3} = \frac{2}{3x+5} \rightarrow 9x+15 = 2x-6 \rightarrow x = -3$

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{x-3}{x-2} \rightarrow x^2 - 2x = x^2 - 4x + 3 \rightarrow -2x = -4x + 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

79. Troba les solucions de les equacions amb fraccions algèbriques següents:

a) $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2x}$

b) $x^2 - 3x - 4 + \frac{12}{x} = 0$

c) $\frac{x^2+x-6}{x} + 3 = 0$

d) $\frac{2x}{3x-4} - \frac{x}{x-1} = 0$

a) $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2x} \rightarrow \frac{2(x+1)(x-1)}{2x^2(x+1)} = \frac{4x^2 + x(x+1)}{2x^2(x+1)} \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 2 = 4x^2 + x^2 + 1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow$ No existeix solució real.

b) $x^2 - 3x - 4 + \frac{12}{x} = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

c) $\frac{x^2+x-6}{x} + 3 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 + 3x = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2+\sqrt{10} \\ x_2 = -2-\sqrt{10} \end{cases}$

d) $\frac{2x}{3x-4} - \frac{x}{x-1} = 0 \rightarrow 2x(x-1) = (3x-4)x \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

80. **Calcula el valor de x en les equacions següents:**

a) $1+\frac{5}{1+x}+\frac{x}{1-x}=0$

b) $\frac{10x+1}{2(x+1)}-\frac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2}=3$

c) $\frac{2x-1}{x-4}+\frac{x}{x-1}-\frac{2x+3}{x}=1$

d) $\frac{1}{x-1}+1=\frac{x^2}{x^2+3x-4}$

e) $\frac{x^2-5x+2}{2x-5}+\frac{x-2}{x+1}+\frac{2x-5}{x-1}=-1+\frac{-3x}{4}$

f) $\frac{x^2-4}{x^2+x+1}-\frac{x+1}{x-2}+2x+\frac{1}{7}=0$

g) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x^3-1}+\frac{2x}{x^2+x+1}=0$

a) $1+\frac{5}{1+x}+\frac{x}{1-x}=0 \to 1-x^2+5(1-x)+x(1+x)=0 \to 6=4x \to x=\frac{3}{2}$

b) $\frac{10x+1}{2(x+1)}-\frac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2}=3 \to (10x+1)(x+1)-(4x^2+3x-4)=6(x+1)^2 \to$

$\to 10x^2+x+10x+1-4x^2-3x+4=6x^2+12x+6 \to -4x-1=0 \to x=-\frac{1}{4}$

c) $\frac{2x-1}{x-4}+\frac{x}{x-1}-\frac{2x+3}{x}=1 \to (2x-1)(x-1)x+x^2(x-4)-(2x+3)(x-4)(x-1)=x(x-4)(x-1) \to$

$\to 5x^2+4x-12=0 \to \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=\frac{6}{5} \end{cases}$

d) $\frac{1}{x-1}+1=\frac{x^2}{x^2+3x-4} \to \frac{1}{x-1}+1=\frac{x^2}{(x+4)(x-1)} \to (x+4)+(x^2+3x-4)=x^2 \to 4x=0 \to x=0$

e) $\frac{x^2-5x+2}{2x-5}+\frac{x-2}{x+1}+\frac{2x-5}{x-1}=-1+\frac{-3x}{4} \to$

$\to 4(x^2-5x+2)(x^2-1)+4(x-2)(2x-5)(x-1)+4(2x-5)^2(x+1)=-4(2x-5)(x^2-1)-3x(2x-5)(x^2-1) \to$

$\to 10x^4-3x^3-130x^2+123x+72=0 \to \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3,8186 \\ x_3=-0,41092 \\ x_4=1,5295 \end{cases}$

L'única solució que es pot obtenir amb els mètodes que hem vist aquest curs és x = 3.

f) $\frac{x^2-4}{x^2+x+1}-\frac{x+1}{x-2}+2x+\frac{1}{7}=0 \to$

$\to 7(x^2-4)(x-2)-7(x+1)(x^2+x+1)+14x(x^2+x+1)(x-2)+(x^2+x+1)(x-2)=0 \to$

$14x^4+43x^3+13x^2-15x+47=0 \to$ No té solució real.

g) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x^3-1}+\frac{2x}{x^2+x+1}=0 \rightarrow \frac{x}{(x+1)(x-1)}+\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{2x}{x^2+x+1}=0 \rightarrow$

$x(x^2+x+1)+x(x+1)+2x(x+1)(x-1)=0 \rightarrow 3x^3+2x^2=0 \rightarrow x^2(3x+2)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$

81. **Completa les equacions següents escrivint un nombre en el segon membre, de manera que tinguin la solució indicada:**

a) $\sqrt{x+7}-2\sqrt{4x+1}=\blacksquare$
$x=2$

b) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+5}}=\blacksquare-\frac{1}{\sqrt{4x}}$
$x=4$

a) $\sqrt{x+7}-2\sqrt{4x+1}=-3$

b) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+5}}=\frac{13}{12}-\frac{1}{\sqrt{4x}}$

82. **Determina la solució d'aquestes equacions amb radicals:**

a) $\sqrt{6x-2}=4$

b) $\sqrt{6x-8}=x$

c) $\sqrt{x^2+9}-1=x$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1}=x+1$

a) $\sqrt{6x-2}=4 \rightarrow 6x-2=16 \rightarrow 6x-18=0 \rightarrow x=3$

b) $\sqrt{6x-8}=x \rightarrow 6x-8=x^2 \rightarrow x^2-6x+8=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=4$

c) $\sqrt{x^2+9}-1=x \rightarrow x^2+9=x^2+2x+1 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1}=x+1 \rightarrow 2x^2+7x-1=x^2+2x+1 \rightarrow x^2+5x-2=0 \rightarrow x_1=\frac{-5-\sqrt{33}}{2} \quad x_2=\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$

83. **Resol les equacions amb radicals següents:**

a) $\sqrt[3]{x+9}=4$

b) $\sqrt[3]{x^2-7x}=2$

a) $\sqrt[3]{x+9}=4 \rightarrow x+9=64 \rightarrow x-55=0 \rightarrow x=55$

b) $\sqrt[3]{x^2-7x}=2 \rightarrow x^2-7x=8 \rightarrow x^2-7x-8=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=8$

84. **Resol aquestes equacions amb radicals:**

a) $\sqrt{2x-10}=5\sqrt{x-10}$

b) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}=5$

c) $\sqrt{4x-11}=7\sqrt{2x-29}$

d) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=3$

a) $\sqrt{2x-10}=5\sqrt{x-10} \rightarrow 2x-10=25(x-10) \rightarrow 23x-240=0 \rightarrow x=\frac{240}{23}$

b) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}=5 \to x+2=x+10\sqrt{x+3}+28 \to x-\frac{94}{25}=0 \to x=\frac{94}{25}$

En comprovar el resultat s'observa que no és solució.

c) $\sqrt{4x-11}=7\sqrt{2x-29} \to 4x-11=49(2x-29) \to 94x-1410=0 \to x=15$

d) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=3 \to x+3=x+6\sqrt{x+1}+10 \to x-\frac{13}{36}=0 \to x=\frac{13}{36}$

En comprovar el resultat s'observa que no és solució.

85. **Resol les equacions amb fraccions algèbriques següents:**

a) $\sqrt{3x^2-4x+5}+3x+5=\frac{x^2}{5}$

b) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x+3}=5$

c) $\sqrt{x^2+x+\frac{5}{9}}=4-\sqrt{3x+8}$

d) $\sqrt{5-8x}+\sqrt{x^2-6x+\frac{3}{4}}=-10x$

a) $\sqrt{3x^2-4x+5}+3x+5=\frac{x^2}{5} \to \left(\sqrt{3x^2-4x+5}\right)^2=\left(\frac{x^2}{5}-3x-5\right)^2 \to$

$$\to 3x^2-4x+5=\frac{x^4}{25}-\frac{6x^3}{5}+7x^2+30x+25 \to -\frac{x^4}{25}+\frac{6x^3}{5}-4x^2-34x-20=0 \to \begin{cases} x_1=-3,3205 \\ x_2=24,456 \\ x_3=-0,64731 \\ x_4=9,5122 \end{cases}$$

Després de la comprovació, les úniques solucions vàlides són x_1 i x_2.

Cap d'aquestes dues solucions es pot obtenir amb els mètodes que hem vist en aquest curs.

b) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x+3}=5 \to \left(\sqrt{x^2+4x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x+3}\right)^2 \to$

$$\to x^2+4x+4=x+28-10\sqrt{x+3} \to \left(x^2+3x-24\right)^2=\left(-10\sqrt{x+3}\right)^2 \to$$

$$\to x^4+6x^3-39x^2-244x+276=0 \to \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=6 \end{cases}$$

Després de la comprovació, s'observa que l'única solució vàlida és $x_1 = 1$.

c) $\sqrt{x^2+x+\frac{5}{9}}=4-\sqrt{3x+8} \to \left(\sqrt{x^2+x+\frac{5}{9}}\right)^2=\left(4-\sqrt{3x+8}\right)^2 \to$

$$\to x^2+x+\frac{5}{9}=16+3x+8-8\sqrt{3x+8} \to \left(x^2-2x-\frac{211}{9}\right)^2=\left(-8\sqrt{3x+8}\right)^2 \to$$

$$\to x^4-4x^3-\frac{386}{9}x^2-\frac{884}{9}x=+\frac{3049}{81}=0 \to \begin{cases} x_1=\frac{1}{3} \\ x_2=9,535 \end{cases}$$

Després de la comprovació, s'observa que l'única solució vàlida és $x_1=\frac{1}{3}$.

d) $\sqrt{5-8x}+\sqrt{x^2-6x+\frac{3}{4}}=-10x \rightarrow \left(\sqrt{5-8x}\right)^2=\left(-10x-\sqrt{x^2-6x+\frac{3}{4}}\right)^2 \rightarrow$

$5-8x=101x^2-6x+\frac{3}{4}+10x\sqrt{4x^2-24x+3} \rightarrow \left(101x^2-2x+\frac{17}{4}\right)^2=100x^2(4x^2-24x+3) \rightarrow$

$\rightarrow 9801x^4+2804x^3-\frac{2309x^2}{2}-17x+\frac{289}{16}=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=-0,1221 \end{cases}$

L'única solució que es pot obtenir amb els mètodes vistos en el curs és $x=-\frac{1}{2}$.

86. Resol les equacions amb radicals següents:

a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0$

b) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+\sqrt{x}=1$

a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0 \rightarrow 2x+2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1}+6=4x+8 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{x+7}\sqrt{x-1}=x+1 \rightarrow x^2+6x-7=x^2+2x+1 \rightarrow 4x-8=0 \rightarrow x=2$

b) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+\sqrt{x}=1 \rightarrow x-\sqrt{1-x}=x-2\sqrt{x}+1 \rightarrow$

$\rightarrow 2\sqrt{x}=1+\sqrt{1-x} \rightarrow 4x=-x+2\sqrt{1-x}+2 \rightarrow 5x-2=2\sqrt{1-x} \rightarrow$

$\rightarrow 25x^2-20x+4=4-4x \rightarrow 25x^2-16x=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\frac{16}{25} \end{cases}$

En comprovar el resultat veiem que l'única solució vàlida és $x_2=\frac{16}{25}$.

87. Calcula la solució de les equacions següents:

a) $(x^2-4)(x^2-3x+2)=0$

b) $(x^2-x)(x^2+16)=0$

c) $(x-1)(x^2+4)(x^2-9)=0$

d) $(x^2-4x-5)(x^2-2x-8)=0$

a) $(x^2-4)(x^2-3x+2)=0 \rightarrow (x-1)(x+2)(x-2)^2=0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1=-2 \quad x_2=1 \quad x_3=2$

b) $(x^2-x)(x^2+16)=0 \rightarrow x(x-1)(x^2+16)=0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1=0 \quad x_2=1$

c) $(x-1)(x^2+4)(x^2-9)=0 \rightarrow (x-1)(x-3)(x+3)(x^2+4)=0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1=-3 \quad x_2=1 \quad x_3=3$

d) $(x^2-4x-5)(x^2-2x-8)=0 \rightarrow (x+1)(x+2)(x-5)(x-4)=0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1=-2 \quad x_2=-1 \quad x_3=4 \quad x_4=5$

88. **Determina la solució de les equacions que tens a continuació:**

a) $x^3+4x^2+x-6=0$

b) $x^2(x+6)=32$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1)$

d) $2x^3-5x^2-14x+8=0$

a)

	1	4	1	−6
1		1	5	6
	1	5	6	0
−2		−2	−6	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

$x_1=-3 \quad x_2=-2 \quad x_3=1$

b) $x^2(x+6)=32 \rightarrow x^3+6x^2-32=0$

	1	6	0	−32
2		2	16	32
	1	8	16	0
−4		−4	−16	
	1	4	0	
−4		−4		
	1	0		

$x_1=-4 \quad x_2=2$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1) \rightarrow x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$

	1	2	−11	−12	36
2		2	8	−6	−36
	1	4	−3	−18	0
2		2	12	18	
	1	6	9	0	
−3		−3	−9		
	1	3	0		
−3		−3			
	1	0			

$x_1=-3 \quad x_2=2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & -14 & 8 \\
-2 & & -4 & 18 & -8 \\
\hline
 & 2 & -9 & 4 & \boxed{0} \\
4 & & 8 & -4 & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 4$

89. **Troba la solució d'aquestes equacions:**

a) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1)$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0$

d) $x^2(x^2 - x - 6) = 3(x^2 - 3x)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & -7 & -1 & 2 \\
1 & & 6 & -1 & -2 \\
\hline
 & 6 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

Resolem l'equació $6x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 7}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{2}{3} \qquad x_3 = 1$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1) \rightarrow 4x^4 - 12x^3 - 21x^2 + 53x + 30 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & -12 & -21 & 53 & 30 \\
-2 & & -8 & 40 & -38 & -30 \\
\hline
 & 4 & -20 & 19 & 15 & \boxed{0} \\
3 & & 12 & -24 & -15 & \\
\hline
 & 4 & -8 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Resolem l'equació $4x^2 - 8x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 12}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = \frac{5}{2} \qquad x_4 = 3$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0 \to x(x^3 + 3x^2 - 11x + 2) = 0$

	1	3	−11	2
2		2	10	−2
	1	5	−1	0

Resolem l'equació $x^2 + 5x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 2$$

d) $x^2(x^2 - x - 6) = 3(x^2 - 3x) \to x^2(x-3)(x+2) - 3x(x-3) = 0 \to x(x-3)\left[x(x+2) - 3\right] \to$

$\to x(x-3)(x^2 + 2x - 3) = 0 \to x(x-3)(x+3)(x-1) = 0 \to x_1 = 0 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = -3 \qquad x_4 = 1$

90. Calcula la solució de les equacions que tens a continuació:

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

c) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

d) $x^3 - 7x^2 + 4x - 28 = 0$

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0
2		2	−6	
	1	−3	0	
3		3		
	1	0		

Les arrels enteres són {1, 2, 3}.

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

	1	−3	−13	15
1		1	−2	−15
	1	−2	−15	0
5		5	15	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

Les arrels enteres són {3, 1, 5}.

c) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

	1	1	−5	−5	4	4
1		1	2	−3	−8	−4
	1	2	−3	−8	−4	0
−1		−1	−1	4	4	
	1	1	−4	−4	0	
2		2	6	4		
	1	3	2	0		

–2		–2	–2
	1	1	0
–1		–1	
	1	0	

Les arrels enteres són {–2, –1, 1, 2}.

d) $x^3 - 7x^2 + 4x - 28 = 0$

	1	–7	4	–28
7		7	0	28
	1	0	4	0

$x^2 + 4 = 0$ no té solucions reals, per tant, l'única arrel entera és x = 7.

91. Resol les equacions següents:

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{3} + x \cdot \dfrac{x+1}{6} = x + 1$

b) $3x^2\left(4 + \dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{6(17x - 4)}{x}$

c) $\dfrac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0$

d) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{2x^2(x-2) + 4x}{x^2 + 1} = 3$

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{3} + x\dfrac{x+1}{6} = x + 1 \rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$

	2	3	–5	–6
–1		–2	–1	6
	2	1	–6	0
–2		–4	6	
	2	–3	0	

$2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \dfrac{3}{2}$

b) $3x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)=\frac{6(17x-4)}{x} \rightarrow 4x^3+7x^2-34x+8=0$

	4	7	−34	8
2		8	30	−8
	4	15	−4	0
−4		−16	4	
	4	−1	0	

$4x-1=0$

$x=\frac{1}{4}$

$x_1=-4 \quad x_2=\frac{1}{4} \quad x_3=2$

c) $\frac{x^2}{16}(x+7)+x+1=0 \rightarrow x^3+7x^2+16x+16=0$

	1	7	16	16
−4		−4	−12	−16
	1	3	4	0

Resolem l'equació $x^2 + 3x + 4 = 0$:

x = $\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}$ → No té solució real.

$x=-4$

d) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \rightarrow -5x^3+8x^2+3x+2=0$

	−5	8	3	2
2		−10	−4	−2
	−5	−2	−1	0

Resolem l'equació $-5x^2 - 2x - 1 = 0$:

x = $\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-5)\cdot(-1)}}{2\cdot(-5)}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{-10}$ → No té solució real.

x = 2

e) $\frac{2x^2(x-2)}{x^2+1}=3 \rightarrow 2x^3-7x^2+4x-3=0$

	2	−7	4	−3
3		6	−3	3
	2	−1	1	0

Resolem l'equació $2x^2 - x + 1 = 0$:

x = $\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4}$ → No té solució real.

x = 3

92. Escriu alguna equació que tingui les característiques següents:

a) **Els valors $x = 1$, $x = 2$ i $x = 3$ són solucions de l'equació.**

b) **Una equació de grau 3 amb una única solució real, que és $x = \frac{1}{2}$.**

c) **Una equació de grau 3 amb dues solucions reals que siguin l'una oposada de l'altra.**

d) **Una equació de grau 2 amb coeficients enters i amb solucions $x = -\frac{1}{3}$ i $x = \frac{2}{5}$.**

e) **Una equació de grau 3 amb coeficients enters i els valors $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = -3$ son dues de les seves solucions.**

Resposta oberta, per exemple:

a) $7(x-1)(x-2)(x-3)=0 \rightarrow 7x^3-42x^2+77x-42=0$

b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3=0 \rightarrow x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0 \rightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=0$

c) Si dues de les solucions són reals, aleshores la tercera solució també serà real.

$(x-1)(x+1)x=0 \rightarrow x^3-x=0$

d) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)=0 \rightarrow x^2-\frac{x}{15}-\frac{2}{15}=0 \rightarrow 15x^2-x-2=0$

e) Agafant com a tercera solució $x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+3)=0 \rightarrow 2x^3+6x^2-x-3=0$

93. Determina el valor de x en les expressions següents:

a) $\log_x 3 = -1$

b) $\log_x 5 = 2$

c) $\log_x 3 = -2$

d) $\log_x 2 = 5$

a) $\log_x 3=-1 \rightarrow x^{-1}=3 \rightarrow x=\frac{1}{3}$

b) $\log_x 5=2 \rightarrow x^2=5 \rightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{5} \\ x_2=-\sqrt{5} \end{cases}$

L'única solució vàlida és $x_1=\sqrt{5}$.

c) $\log_x 3=-2 \rightarrow x^{-2}=3 \rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

L'única solució vàlida és $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\log_x 2=5 \rightarrow x^5=2 \rightarrow x=\sqrt[5]{2}$

94. **Determina el valor de x en les expressions següents:**

a) $\log_x 8 = 4$
b) $\log_x \frac{1}{4} = -4$
c) $\log_x 3 = 5$
d) $\log_x \frac{4}{9} = -2$
e) $\log_x 343 = 3$
f) $\log_x 2 = 4$
g) $\log_x\left(-\frac{125}{8}\right) = -3$
h) $\log_x 49 = 6$

a) $\log_x 8 = 4 \rightarrow x^4 = 8 \rightarrow x = \sqrt[4]{8}$

b) $\log_x \frac{1}{4} = -4 \rightarrow x^{-4} = \frac{1}{4} \rightarrow x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

c) $\log_x 3 = 5 \rightarrow x^5 = 3 \rightarrow x = \sqrt[5]{3}$

d) $\log_x \frac{4}{9} = -2 \rightarrow x^{-2} = \frac{4}{9} \rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$

L'única solució vàlida és $x_1 = \frac{3}{2}$.

e) $\log_x 343 = 3 \rightarrow x^3 = 343 \rightarrow x = 7$

f) $\log_x 2 = 4 \rightarrow x^4 = 2 \rightarrow x = \sqrt[4]{2}$

g) $\log_x\left(-\frac{125}{8}\right) = -3 \rightarrow x^{-3} = -\frac{125}{8} \rightarrow x = -\frac{2}{5}$

h) $\log_x 49 = 6 \rightarrow x^6 = 49 \rightarrow x = \sqrt[6]{49} = \sqrt[3]{7}$

95. **Determina el valor de x en les expressions que tens a continuació:**

a) $\log_3 9^x = 2$
b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$
c) $\ln 3^x = -1$
d) $\log_2 4^{x+4} = -2$
e) $\log_3 9^{x+3} = 3$
f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$
g) $\ln 3^{x+6} = 3$
h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

a) $\log_3 9^x = 2 \rightarrow 3^2 = 9^x \rightarrow x = 1$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2} \rightarrow x\log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2\log 2} \approx 4{,}983$

c) $\ln 3^x = -1 \rightarrow x\ln 3 = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{\ln 3} \approx -0{,}91$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2 \rightarrow 2^{-2} = 4^{x+4} \rightarrow 4^{-1} = 4^{x+4} \rightarrow -1 = x+4 \rightarrow x = -5$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3 \rightarrow 3^3 = 9^{x+3} \rightarrow 3^3 = 3^{2x+6} \rightarrow 3 = 2x+6 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{x}{2}\log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{\log 2} \approx 9{,}966$

g) $\ln 3^{x+6} = 3 \rightarrow (x+6)\ln 3 = 3 \rightarrow x = \frac{3}{\ln 3} - 6 \approx -3{,}269$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2 \rightarrow (3x+4)\log_3 27 = -2 \rightarrow 3\cdot(3x+4) = -2 \rightarrow x = -\frac{14}{9}$

96. **Resol les equacions logarítmiques següents:**

a) $\log x = -1 + \log 5$
b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7$
c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9$

a) $\log x = -1 + \log 5 \rightarrow \log \frac{x}{5} = -1 \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7 \rightarrow \log_5 \frac{x}{7} = 2 \rightarrow \frac{x}{7} = 25 \rightarrow x = 175$

c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9 \rightarrow \log_2 \frac{x}{9} = 3 \rightarrow \frac{x}{9} = 8 \rightarrow x = 72$

97. **Resol les equacions logarítmiques que hi ha a continuació:**

a) $\log_4 x = 2 + \log_4 \frac{1}{2}$
b) $\log (3x - 1) = -2 + \log 50$
c) $\log_2 \frac{3x-1}{4} = 2 + \log_2 \frac{1}{16}$

a) $\log_4 x = 2 + \log_4 \frac{1}{2} \rightarrow \log_4 2x = 2 \rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8$

b) $\log(3x-1) = -2 + \log 50 \rightarrow \log \frac{3x-1}{50} = -2 \rightarrow \frac{3x-1}{50} = \frac{1}{100} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_2 \frac{3x-1}{4} = 2 + \log_2 \frac{1}{16} \rightarrow \log_2 \frac{16(3x-1)}{4} = 2 \rightarrow 12x - 4 = 4 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

98. **Calcula el valor de x en les equacions següents:**

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2$
b) $\log_{x+1} (6x + 1) = 2$
c) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 3x + 3) = 0$
d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4$
e) $\log_2 (x^2 + 4x - 1) = 2$

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2 \rightarrow \log_x\left(9\sqrt{16}\right) = 2 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

L'única solució vàlida és $x_1 = 6$.

b) $\log_{x+1}(6x+1) = 2 \rightarrow (x+1)^2 = 6x+1 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

L'única solució vàlida és $x_2 = 4$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 3) = 0 \rightarrow 1 = x^2 - 3x + 3 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4 \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 16$

e) $\log_2(x^2 + 4x - 1) = 2 \rightarrow 4 = x^2 + 4x - 1 \rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

99. Resol aquestes equacions:

a) $\log(x-3) + \log(x+1) = 1 - \log(x-5)$

b) $\log_3(x^2 + x + 1) = 27$

c) $\log_5\left(x + \frac{1}{2}\right) + \log_5\left(x + \frac{3}{4}\right) = 1 - \log_5\left(x + \frac{1}{3}\right)$

d) $\log\left(\frac{x-2}{2}\right) + \log\left(\frac{x-3}{2}\right) + \log\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 1$

a) $\log(x-3) + \log(x+1) = 1 - \log(x-5) \rightarrow \log\left[(x-3)(x+1)(x-5)\right] = 1 \rightarrow$

$\rightarrow (x-3)(x+1)(x-5) = 10 \rightarrow x^3 - 7x^2 + 7x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -0{,}47419 \\ x_2 = 1{,}8873 \\ x_3 = 5{,}5869 \end{cases}$

L'única solució vàlida és $x_3 = 5{,}5869$

b) $\log_3(x^2 + x + 1) = 27 \rightarrow x^2 + x + 1 = 3^{27} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2{,}7614 \cdot 10^6 \\ x_2 = 2{,}7614 \cdot 10^6 \end{cases}$

c) $\log_5\left(x + \frac{1}{2}\right) + \log_5\left(x + \frac{3}{4}\right) = 1 - \log_5\left(x + \frac{1}{3}\right) \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 5 \rightarrow$

$x^3 + \frac{19}{12}x^2 + \frac{19}{24}x - \frac{39}{8} = 0 \rightarrow x = 1{,}1906$

d) $\log\left(\frac{x-2}{2}\right) + \log\left(\frac{x-3}{2}\right) + \log\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 1 \rightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 10 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{6}x^3 - \frac{11}{12}x^2 + \frac{17}{12}x - \frac{21}{2} = 0 \rightarrow x = 5{,}8775$

100. **Determina el valor de x en les equacions següents:**

a) $\log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1$

b) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}$

a) $\log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1 \rightarrow \frac{1}{2}\log_3\left[(x-5)(2x-3)\right] = 1 \rightarrow$

$$(x-5)(2x-3) = 9 \rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'única solució vàlida és $x_1 = 6$.

b) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = 2^{\frac{2}{3}} \rightarrow x^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} \rightarrow x = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^6 = 16$

101. **Resol les equacions logarítmiques que tens a continuació:**

a) $\log_5 (x-1) + \log_5 (x+1) = \log_5 3x$

b) $\log_2 (x-3) - \log_2 (2x+21) = 1 - \log_2 (x-2)$

a) $\log_5(x-1) + \log_5(x+1) = \log_5 3x \rightarrow x^2 - 1 = 3x \rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}303 \\ x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \approx -0{,}303 \end{cases}$

L'única solució vàlida és $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}303$

b) $\log_2(x-3) - \log_2(2x+21) = 1 - \log_2(x-2) \rightarrow \frac{(x-3)(x-2)}{2x+21} = 2 \rightarrow$

$$x^2 - 9x - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 12 \end{cases}$$

L'única solució vàlida és $x_2 = 12$.

102. **Calcula el valor de x en les equacions exponencials següents:**

a) $4^x = \frac{1}{64}$

b) $2^{x-5} = 32$

c) $3^{6-x} = 27^{x-2}$

d) $32^{x-2} = 2$

e) $16^{2x-4} = 1$

f) $2^{x+1} = 8$

g) $2^{x+1} = 16$

h) $2^{x+1} = 128$

a) $4^x = \frac{1}{64} \rightarrow 4^x = 4^{-3} \rightarrow x = -3$

b) $2^{x-5} = 32 \rightarrow x - 5 = 5 \rightarrow x = 10$

c) $3^{6-x} = 27^{x-2} \rightarrow 6 - x = 3x - 6 \rightarrow x = 3$

d) $32^{x-2} = 2 \rightarrow 5x - 10 = 1 \rightarrow x = \frac{11}{5}$

e) $16^{2x-4} = 1 \rightarrow 2^{4(2x-4)} = 2^0 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$

f) $2^{x+1} = 8 \rightarrow x + 1 = 3 \rightarrow x = 2$

g) $2^{x+1} = 16 \rightarrow x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$

h) $2^{x+1} = 128 \rightarrow x + 1 = 7 \rightarrow x = 6$

103. **Resol les equacions exponencials que tens a continuació:**

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2}$

b) $125^{x-3} = 25^{x-3}$

c) $5^{x-3} = 1$

d) $2^{x+1} = \frac{1}{8}$

e) $2^{x+1} = \frac{1}{16}$

f) $2^{x+1} = \frac{1}{128}$

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2} \rightarrow 3(2x-5) = 2(x-2) \rightarrow 6x-15 = 2x-4 \rightarrow x = \frac{11}{4}$

b) $125^{x-3} = 25^{x-3} \rightarrow$ No existeix solució real.

c) $5^{x-3} = 1 \rightarrow x-3 = 0 \rightarrow x = 3$

d) $2^{x+1} = \frac{1}{8} \rightarrow x+1 = -3 \rightarrow x = -4$

e) $2^{x+1} = \frac{1}{16} \rightarrow x+1 = -4 \rightarrow x = -5$

f) $2^{x+1} = \frac{1}{128} \rightarrow x+1 = -7 \rightarrow x = -8$

104. **Resol les equacions exponencials següents:**

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4}$

c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3}$

e) $125^{x+2} = 5^{2x}$

f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3}$

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x \rightarrow 3^{3x-6+1} = 3^{2x} \rightarrow 3x-5 = 2x \rightarrow x = 5$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4} \rightarrow x+4 = 3x-12 \rightarrow x = 8$

c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x} \rightarrow 3^{4(x-6)} = 3^{4-x} \rightarrow 4x-24 = 4-x \rightarrow x = \frac{28}{5}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3} \rightarrow 10x-15 = x+3 \rightarrow x = 2$

e) $125^{x+2} = 5^{2x} \rightarrow 3x+6 = 2x \rightarrow x = -6$

f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3} \rightarrow 4^4 = 4^{2x-2} \rightarrow 6 = 2x \rightarrow x = 3$

105. **Opera amb aquestes potències i calcula el valor de x en les equacions exponencials següents:**

a) $3^{x^3 - \frac{x^2}{10} - \frac{4x}{5} + \frac{3}{10}}$ **= 1** **b)** $\frac{2^{x^3-x^2-5x}}{8}$ **= 1**

a) $3^{x^3 - \frac{x^2}{10} - \frac{4x}{5} + \frac{3}{10}} = 1 \rightarrow 10x^3 - x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{3}{5}$

b) $\frac{2^{x^3-x^2-5x}}{8} = 1 \rightarrow 2^{x^3-x^2-5x} = 2^3 \rightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

106. **Resol les equacions exponencials que tens a continuació:**

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5x^3-34x^2-48x}{5}} = 1$ **b)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^3} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}(2x^2+16x)}$ **c)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{5-x^3} \cdot \sqrt{7^{13x^2+13x}} = 1$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^3-\frac{34x^2}{5}-\frac{48x}{5}} = 1 \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5x^3-34x^2-48x}{5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \rightarrow 5x^3-34x^2-48x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\frac{6}{5} \quad x_3=8$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^3} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}(2x^2+16x)} \rightarrow x^3=\frac{1}{3}(2x^2+16x) \rightarrow x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{16}{3}x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{8}{3} \quad x_3=-2$

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5-x^3} \cdot \sqrt{7^{13x^2+13x}} = 1 \rightarrow 7^{x^3-5} \cdot 7^{\frac{13x^2+13x}{2}} = 7^0 \rightarrow 2x^3+13x^2+13x-10=0 \rightarrow x_1=-5 \quad x_2=\frac{1}{2} \quad x_3=-2$

107. **Calcula el valor de la incògnita x si suposem que la resta de lletres que apareixen són constants.**

a) $a^{2x-1} = a^2$
b) $m^{x-3} = (m^2)^{2x}$
c) $(3a)^{2x-5} = 9a^2$
d) $(p-3)^{5x} = p^2 - 6p + 9$
e) $(a^2 + 2ab + b^2)^2 = (a+b)^{2x}$
f) $(9 - 2x - x^2)^{x-3} = 1$
g) $(x+1)^{x-1} = 1$

a) $a^{2x-1}=a^2 \rightarrow 2x-1=2 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

b) $m^{x-3}=(m^2)^{2x} \rightarrow x-3=4x \rightarrow x=-1$

c) $(3a)^{2x-5}=9a^2 \rightarrow (3a)^{2x-5}=(3a)^2 \rightarrow 2x-5=2 \rightarrow x=\frac{7}{2}$

d) $(p-3)^{5x}=p^2-6p+9 \rightarrow (p-3)^{5x}=(p-3)^2 \rightarrow 5x=2 \rightarrow x=\frac{2}{5}$

e) $(a^2+2ab+b^2)^2=(a+b)^{2x} \rightarrow (a+b)^4=(a+b)^{2x} \rightarrow 4=2x \rightarrow x=2$

f) $(9-2x-x^2)^{x-3}=1 \rightarrow \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x_1=3 \\ 9-2x-x^2=1 \rightarrow \begin{cases} x_2=-4 \\ x_3=2 \end{cases} \end{cases}$

g) $(x+1)^{x-1}=1 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x_1=1 \\ x+1=1 \rightarrow x_2=0 \end{cases}$

108. Resol aquestes equacions exponencials per mitjà d'un canvi de variable:

a) $9^{2x} - 3 \cdot 9^x + 2 = 0$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 35$

c) $7^{4x} - 3 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 7^{2x} + 13 \cdot 7^x + 6 = 0$

d) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} - 2\left(\frac{5}{6}\right)^x + 1 = 0$

a) $9^{2x} - 3 \cdot 9^x + 2 = 0 \xrightarrow{9^x = t} t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 9^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ t_2 = 2 \rightarrow 9^x = 2 \rightarrow x = \dfrac{\log 2}{\log 9} \approx 0{,}3155 \end{cases}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 35 \xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\right)^x = t} t^2 - 2t - 35 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -5 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = -5 \rightarrow \text{Impossible} \\ t_2 = 7 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 7 \rightarrow x = \dfrac{\log 7}{\log \frac{2}{3}} \approx -4{,}8 \end{cases}$

La solució obtinguda es descarta, ja que no és vàlida en substituir-la a l'equació. Per tant, aquesta equació no té solució.

c) $7^{4x} - 3 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 7^{2x} + 13 \cdot 7^x + 6 = 0 \xrightarrow{7^x = t} t^4 - 3t^3 - 5t^2 + 13t + 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \rightarrow 7^x = -2 \rightarrow \text{Impossible} \\ t_2 = 3 \rightarrow 7^x = 3 \rightarrow x = \dfrac{\log 3}{\log 7} \approx 0{,}5646 \\ t_3 = 1 - \sqrt{2} \rightarrow 7^x = 1 - \sqrt{2} \rightarrow \text{Impossible} \\ t_4 = 1 + \sqrt{2} \rightarrow 7^x = 1 + \sqrt{2} \rightarrow \text{Impossible} \end{cases}$

d) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} - 2\left(\frac{5}{6}\right)^x + 1 = 0 \xrightarrow{\left(\frac{5}{6}\right)^x = t} t^4 - 2t + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ t_2 = 0{,}54369 \rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0{,}54369 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}54369}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 3{,}3423 \end{cases}$

109. Resol les equacions exponencials següents mitjançant un canvi de variable:

a) $3^{3x} + 5 \cdot 3^{2x-1} - 11 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$

b) $4\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 9 \cdot 2^{-2x} - 2^{-x+1}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+1} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

a) $3^{3x}+5\cdot 3^{2x-1}-11\cdot 3^{x-1}+1=0 \xrightarrow{3^x=t} t^3+\frac{5}{3}t^2-\frac{11}{3}t+1=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1=1 \rightarrow 3^x=1 \rightarrow x_1=0 \\ t_2=-3 \rightarrow 3^x=-3 \rightarrow \text{Impossible} \\ t_3=\frac{1}{3} \rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \rightarrow x_2=-1 \end{cases}$$

b) $4\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=9\cdot 2^{-2x}-2^{-x+1} \rightarrow 4\cdot(2^x)^{-3}-9\cdot(2^x)^{-2}+2\cdot(2^x)^{-1}=0 \xrightarrow{2^x=t} \frac{4}{t^3}-\frac{9}{t^2}+\frac{2}{t}=0$

$$2t^2-9t+4=0 \rightarrow 2^x=\begin{cases} t_1=4 \rightarrow 2^x=4 \rightarrow x_1=2 \\ t_2=\frac{1}{2} \rightarrow 2^x=\frac{1}{2} \rightarrow x_2=-1 \end{cases}$$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+1}+1=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \xrightarrow{\left(\frac{3}{2}\right)^x=t} \frac{3}{2}t^3-t^2-\frac{3}{2}t+1=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1=1 \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=1 \rightarrow x_1=0 \\ t_2=-1 \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=-1 \rightarrow \text{Impossible} \\ t_3=\frac{2}{3} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3} \rightarrow x_2=-1 \end{cases}$$

110. **Indica si x = 2 es troba entre les solucions de les inequacions següents:**

a) 3(x – 2) > 1 – 3(2x – 3) **b) 5(4 – 3x) + 3 ≤ 1 + 3x** **c) 2(x – 3) – 4(3 – 2x) > 0**

a) $3(x-2)>1-3(2x-3) \rightarrow 3\cdot(2-2-)>1-3\cdot(2\cdot 2-3) \rightarrow 0>-2$

x = 2 és solució de la inequació.

b) $5(4-3x)+3 \le 1+3x \rightarrow 5(4-3\cdot 2)+3 \le 1+3\cdot 2 \rightarrow -7 \le 7$

x = 2 és solució de la inequació.

c) $2(x-3)-4(3-2x)>0 \rightarrow 2(2-3)-4(3-2\cdot 2)>0 \rightarrow 2>0$

x = 2 és solució de la inequació.

111. **Determina la solució de les inequacions següents:**

a) $2x-30 \le 5x+3$
b) $2x-6<5x+18$
c) $11-3x \le 23$
d) $3x+2 \ge x+10$
e) $6-5x>2x+3$
f) $-14x+5 \le x$

a) $2x-30 \le 5x+3 \rightarrow -33 \le 3x \rightarrow x \ge -11,\ x \in [-11,+\infty)$

b) $2x-6<5x+18 \rightarrow -24<3x \rightarrow x>-8,\ x \in (-8,+\infty)$

c) $11-3x \le 23 \rightarrow -12 \le 3x \rightarrow x \ge -4,\ x \in [-4,+\infty)$

d) $3x+2 \ge x+10 \rightarrow 2x \ge 8 \rightarrow x \ge 4,\ x \in [4,+\infty)$

e) $6-5x>2x+3 \rightarrow 3>7x \rightarrow x<\frac{3}{7},\ x \in \left(-\infty,\frac{3}{7}\right)$

f) $-14x+5 \leq x \rightarrow 5 \leq 15x \rightarrow x \geq \frac{1}{3},\ x \in \left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

112. **Resol les inequacions que hi ha a continuació:**

a) $3(x-5)+4(x-2) \leq 5$

b) $x-2(x+2)-3(2-4x) \leq 9$

c) $4(10-2x)-3(2x+1) \geq -3(x+1)-(2-3x)$

a) $3(x-5)+4(x-2) \leq 5 \rightarrow 7x \leq 28 \rightarrow x \leq 4,\ x \in (-\infty,4]$

b) $x-2(x+2)-3(2-4x) \leq 9 \rightarrow 11x \leq 19 \rightarrow x \leq \frac{19}{11},\ x \in \left(-\infty,\frac{19}{11}\right]$

c) $4(10-2x)-3(2x+1) \geq -3(x+1)-(2-3x) \rightarrow 42 \geq 14x \rightarrow x \leq 3,\quad x \in \left(-\infty,3\right]$

113. **Troba la solució de les inequacions següents:**

a) $\frac{x}{3}+1<\frac{3x}{4}+3$

b) $\frac{3(x-1)}{2}+x \leq \frac{x}{3}+8$

c) $\frac{x-1}{10}<\frac{x+2}{40}+\frac{x-2}{30}$

a) $\frac{x}{3}+1<\frac{3x}{4}+3 \rightarrow 4x+12<9x+36 \rightarrow -24<5x \rightarrow x>-\frac{24}{5},\quad x \in \left(-\frac{24}{5},+\infty\right)$

b) $\frac{3(x-1)}{2}+x \leq \frac{x}{3}+8 \rightarrow 9x-9+6x \leq 2x+48 \rightarrow 13x \leq 57 \rightarrow x \leq \frac{57}{13},\quad x \in \left(-\infty,\frac{57}{13}\right]$

c) $\frac{x-1}{10}<\frac{x+2}{40}+\frac{x-2}{30} \rightarrow 12x-12<3x+6+4x-8 \rightarrow 5x<10 \rightarrow x<2,\quad x \in (-\infty,2)$

114. **Quina és la solució d'aquestes inequacions?**

a) $x^2-x-6<0$

b) $-x^2-2x+8<0$

c) $2x^2+5x+6<0$

d) $-x^2+3x-4<0$

e) $2x^2+5x-3>0$

f) $6x^2+31x+18 \leq 0$

a) Resolem l'equació: $x^2-x-6=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=3 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on queda dividida la recta:

x = -10 x = 0 x = 10

Si x = -10 → $(-10)^2$+ 10 – 6 > 0 → $(-\infty,-2)$ no és solució de la inequació.

Si x = 0 → 0^2 + 0 – 6 < 0 → $(-2,3)$ és solució de la inequació.

Si x = 10 → $\mathbf{10^2}$- 10 – 6 > 0 → (3,+∞) no és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és (-2,3)

b) Resolem l'equació: $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on queda dividida la recta:

x = -10 x = 0 x = 10

Si x = -10 → $(-\mathbf{10})^2$- 2 ·(-10) + 8 < 0 → $(-\infty, -4)$ és solució de la inequació.

Si x = 0 → $\mathbf{0^2}$ + 0 + 8 > 0 → $(-4, 2)$ no és solució de la inequació.

Si x = 10 → $-\mathbf{10^2}$- 2·10 + 8 < 0 → (2,+∞) és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

c) Resolem l'equació: $2x^2 + 5x + 6 = 0$ → No té solució real.

El primer membre de l'equació sempre pren valors positius.

No té solució.

d) Resolem l'equació: $-x^2 + 3x - 4 = 0$ → No té solució real.

El primer membre de l'equació sempre pren valors negatius.

És una identitat.

e) Resolem l'equació: $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on queda dividida la recta:

x = -10 x = 0 x = 10

Si x = -10 → $\mathbf{2}$ · $(-\mathbf{10})^2$+ 5 ·(-10) - 3 > 0 → $(-\infty, -3)$ és solució de la inequació.

Si x = 0 → $\mathbf{2}$ · $\mathbf{0^2}$ + 5 · 0 - 3 < 0 → $(-3, \frac{1}{2})$ no és solució de la inequació.

Si x = 10 → $\mathbf{2}$ · $\mathbf{10^2}$+ 5 ·10 - 3 > 0 → $(\frac{1}{2}, +\infty)$ és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

f) Resolem l'equació: $6x^2 + 31x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Prenem un punt de cada interval on queda dividida la recta:

x = -10 x = -1 x = 0

Si x = -10 → $\mathbf{6}$ · $(-\mathbf{10})^2$+ 31 ·(-10) + 18 > 0 → $(-\infty, -\frac{9}{2})$ no és solució de la inequació.

Si x = -1 → $\mathbf{6}$ · $(-\mathbf{1})^2$ + 31 · $(-\mathbf{1})$ + 18 < 0 → $(-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3})$ és solució de la inequació.

Si x = 10 → $\mathbf{6}$ · $\mathbf{0^2}$+ 31 ·0 + 18 > 0 → $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ no és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació ho són de la inequació.

Per tant, la solució és $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}\right)$.

115. **Determina la solució de les inequacions que tens a continuació:**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$ **b)** $x^4 + 8x^2 - 20 \leq 0$

a) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0 \to z^2 - 5z + 4 > 0 \to z_1 = 1 \quad z_2 = 4$

$z_1 = 1 \to x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

$z_2 = 4 \to x_3 = -2 \quad x_4 = 2$

Ens queden els intervals $(-\infty,-2),(-2,-1),(-1,1),(1,2)$ i $(2,+\infty)$. Vegem quins compleixen la inequació agafant un punt de cada un i comprovant si la satisfan.

$x = -10 \to (-10)^4 - 5(-10)^2 + 4 = 9504 > 0 \to$ Compleix la inequació.

$x = -1,5 \to (-1,5)^4 - 5(-1,5)^2 + 4 = -2,1875 < 0 \to$ No compleix la inequació.

$x = 0 \to (0)^4 - 5(0)^2 + 4 = 4 > 0 \to$ Compleix la inequació.

$x = 1,5 \to (1,5)^4 - 5(1,5)^2 + 4 = -2,1875 < 0 \to$ No compleix la inequació.

$x = 10 \to (10)^4 - 5(10)^2 + 4 = 9504 > 0 \to$ Compleix la inequació.

Veiem també que succeeix als extrems dels intervals.

$x = -2 \to (-2)^4 - 5(-2)^2 + 4 = 0 \to$ No compleix la inequació.

$x = -1 \to (-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 = 0 \to$ No compleix la inequació.

$x = 1 \to (1)^4 - 5(1)^2 + 4 = 0 \to$ No compleix la inequació.

$x = 2 \to (2)^4 - 5(2)^2 + 4 = 0 \to$ No compleix la inequació.

Per tant, la solució és:

$$(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty).$$

b) $x^4 + 8x^2 - 20 \leq 0 \to z^2 + 8z - 20 \leq 0 \to z_1 = -10 \quad z_2 = 2$

$z_1 = -10 \to$ No té solucions reals

$z_2 = 2 \to x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}$

Ens resten els intervals $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ i $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, veiem quins acompleixen la inequació prenent un punt de cadascun i comprovant si la satisfan.

$x = -10 \to (-10)^4 + 8(-10)^2 - 20 = 10780 > 0 \to$ No compleix la inequació.

$x = 0 \to (0)^4 + 8(0)^2 - 20 = -20 \leq 0 \to$ Compleix la inequació.

$x = 10 \rightarrow (10)^4 + 8(10)^2 - 20 = 10780 > 0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

Comprovem també si els extrems dels intervals compleixen.

$x = -\sqrt{2} \rightarrow \left(-\sqrt{2}\right)^4 + 8\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 20 = 0 \leq 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

$x = \sqrt{2} \rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^4 + 8\left(\sqrt{2}\right)^2 - 20 = 0 \leq 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

Per tant, la solució és $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

116. Resol les inequacions que hi ha a continuació:

a) $x^2 + 6x - 1 < 3x^2 + 3x - 6$

b) $2x^2 + 25x > x(x - 10)$

c) $x^2 - (2x + 1)(x - 1) \leq 7$

d) $(x - 1)^2 < (2x + 1)^2 - 10$

a) $x^2 + 6x - 1 < 3x^2 + 3x - 6 \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 > 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{5}{2}$

Tenim els intervals $(-\infty, -1), \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ i $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$, comprovem quins compleixen la inequació prenent un punt de cadascun i veient si la satisfan.

$x = -10 \rightarrow 2(-10)^2 - 3(-10) - 5 = 225 > 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

$x = 0 \rightarrow 2(0)^2 - 3(0) - 5 = -5 < 0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x = 10 \rightarrow 2(10)^2 - 3(10) - 5 = 165 > 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

Comprovem també si els extrems dels intervals compleixen.

$x = -1 \rightarrow 2(-1)^2 - 3(-1) - 5 = 0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x = \frac{5}{2} \rightarrow 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5}{2}\right) - 5 = 0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

Per tant, la solució és $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) $2x^2 + 25x > x(x - 10) \rightarrow x^2 + 35x > 0 \rightarrow x_1 = -35 \quad x_2 = 0$

Tenim els intervals $(-\infty, -35), (-35, 0)$ i $(0, +\infty)$, comprovem quins compleixen la inequació prenent un punt de cadascun i veient si la satisfan.

$x = -100 \rightarrow (-100)^2 + 35(-100) = 6500 > 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

$x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 35(-10) = -250 < 0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x = 100 \rightarrow (100)^2 + 35(100) = 13500 > 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

Comprovem també si els extrems dels intervals compleixen.

$x=-35 \rightarrow (-35)^2+35(-35)=0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=0 \rightarrow (0)^2+35(0)=0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

Per tant, la solució és: $(-\infty,-35)\cup(0,+\infty)$.

c) $x^2-(2x+1)\cdot(x-1)\leq 7 \rightarrow x^2-x+6\geq 0 \rightarrow$ No té solucions reals.

Així, o tots els punts compleixen la inequació o cap d'ells ho compleix.

Per exemple, prenem x = 0 → Compleix la inequació.

Per tant la solució és tot el conjunt dels nombres reals, $\mathbb{R}$

d) $(x-1)^2<(2x+1)^2-10 \rightarrow 3x^2+6x-10>0 \rightarrow x_1=\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3} \quad x_2=\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}$

Tenim els intervals $\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}\right),\left(\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3},\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}\right)$ i $\left(\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3},+\infty\right)$, comprovem quins compleixen la inequació prenent un punt de cadascun i veient si la satisfan.

$x=-10 \rightarrow 3(-10)^2+6(-10)-10=230>0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

$x=0 \rightarrow 3(0)^2+6(0)-10=-10<0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=10 \rightarrow 3(10)^2+6(10)-10=350>0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

Comprovem també si els extrems dels intervals compleixen.

$x=\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3} \rightarrow 3\left(\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}\right)^2+6\left(\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}\right)-10=0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3} \rightarrow 3\left(\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}\right)^2+6\left(\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}\right)-10=0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

Per tant, la solució és: $\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3},+\infty\right)$.

117. Determina les solucions d'aquestes inequacions:

a) $\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x(x-1)}{5}>0$

b) $\dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{x-x^2}{3}+1<0$

c) $x-\dfrac{1-2x}{3}-\dfrac{2x^2+1}{4}\geq 5$

d) $3-\dfrac{2x-3}{2}+\dfrac{16x+x^2}{3}\geq 0$

e) $\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{12x-x^2}}{\mathbf{3}} \geq \frac{\mathbf{2x^2+1}}{\mathbf{3}} - \mathbf{x}$

a) $\frac{x+2}{3} + \frac{x(x-1)}{5} > 0 \rightarrow \ 5x + 10 + 3x^2 - 3x > 0 \ \rightarrow 3x^2 + 2x + 10 > 0$

El primer membre de la inequació és sempre positiu, així, sempre es compleix. Es certa per a tots els nombres reals.

b) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-x^2}{3} + 1 < 0 \rightarrow \ 9x - 3 - 2x + 2x^2 + 6 < 0 \ \rightarrow 2x^2 + 7x + 3 < 0$

Resolem l'equació:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \ \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Prenem un punt de cada interval que es divideix la recta:

x = -10 x = -1 x = 0

Si x = -10 → $\mathbf{2} \cdot (-\mathbf{10})^2 + 7 \cdot (-10) + 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -\mathbf{3})$ no és solució de la inequació.

Si x = -1 → $\mathbf{2} \cdot (-\mathbf{1})^2 + 7 \cdot (-1) + 3 > 0 \rightarrow (-\mathbf{3}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ és solució de la inequació.

Si x = 0 → $\mathbf{2} \cdot \mathbf{0}^2 + 7 \cdot 0 + 3 > 0 \rightarrow (-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, +\infty)$ no és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació no ho són de la inequació.

Per tant, la solució és $(-\mathbf{3}, -\frac{1}{2})$.

c) $x - \frac{1-2x}{3} - \frac{2x^2+1}{4} \geq 5 \rightarrow \ 12x - 4 + 8x - 6x^2 - 3 \geq 60 \ \rightarrow 6x^2 + 20x - 67 \geq 0$

Resolem l'equació $6x^2 + 20x - 67 = 0$

No té solució real. Com el primer nombre de l'equació sempre pren valors negatius, la inequació no té solució.

d) $3 - \frac{2x-3}{2} + \frac{16x+x^2}{3} \geq 0 \quad \rightarrow 18 - 6x + 9 + 32x + 2x^2 \geq 0$

$\rightarrow 2x^2 + 26x + 27 \geq 0$

Resolem l'equació

$$2x^2 + 26x + 27 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-13 - \sqrt{115}}{2} \\ x_2 = \frac{-13 + \sqrt{115}}{2} \end{cases}$$

Prenem un punt de cada interval que es divideix la recta:

x = -10 x = -5 x = 0

Si x = -10 → $\mathbf{2} \cdot (-\mathbf{10})^2 + 26 \cdot (-10) + 27 > 0 \rightarrow (-\infty, \frac{\mathbf{-13-\sqrt{115}}}{\mathbf{2}})$ és solució de la inequació.

Si x = -5 → $\mathbf{2} \cdot (-\mathbf{5})^2 + 26 \cdot (-5) + 27 < 0 \rightarrow (\frac{\mathbf{-13-\sqrt{115}}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{-13+\sqrt{115}}}{\mathbf{2}})$ no és solució de la inequació.

Si x = 0 → $\mathbf{2} \cdot \mathbf{0}^2 + 26 \cdot 0 + 27 > 0 \rightarrow (\frac{\mathbf{-13+\sqrt{115}}}{\mathbf{2}}, +\infty)$ és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació ho són de la inequació.

Per tant, la solució és: $\left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right) \cup \left(\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$.

e) $\frac{x-1}{4} - \frac{12x-x^2}{3} \geq \frac{2x^2+1}{3} - x \rightarrow 4x^2 + 33x + 7 \geq 0$

Resolem l'equació

$$4x^2 + 33x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-33-\sqrt{977}}{8} \\ x_2 = \frac{-33+\sqrt{977}}{8} \end{cases}$$

Prenem un punt de cada interval que es divideix la recta:

x = -10 x = -5 x = 0

Si x = -10 → 4· $(-\mathbf{10})^2$+ 33 ·(-10) + 7 > 0 → $\left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right)$ és solució de la inequació.

Si x = -5 → $\mathbf{2}$ · $(-\mathbf{5})^2$+ 33 ·(-5) + 7 < 0 → $\left(\frac{-33-\sqrt{977}}{8}, \frac{-33+\sqrt{977}}{8}\right)$ no és solució de la inequació.

Si x = 0 → $\mathbf{2} \cdot \mathbf{0}^2$+ 26 ·0 - 27 > 0 → $\left(\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$ és solució de la inequació.

Les solucions de l'equació ho són de la inequació.

Per tant, la solució és: $\left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right] \cup \left[\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$.

118. Resol les inequacions amb fraccions algèbriques següents:

a) $\frac{x+3}{x-5} < 0$

b) $\frac{2x-3}{x+3} < 0$

c) $\frac{-x+1}{2-3x} > 0$

d) $\frac{2-x}{2x+5} - 1 > 0$

a) $\frac{x+3}{x-5} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x+3>0 \\ x-5<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>-3 \\ x<5 \end{matrix}\right\}$

$(-3, 5)$

b) $\frac{2x-3}{x+3} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3<0 \\ x+3>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x<\frac{3}{2} \\ x>-3 \end{matrix}\right\}$

$\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x}>0 \rightarrow \left.\begin{matrix}-x+1<0\\ 2-3x>0\end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix}x>1\\ x<\dfrac{2}{3}\end{matrix}\right\}$

$\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5}-1>0 \rightarrow \dfrac{-3x-3}{2x+5}>0 \rightarrow \left.\begin{matrix}x<-1\\ x>-\dfrac{5}{2}\end{matrix}\right\}$

$\left(-\dfrac{5}{2}, -1\right)$

119. **Troba les solucions de les inequacions següents:**

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1} \leq 0$ **c)** $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4} > 0$

b) $\dfrac{-x^2+3}{2x-3} < 0$ **d)** $\dfrac{-x+3}{2x^2-18} \geq 0$

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1} \leq 0 \rightarrow \left.\begin{matrix}x^2-1=0\\ x+1=0\end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix}x_1=-1 \quad x_2=1\\ x=-1\end{matrix}\right\}$

Tenim els intervals $(-\infty,-1),(-1,1)$ i $(1,+\infty)$, comprovem quins compleixen la inequació prenent un punt de cadascun i veient si la satisfan.

x=-10 $\rightarrow \frac{(-10)^2-1}{(-10)+1} = \frac{99}{-9} = -11 < 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

x=0 $\rightarrow \frac{(0)^2-1}{(0)+1} = \frac{-1}{1} = -1 < 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

x=10 $\rightarrow \frac{(10)^2-1}{(10)+1} = \frac{99}{11} = 9 > 0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

Comprovem també si els extrems dels intervals compleixen.

x = -1 $\rightarrow \frac{(-1)^2-1}{(-1)+1} = \frac{0}{0} \rightarrow$ No existeix solució.

x = 1 $\rightarrow \frac{(1)^2-1}{(1)+1} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

Per tant, la solució és: $(-\infty,-1)\cup(-1,1]$.

b) $\dfrac{-x^2+3}{2x-3}<0 \rightarrow \left.\begin{matrix}-x^2+3=0\\ 2x-3=0\end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix}x_1=-\sqrt{3} \quad x_2=\sqrt{3}\\ x=\dfrac{3}{2}\end{matrix}\right\}$

Tenim els intervals $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$ i $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, comprovem quins compleixen la inequació prenent un punt de cadascun i veient si la satisfan.

$x=-10 \rightarrow \frac{-(-10)^2+3}{2(-10)-3}=\frac{-97}{-23}=\frac{97}{23}>0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=0 \rightarrow \frac{-(0)^2+3}{2(0)-3}=\frac{3}{-3}=-1<0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

$x=1,6 \rightarrow \frac{-(1,6)^2+3}{2(1,6)-3}=\frac{0,44}{0,2}=\frac{11}{5}>0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=10 \rightarrow \frac{-(10)^2+3}{2(10)-3}=\frac{-97}{17}=-\frac{97}{17}<0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

Comprovem també si els extrems dels intervals compleixen.

$x=-\sqrt{3} \rightarrow \frac{-\left(-\sqrt{3}\right)^2+3}{2\left(-\sqrt{3}\right)-3}=\frac{0}{2\sqrt{3}+3}=0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3}{2\left(\frac{3}{2}\right)-3}=\frac{\frac{3}{4}}{0}=0 \rightarrow$ No existeix solució.

$x=\sqrt{3} \rightarrow \frac{-\left(\sqrt{3}\right)^2+3}{2\left(\sqrt{3}\right)-3}=\frac{0}{2\sqrt{3}-3}=0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

Per tant, la solució és: $\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

c) $\frac{x^2-3x}{x^2-4}>0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x^2-3x=0 \\ x^2-4=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{ll} x_1=0 & x_2=3 \\ x_3=-2 & x_4=2 \end{array}\right\}$

Tenim els intervals $(-\infty,-2),(-2,0),(0,2),(2,3)$ i $(3,+\infty)$, comprovem quins compleixen la inequació prenent un punt de cadascun i veient si la satisfan.

$x=-10 \rightarrow \frac{(-10)^2-3(-10)}{(-10)^2-4}=\frac{130}{96}=\frac{65}{48}>0 \rightarrow$ Compleix la inequació.

$x=-1 \rightarrow \frac{(-1)^2-3(-1)}{(-1)^2-4}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}<0 \rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=1 \;\rightarrow\; \dfrac{(1)^2-3(1)}{(1)^2-4}=\dfrac{-3}{-4}=\dfrac{3}{4}>0 \;\rightarrow$ Compleix la inequació.

$x=2{,}5 \;\rightarrow\; \dfrac{(2{,}5)^2-3(2{,}5)}{(2{,}5)^2-4}=\dfrac{-1{,}25}{2{,}25}=-\dfrac{5}{9}<0 \;\rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=10 \;\rightarrow\; \dfrac{(10)^2-3(10)}{(10)^2-4}=\dfrac{70}{96}=\dfrac{35}{48}>0 \;\rightarrow$ Compleix la inequació.

Comprovem també si els extrems dels intervals compleixen.

$x=-2 \;\rightarrow\; \dfrac{(-2)^2-3(-2)}{(-2)^2-4}=\dfrac{10}{0} \;\rightarrow$ No existeix solució.

$x=0 \;\rightarrow\; \dfrac{(0)^2-3(0)}{(0)^2-4}=\dfrac{0}{-4}=0 \;\rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=2 \;\rightarrow\; \dfrac{(2)^2-3(2)}{(2)^2-4}=\dfrac{-2}{0} \;\rightarrow$ No existeix solució.

$x=3 \;\rightarrow\; \dfrac{(3)^2-3(3)}{(3)^2-4}=\dfrac{0}{5}=0 \;\rightarrow$ No compleix la inequació.

Per tant, la solució és: $(-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(3,+\infty)$.

d) $\dfrac{-x+3}{2x^2-18}\geq 0 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{r}-x+3=0\\ 2x^2-18=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x=3\\ x_1=-3 \qquad x_2=3\end{array}\right\}$

Tenim els intervals $(-\infty,-3),(-3,3)$ i $(3,+\infty)$, comprovem quins compleixen la inequació prenent un punt de cadascun i veient si la satisfan.

$x=-10 \;\rightarrow\; \dfrac{-(-10)+3}{2(-10)^2-18}=\dfrac{13}{182}=\dfrac{1}{14}>0 \;\rightarrow$ Compleix la inequació.

$x=0 \;\rightarrow\; \dfrac{-(0)+3}{2(0)^2-18}=\dfrac{3}{-18}=-\dfrac{1}{6}<0 \;\rightarrow$ No compleix la inequació.

$x=10 \;\rightarrow\; \dfrac{-(10)+3}{2(10)^2-18}=\dfrac{-7}{182}=-\dfrac{1}{26}<0 \;\rightarrow$ No compleix la inequació.

Comprovem també si els extrems dels intervals compleixen.

$x=-3 \;\rightarrow\; \dfrac{-(-3)+3}{2(-3)^2-18}=\dfrac{6}{0} \;\rightarrow$ No existeix solució.

$x = 3 \rightarrow \dfrac{-(3)+3}{2(3)^2-18} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ No existeix solució.

Per tant, la solució és: $(-\infty, -3)$.

120. Determina per a quins valors de x és possible efectuar les operacions següents:

a) $\sqrt{5-3x}$
b) $\sqrt{x-3}$
c) $\sqrt{4-3x-x^2}$
d) $\log(2-5x)$
e) $\log(6-x-x^2)$
f) $\log(x^2-2^x+1)$

a) $5-3x \geq 0 \rightarrow 5 \geq 3x \rightarrow x \leq \dfrac{5}{3} \rightarrow$ Es pot realitzar l'operació per a valors d' $x \in \left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right]$.

b) $x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \rightarrow$ Es pot realitzar l'operació per a valors d' $x \in [3, \infty)$.

c) $4-3x-x^2 \geq 0 \rightarrow (x+4)(x-1) \geq 0 \rightarrow$ La recta real es divideix en tres intervals, que són $(-\infty, -4)$, $(-4, 1)$ y $(1, \infty)$. Prenent un punt de cadascun d'ells, s'obtenen els intervals que satisfan la inequació:

$x = -5 \rightarrow (-5+4)(-5+1) = 4 \geq 0 \rightarrow$ L'interval $(-\infty, -4)$ si satisfà la inequació.

$x = 0 \rightarrow (0+4)(0-1) = -4 \leq 0 \rightarrow$ L'interval $(-4, 1)$ no satisfà la inequació.

$x = 2 \rightarrow (2+4)(2-1) = 6 \geq 0 \rightarrow$ L'interval $(1, \infty)$ si satisfà la inequació.

Els punts $x=-4$ i $x=1$ són inclosos, ja que el valor dins la inequació és 0.

Per tant, els valors de *x* per als que es pot realitzar l'operació són $x \in (-\infty, -4] \cup [1, \infty)$.

d) $2-5x > 0 \rightarrow 2 > 5x \rightarrow x < \dfrac{2}{5} \rightarrow$ Es pot realitzar l'operació per a valors d' $x \in \left(-\infty, \dfrac{2}{5}\right)$.

e) $6-x-x^2 > 0 \rightarrow (x+3)(x-2) > 0 \rightarrow$ La recta real es divideix en tres intervals, que són $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$ y $(2, \infty)$. Prenent un punt de cadascun d'ells, s'obtenen els intervals que satisfan la inequació:

$x = -4 \rightarrow (-4+3)(-4-2) = 6 > 0 \rightarrow$ L'interval $(-\infty, -3)$ si satisfà la inequació.

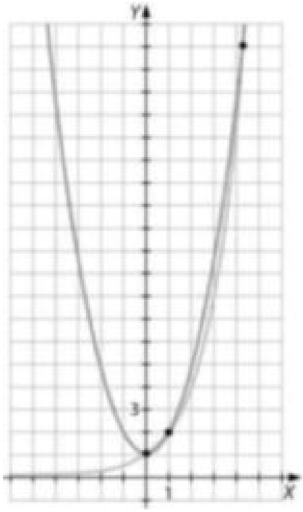
$x = 0 \rightarrow (0+3)(0-2) = -6 < 0 \rightarrow$ L'interval $(-3, 2)$ no satisfà la inequació.

$x = 3 \rightarrow (3+3)(3-2) = 6 > 0 \rightarrow$ L'interval $(2, \infty)$ si satisfà la inequació.

Els punts $x=-3$ y $x=2$ no hi figuren, ja que són els que fan 0 la inequació, i per definició, no existeix log 0.

Per tant, els valors de x per als quals es pot fer l'operació són $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$.

f) $x^2 - 2^x + 1 > 0 \rightarrow$ Per resoldre aquesta inequació no s'ha estudiat al curs un mètode particular. Per això, les arrels de l'equació $x^2 - 2^x + 1 = 0$ s'obtindran representant gràficament $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2^x$. Els seus punts de tall seran les arrels de l'equació:



Observant la gràfica, es veu que els punts de tall són $x=0$, $x=1$ i aproximadament $x = 4,255$, per tant, la recta real queda dividida en quatre intervals, que són $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1;\ 4,255)$ i $(4,255;\ \infty)$. Prenent un punt de cadascun d'ells, s'obtenen els intervals que satisfan la inequació:

$x = -1 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} + 1 > 0 \rightarrow$ L'interval $(-\infty, 0)$ satisfà la inequació.

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} - \sqrt{2} + 1 < 0 \rightarrow$ L'interval $(0,1)$ no satisfà la inequació.

$x = 3 \rightarrow 9 - 8 + 1 > 0 \rightarrow$ L'interval $(1;\ 4,255)$ satisfà la inequació.

$x = 5 \rightarrow 25 - 32 + 1 < 0 \rightarrow$ L'interval $(4,255;\ \infty)$ no satisfà la inequació.

Els punts $x=0, x=1$ i $x = 4,255$ no són inclosos, ja que són els que fan 0 la inequació, i per definició, no existeix log 0.

Per tant, els valors de x per als que es pot realitzar l'operació

121. El director d'un supermercat s'ha fixat que el nombre de clients que un dependent atén cada hora està relacionat amb la seva experiència. Ha estimat que aquest nombre es pot calcular de manera aproximada amb la funció:

$$C(d) = \frac{40d}{d+3}$$

on d és el nombre de dies que el dependent fa que hi treballa i C és el nombre de clients que atén en una hora.

a) Quants clients per hora atendria un depenent que porta treballant dos dies?

b) El director sap que un depenent comença a ser rendible a l'empresa quan atén a 32 clients per hora. Quan succeeix això?

c) Investiga el que succeeix amb el nombre de clients atesos per dependents que tenen molta experiència. Pots constatar alguna característica especial?

a) $C(2) = \frac{40 \cdot 2}{2+3} = 16 \rightarrow$ Un depenent que porti treballant 2 dies atendrà 16 clients per hora.

b) $32 = \frac{40d}{d+3} \rightarrow 32d + 96 = 40d \rightarrow 8d = 96 \rightarrow d = 12 \rightarrow$ Un dependent comença a ser rendible a partir de 12 dies treballats.

c) Calculant el nombre de clients atesos per dependents amb molta experiència, s'observa que com a màxim, cadascun podrà atendre a 40 clients per hora:

$$C(100) = \frac{40 \cdot 100}{100+3} = 38{,}835\ ,\ C(500) = \frac{40 \cdot 500}{500+3} = 39{,}761\ ,\ C(10000) = \frac{40 \cdot 10000}{10000+3} = 39{,}988$$

122. **Determina la suma i el producte de les solucions d'aquesta equació:**

$x^2 - 9x + 14 = 0$

Troba les solucions de l'equació. Pots explicar què passa?

El producte d'arrels és 14 i la suma és 9.

Les arrels són $x_1 = 2$ i $x_2 = 7$.

Si el coeficient del terme de segon grau és 1, el producte de les arrels és el terme independent i la suma de les arrels és l'oposat al coeficient del terme de primer grau.

123. **Estudia el valor dels coeficients de l'equació biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ perquè tingui quatre, tres, dues, una o cap solució.**

Analitzem el nombre d'arrels de l'equació biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ a partir de les arrels obtingudes a l'equació de segon grau associada.

$az^2 + bz + c = 0$.

Si $\Delta = \sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}} < \mathbf{0}$ → No té solució.

Si $\Delta = \sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}} = \mathbf{0}$ $\rightarrow \boldsymbol{z} = \frac{-b}{2a}$ $\rightarrow \boldsymbol{Si}\ \frac{-b}{2a} < \mathbf{0} \rightarrow$ No té solució.

$\rightarrow \boldsymbol{Si}\ \frac{-b}{2a} = \mathbf{0}\ (\boldsymbol{b} = \mathbf{0}, \boldsymbol{c} = \mathbf{0})$ → Té una solució x = 0.

$\rightarrow \boldsymbol{Si}\ \frac{-b}{2a} > \mathbf{0}$ → Té dues solucions oposades.

Si $\Delta = \sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}} > \mathbf{0}$ → L'equació de segon grau té dues solucions.

Si les dos solucions són negatives, l'equació biquadrada no té solució.

$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \mathbf{0}\ \boldsymbol{i}\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \mathbf{0} \rightarrow$ No té solució.

Si una solució és negativa i l'altra és cero:

c = 0 i $\frac{-b}{a} < \mathbf{0}$ →Té una solució x = 0.

Si una solució és positiva i l'altra és cero:

c = 0 i $\frac{-b}{a} > \mathbf{0}$ →Té tres solucions x = 0, x= $\pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$.

Si les dues solucions són positives, l'equació biquadrada té quatre solucions.

$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > \mathbf{0}\ \boldsymbol{i}\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > \mathbf{0} \rightarrow$ Té quatre solucions.

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \\ \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \end{cases}$$

124. Fa quatre anys una persona tenia la meitat més la tercera part de l'edat que té ara. Quina edat té?

Anomenem x a l'edat actual de l'individu i plantegem l'equació:

$$x - 4 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \rightarrow 6x - 24 = 3x + 2x \rightarrow x = 24$$

Actualment té 24 anys.

125. Una llanxa recorre 50 m per minut quan baixa per un riu i 20 m per minut quan hi puja. Si uns amics volen fer una excursió d'anada i tornada pel riu en 3 hores, fins a quina distància poden baixar?

Anomenem x a la distància que podem recórrer en 3 hores, és a dir, en 180 minuts. Per recórrer 50 metres pujant o baixant es necessiten 3 minuts i mig (un per baixar i dos i mig per pujar), per això:

$$\left.\begin{array}{l} 50\text{ m} \longrightarrow 3{,}5\text{ min} \\ x\text{ m} \longrightarrow 180\text{ min} \end{array}\right\} \rightarrow 9000 = \frac{7}{2}x \rightarrow x = \frac{18000}{7} = 2571{,}43\text{ m}$$

Es poden baixar fins a 2.571,43 metres del riu.

126. Descompon el nombre 60 en dues parts de manera que, dividint entre l'altra part, el quocient doni 3 i el residu sigui 8.

Si x és un dels sumands, l'altre serà 60-x. Llavors, utilitzant l'algoritme de la prova de la divisió, es té la següent equació:

$x = 3(60 - x) + 8 \rightarrow x = 180 - 3x + 8 \rightarrow 4x = 188 \rightarrow x = 47$, i per tant el segon sumand serà 13.

127. Troba dos nombres consecutius si sabem que la suma de la quarta part i la cinquena part del més petit i la suma de la tercera part i la setena part del més gran també són nombres consecutius.

Anomenant x al nombre més petit, x + 1 és el nombre més gran consecutiu. Llavors:

$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 1 = \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{7} \rightarrow 105x + 84x + 420 = 140x + 140 + 60x + 60 \rightarrow 220 = 11x \rightarrow x = 20$

Les solucions són x = 20, x + 1 = 21.

128. Un botiguer compra melons a 40 cènt./kg i els ven a 60 cènt./kg. Calcula quants quilos de meló havia comprat si se li han fet malbé 10 kg i ha guanyat 42 €.

Anomenem x al nombre de quilograms de melons que va comprar:

$0{,}20(x - 10) = 42$

$x = 220$

El botiguer va comprar 220 kg de melons.

129. Entre dos gots A i B de la mateixa capacitat distribueixen en parts desiguals 10 litres d'aigua. El got A s'ompliria si hi aboquessin els dos terços de l'aigua que conté B. El got B s'ompliria si hi afegissin la meitat de l'aigua del got A. Quanta aigua hi ha a cada got i quina capacitat tenen plens?

Si al got A hi ha x litres d'aigua, llavors, el got B contindrà 10 – x litres.

La capacitat total del got A ve donada per $x + \frac{2}{3}(10 - x)$ i la capacitat del got B, per $\frac{x}{2} + (10 - x)$.

Com que el volum dels dos gots és igual:

$$x + \frac{2}{3}(10 - x) = (10 - x) + \frac{x}{2} \rightarrow 6x + 40 - 40x = 60 - 6x + 3x \rightarrow 5x = 20 \rightarrow$$

$\rightarrow \quad x = 4 \rightarrow$ El got A conté 4 litres d'aigua i el got B, 6 litres.

La capacitat total d'ambdós gots és de 10 – 4 + $\frac{4}{2}$ = 8 litres.

130. Una mare, per estimular el seu fill, li dóna 1 € per cada exercici que faci bé. Si li surt malament, el fill ha de donar 50 cèntims a la mare. Després de 20 exercicis, el fill ha guanyat 15,50 €. Quants exercicis ha fet bé?

Sigui x el nombre d'exercicis que ha fet malament. Llavors, 20 – x serà el nombre d'exercicis ben solucionats.

Com que duu guanyats 15,50 €, es planteja i es resol la següent equació:

(20 – x) – 0,5x = 15,50 → 20 – 1,5x = 15,5 → x = 1,5x = 4,5 → x = 3

És a dir, ha fet 3 exercicis malament i 17 bé.

131. Si augmentéssim de 4 cm l'aresta d'un cub, el volum es multiplicaria per 8. Calcula la mida de l'aresta.

Sigui x la longitud en cm de l'aresta del cub petit. Llavors, l'aresta del cub gran mesurarà x + 4 cm. Com que el volum del cub gran és 8 vegades el del cub petit, es té la següent equació:

$$8x^3 = (x+4)^3 \rightarrow 8x^3 = x^3 + 12x^2 + 48 + 64 \rightarrow 7x^3 - 12x^2 - 48 - 64 = 0 \rightarrow x = 4$$

Així, les arestes mesuren 4 i 8 cm respectivament.

132. Si r i s són les solucions de $ax^2 + bx + c = 0$, quines són les solucions de $cx^2 - bx + a = 0$?

Per ser r i s les arrels de $ax^2 + bx + c = 0$, es té que

$ax^2 + bx + c = k(x - r)(x - s) = kx^2 + (-kr - ks)x + (krs)$, on s'obtenen els valors d' *a, b* i *c* en funció de *k*, *r* i *s*:

a = k   b = -k(r + s)   c = krs

Ara se substitueixen els valors a la nova equació i es resol:

$$cx^2 + bx + a = 0 \rightarrow krsx^2 + k(r+s)x + k = 0$$

$$x = \frac{-k(r+s) \pm \sqrt{(k(r+s))^2 - 4 \cdot krs \cdot k}}{2 \cdot krs} \rightarrow x = \frac{-k(r+s) \pm \sqrt{k^2s^2 + 2k^2rs + k^2r^2 - 4rsk^2}}{2krs} \rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{k^2r^2-2rsk^2+k^2s^2}}{2krs}\rightarrow x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{k^2(r-s)^2}}{2krs}\rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{-k(r+s)\pm k(r-s)}{2krs}\rightarrow x=\frac{-(r+s)\pm(r-s)}{2rs}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-(r+s)-(r-s)}{2rs}=-\dfrac{1}{s}\\ x_2=\dfrac{-(r+s)+(r-s)}{2rs}=-\dfrac{1}{r}\end{cases}$$

S'ha de veure el cas que r i s són cero. Per això, s'estudien diversos casos i s'aïlla de l'equació $krsx^2+k(r+s)x+k=k(rsx^2+(r+s)x+1)=0.$

Se suposa que k ≠ 0, ja que així s'evita arribar a 0 = 0.

Cas 1: r ≠ 0 i s ≠ 0 → Les arrels són $x_1=-\frac{1}{r}$ i $x_2=-\frac{1}{s}$

Cas 2: $r=0$ y $s\neq 0\rightarrow sx+1=0\rightarrow x=-\frac{1}{s}$

Cas 3: $r\neq 0$ y $s=0\rightarrow rx+1=0\rightarrow x=-\frac{1}{r}$

Cas 4: $r=0$ y $s=0\rightarrow k=0\rightarrow 1=0\rightarrow$ No hi ha solució.

133. En una empresa que es dedica a fabricar recipients de vidre han calculat que per elaborar un tipus de got de vidre hi ha unes despeses fixes de 3.000 € i una despesa en matèria primera d'1,50 € per got. Quants gots podran fabricar en aquesta empresa amb una despesa màxima de 7.000 €?

Sigui el nombre màxim de gots que es podrà fabricar. Llavors, com que la despesa màxima permesa és de 7.000 €:

$$\mathbf{3000+1,5x\leq 7000\rightarrow 1,5x\leq 4000\rightarrow x\leq 2.666,667}$$

Per tant, com a màxim es podran fabricar 2.666 gots.

134. Volen formar un rectangle doblegant 8 m de filferro. Entre quins valors estarà l'àrea d'aquest rectangle?

Com que el filferro té una longitud de 8 m, el semiperímetre del rectangle serà de 4m.

Si x és la base del rectangle, llavors 4 – x serà l'alçada, amb x ∈ (0 , 4).

L'àrea del rectangle ve determinada per l'expressió A = x(4-x) = 4x - x^2 , que és una paràbola on la imatge per x ∈ (0 , 4) és l'interval (0 , 4].

És a dir, l'àrea mínima és pràcticament nul·la, i l'àrea màxima val 4 m^2.

135. **Una dona de 24 anys acaba de tenir un fill. L'edat del fill, quan estarà entre $\frac{1}{5}$ i $\frac{2}{5}$ de la de la mare?**

	Actualitat	Dintre de *x* anys
Mare	24	24 + *x*
Fill	0	x

$$\frac{1}{5}(24+x) \le x \le \frac{2}{5}(24+x) \to \left.\begin{array}{l} x \le \frac{2}{5}(24+x) \\ \frac{1}{5}(24+x) \le x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 5x \le 48+2x \\ 24+x \le 5x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x \le 16 \\ x \ge 6 \end{array}\right\}$$

Quan el fill tingui entre 6 i 16 anys la seva edat serà compresa entre el $\frac{1}{5}$ i $\frac{2}{5}$ de la de la seva mare.

136. **El triple d'un nombre menys la seva meitat sempre és més gran que 3. Quins nombres compleixen aquesta propietat?**

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \to 6x - x > 6 \to x > \frac{6}{5}$$

Els nombre que compleixen aquesta propietat són els nombres més grans que $\frac{6}{5}$, és a dir $x \in \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$.

137. **D'un nombre sabem que si al seu quadrat hi restem la seva meitat, obtenim un nombre més petit que 1. Quin nombre pot ser?**

$$x^2 - \frac{x}{2} < 1 \to 2x^2 - x - 2 < 0 \to \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \approx 1,281 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0,781 \end{cases}$$

La recta real queda dividida en tres trams. Prenent un valor de cada un d'ells, comprovem si es satisfà la inequació:

$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \xrightarrow{x=-1} (-1)^2 - \frac{(-1)}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 \to$ No se satisfà la inequació en aquest interval.

$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \xrightarrow{x=0} 0^2 - \frac{0}{2} = 0 < 1 \to$ Es satisfà la inequació en aquest interval.

$\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right) \xrightarrow{x=2} 2^2 - \frac{2}{2} = 4 - 1 = 3 > 1 \to$ No se satisfà la inequació en aquest interval.

En $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, es compleix que $x^2 - \frac{x}{2} = 1$, i, per tant, no poden formar part del conjunt de nombres cercats.

Així, els nombres que satisfan la propietat donada són $x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

138. **Una companyia elèctrica ofereix tres tarifes que tenen una part fixa i una part proporcional al consum.**

- **Tarifa A: 6,70 € quantitat fixa més 0,18 € per quilowatt hora de consum.**
- **Tarifa B: 9,60 € quantitat fixa més 0,13 € per quilowatt hora de consum.**
- **Tarifa C: 14 € quantitat fixa més 0,09 € per quilowatt hora de consum.**

a) A partir de quina quantitat de consum la tarifa B és millor que la A?

b) A partir de quina quantitat de consum la tarifa C és millor que la A?

c) A partir de quina quantitat de consum la tarifa C és la millor de totes?

Que una tarifa sigui millor que una altra vol dir que un client gasti menys amb la primera tarifa que amb la segona.

Anomenant x als kwh consumits, es té:

a) $6,70+0,18x > 9,60+0,13x \rightarrow 5x > 290 \rightarrow x > 58$

Quan es consumeixin més de 58 kwh la tarifa B serà més rendible que la tarifa A.

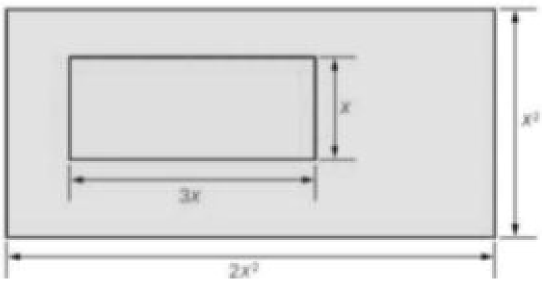
b) $6,70+0,18x > 14+0,09x \rightarrow 9x > 730 \rightarrow x > \frac{730}{9} \rightarrow x > 81,11$

Quan es consumeixin més de 81,11 kwh la tarifa C serà més rendible que la tarifa A.

c) $\left.\begin{matrix} 6,70+0,18x > 14+0,09x \\ 9,60+0,13x > 14+0,09x \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 9x > 730 \\ 4x > 440 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x > 81,11 \\ x > 110 \end{matrix}\right\} \rightarrow x > 110$

Quan es consumeixin més de 110 kwh la tarifa C serà la més rendible de totes.

139. **Volen construir una piscina rectangular en un jardí i, abans que res, dibuixen un esquema amb les dimensions del jardí i de la piscina. Quines són les dimensions de la piscina si la diferència d'àrees entre el jardí i la piscina és de 135 m^2?**



Anomenant x al costat més petit de la piscina, es té:

$2x^4 - 3x^2 = 135 \rightarrow 2x^4 - 3x^2 - 135 = 0 \rightarrow 2z^2 - 3z - 135 = 0$

$z = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-135)}}{2\cdot 2} \rightarrow z = \frac{3 \pm 33}{4} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{15}{2} \\ z_2 = 9 \end{cases}$

$z_1 = -\frac{15}{2} \rightarrow x^2 = -\frac{15}{2} \rightarrow$ No té solució real.

$z_2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Es descarta $x_1 = -3$ com a solució, ja que la longitud ha de ser positiva.

Per tant, la piscina mesura 9 metres de llarg i 3 metres d'ample.

AMPLIA

140. Escull la resposta adequada

Un ramader té ovelles i gallines. Si la mitjana del nombre de potes per animal és l, el quocient entre el nombre d'ovelles i gallines és:	$\frac{1}{3(4-l)}$	$\frac{l-2}{4-l}$	$\frac{3(l-2)}{l}$	$\frac{(l-2)^2}{16-l^2}$	$\frac{7(l^2-4)}{5(16-l^2)}$
Si $b>1$, $x>0$ i $(2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$, x és igual a:	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{6}$	1	6	No es pot determinar
Quantes solucions reals té l'equació $\lvert x-\lvert 2x+1\rvert\rvert=3$?	0	1	2	3	4
Quin és el producte de les solucions de l'equació $\sqrt{5\lvert x\rvert+8}=\sqrt{x^2-16}$?	−64	−24	−9	24	576
L'edat d'en Joan, t anys, és la suma de les edats dels seus tres fills. Si fa n anys la seva edat era el doble de la suma de les edats dels seus fills, quant val el quocient $\frac{t}{n}$?	2	$\frac{11}{3}$	4	$\frac{25}{6}$	5

□ Sigui x el nombre d'ovelles i y el nombre de gallines. Com cada ovella té 4 potes i cada gallina 2, hi ha en total x + y animals i 4x + 2y potes..

$$\frac{4x+2y}{x+y}=l\rightarrow 4x+2y=lx+ly\rightarrow(4-l)x=(l-2)y\rightarrow\frac{x}{y}=\frac{l-2}{4-l}$$

□ $b>1,\quad x>0,\quad (2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$

Es prenen logaritmes en la igualtat $(2x)^{\log_b 2}=(3x)^{\log_b 3}$, s'apliquen propietats dels logaritmes, es simplifica i s'aïlla:

$$\log_b 2\cdot\log_b 2x=\log_b 3\cdot\log_b 3x$$

$$\log_b 2\cdot(\log_b 2+\log_b x)=\log_b 3\cdot(\log_b 3+\log_b x)$$

$$(\log_b 2)^2+\log_b 2\cdot\log_b x=(\log_b 3)^2+\log_b 3\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2)^2-(\log_b 3)^2=\log_b 3\cdot\log_b x-\log_b 2\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2)^2-(\log_b 3)^2=(\log_b 3-\log_b 2)\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2+\log_b 3)\cdot(\log_b 2-\log_b 3)=(-1)(\log_b 2-\log_b 3)\cdot\log_b x$$

$$(-1)\cdot(\log_b 2+\log_b 3)=\log_b x$$

$$-\log_b 2-\log_b 3=\log_b x\rightarrow\log_b\frac{1}{6}=\log_b x\rightarrow x=\frac{1}{6}$$

□ $$\lvert x-\lvert 2x+1\rvert\rvert=3\rightarrow\begin{cases}\lvert x-2x-1\rvert=3, & x\geq-\frac{1}{2}\\ \lvert x+2x+1\rvert=3, & x\leq-\frac{1}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+1=3, & x\geq-\frac{1}{2}, & x\geq-1\\ -x-1=3, & x\geq-\frac{1}{2}, & x\leq-1\\ 3x+1=3, & x\leq-\frac{1}{2}, & x\geq-\frac{1}{3}\\ -3x-1=3, & x\leq-\frac{1}{2}, & x\leq-\frac{1}{3}\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=2, & x\geq -\frac{1}{2}, \quad x\geq -1 & \rightarrow x=2 \\ x=-4, & x\geq -\frac{1}{2}, \quad x\leq -1 & \rightarrow \text{No té solució.} \\ x=\frac{2}{3}, & x\leq -\frac{1}{2}, \quad x\geq -\frac{1}{3} & \rightarrow \text{No té solució.} \\ x=-\frac{4}{3}, & x\leq -\frac{1}{2}, \quad x\leq -\frac{1}{3} & \rightarrow x=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Per tant, hi ha dues solucions reals.

d) $\sqrt{5|x|+8}=\sqrt{x^2-16} \rightarrow 5|x|+8=x^2-16 \rightarrow \begin{cases} x^2-5x-24=0, & x\geq 0 \\ x^2+5x-24=0, & x\leq 0 \end{cases}$

$$x^2-5x-24=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-24)}}{2\cdot 1} \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{121}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=8 \end{cases}$$

$$x^2+5x-24=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-24)}}{2\cdot 1} \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=3 \end{cases}$$

$\begin{cases} x^2-5x-24=0, & x\geq 0 \rightarrow x=8 \\ x^2+5x-24=0, & x\leq 0 \rightarrow x=-8 \end{cases}$ → El producte de les solucions és $8\cdot(-8)=-64$.

e) Anomenant *x*, *y*, *z* a les edats dels seus fills:

$$\left.\begin{array}{l} t=x+y+z \\ t-n=2(x-n+y-n+z-n) \end{array}\right\} \rightarrow t-n=2(t-3n) \rightarrow t-n=2t-6n \rightarrow 5n=t \rightarrow \frac{t}{n}=5$$

141. Calcula la relació entre els coeficients de l'equació següent i la suma, el producte i la suma dels dobles productes de les seves tres arrels:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

Siguin x_1, x_2 i x_3 les arrels de l'equació donada. Llavors:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=ax^3+bx^2+cx+d \rightarrow$$

$$\rightarrow x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=ax^3+bx^2+cx+d$$

Comparant els termes s'obtenen les relacions demanades:

$$x_1+x_2+x_3=-b \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c \qquad x_1x_2x_3=-d$$

142. Estudia les solucions de l'equació següent segons els valors de m.

$$x^2-2x+\log m=0$$

Per la definició de logaritme: m > 0; $\Delta = b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 1\cdot \log m$

Perquè l'equació no tingui solució: $4-4\log m<0 \rightarrow (10,+\infty)$

Perquè l'equació tingui solució: $4-4\log m=0 \rightarrow m=10$

Perquè l'equació tingui dues solucions: $4-4\log m>0 \rightarrow (-\infty,10)$

143. **Si les solucions de l'equació**

$ax^2 + bx + c = 0$

son x_1 i x_2 escriu equacions de segon grau que tinguin aquestes solucions:

a) Els quadrats de x_1 i x_2.

b) Els inversos de x_1 i x_2.

c) Els oposats de x_1 i x_2.

a) $(x - x_1^2)(x - x_2^2) = 0 \rightarrow x^2 - (x_1^2 + x_2^2)x + x_1^2 \cdot x_2^2$

b) $\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0$

c) $(x + x_1)(x + x_2) = 0 \rightarrow x^2 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$

144. **En Joan i en Lluís pugen a una escala mecànica En Joan puja tres vegades més ràpid que el seu amic, i tots dos ho fan esglaó a esglaó.**

Quan acaben de pujar, en Joan ha comptat 75 esglaons, i en Lluís, 50 esglaons. Amb aquestes dades, calcula els esglaons "visibles" de l'escala.

Mentre en Joan puja un esglaó, l'escala mecànica ha pujat x esglaons, i el nombre d'esglaons visibles és 75 + 75x.

En Lluís puja 50 esglaons. Com que ho fa tres vegades més lent que en Joan, mentre en Lluís puja un esglaó, l'escala puja 3x. El nombre d'esglaons visibles és 50 + 150x.

Per tant, resulta que: $75 + 75x = 50 + 150x \rightarrow x = \frac{1}{3}$

El nombre d'esglaons "visibles" és 100.

145. Calcula les solucions reals de l'equació

$$\sqrt[3]{1729-x}+\sqrt[3]{x}=19$$

$$\sqrt[3]{1729-x}+\sqrt[3]{x}=19 \rightarrow 1729-x=\left(19-\sqrt[3]{x}\right)^3 \rightarrow 1729-x=57\sqrt[3]{x^2}-x-1083\sqrt[3]{x}+6859 \rightarrow \sqrt[3]{x^2}-19\sqrt[3]{x}+90=0$$

Fem $z=\sqrt[3]{x}$ i resolem l'equació de segon grau resultant:

$$z^2-19z+90=0 \rightarrow z=\frac{19\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot1\cdot90}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{19\pm\sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=9 \rightarrow \sqrt[3]{x}=9 \rightarrow x_1=729 \\ z_2=10 \rightarrow \sqrt[3]{x}=10 \rightarrow x_2=1000 \end{cases}$$

146. Descompon el polinomi

P(x) = $x^5-209x+56$

en producte de dos factors, si sabem que s'anul·la per a dos valors, x_1 i x_2, inversos entre ells.

Siguin r i $\frac{1}{r}$ les dues arrels inverses del polinomi P(x).

El polinomi que té les arrels és:

$$(x-r)\left(x-\frac{1}{r}\right)=x^2-\frac{1+r^2}{r}x+1=x^2+mx+1$$

Així, resulta que P(x) = $\mathrm{P(x)}=\ x^5-209x+56=(x^2+mx+1)(x^3+bx^2+cx+d)$.

147. Prova que les sumes de les primeres, les segones i les terceres potències de les arrels del polinomi

$$\mathrm{P(x)}=\ x^3+2x^2+3x+4$$

valen el mateix.

Sigui ax^3+bx^2+cx+d l'equació general de tercer grau. Llavors, en aquest cas es té que

$a=1 \quad b=2 \quad c=3 \quad d=4$.

D'altra banda, siguin x_1 , x_2 y x_3 les arrels de l'equació donada. Fent ús de les fórmules obtingudes a l'exercici 142:

$$x_1+x_2+x_3=-b=-2 \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c=3 \qquad x_1x_2x_3=-d=-4$$

- Suma de les primeres potències de les arrels:

$$x_1+x_2+x_3=-2$$

- Suma de les segones potències de les arrels:

$$x_1+x_2+x_3=-2 \rightarrow (x_1+x_2+x_3)^2=(-2)^2 \rightarrow x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=4 \rightarrow$$

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2\cdot3=4 \rightarrow x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=-2$$

- Suma de las terceres potències de les arrels:

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=-2 \rightarrow (x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2})(x_1+x_2+x_3)=-2\cdot(-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}+x_3^{\ 3}+x_1^{\ 2}(x_2+x_3)+x_2^{\ 2}(x_1+x_3)+x_3^{\ 2}(x_1+x_2)=4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}+x_3^{\ 3}+x_1(x_1x_2+x_1x_3)+x_2(x_1x_2+x_2x_3)+x_3(x_1x_3+x_2x_3)=4 \xrightarrow{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3}$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1(3 - x_2x_3) + x_2(3 - x_1x_3) + x_3(3 - x_1x_2) = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1 + 4 + 3x_2 + 4 + 3x_3 + 4 = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 12 = 4 \xrightarrow{x_1+x_2+x_3=-2} = -2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(-2) + 12 = 4 \rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4 - 12 + 6 \rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2$$

148. Determina de manera justificada tots els parells de nombres enters (x, y) que verifiquen l'equació $x^2 - y^4 = 2009$.

$x^2 - y^4 = 2\,009 \rightarrow (x - y^2)(x + y^2) = 2\,009$.

Sigui $a = x - y^2$ i $b = x + y^2$. Llavors, $ab = 2\,009$.

Per una banda, es busca una expressió per a *x* i per a y^2 en funció d' *i* y *b* $\rightarrow \begin{cases} a + b = 2x \rightarrow x = \dfrac{a+b}{2} \\ b - a = 2y^2 \rightarrow y^2 = \dfrac{b-a}{2} \end{cases}$

També, es descomposa 2·009 en factors primers i s'estudien tots els productes possibles, considerant que *x* i *y* són nombres sencers i, per tant, els dos factors polinòmics, $a = (x - y^2)$ i $b = (x + y^2)$ també ho són:

$$2\,009 = 7 \cdot 7 \cdot 41 = 49 \cdot 41 = 7 \cdot 287 = 1 \cdot 2\,009$$

Ara s'estudien els casos possibles, tenint en consideració que $a < b$ i que perquè y sigui sencer és necessari que $\dfrac{b-a}{2}$ sigui un quadrat perfecte:

- $2009 = 1 \cdot 2009 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2009 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} \begin{cases} x = \dfrac{1+2009}{2} = 1500 \\ y^2 = \dfrac{2009-1}{2} = 1004 \rightarrow \text{No és quadrat perfecte.} \end{cases}$

- $2009 = 7 \cdot 287 \rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 287 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} \begin{cases} x = \dfrac{7+287}{2} = 147 \\ y^2 = \dfrac{287-7}{2} = 140 \rightarrow \text{No és quadrat perfecte.} \end{cases}$

- $2009 = 49 \cdot 41 \rightarrow \begin{cases} a = 41 \\ b = 49 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} \begin{cases} x = \dfrac{41+49}{2} = 45 \\ y^2 = \dfrac{49-41}{2} = 4 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$

El tercer cas és l'únic que compleix totes les característiques, i com que hi ha simetria parell, els únics parells sencers que resolen l'equació donada són: $(45,2), (45,-2), (-45,2)$ i $(-45,-2)$.