Sistemes d'equacions

4

ACTIVITATS

1. **Determina les incògnites, els coeficients, el terme independent i una solució d'aquestes equacions lineals:**

a) $3x-2y=-3$ **c)** $8-4x+2y=z$

b) $5y+2x+z=8$ **d)** $2t+4x-7=y+4z$

	Equació reordenada	Incògnites	Coeficients	Terme independent	Solució qualsevol
a)	$3x-2y=-3$	*x*, *y*	3, −2	−3	(−1, 0)
b)	$2x+5y+z=8$	*x*, *y*, *z*	2, 5, 1	8	(0, 0, 8)
c)	$-4x+2y-z=-8$	*x*, *y*, *z*	−4, 2, −1	−8	(1, 1, 6)
d)	$4x-y-4z+2t=7$	*x*, *y*, *z*, *t*	4, −1, −4, 2	7	(0, 1, 0, 4)

2. **Indica quins d'aquests parells de valors són solució del sistema**

$$\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x-2y=-3 \end{array}\right\}\ ?$$

a) x = 1, y = 0 b) x = -1, y = 1 c) x = 5, y = 4

L'únic parell que satisfà les dues equacions que formen el sistema és *x* = 5, *y* = 4.

3. **Classifica aquests sistemes d'equacions i troba'n la solució pel mètode més adequat:**

a) $\left.\begin{array}{r} 8x-2y=4 \\ -12x+3y=-6 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} 4x+6y=2 \\ 3y+2x=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} p+2q=1 \\ 3p-q=11 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} 2x-y=-4 \\ -x+2y=7 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 8x-2y=4 \\ -12x+3y=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{:2} 4x-y=2 \\ \xrightarrow{:(-3)} 4x-y=2 \end{array}\Bigg\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) $\left.\begin{array}{r} p+2q=1 \\ 3p-q=11 \end{array}\right\} \begin{array}{r} p+2q=1 \\ \xrightarrow{\cdot 2} 6p-2q=22 \end{array}\Bigg\} \xrightarrow{\text{reducció}} 7p=23 \rightarrow p=\frac{23}{7} \rightarrow$

$\rightarrow 3\cdot\frac{23}{7}-q=11 \rightarrow q=-\frac{8}{7} \rightarrow$ Sistema compatible determinat.

c) $\left.\begin{array}{r} 4x+6y=2 \\ 3y+2x=1 \end{array}\right\} \begin{array}{r} \xrightarrow{:2} 2x+3y=1 \\ 2x+3y=1 \end{array}\Bigg\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=-4 \\ -x+2y=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4=y \\ -x+2y=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{substitució}} -x+2(2x+4)=7 \rightarrow$

$\rightarrow 3x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3} \rightarrow y=\frac{10}{3} \rightarrow$ Sistema compatible determinat.

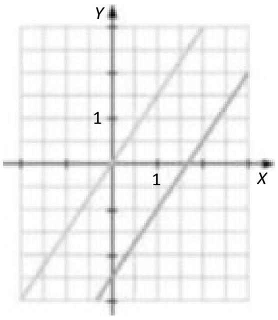
4. **Determina de quin tipus són aquests sistemes d'equacions i representa'n gràficament la solució:**

a) $\left.\begin{array}{l}3x-2y=5\\-6x+4y=0\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l}-x+y=3\\2x-y=-1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}4x-6y=2\\-6x+9y=-3\end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{l}10x+y=-3\\-4x+2y=-6\end{array}\right\}$

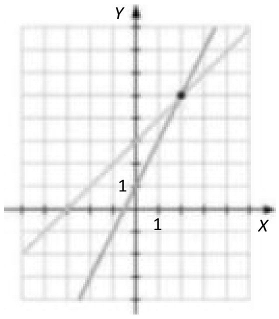
a) $\left.\begin{array}{l}3x-2y=5\\-6x+4y=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\\ \xrightarrow{:(-2)}\end{array} \left.\begin{array}{l}3x-2y=5\\3x-2y=0\end{array}\right\}$

Sistema incompatible. No hi ha solució:



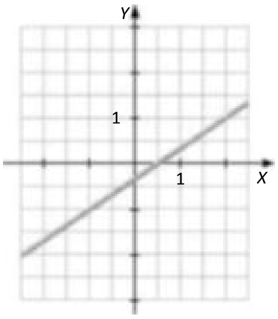
c) $\left.\begin{array}{l}-x+y=3\\2x-y=-1\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{reducció}} x=2 \xrightarrow{y=3+x} y=5$

Sistema compatible determinat. Solució única:



b) $\left.\begin{array}{l}4x-6y=2\\-6x+9y=-3\end{array}\right\} \begin{array}{l}\xrightarrow{:2}\\ \xrightarrow{:(-3)}\end{array} \left.\begin{array}{l}2x-3y=1\\2x-3y=1\end{array}\right\}$

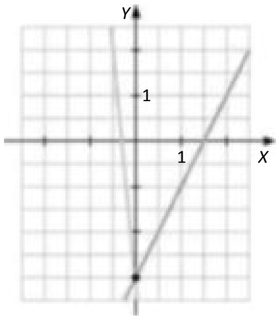
Sistema compatible indeterminat.
Infinites solucions:



d) $\left.\begin{array}{l}10x+y=-3\\-4x+2y=-6\end{array}\right\} \begin{array}{l}\\ \xrightarrow{:(-2)}\end{array} \left.\begin{array}{l}10x+y=-3\\2x-y=3\end{array}\right\} \to$

$\xrightarrow{\text{reducció}} 12x=0 \to x=0 \xrightarrow{y=-3-10x} y=-3$

Sistema compatible determinat. Solució única:



5. **Resol mitjançant els mètodes de substitució i igualació.**

a) $\left.\begin{array}{l}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l}2x-7y=4\\-6x+2y=3\end{array}\right\}$

a) ▪ Substitució:

$$\left.\begin{array}{l}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2+5y}{3}\\-2x+3y=5\end{array}\right\} \to -2\left(\frac{2+5y}{3}\right)+3y=5 \to -4-10y+9y=15 \to y=-19 \to x=-31$$

▪ Igualació:

$$\left.\begin{array}{r}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2+5y}{3}\\x=\dfrac{3y-5}{2}\end{array}\right\}\to\frac{2+5y}{3}=\frac{3y-5}{2}\to 4+10y=9y-15\to y=-19\to x=-31$$

b) ▪ Substitució:

$$\left.\begin{array}{r}2x-7y=4\\-6x+2y=3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{4+7y}{2}\\-6x+2y=3\end{array}\right\}\to -6\left(\frac{4+7y}{2}\right)+2y=3\to -12-21y+2y=3\to y=-\frac{15}{19}\to x=-\frac{29}{38}$$

▪ Igualació:

$$\left.\begin{array}{r}2x-7y=4\\-6x+2y=3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{4+7y}{2}\\x=\dfrac{2y-3}{6}\end{array}\right\}\to\frac{4+7y}{2}=\frac{2y-3}{6}\to 12+21y=2y-3\to y=-\frac{15}{19}\to x=-\frac{29}{38}$$

6. Determina la solució d'aquest sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{r}3(2x+y-1)-6(4x-y)=15\\-x+y+3(x-2y+6)=4\end{array}\right\}$$

Resolem el sistema per substitució:

$$\left.\begin{array}{r}3(2x+y-1)-6(4x-y)=15\\-x+y+3(x-2y+6)=4\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}-2x+y=2\\2x-5y=-14\end{array}\right\}$$

Resolem per reducció:

$$\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}-2x+y=2\\2x-5y=-14\end{array}\right\}\\\hline -4y=-12\to y=3\end{array}$$

Substituïm en una de les equacions: $-2x+3=2\to x=\dfrac{1}{2}$

7. Resol els sistemes següents pel mètode de reducció:

a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=4\\2x-3y=2\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}x-3y=1\\4x+5y=-2\end{array}\right\}$

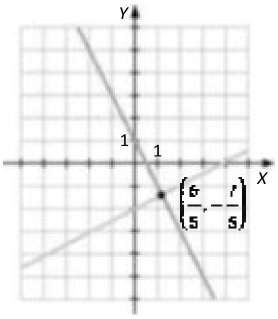
a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=4\\2x-3y=2\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot(-2)}\\\xrightarrow{\cdot 3}\end{array}\left.\begin{array}{r}-6x+4y=-8\\6x-9y=6\end{array}\right\}\to -5y=-2\to y=\dfrac{2}{5}\to x=\dfrac{4+2\cdot\frac{2}{5}}{3}=\dfrac{16}{15}$

b) $\left.\begin{array}{r}x-3y=1\\4x+5y=-2\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-4)}\left.\begin{array}{r}-4x+12y=-4\\4x+5y=-2\end{array}\right\}\to 17y=-6\to y=-\dfrac{6}{17}\to x=1+3\cdot\left(-\dfrac{6}{17}\right)=\dfrac{11}{17}$

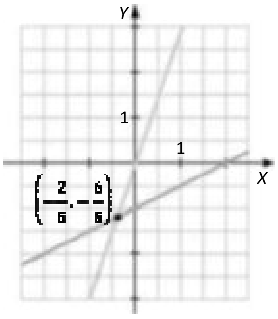
8. Resol gràficament aquests sistemes:

a) $\left.\begin{array}{r}x-2y=4\\2x+y=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}3x-y=0\\x-2y=2\end{array}\right\}$

a)



b)



9. **Determina la solució d'aquests sistemes:**

a) $\left.\begin{aligned} x+z&=1 \\ 2x-y-2z&=4 \\ x+3y+z&=3 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ x-y+z&=2 \\ -x+y+z&=4 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x+z&=1 \\ 2x-y-2z&=4 \\ x+3y+z&=3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=1-z} \left.\begin{aligned} 2(1-z)-y-2z&=4 \\ 1-z+3y+z&=3 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -y-4z&=2 \\ 3y&=2 \end{aligned}\right\} \to y=\frac{2}{3} \to -\frac{2}{3}-4z=2 \to z=-\frac{2}{3} \xrightarrow{x=1-z} x=\frac{5}{3}$

La solució és la terna $\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

b) $\left.\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ x-y+z&=2 \\ -x+y+z&=4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=z-y} \left.\begin{aligned} z-y-y+z&=2 \\ -z+y+y+z&=4 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} z-y&=1 \\ 2y&=4 \end{aligned}\right\} \to y=2 \xrightarrow{z=1+y} z=3 \xrightarrow{x=z-y} x=1$

La solució és la terna $(1,2,3)$.

10. **Resol els sistemes següents:**

a) $\left.\begin{aligned} x-2y+5z&=4 \\ -2x+3y-z&=1 \\ 3x+y+2z&=-1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+z&=1 \\ y+z&=1 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x-2y+5z&=4 \\ -2x+3y-z&=1 \\ 3x+y+2z&=-1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=4-5z+2y} \left.\begin{aligned} -2(4-5z+2y)+3y-z&=1 \\ 3(4-5z+2y)+y+2z&=-1 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -y+9z&=9 \\ 7y-13z&=-13 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y=9z-9}$

$\to 7(9z-9)-13z=-13 \to 50z=50 \to z=1 \xrightarrow{y=9z-9} y=0 \xrightarrow{x=4-5z+2y} x=-1$

La solució és la terna $(-1,0,1)$.

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+z&=1 \\ y+z&=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=1-y} \left.\begin{aligned} 1-y+z&=1 \\ y+z&=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y=z} 2z=1 \to z=\frac{1}{2} \to y=\frac{1}{2} \to x=\frac{1}{2}$

La solució és la terna $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

11. Resol aquests sistemes:

a) $\left.\begin{aligned} x-y&=3\\ 3x+2y&=19\\ 2x+3y&=16 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 2x+5y-6z&=0\\ 3x+4y+z&=0 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x-y&=3\\ 3x+2y&=19\\ 2x+3y&=16 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-2E_1+E_3} \end{matrix} \left.\begin{aligned} x-y&=3\\ 5y&=10\\ 5y&=10 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x-y&=3\\ 5y&=10 \end{aligned}\right\} \rightarrow y=2 \rightarrow x=5$

La solució és la parella (5, 2).

b) $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 2x+5y-6z&=0\\ 3x+4y+z&=0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3} \end{matrix} \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 3y-10z&=0\\ y-5z&=0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \\ \xrightarrow{E_3=E_2-3E_3} \end{matrix} \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 3y-10z&=0\\ 5z&=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow z=0 \rightarrow y=0 \rightarrow x=0$

La solució és la terna (0, 0, 0).

12. Resol els sistemes següents:

a) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 3x-y&=1\\ 5x+7y-3z&=3 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x-y-2z&=8\\ 2x+y-3z&=11\\ x+2y+3z&=5 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 3x-y&=1\\ 5x+7y-3z&=3 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-5E_1+E_3} \end{matrix} \left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ -4y-3z&=-5\\ 2y-8z&=-7 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \\ \xrightarrow{E_3=2E_3+E_2} \end{matrix} \left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ -4y-3z&=-5\\ -19z&=-19 \end{aligned}\right\} \rightarrow z=1 \xrightarrow{y=\frac{-5+3z}{-4}} y=\frac{1}{2} \xrightarrow{x=2-y-z} x=\frac{1}{2}$

La solució és la terna $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

b) $\left.\begin{aligned} x-y-2z&=8\\ 2x+y-3z&=11\\ x+2y+3z&=5 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-E_1+E_3} \end{matrix} \left.\begin{aligned} x-y-2z&=8\\ 3y+z&=-5\\ 3y+5z&=-3 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \\ \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3} \end{matrix} \left.\begin{aligned} x-y-2z&=8\\ 3y+z&=-5\\ 4z&=2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z=2 \xrightarrow{y=\frac{-5-z}{3}} y=-\frac{11}{6} \xrightarrow{x=8+y+2z} x=\frac{43}{6}$

La solució és la terna $\left(\frac{43}{6},-\frac{11}{6},\frac{1}{2}\right)$.

13. Expressa aquests sistemes de manera matricial i soluciona'ls:

a) $\left.\begin{aligned} 3x+4y+5z&=2\\ x-y+2z&=-6\\ -2x-y+z&=8 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x-3y+2z&=1\\ 2x+y-z&=3\\ 3x-y&=7 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -6\\ -2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6\\ 3 & 4 & 5 & 2\\ -2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=2E_1+E_3} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6\\ 0 & 7 & -1 & 20\\ 0 & -3 & 5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=3E_2+7E_3}$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&7&-1&20\\0&0&32&32\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x-y+2z=-6\\7y-z=20\\32z=32\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}\xrightarrow{y=3,\,z=1}x=-6+3-2\rightarrow x=-5\\\xrightarrow{z=1}7y=21\rightarrow y=3\\\longrightarrow z=1\end{array}$$

La solució és la terna $(-5,3,1)$.

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&1\\2&1&-1&3\\3&-1&0&7\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2}\\\xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&1\\0&7&-5&1\\0&8&-6&4\end{array}\right)\xrightarrow{E_3=E_3/2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&1\\0&7&-5&1\\0&4&-3&2\end{array}\right)\xrightarrow{E_3=-4E_2+7E_3}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&1\\0&7&-5&1\\0&0&-1&10\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x-3y+2z=1\\7y-5z=1\\-z=10\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{y=-7,\,z=-10}x+21-20=1\rightarrow x=0\\\xrightarrow{z=-10}7y+50=1\rightarrow y=-7\\\longrightarrow z=-10\end{array}$$

La solució és la terna $(0,-7,-10)$.

14. Expressa els sistemes següents de manera matricial i soluciona'ls:

a) $\left.\begin{array}{r}x-y=3\\x-y=2\\y-z=-1\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}3x-y+z=1\\x+3y-z=2\\4x+2y=1\end{array}\right\}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&3\\1&0&-1&2\\0&1&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{E_2=-E_1+E_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&3\\0&1&-1&-1\\0&1&-1&-1\end{array}\right)$$

Com que una fila es repeteix, el sistema és compatible indeterminat. Té infinites solucions, que es donen en funció d'un paràmetre:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&3\\0&1&-1&-1\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x-y=3\\y-z=-1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{z=\lambda,\,y=-1+\lambda}x-(-1+\lambda)=3\rightarrow x=2+\lambda\\\xrightarrow{z=\lambda}y=-1+\lambda\end{array}$$

Les solucions vénen determinades per la terna $(2+\lambda,-1+\lambda,\lambda)$.

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&1&1\\1&3&-1&2\\4&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{E_1\leftrightarrow E_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&2\\3&-1&1&1\\4&2&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2}\\\xrightarrow{E_3=-4E_1+E_3}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&2\\0&-10&4&-5\\0&-10&4&-7\end{array}\right)\xrightarrow{E_3=-E_2+E_3}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&2\\0&-10&4&-5\\0&0&0&-2\end{array}\right)\rightarrow$$ Sistema incompatible. No té solució.

15. Determina el nombre de solucions d'aquests sistemes:

a) $\left.\begin{array}{r}x+4y-z=2\\3x-y+z=1\\-2x+y-z=0\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}2x-3y+5z=1\\2x+y-z=3\\2y-3z=1\end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=2E_1+E_3]{E_2=-3E_1+E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 4 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=9E_2+13E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinat. Té una única solució.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-E_1+E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+2E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat. Té infinites solucions.

16. Discuteix aquests sistemes i troba'n la solució:

a) $\left.\begin{array}{r} y-3z=3 \\ 3y-2z=1 \\ 2x+5y-5z=4 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x-3y+4z=1 \\ 2x-2y-z=2 \\ x+y-3z=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1\leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+3E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinat. Té una única solució:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} 2x+5y-5z=4 \\ 3y-2z=1 \\ -7z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=-\frac{3}{7},\ z=-\frac{8}{7}} x=\frac{3}{14} \\ \xrightarrow{z=-\frac{8}{7}} y=-\frac{3}{7} \\ \longrightarrow z=-\frac{8}{7} \end{array}$$

La solució és la terna $\left(\frac{3}{14},-\frac{3}{7},-\frac{8}{7}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=-E_1+E_3]{E_2=-2E_1+E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinat. Té una única solució:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x-3y+4z=1 \\ 4y-9z=0 \\ 2z=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=-\frac{27}{8},\ z=-\frac{3}{2}} x=-\frac{25}{8} \\ \xrightarrow{z=-\frac{3}{2}} y=-\frac{27}{8} \\ \longrightarrow z=-\frac{3}{2} \end{array}$$

La solució és la terna $\left(-\frac{25}{8},-\frac{27}{8},-\frac{3}{2}\right)$.

17. Resol aquests sistemes d'equacions:

a) $\left.\begin{array}{r} \frac{x+1}{2}=y-3 \\ 2x^2=y^2-7 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} xy-2x=-9 \\ x=2y^2-y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{2}=y-3\\ 2x^2=y^2-7\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=2y-7\\ 2x^2=y^2-7\end{array}\right\}\to 2(2y-7)^2=y^2-7\to 8y^2+98-56y=y^2-7\to$

$\to 7y^2-56y+105=0\to y^2-8y+15=0\to\left\{\begin{array}{l}y_1=5\xrightarrow{2y-7}x_1=3\\ y_2=3\xrightarrow{2y-7}x_2=-1\end{array}\right.$

Les dues solucions són les parelles $(3,5)$ i $(-1,3)$.

b) $\left.\begin{array}{l}xy-2x=-9\\ \dfrac{x+y}{y}=2y\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}xy-2x=-9\\ x=2y^2-y\end{array}\right\}\to(2y^2-y)y-2(2y^2-y)=-9\to 2y^3-5y^2+2y+9=0$

Obtenim les solucions aplicant Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 2 & 9\\ -1 & & -2 & 7 & -9\\ \hline & 2 & -7 & 9 & \boxed{0}\end{array}$$

$\to y=-1$ és l'única solució real, i per tant, $x=2-1=1$.

La solució del sistema és la parella $(1,1)$.

18. Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $\left.\begin{array}{l}6x+6y=5\\ x^2-y^2=\dfrac{5}{36}\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y+4}+x=y+2\\ y^2-x^2=2(x+y)\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l}6x+6y=5\\ x^2-y^2=\dfrac{5}{36}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{5-6y}{6}\\ 36x^2-36y^2=5\end{array}\right\}\to 36\left(\dfrac{5-6y}{6}\right)^2-36y^2=5\to$

$\to 25+36y^2-60y-36y^2=5\to 60y=20\to y=\dfrac{1}{3}\xrightarrow{x=\frac{5-6y}{6}}x=\dfrac{1}{2}$

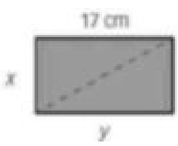
L'única solució és la parella $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$.

b) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y+4}+x=y+2\\ y^2-x^2=2(x+y)\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{Factorizant}]{}\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y+4}+x=y+2\\ (y+x)(y-x)=2(x+y)\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y+4}+x=y+2\\ y-x=2\end{array}\right\}\to$

$\to\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y+4}+x=y+2\\ y=2+x\end{array}\right\}\to\sqrt{x+2+x+4}+x=2+x+2\to\sqrt{2x+6}=4\to 2x+6=16\to 2x=10\to x=5\to y=7$

En simplificar la segona equació del sistema, es perd la solució trivial nul·la, que també és vàlida. Per tant, les dues solucions són les parelles (0, 0) i (5, 7).

19. La diagonal d'un rectangle fa 17 cm, i el perímetre, 46 cm. Planteja un sistema d'equacions i calcula la longitud dels costats.



Per definició de perímetre i aplicant el teorema de Pitàgores, arribem al sistema de dues equacions i dues incògnites següent:

$$\left.\begin{array}{r}2x+2y=46\\ x^2+y^2=17^2\end{array}\right\}\to \left.\begin{array}{r}x+y=23\\ x^2+y^2=289\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Substitució}}\left.\begin{array}{r}y=23-x\\ x^2+y^2=289\end{array}\right\}\to$$

$$\to x^2+(23-x)^2=289\to 2x^2-46x+240=0\to\begin{cases}x_1=8\to y_1=15\\ x_2=15\to y_2=8\end{cases}$$

Perquè la solució s'ajusti a la il·lustració, x i y han de mesurar 8 cm i 15 cm, respectivament.

20. La suma d'un nombre més cinc vegades l'invers d'un altre nombre és 2. D'altra banda, el segon nombre més el quàdruple del primer és 9. Determina quins són aquests nombres.

Sigui x el primer nombre i y el segon. Aleshores, el sistema d'equacions és el següent:

$$\left.\begin{array}{r}x+\dfrac{5}{y}=2\\ 4x+y=9\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Substitució}}\left.\begin{array}{r}xy+5=2y\\ y=9-4x\end{array}\right\}\to x(9-4x)+5=2(9-4x)\to 4x^2-17x+13=0\to\begin{cases}x_1=1\to y_1=5\\ x_2=\dfrac{13}{4}\to y_2=-4\end{cases}$$

Hi ha dues solucions possibles, que estan determinades per les parelles (1, 5) i $\left(\dfrac{13}{4},-4\right)$.

SABER FER

21. Resol aquests sistemes d'equacions:

a) $\left.\begin{array}{r}-x+3y=\dfrac{2}{5}\\ 5x-15y=2\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{3}-y=\dfrac{5}{2}\\ 2x-6y=15\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}-x+3y=\dfrac{2}{5}\\ 5x-15y=2\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot 5}\left.\begin{array}{r}-5x+15y=2\\ 5x-15y=2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducció}}0=0\rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

Es busquen les solucions en funció d'un paràmetre:

$$5x-15y=2\rightarrow\left.\begin{array}{r}5x-15\lambda=2\\ y=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2+15\lambda}{5}\\ y=\lambda\end{array}\right\}$$

Les infinites solucions estan determinades per les parelles $\left(\dfrac{2+15\lambda}{5},\lambda\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{3}-y=\dfrac{5}{2}\\ 2x-6y=15\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-6)}\left.\begin{array}{r}-2x+6y=-15\\ 2x-6y=15\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducció}}0=0\rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

Es busquen les solucions en funció d'un paràmetre:

$$2x-6y=15\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-6\lambda=15\\ y=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{15+6\lambda}{2}\\ y=\lambda\end{array}\right\}$$

Les infinites solucions estan determinades per les parelles $\left(\dfrac{15+6\lambda}{2},\lambda\right)$.

22. Resol els sistemes en funció del paràmetre a.

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ ax+2y=12\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}3x+5y=20\\ 7x+ay=39\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ ax+2y=12\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-2)}\left.\begin{array}{r}-4x-2y=-14\\ ax+2y=12\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducció}}(a-4)x=-2\rightarrow x=\dfrac{-2}{a-4}\rightarrow x=\dfrac{2}{4-a}$

- Si $a=4\rightarrow$ Sistema incompatible. No té solució.
- Si $a\neq 4\rightarrow$ Sistema compatible determinat. Té una única solució.

b) $\left.\begin{array}{r}3x+5y=20\\ 7x+ay=39\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot(-7)}\\ \xrightarrow{\cdot 3}\end{array}\left.\begin{array}{r}-21x-35y=-140\\ 21x+3ay=117\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducció}}(3a-35)y=-23\rightarrow y=\dfrac{-23}{3a-35}\rightarrow x=\dfrac{23}{35-3a}$

- Si $a=\dfrac{35}{3}\rightarrow$ Sistema incompatible. No té solució.
- Si $a\neq\dfrac{35}{3}\rightarrow$ Sistema compatible determinat. Té una única solució.

23. La diferència de les dues xifres d'un nombre és 2 i la diferència entre aquest nombre i el que obtenim intercanviant-ne les xifres és 18. Quin nombre és?

Sigui *x* la xifra de les desenes, i *y* la xifra de les unitats. Aleshores, es donen dos casos:

- $y > x$:

$$\left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 10x+y-(10y+x)=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 10x+y-10y-x=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 9x-9y=18 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} y=2+x \\ 9x-9y=18 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Substitució}} 9x-9(2+x)=18 \rightarrow 9x-18-9x=18 \rightarrow \text{Impossible. No té solució.}$$

- $x > y$:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 10x+y-(10y+x)=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 10x+y-10y-x=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminat.}$$

Es busquen les solucions en funció d'un paràmetre:

$$x-y=2 \xrightarrow{y=\lambda} \left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=\lambda \end{array}\right.$$

Les infinites solucions estan determinades per les parelles $(2+\lambda, \lambda)$. Per exemple, per a $\lambda=3$, el nombre 53 satisfà les condicions donades.

24. Determina el nombre de solucions dels sistemes.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=-3 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -3x+6y=9 \end{array}\right\} \rightarrow 0 \neq 18 \rightarrow \text{Sistema incompatible. No té solució.}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -3x+6y=-9 \end{array}\right\} \rightarrow 0=0 \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminat. Infinites solucions.}$$

25. Resol aquests sistemes:

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x-4y+z=5 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x-4y+z=5 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 5y+z=2 \\ 5y+z=2 \end{array}\right\}$$

Com que es repeteix una equació, el sistema és compatible indeterminat:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 5y+z=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{z=\lambda,\ y=\frac{2-\lambda}{5}} x=1+3\left(\frac{2-\lambda}{5}\right) \to x=\frac{11-3\lambda}{5} \\ \xrightarrow{z=\lambda} y=\frac{2-\lambda}{5} \end{array}$$

Les infinites solucions estan determinades per les ternes $\left(\frac{11-3\lambda}{5},\frac{2-\lambda}{5},\lambda\right)$.

b) $$\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible indeterminat. Com que hi ha una equació i tres incògnites, les solucions s'han de donar en funció de dos paràmetres:

$$x-y+z=0 \xrightarrow{y=\mu,\ z=\lambda} x=\mu-\lambda$$

Les infinites solucions estan determinades per les ternes $(\mu-\lambda,\mu,\lambda)$.

26. **Resol aquest sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2x-y-2z=1 \\ x-az=2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 1 \end{array}\right)$$

- $3-a=0 \to a=3 \to$ Sistema incompatible. No té solució.
- $3-a\neq 0 \to a\neq 3 \to$ Sistema compatible determinat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 1 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ y-4z=1 \\ (3-a)z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=\frac{a+1}{a-3},\ z=\frac{1}{3-a}} x=\frac{a+1}{a-3}-\frac{1}{3-a} \to x=\frac{a+2}{a-3} \\ \xrightarrow{z=\frac{1}{3-a}} y=1-\frac{4}{3-a} \to y=\frac{a+1}{a-3} \\ \longrightarrow z=\frac{1}{3-a} \end{array}$$

Per a cada valor de $a\neq 3$ la terna $\left(\frac{a+2}{a-3},\frac{a+1}{a-3},\frac{1}{3-a}\right)$ és la solució del sistema.

27. **La Maria, la Marisa i la Manuela volen aplegar 260 € per comprar un regal. Si la Maria posa el doble que la Marisa, i la Manuela posa dues terceres parts del que posa la Maria, quant ha posat cadascuna?**

	Diners en € que aporta
Maria	$y=2x$
Marisa	x

Manuela	$z=\frac{2}{3}y$
TOTAL	260

El sistema és el següent:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=260 \\ y=2x \\ z=\frac{2}{3}y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=260 \\ 2x-y=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 0 & -3 & -2 & -520 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=2E_2+3E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 0 & -3 & -2 & -520 \\ 0 & 0 & -13 & -1040 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=60 \\ y=120 \\ z=80 \end{array}\right.$$

Així, la Maria, la Marisa i la Manuela aporten per al regal 120 €, 60 € i 80 € respectivament.

28. Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{3x^2-y}-y=1 \\ 5x-7y=-2 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \sqrt[3]{5y+2x}=3x+1 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} \sqrt{3x^2-y}-y=1 \\ 5x-7y=-2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} \left(\sqrt{3x^2-y}\right)^2=(y+1)^2 \\ 5x-7y=-2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x^2-y^2-3y+1=0 \\ x=\dfrac{-2+7y}{5} \end{array}\right\} \to$$

$$\to 3\left(\frac{7y-2}{5}\right)^2-y^2-3y+1=0 \to 122y^2-75y-47=0 \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} y_1=1 \to x_1=1 \\ y_2=-\dfrac{47}{122} \approx -0{,}385 \to x_2=-\dfrac{939}{1000}=-0{,}939 \end{array}\right.$$

Les solucions són les parelles $(1,\ 1)$ i $(-0{,}939, -0{,}385)$.

b) $$\left.\begin{array}{r} \sqrt[3]{5y+2x}=3x+1 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} \left(\sqrt[3]{5y+2x}\right)^3=(3x+1)^3 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 27x^3+27x^2+7x-5y+1=0 \\ y=x-1 \end{array}\right\} \to$$

$$\to 27x^3+27x^2+7x-5(x-1)+1=0 \to 27x^3+27x^2+2x+6=0 \to \left\{\begin{array}{l} x_1=-1{,}1129 \to y_1=-2{,}1129 \\ x_2=-2{,}1129 \to y_2=-3{,}1129 \end{array}\right.$$

Les solucions són les parelles $(-1{,}1129, -2{,}1129)$ i $(-2{,}1129, -3{,}1129)$.

29. Resol aquests sistemes d'equacions:

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ x+2y=5 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 3x-y=2 \\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{y}=-3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\\ x+2y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y+x=xy\\ x+2y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y+x=xy\\ x=5-2y\end{array}\right\}\rightarrow y+5-2y=(5-2y)y\rightarrow 2y^2-6y+5=0$

No té solució real.

b) $\left.\begin{array}{r}3x-y=2\\ \frac{2}{x-2}-\frac{1}{y}=-3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=3x-2\\ 2y-(x-2)=-3y(x-2)\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=3x-2\\ -3xy+4y+x-2=0\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow -3x(3x-2)+4(3x-2)+x-2=0\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=1\rightarrow y_1=1\\ x_2=\frac{10}{9}\rightarrow y_2=\frac{4}{3}\end{array}\right.$

Les solucions són les parelles (1, 1) i $\left(\frac{10}{9},\frac{4}{3}\right)$.

ACTIVITATS FINALS

30. **Completa els espais perquè els parells de valors següents siguin solució de l'equació $-x + 5y = 4$.**

a) (1, ■)
b) (■, 3)
c) (−4, ■)
d) (■, −2)

a) $-1+5y=4 \rightarrow y=1 \rightarrow$ ■ = 1

b) $-x+15=4 \rightarrow x=11 \rightarrow$ ■ = 11

c) $4+5y=4 \rightarrow y=0 \rightarrow$ ■ = 0

d) $-x-10=4 \rightarrow x=-14 \rightarrow$ ■ = −14

31. **Completa els espais perquè les ternes de valors següents siguin solució de l'equació $2x - 3y + z = 8$.**

a) (1, ■, 9)
b) (■, −1, 1)
c) (−1, −2, ■)
d) (0, ■, 2)
e) (−1, −5, ■)
f) (■, −2, 10)

a) $2-3y+9=8 \rightarrow y=1 \rightarrow$ ■ = 1

b) $2x+3+1=8 \rightarrow x=2 \rightarrow$ ■ = 2

c) $-2+6+z=8 \rightarrow z=4 \rightarrow$ ■ = 4

d) $0-3y+2=8 \rightarrow y=-2 \rightarrow$ ■ = −2

e) $-2+15+z=8 \rightarrow z=-5 \rightarrow$ ■ = −5

f) $2x+6+10=8 \rightarrow x=-4 \rightarrow$ ■ = −4

32. **Considera l'equació $2x + y = 5$.**

a) Escriu-ne totes les seves solucions.

b) Raona si (5, -15) n'és una de les solucions.

c) Completa els següents parells de valors perquè en siguin solució: (3, ■) i (■ , 3).

a) $2x+y=5 \xrightarrow{y=\lambda} \left.\begin{matrix} 2x+\lambda=5 \\ y=\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-\lambda}{2} \\ y=\lambda \end{cases}$

Les infinites solucions les determina la parella $\left(\dfrac{5-\lambda}{2}, \lambda\right)$.

b) $\left.\begin{matrix} \dfrac{5-\lambda}{2}=5 \\ \lambda=-15 \end{matrix}\right\} \rightarrow \dfrac{5+15}{2}=10 \neq 5 \rightarrow$ No és solució.

c) $x=3 \rightarrow \dfrac{5-\lambda}{2}=3 \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow$ ■ = 1 $y=3 \rightarrow \lambda=3 \rightarrow x=\dfrac{5-3}{2} \rightarrow x=1 \rightarrow$ ■ = 1

33. **Identifica els sistemes per als quals el parell de valors x = 5, y = 2 és solució.**

a) $\left.\begin{matrix} 3x-4y=7 \\ \dfrac{x-1}{2}+y=0 \end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix} x+\dfrac{y}{2}=6 \\ \dfrac{x-y}{3}=\dfrac{x}{5} \end{matrix}\right\}$

c) $\left.\begin{matrix} 2\cdot(x-y)=x+1 \\ \dfrac{2x-y}{4}=y \end{matrix}\right\}$

d) $\left.\begin{matrix} 5y-3x=19 \\ \dfrac{y-x}{3}=1 \end{matrix}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 15-8=7 \\ \dfrac{4}{2}+2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7=7 \\ 4\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ No és solució d'aquest sistema.

b) $\left.\begin{array}{r} 5+\dfrac{2}{2}=6 \\ \dfrac{3}{3}=\dfrac{5}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6=6 \\ 1=1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí que és solució d'aquest sistema.

c) $\left.\begin{array}{r} 2\cdot(5-2)=6 \\ \dfrac{10-2}{4}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6=6 \\ 2=2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí que és solució d'aquest sistema.

d) $\left.\begin{array}{r} 10-15=19 \\ \dfrac{2-5}{3}=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -5\neq 19 \\ -1\neq 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ No és solució d'aquest sistema.

34. **Completa aquests sistemes perquè x = 1, y = 4 en siguin solució:**

a) $\left.\begin{array}{r} \blacksquare x-3y=-10 \\ -5x+\blacksquare y=11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} \blacksquare x+3y=16 \\ -2x+7y=\blacksquare \end{array}\right\}$

Per comoditat, denotem el ■ de la primera equació amb *a*, i el de la segona equació amb *b*.

Substituint:

a) $\left.\begin{array}{r} a-12=-10 \\ -5+4b=11 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=4 \end{array}\right.$ b) $\left.\begin{array}{r} a+12=16 \\ -2+28=b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=4 \\ b=26 \end{array}\right.$

35. **Calcula el valor de a i b perquè el sistema següent tingui com a solucions x = 1 i y = -2.**

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2(5x-y)-3=a \\ 4(x-2y)+3x-2=b \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2(5x-y)-3=a \\ 4(x-2y)+3x-2=b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3\cdot 1-2(5\cdot 1+2)-3=a \\ 4(1+2\cdot 2)+3\cdot 1-2=b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-14 \\ b=21 \end{array}\right.$$

36. **Indica els sistemes per als quals el parell de valors x = 3, y = -2 és solució.**

a) $\left.\begin{array}{r} y-\dfrac{x+1}{2}=0 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{y+3x}{7}=2 \\ 2x+y=8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x+2y=10 \\ x-\dfrac{y}{2}=4 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} \dfrac{8x-4}{5}+y=2 \\ 4x+\dfrac{5}{2}y=7 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2-\dfrac{3+1}{2}=0 \\ 3+2=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4\neq 0 \\ 5=5 \end{array}\right\} \rightarrow$ No és solució d'aquest sistema.

b) $\left.\begin{array}{r}15-4=10\\ 3-\dfrac{-2}{2}=4\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}11\neq10\\ 4=4\end{array}\right\}\rightarrow$ No és solució d'aquest sistema.

c) $\left.\begin{array}{r}3-\dfrac{-2+9}{7}=2\\ 6-2=8\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2=2\\ 4\neq8\end{array}\right\}\rightarrow$ No és solució d'aquest sistema.

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{24-4}{5}-2=2\\ 12-5=7\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2=2\\ 7=7\end{array}\right\}\rightarrow$ Sí que és solució d'aquest sistema.

37. Agrupa de dues en dues aquestes equacions lineals:

4x – y – 1 = 0 y + 1 = -2x

2y = 8x + 10 y + 2x = 3

6x – 9 + 3y = 0 y – 4x = 5

Perquè formin:

a) Dos sistemes compatibles determinats.

b) Dos sistemes compatibles indeterminats.

c) Dos sistemes incompatibles.

a) $\left.\begin{array}{r}4x-y-1=0\\ y+2x=3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}2y=8x+10\\ y+2x=3\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}6x-9+3y=0\\ y+2x=3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}2y=8x+10\\ y-4x=5\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}4x-y-1=0\\ y-4x=5\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}y+1=-2x\\ y+2x=3\end{array}\right\}$

38. Afegeix a l'equació 3x – 5y = 3 una altra equació, de manera que en resulti un sistema:

a) Determinat. b) Indeterminat. c) Incompatible.

Resposta oberta, per exemple:

a) $\left.\begin{array}{r}3x-5y=3\\ 2x-y=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}3x-5y=3\\ 10y=6x-6\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}3x-5y=3\\ 12x=20y\end{array}\right\}$

39. Considera les equacions següents:

3x – y = 1 ax + by = c

Calcula els valors de a, b i c perquè les dues equacions

a) ax + by = c passa per (2, –3) i el sistema té com a solució (–2, –7).

b) ax + by = c passa per (4, 3) i el sistema té com a solució un punt d'ordenada 5.

c) ax + by = c passa per (–2, 0) i el sistema és incompatible.

a) $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \xrightarrow{(2,-3)} 2x-3y=c \\ \xrightarrow{(-2,-7)} \left.\begin{array}{l} 1=1 \\ -2a-7b=c \end{array}\right\} \end{array}\right\}$

Es forma un sistema amb variables *a*, *b* i *c*, que és compatible indeterminat, perquè hi ha dues equacions i tres incògnites. Les possibles solucions es donen en funció d'un paràmetre:

$$\left.\begin{array}{l} 2a-3b=c \\ -2a-7b=c \end{array}\right\} \to -10b=2c \to c=-5b \xrightarrow{b=\lambda,\ a=\frac{c+3\lambda}{2}} \left.\begin{array}{l} a=-\lambda \\ b=\lambda \\ c=-5\lambda \end{array}\right\}$$

Per exemple, si $\lambda=1 \to \left.\begin{array}{l} a=-1 \\ b=1 \\ c=-5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3x-y=1 \\ -x+y=-5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+by=c \xrightarrow{(4,3)} 4a+3b=c \\ \left.\begin{array}{l} 3x-y=1 \\ ax+by=c \end{array}\right\} \xrightarrow{y=5} \left.\begin{array}{l} 3x-5=1 \\ ax+5b=c \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=2 \\ 2a+5b=c \end{array}\right\} \end{array}\right\}$

Es forma un sistema amb variables *a*, *b* i *c*, que és compatible indeterminat, perquè hi ha dues equacions i tres incògnites. Les possibles solucions es donen en funció d'un paràmetre:

$$\left.\begin{array}{l} 4a+3b=c \\ 2a+5b=c \end{array}\right\} \to c=7b \to \xrightarrow{b=\lambda,\ a=\frac{c-5\lambda}{2}} \left.\begin{array}{l} a=\lambda \\ b=\lambda \\ c=7\lambda \end{array}\right\}$$

Per exemple, si $\lambda=1 \to \left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=7 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3x-y=1 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$

c) $ax+by=c \xrightarrow{(-2,0)} -2a=c \to \left.\begin{array}{l} 3x-y=1 \\ ax+by=c \end{array}\right\}$

Perquè sigui un sistema incompatible, la parella (*a*, *b*) ha de ser proporcional a la parella (3, 1) i, a més, $c \neq 1$.

Aleshores, per exemple, si *c* = 2, tenim que $-2a=2 \to a=-1 \to b=-\frac{1}{3}$, i el sistema queda així:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y=1 \\ -x+\frac{1}{3}y=2 \end{array}\right\}$$

40. **Quins dels sistemes següents tenen la mateixa solució? Resol els sistemes gràficament.**

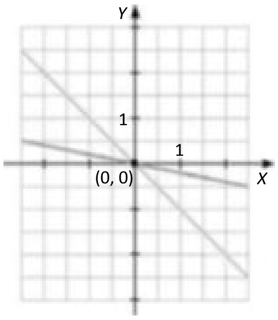
a) $\left.\begin{array}{l} x+3y=-2y \\ x-y=2x \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3y-x=16 \\ 2x+4=y-1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{4}+2=0 \\ x=-5y \end{array}\right\}$

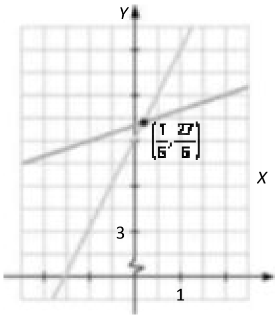
d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}=-3 \\ \dfrac{x}{2}+4y=3 \end{array}\right\}$

a)



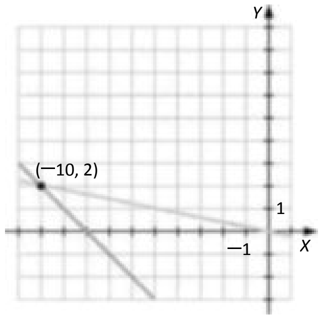
La solució és la parella (0, 0)

b)



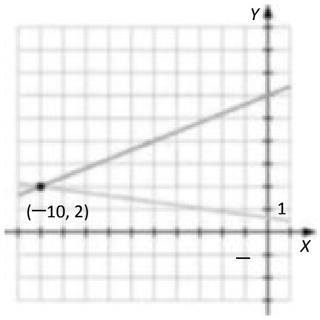
La solució és la parella $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{27}{5}\right)$

c)



La solució és la parella $(-10,2)$

d)



La solució és la parella $(-10,2)$

Per tant, tenen la mateixa solució els sistemes c) i d).

41. **Determina el nombre de solucions d'aquests sistemes:**

a) $\left.\begin{array}{l} x-2y=-2 \\ \dfrac{x}{4}+y=7 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{2y}{3}=2 \\ 2x+7y=4 \\ 2y-3x=-6 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ \dfrac{x+2y}{5}=-1 \\ x-1=-y \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -x+4y=15 \\ \dfrac{x-3y}{3}=-1 \\ 5y-3x=0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x-2y=-2 \\ \dfrac{x}{4}+y=7 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 4} \left.\begin{array}{r} x-2y=-2 \\ x+4y=28 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 28 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dues equacions i dues incògnites. Té una única solució.

b) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{2y}{3}=2 \\ 2x+7y=4 \\ 2y-3x=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x-2y=6 \\ 2x+7y=4 \\ -3x+2y=-6 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \\ -3 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dues equacions i dues incògnites. Existeix una única solució.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ \dfrac{x+2y}{5}=-1 \\ x-1=-y \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 5} \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ x+2y=-5 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

Sistema de dues equacions i dues incògnites. Existeix una única solució.

d) $\left.\begin{array}{r} -x+4y=15 \\ \dfrac{x-3y}{3}=-1 \\ 5y-3x=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} -x+4y=15 \\ x-3y=-3 \\ 3x-5y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 15 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 7 & 45 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -39 \end{array}\right) \rightarrow 0 \neq -39$

Sistema incompatible. És impossible que es compleixi la tercera equació. No té solució.

42. **Resol els sistemes següents per substitució:**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}=2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=0 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 6x-2y=6 \\ 3(x+1)-y+2=8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2(x-y)+4y=-4 \\ x+3(y+2)=8 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \xrightarrow{y=1-2x} \dfrac{x}{3}-\dfrac{1-2x}{5}=2 \rightarrow 5x-3+6x=30 \rightarrow x=\dfrac{27}{11} \xrightarrow{y=1-2x} y=-\dfrac{43}{11}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=0 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=0 \\ x+2(y-1)=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2-2(y-1)} 3(2-2(y-1))+2y=0 \rightarrow$

$\rightarrow 12-6y+2y=0 \rightarrow 12=4y \rightarrow y=3 \xrightarrow{x=2-2(y-1)} x=-2$

c) $\left.\begin{array}{r} 6x-2y=6 \\ 3(x+1)-(y-2)=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x-2y=6 \\ 3x+3-y+2=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x-2y=6 \\ 3x-y=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=3x-3} 6x-2(3x-3)=6 \rightarrow 6=6$

Sistema compatible indeterminat. Té infinites solucions, que depenen d'un paràmetre: $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=3\lambda-3 \end{array}\right.$

d) $\left.\begin{array}{r}2(x-y)+4y=-4\\ x+3(y+2)=8\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x+2y=-4\\ x+3y+6=8\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x+2y=-4\\ x+3y=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2-3y}2(2-3y)+2y=-4\to$

$\to 4-6y+2y=-4\to 8=4y\to y=2\xrightarrow{x=2-3y}x=-4$

43. Resol aquests sistemes per igualació:

a) $\left.\begin{array}{r}y-x+2=6\\ 2(x-y)+1=-y\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}4x+y=\dfrac{27}{2}\\ x+3y=13\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ \dfrac{x-y}{4}=\dfrac{-3}{8}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{3}{16}\\ \dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}y-x+2=6\\ 2(x-y)+1=-y\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}y=4+x\\ y=2x+1\end{array}\right\}\to 4+x=2x+1\to x=3\to y=7$

b) $\left.\begin{array}{r}4x+y=\dfrac{27}{2}\\ x+3y=13\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}8x+2y=27\\ x+3y=13\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{27-2y}{8}\\ x=13-3y\end{array}\right\}\to\dfrac{27-2y}{8}=13-3y\to$

$27-2y=104-24y\to 22y=77\to y=\dfrac{7}{2}\to x=\dfrac{5}{2}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ \dfrac{x-y}{4}=\dfrac{-3}{8}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}y=1-x\\ 2x-2y=-3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}y=1-x\\ y=\dfrac{2x+3}{2}\end{array}\right\}\to 1-x=\dfrac{2x+3}{2}\to$

$2-2x=2x+3\to -1=4x\to x=-\dfrac{1}{4}\to y=\dfrac{5}{4}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{3}{16}\\ \dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}32x+24y=9\\ x=-3y\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{9-24y}{32}\\ x=-3y\end{array}\right\}\to\dfrac{9-24y}{32}=-3y\to$

$9-24y=-96y\to 72y=-9\to y=-8\to x=24$

44. Resol els sistemes següents per reducció:

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+7}{3}-y=2x\\ 4y-\dfrac{2x+1}{5}=-5\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}4x-2=y-5\\ 3x-\dfrac{y-2}{5}=2\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 3x+\dfrac{10}{3}=y\end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+7}{3}-y=2x\\ 4y-\dfrac{2x+1}{5}=-5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}5x+3y=7\\ 2x-20y=24\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=-\frac{5}{2}E_2}\left.\begin{array}{r}5x+3y=7\\ -5x+50y=-60\end{array}\right\}\rightarrow 53y=-53\rightarrow y=-1\xrightarrow{x=\frac{7-3y}{5}}x=2$$

b) $$\left.\begin{array}{r}4x-2=y-5\\ 3x-\dfrac{y-2}{5}=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}4x-y=-3\\ -15x+y=-8\end{array}\right\}\rightarrow -11x=-11\rightarrow x=1\xrightarrow{y=4x+3}y=7$$

c) $$\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ -2x+2y=-5\end{array}\right\}\rightarrow 3y=2\rightarrow y=\frac{2}{3}\xrightarrow{x=\frac{7-y}{2}}x=\frac{19}{6}$$

d) $$\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 3x+\dfrac{10}{3}=y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 9x-3y=-10\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=3\cdot E_1}\left.\begin{array}{r}3x+3y=6\\ 9x-3y=-10\end{array}\right\}\rightarrow 12x=-4\rightarrow x=-\frac{1}{3}\xrightarrow{y=2-x}y=\frac{7}{3}$$

45. Resol els sistemes d’equacions següents:

a) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{3}{2}\\ 2(x-1)-3(1-y)=-3x+1\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{4x}{3}+\dfrac{3y-2}{6}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{x+y}{4}=-x\end{array}\right\}$$

c) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{y-3}{4}-5(x+3)=16\\ \dfrac{3(2+x)}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{-1}{15}\end{array}\right\}$$

d) $$\left.\begin{array}{r}y-\dfrac{1+2x+3y}{6}=1\\ x+y+\dfrac{2(x-2y+3)}{5}=-6\end{array}\right\}$$

a) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{3}{2}\\ 2(x-1)-3(1-y)=-3x+1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-y=9\\ 5x+3y=6\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=3\cdot E_1}\left.\begin{array}{r}6x-3y=27\\ 5x+3y=6\end{array}\right\}\rightarrow 11x=33\rightarrow x=3\xrightarrow{y=2x-9}y=-3$$

b) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{4x}{3}+\dfrac{3y-2}{6}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{x+y}{4}=-x\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}8x+3y=7\\ 5x+y=0\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=-3E_2}\left.\begin{array}{r}8x+3y=7\\ -15x-3y=0\end{array}\right\}\rightarrow -7x=7\rightarrow x=-1\xrightarrow{y=-5x}y=5$$

c) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{y-3}{4}-5(x+3)=16\\ \dfrac{3(2+x)}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{-1}{15}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}20x-y=-127\\ 9x+5y=-19\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=5E_1}\left.\begin{array}{r}100x-5y=-635\\ 9x+5y=-19\end{array}\right\}\rightarrow 109x=-654\rightarrow x=-6\xrightarrow{y=127+20x}y=7$$

d) $$\left.\begin{array}{r}y-\dfrac{1+2x+3y}{6}=1\\ x+y+\dfrac{2(x-2y+3)}{5}=-6\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-3y=-7\\ 7x+y=-36\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=3E_2}\left.\begin{array}{r}2x-3y=-7\\ 21x+3y=-108\end{array}\right\}\rightarrow 23x=-115\rightarrow x=-5\xrightarrow{y=-36-7x}y=-1$$

46. Resol els sistemes d’equacions següents:

a) $$\left.\begin{array}{r}-2(x+4)+3(3-2y)-1=12\\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0\end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{r}\frac{2x+3}{3}+\frac{y+1}{5}=3\\ \frac{x-5}{2}-\frac{2y-1}{3}=0\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\frac{x+3}{9}-\frac{y-5}{8}=0\\ \frac{2x-y+1}{2}-\frac{x+2y-3}{5}=0\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}-(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15\\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}x-2y-3-\frac{2x+y-3}{2}+\frac{x+7}{6}=0\\ \frac{x-6y}{2}-\frac{x-y}{3}+\frac{y}{6}=0\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}-2(x+4)+3(3-2y)-1=12\\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x-6y=12\\ x+3y+6=0\end{array}\right\}\rightarrow x=-3y-6$

Sistema compatible indeterminat.

b) $\left.\begin{array}{r}\frac{2x+3}{3}+\frac{y+1}{5}=3\\ \frac{x-5}{2}-\frac{2y-1}{3}=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}10x+3y=27\\ 3x-4y=13\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot(-3)}\\ \xrightarrow{\cdot 10}\end{array}\left.\begin{array}{r}-30x-9y=-81\\ 30x-40y=130\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow y=-1\rightarrow 3x-4\cdot(-1)=13\rightarrow x=3\rightarrow x=3\quad y=-1$

c) $\left.\begin{array}{r}\frac{x+3}{9}-\frac{y-5}{8}=0\\ \frac{2x-y+1}{2}-\frac{x+2y-3}{5}=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}8x-9y=-69\\ 8x-9y=-11\end{array}\right\}\rightarrow$ Sistema incompatible

d) $\left.\begin{array}{r}-(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15\\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-8x+3y=-11\\ -8x+12y=-8\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-1)}\left.\begin{array}{r}-8x+3y=-11\\ 8x-12y=8\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow y=\frac{1}{3}\rightarrow 8x-4=8\rightarrow x=\frac{3}{2}\rightarrow x=\frac{3}{2}\quad y=\frac{1}{3}$

e) $\left.\begin{array}{r}x-2y-3-\frac{2x+y-3}{2}+\frac{x+7}{6}=0\\ \frac{x-6y}{2}-\frac{x-y}{3}+\frac{y}{6}=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-15y=2\\ x-15y=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Sistema incompatible. No té solució.

47. Resol els sistemes d'equacions que tens a continuació:

a) $\left.\begin{array}{r}3(x-1)-5(2y-3)=2x+8\\ 4(x-y)-3x+2=1-(1-y)\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{y-4}{4}=0\\ \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+2}{5}=3\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-3}{6}-\dfrac{y-4}{2}=3\\ 2(x+3)=3(y-1)+2\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{3-2x}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-2x}{6}\\ 1=\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3+3y}{8}\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6\\ 16=\dfrac{3y}{x-1}\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}3(x-1)-5(2y-3)=2x+8\\ 4(x-y)-3x+2=-(1-y)\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x-10y=-4\\ x-5y=-3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x-10y=-4\\ -x+5y=3\end{array}\right\}\to x=-2\quad y=\dfrac{1}{5}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{y-4}{4}=0\\ \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+2}{5}=3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}4x-3y=0\\ 5x+2y=46\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}20x-15y=0\\ -20x-8y=-184\end{array}\right\}\to x=6\quad y=8$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-3}{6}-\dfrac{y-4}{2}=3\\ 2(x+3)=3(y-1)+2\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x-3y=9\\ 2x-3y=-7\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x-6y=18\\ -2x+3y=7\end{array}\right\}\to x=-16\quad y=-\dfrac{25}{3}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{3-2x}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-2x}{6}\\ 1=\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3+3y}{8}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=2\\ 4x-3y=-1\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=2\\ y=\dfrac{4x+1}{3}\end{array}\right\}\to x=2\quad y=3$

e) $\left.\begin{array}{r}6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6\\ 16=\dfrac{3y}{x-1}\end{array}\right\}\to 16x-3y=16$

Com es pot comprovar, es tracta de dues expressions d'una mateixa equació, per tant, no té una única solució com a sistema.

48. **Quantes solucions tenen aquests sistemes d'equacions si a = -1? I si a = -2?**

a) $\left.\begin{array}{r} ax-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x+3ay=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\}$

a) Si $a=-1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-3 \\ x+y=\frac{7}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema incompatible. No té solució.

Si $a=-2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible determinat. Una única solució.

b) Si $a=-1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-3y=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible determinades. Una única solució.

Si $a=-2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-6y=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=4 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat. Infinites solucions.

49. **Calcula el valor de k perquè el sistema següent sigui compatible determinat:**

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=-1 \\ x-k\cdot y=-3 \\ 4x-y=2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=-1 \\ x-k\cdot y=-3 \\ 4x-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y=-1 \\ -3x+3ky=+9 \\ -3x+\frac{3}{4}y=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} (3k-2)y=8 \\ -\frac{5}{4}y=-\frac{5}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=\frac{8}{3k-2} \\ y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{8}{3k-2}=2 \rightarrow k=2$$

50. **Si és possible, troba un valor de a perquè aquest sistema d'equacions:**

$$\left.\begin{array}{r} 8x-12y=20 \\ 4x+9y=a \end{array}\right\}$$

a) Sigui incompatible.

b) Sigui compatible indeterminat.

c) Sigui compatible determinat.

$\frac{8}{4} \neq \frac{-12}{9} \rightarrow$ El sistema és sempre compatible determinat.

51. **Si és possible, troba valors de a perquè aquest sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} ax+2y=2 \\ -2x+\frac{y}{2}=a \end{array}\right\}$$

a) Sigui incompatible.

b) Sigui compatible indeterminat.

c) Sigui compatible determinat.

$$\left.\begin{array}{r} ax+2y=2 \\ -2x+\dfrac{y}{2}=a \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} ax+2y=2 \\ -8x+2y=4a \end{array}\right\} \to -\frac{a}{8}=\frac{2}{2} \to a=-8$$

El sistema és incompatible si a = –8. En la resta de casos, el sistema és compatible determinat.

52. Classifica els sistemes següents segons el valor del paràmetre a.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+ay=5 \\ 3x+y=-a \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x+2y=a \\ ax+y=-3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} ax-y=0 \\ x+3ay=0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x-y=-a+1 \\ -2ax+2y=4 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & a & 5 \\ 3 & 1 & -a \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & a & 5 \\ 0 & a-1 & 5+a \end{array}\right)$

- $a-1=0 \to a=1 \to$ Sistema incompatible, ja que $0 \neq 6$.
- $a-1 \neq 0 \to a \neq 1 \to$ Sistema compatible determinat.

No es pot donar el cas compatible indeterminat perquè a – 1 i 5 + a no s'anul·len alhora.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & a \\ a & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & a \\ 0 & 1+2a & a^2-3 \end{array}\right) \to$

- $1+2a=0 \to a=-\dfrac{1}{2} \to$ Sistema incompatible, ja que $0 \neq -\dfrac{11}{4}$.
- $1+2a \neq 0 \to a \neq -\dfrac{1}{2} \to$ Sistema compatible determinat.

No es pot donar el cas compatible indeterminat perquè $1+2a$ i a^2-3 no s'anul·len alhora.

c) $\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 1 & 3a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 0 & -1-3a^2 & 0 \end{array}\right)$

Com que $-1-3a^2$ no s'anul·la mai, el sistema és sempre compatible determinat.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a+1 \\ -2a & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a+1 \\ 0 & 3-a & -a^2+a-6 \end{array}\right)$

- $3-a=0 \to a=3 \to$ Sistema incompatible, ja que $0 \neq -12$.
- $3-a \neq 0 \to a \neq 3 \to$ Sistema compatible determinat.

No es pot donar el cas compatible indeterminat perquè 3 – a i $-a^2+a-6$ no s'anul·len alhora; de fet, $-a^2+a-6$ no s'anul·la mai en els nombres reals.

53. Considera el parell de valors (3λ, λ), en què λ pot ser qualsevol nombre.

a) Escriu una equació que tingui com a solucions aquest parell de valors.

b) Escriu un sistema de dues equacions lineals que tingui com a solucions aquest parell de valors.

Resposta oberta, per exemple:

a) $x-3y=0$

b) $\left.\begin{array}{r} x=3y \\ 6y-2x=0 \end{array}\right\}$

54. Donat el parell de valors (1 - λ , 2 λ), en què λ és qualsevol nombre real:

a) Escriu una equació lineal que tingui com a solucions aquest parell de valors.

b) Escriu un sistema d'equacions lineals que tingui com a solucions aquest parell de valors.

Resposta oberta, per exemple:

a) $2(1-x)=y$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=2 \\ 10x-10=-5y \end{array}\right\}$

55. Troba tres sistemes d'equacions compatibles indeterminats que tinguin com a solució x = λ -2, y = λ , en què λ pot ser qualsevol nombre.

Resposta oberta, per exemple:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ 3x-6=3y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 20x-10=10(1+y) \\ 5(x-y)-2=8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 6x-6(y+2)=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2} \end{array}\right\}$$

56. Si les solucions de l'equació ax + by = c són de la forma (λ , 2 λ) i les de l'equació dx + ey = f són de la forma (λ , - 3· λ + 10), troba la solució del sistema format per les dues equacions.

S'obté una equació equivalent de cada una de les equacions donades a partir de la forma que té la solució:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{x=\lambda,\ y=2\lambda} \\ \xrightarrow{x=\lambda,\ y=10-3\lambda} \end{array} \left.\begin{array}{r} y=2x \\ y=10-3x \end{array}\right\} \rightarrow 2x=10-3x \rightarrow x=2 \rightarrow y=4$$

57. L'equació ax + by = c té com a solució els parells (λ +1, λ - 3) i l'equació dx + ey = f té com a solució els parells (λ - 2, 2 λ + 1).

Calcula la solució del sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\}$$

S'obté una equació equivalent de cada una de les equacions donades a partir de la forma que té la solució:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x=\lambda+1,\ y=\lambda-3} x-y=4 \\ \xrightarrow{x=\lambda-2,\ y=\lambda+1} 2x-y=-5 \end{array}\Bigg\} \to y=x-4 \to 2x-(x-4)=-5 \to x=-9$$

$$\to y=-13$$

58. **Resol els sistemes següents amb tres equacions i dues incògnites, i representa les solucions:**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=-1 \\ -x+y=-4 \\ -4x-y=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ 2x-y=2 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ -3x-2y=1 \\ x-3y=7 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -4x+2y=0 \\ 6x-3y=2 \\ 3x-2y=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to y=-3 \xrightarrow{2x+y=-1} x=1$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No té solució.

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to y=-2 \xrightarrow{2x+y=0} x=-1$

d) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No té solució.

59. **Resol aquests sistemes de tres equacions lineals amb dues incògnites:**

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x-4-1)=y-1 \\ -4x+y=-2x-3y+2 \\ 2x+3y-1=\dfrac{3x+2y}{5} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{-x+y-1}{2}=\dfrac{5-x}{3} \\ x+y-2=\dfrac{2(x+y)-3}{3} \\ x+y+5=7+2(x-y) \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x-4-1)=y-1 \\ -4x+y=-2x-3y+2 \\ 2x+3y-1=\dfrac{3x+2y}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x+y=11 \\ x-2y=-1 \\ 7x+13y=5 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & -1 \\ 7 & 13 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 19 & -67 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 582 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No té solució.

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{-x+y-1}{2}=\dfrac{5-x}{3} \\ x+y-2=\dfrac{2(x+y)-3}{3} \\ x+y+5=7+2(x-y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=-13 \\ x+y=3 \\ -x+3y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -13 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 19 & -67 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 582 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No té solució.

60. **Afegeix al sistema següent una equació de la forma ax + by = c (diferent de les anteriors) perquè el sistema de tres equacions i dues incògnites que en resulta continuï sent compatible:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=0 \\ 3x-y=\dfrac{11}{6} \end{array}\right\}$$

Perquè el sistema continuï sent compatible, la nova equació ha de ser una equació equivalent a algunes de les donades. Per exemple, $6x-24y=11$.

61. **Escriu en cada cas un sistema de tres equacions que tingui la solució indicada:**

a) x = 4, y = –2, z = 0 **c) x = 2, y = 7, z = –1**

b) x = –3, y = 5, z = 1 **d) x = 0, y = 1, z = $\frac{1}{2}$**

Resposta oberta.

a) x + 2y + 3z b) 2x + y – 2z = –3 c) 5x – y + z = 2 d) 3x + 2y – 2z = 1

62. **Calcula el valor de a i b a l'equació ax – 4y + bz = -4 si saps que (-1, 3, 2) i (3, 5, 2) en són dues solucions. Després escriu les altres dues solucions.**

$$\left.\begin{array}{r} ax-4y+bz=-4 \xrightarrow{(-1,\,3,\,2)} -a-12+2b=-4 \\ ax-4y+bz=-4 \xrightarrow{(3,\,5,\,2)} 3a-20+2b=-4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3a+6b=24 \\ 3a+2b=16 \end{array}\right\} \rightarrow 8b=40 \rightarrow b=5 \xrightarrow{a=2b-8} a=2$$

Per tant, l'equació resultant és $2x-4y+5z=-4$.

Dues solucions són, per exemple, (0, 1, 0) i (2, 7, 4).

63. **Troba el valor de a i b a l'equació 3x+ay+bz = 6 si saps que (1, 5, 1) i (-1, 7, -1) en són dues solucions. Després escriu tres solucions que compleixin:**

a) Solució en la qual x = 2.

b) Solució en la qual y = -3.

c) Solució en la qual z = 5.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+ay+bz=6 \xrightarrow{(1,\,5,\,1)} 5a+b=3 \\ 3x+ay+bz=6 \xrightarrow{(-1,\,7,\,-1)} 7a-b=9 \end{array}\right\} \rightarrow 12a=12 \rightarrow a=1 \xrightarrow{b=7a-9} b=-2$$

Per tant, l'equació resultant és $3x+y-2z=6$.

a) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{x=2} y-2z=0 \rightarrow$ Una solució és (2, 2, 1).

b) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{y=-3} 3x-2z=9 \rightarrow$ Una solució és (3, –3, 0).

c) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{z=5} 3x+y=16 \rightarrow$ Una solució és (7, –5, 5).

64. Resol els sistemes següents:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-2y+z=11 \\ 2x+y-2z=4 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} x-2y+5z=4 \\ x+3y-4z=9 \\ -x-y+4z=11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+2y=5 \\ 2x-y-2z=2 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} x-2y+2z=7 \\ 2x+3y-2z=-2 \\ -x-2y-3z=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=-2 \\ z=2 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{array}\right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 9 \\ -1 & -1 & 4 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 15 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}\right\}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -6 & -16 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -31 & -29 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{67}{31} \\ y=-\frac{46}{31} \\ z=\frac{29}{31} \end{array}\right\}$

65. Resol aquests sistemes per mitjà del mètode de Gauss:

a) $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=5 \\ 2x-y+4z=-5 \\ x+y-5z=5 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} -x+3y+z=-15 \\ 3x-y+3z=9 \\ x+4y-2z=-4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=-1 \\ x-y+2z=2 \\ x+2y+z=3 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+2z=1 \\ 2x+y+z=0 \\ 3y+2z=-1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=24 \\ 7x+10y+2z=6 \\ 2x+6y+4z=-10 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=5 \\ 5x+2y-2z=-1 \\ -x+6y-10z=-11 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=5 \\ z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 7 & 10 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 0 & 27 & 11 & -156 \\ 0 & 7 & 5 & -34 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 0 & 27 & 11 & -156 \\ 0 & 0 & 58 & -174 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=10 \\ y=-7 \\ z=3 \end{array}\right\}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 7 & -1 & -19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 25 & -50 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=4 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{array}\right\}$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y=-5 \\ z=7 \end{array}\right\}$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & -10 & -11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 13 & 14 \\ 0 & 8 & -13 & -14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ: $\left(\frac{2-\lambda}{4}, \frac{13\lambda-14}{8}, \lambda\right)$

66. **Resol els sistemes següents per mitjà del mètode de Gauss utilitzant la forma matricial:**

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ 2x-y-5z=0 \\ \frac{x}{2}+3y+2z=\frac{13}{2} \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y-5z=2 \\ x-y-z=-4 \\ y-2z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ -2x+y-z=-4 \\ x+2y-2z=7 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x-2z=-11 \\ 2y-z=-5 \\ x-4y=-1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} -x+y+z&=5 \\ 2x-y-4z&=-5 \\ x+y-5z&=5 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} -x+y-z&=-7 \\ 3x-y-z&=15 \\ 4x-2y&=22 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & \frac{13}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ:

$$(1+2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ:

$$(3, 2+\lambda, \lambda)$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ:

$$(3\lambda, 5+2\lambda, \lambda)$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ:

$$(3\lambda-1, 3+2\lambda, \lambda)$$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 2 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ:

$$\left(2\lambda-11, \frac{\lambda-5}{2}, \lambda\right)$$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 15 \\ 4 & -2 & 0 & 22 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ:

$$(\lambda+4, 2\lambda-3, \lambda)$$

67. Comprova si aquests sistemes d'equacions tenen solució o no:

a) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 2x+4z=2 \\ 2x-y+3z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ x+3y-2z=1 \\ x-2y+z=2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -x-y+2z=3 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 2y+10z=8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=5 \\ 2x+y-2z=7 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x+5y-5z=12 \\ -2x-3y+3z=-1 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x-5y+3z=10 \\ 2x-2y+z=-4 \\ 3x+y-z=5 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No té solució.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No té solució.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat.

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No té solució.

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & 23 \\ 0 & -14 & 14 & -36 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No té solució.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & -5 & -24 \\ 0 & 16 & -10 & -25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & -5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{23}{2} \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No té solució.

68. Expressa de manera matricial aquests sistemes i aplica el mètode de Gauss per resoldre'ls:

a) $\left.\begin{array}{r} -x+y-z=6 \\ y-4z=-7 \\ -x=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5z-y=2x-3 \\ 7x+z=2+5y \\ x+3y+2z=2(1-x) \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=-4 \\ x=-10+z \\ y=z+2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} y=2(z-x+2) \\ 2(z-y)=3(1-x) \\ z=5x-3y+2 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x+y-z=6 \\ y-4z=-7 \\ -x=4 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=-4 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{r} 5z-y=2x-3 \\ 7x+z=2+5y \\ x+3y+2z=2(1-x) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -2x-y+5z=-3 \\ 7x-5y+z=2 \\ 3x+3y+2z=2 \end{array}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -17 & 37 & -17 \\ 0 & 3 & 19 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -17 & 37 & -17 \\ 0 & 0 & 434 & -136 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{121}{217} \\ y=\dfrac{69}{217} \\ z=-\dfrac{68}{217} \end{array}\right.$

c) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=-4 \\ x=-10+z \\ y=z+2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-y+z=-4 \\ x-z=-10 \\ y-z=2 \end{array}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=10 \\ z=8 \end{array}\right.$

d) $\left.\begin{array}{r} y=2(z-x+2) \\ 2(z-y)=3(1-x) \\ z=5x-3y+2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x+y-2z=2 \\ 3x-2y+2z=3 \\ -5x+3y+z=2 \end{array}\right\} \to$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 10 & -6 \\ 0 & 11 & -8 & 24 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 54 & 102 \end{array}\right)\rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{19}{9} \\ y=\dfrac{32}{9} \\ z=\dfrac{17}{9} \end{cases}$$

69. Aplica el mètode de Gauss per determinar el nombre de solucions dels sistemes següents:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+4y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x+9y-3z=0 \\ 5x+3y-z=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 6x+4y-12z=6 \\ 7x+6y+18z=7 \\ 6x-2y-3z=-3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x-7y+4z=4 \\ -10x+71y+9z=9 \\ 6x-3y-2z=10 \end{array}\right\}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 16 & 5 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ:

$$\left(0,\frac{\lambda}{3},\lambda\right)$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & -12 & 6 \\ 7 & 6 & 18 & 7 \\ -3 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions estan determinades per aquesta terna, en funció del paràmetre λ:

$$\left(1+18\lambda,-24\lambda,\lambda\right)$$

d) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 4 & 4 \\ -10 & 71 & 9 & 9 \\ 6 & -3 & -2 & 10 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 143 & 67 & 67 \\ 0 & -11 & 10 & -2 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 143 & 67 & 67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{4164}{2167} \\ y=\dfrac{804}{2167} \\ z=\dfrac{41}{197} \end{cases}$$

70. **Opera i resol pel mètode de Gauss els sistemes d'equacions següents:**

a) $\left.\begin{aligned} x+3y&=2-y\\ -y+2z&=1-2x\\ 3(x+y)+4x&=3(1+y)\end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x+y&=2(2-z)\\ y-z&=2x+3\\ x+2y+z&=1+2x\end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x+3y&=2-y\\ -y+2z&=1-2x\\ 3(x+y)+4x&=3(1+y)\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned} x+4y&=2\\ 2x-y+2z&=1\\ 7x&=3\end{aligned}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&0&2\\ 2&-1&2&1\\ 7&0&0&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&0&2\\ 2&-1&2&1\\ 7&0&0&3\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&0&2\\ 0&-9&2&-3\\ 0&28&0&11\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&0&2\\ 0&-9&2&-3\\ 0&0&56&15\end{array}\right)\rightarrow\left\{\begin{aligned} x&=\frac{3}{7}\\ y&=\frac{11}{28}\\ z&=\frac{15}{56}\end{aligned}\right.$

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=2(2-z)\\ y-z&=2x+3\\ x+2y+z&=1+2x\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned} x+y+2z&=4\\ -2x+y-z&=3\\ -x+2y+z&=1\end{aligned}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&4\\ -2&1&-1&3\\ -1&2&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&4\\ 0&3&3&11\\ 0&3&3&5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&4\\ 0&3&3&11\\ 0&0&0&6\end{array}\right)$

Sistema incompatible. No té solució.

71. **Opera i resol pel mètode de Gauss aquests sistemes d'equacions utilitzant la forma matricial:**

a) $\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2}-\frac{y-3}{4}&=12-z\\ 2x+\frac{y}{5}+\frac{z-6}{2}&=6\\ \frac{x-y}{2}&=z-4\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -3(x+y)+4z&=1\\ 2x-(y+z)&=-5\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{5}{6}&=\frac{z+4}{5}\end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2}-\frac{y-3}{4}&=12-z\\ 2x+\frac{y}{5}+\frac{z-6}{2}&=6\\ \frac{x-y}{2}&=z-4\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned} 2x-y+4z&=43\\ 20x+2y+5z&=90\\ x-y-2z&=-8\end{aligned}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-1&4&43\\ 20&2&5&90\\ 1&-1&-2&-8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-1&4&43\\ 0&12&-35&-340\\ 0&-1&-8&-59\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-1&4&43\\ 0&12&-35&-340\\ 0&0&-131&1048\end{array}\right)\rightarrow\left\{\begin{aligned} x&=3\\ y&=-5\\ z&=8\end{aligned}\right.$

b) $\left.\begin{array}{r} -3(x+y)+4z=1 \\ 2x-(y+z)=-5 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{5}{6}=\frac{z+4}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -3x-3y+4z=1 \\ 2x-y-z=-5 \\ 15x+10y-6z=-1 \end{array}\right\} \to$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \\ 15 & 10 & -6 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 5 & -13 \\ 0 & -5 & 14 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 101 & 101 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

72. **Els valors x = 3λ, y = $\frac{\lambda}{2}$, z = λ són solució d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites. Escriu cinc solucions diferents per al sistema.**

Resposta oberta, segons els valors que es triïn per λ. Per exemple:

Si $\lambda=-2 \to (-6,-1,-2)$

Si $\lambda=-1 \to \left(-3,-\frac{1}{2},-1\right)$

Si $\lambda=0 \to (0,0,0)$

Si $\lambda=1 \to \left(3,\frac{1}{2},1\right)$

Si $\lambda=2 \to (6,1,2)$

73. **Els valors (2λ, λ - 3, λ) són solució d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites. Completa els espais a la llibreta perquè les ternes de valors següents siguin solució del mateix sistema:**

a) (4, ■, ■)
b) (■, ■, 3)
c) (■, 5, ■)
d) (■, ■, −2)
e) (1, ■, ■)
f) (■, 1, ■)

a) $x=4 \to 2\lambda=4 \to \lambda=2 \to (4,-1,2)$

b) $z=3 \to \lambda=3 \to (6,0,3)$

c) $y=5 \to \lambda-3=5 \to \lambda=8 \to (16,5,8)$

d) $z=-2 \to \lambda=-2 \to (-4,-5,-2)$

e) $x=1 \to 2\lambda=1 \to \lambda=\frac{1}{2} \to \left(1,-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$

f) $y=1 \to \lambda-3=1 \to \lambda=4 \to (8,1,4)$

74. **Determina quins dels valors següents són solució d'aquest sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=8 \\ x-z=3 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$$

a) $(\lambda, \lambda+2, \lambda+6)$ d) $(\lambda+5, \lambda, \lambda+2)$

b) $(\lambda+3, \lambda-2, \lambda)$ e) $(\lambda, \lambda-5, \lambda-3)$

c) $(\lambda+3, \lambda, \lambda-3)$ f) $(\lambda, \lambda-3, \lambda-5)$

a) $\left.\begin{array}{r} 2\lambda-(\lambda+2)-(\lambda+6)=8 \\ \lambda-(\lambda-6)=3 \\ \lambda-(\lambda+2)=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -8\neq 8 \\ 6\neq 3 \\ -2\neq 5 \end{array}\right\} \rightarrow$ No és solució del sistema.

b) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda+3)-(\lambda-2)-\lambda=8 \\ (\lambda+3)-\lambda=3 \\ (\lambda+3)-(\lambda-2)=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8=8 \\ 3=3 \\ 5=5 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí que és solució del sistema.

c) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda+3)-\lambda-(\lambda-3)=8 \\ (\lambda+3)-(\lambda-3)=3 \\ (\lambda+3)-\lambda=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 9\neq 8 \\ 6\neq 3 \\ 3\neq 5 \end{array}\right\} \rightarrow$ No és solució del sistema.

d) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda+5)-\lambda-(\lambda+2)=8 \\ (\lambda+5)-(\lambda+2)=3 \\ (\lambda+5)-\lambda=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8=8 \\ 3=3 \\ 5=5 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí que és solució del sistema.

e) $\left.\begin{array}{r} 2\lambda-(\lambda-5)-(\lambda-3)=8 \\ \lambda-(\lambda-3)=3 \\ \lambda-(\lambda-5)=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8=8 \\ 3=3 \\ 5=5 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí que és solució del sistema.

f) $\left.\begin{array}{r} 2\lambda-(\lambda-3)-(\lambda-5)=8 \\ \lambda-(\lambda-5)=3 \\ \lambda-(\lambda-3)=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8=8 \\ 5\neq 3 \\ 3\neq 5 \end{array}\right\} \rightarrow$ No és solució del sistema.

75. **Si sabem que els valors (3λ - 1, 4λ +3, λ) són solució d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites, determina quines solucions són de la forma:**

a) $(a, a, ■)$ b) $(■, a, a)$

a) $\left.\begin{array}{l} a=3\lambda-1 \\ a=4\lambda+3 \end{array}\right\} \rightarrow 3\lambda-1=4\lambda+3 \rightarrow \lambda=-4 \rightarrow (-13,-13,-4)$

b) $\left.\begin{array}{l} a=4\lambda+3 \\ a=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow 4\lambda+3=\lambda \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow (-4,-1,-1)$

76. **Si la terna (λ , λ + 1, λ - 3) és solució d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites, determina quines de les següents també ho són i justifica per què:**

a) $(2\lambda, 2\lambda+2, 2\lambda-6)$

b) $(2\lambda, 2\lambda+1, 2\lambda-3)$

c) $(\lambda+1, \lambda+2, \lambda-2)$

d) $(\lambda-3, \lambda-2, \lambda-6)$

e) $(\lambda-1, \lambda, \lambda-4)$

Un sistema de tres equacions i tres incògnites del qual $(\lambda, \lambda+1, \lambda-3)$ és solució, és, per exemple:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=2 \\ x-y=-1 \\ x-z=3 \end{array}\right\}$$

Substituint cada terna en el sistema, es veu si n'és solució o no:

a) $\left.\begin{array}{r} 2(2\lambda)-(2\lambda+2)-(2\lambda-6)=2 \\ 2\lambda-(2\lambda+2)=-1 \\ 2\lambda-(2\lambda-6)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4\neq 2 \\ -2\neq -1 \\ 6\neq 3 \end{array}\right\} \to \text{No}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2(2\lambda)-(2\lambda+1)-(2\lambda-3)=2 \\ 2\lambda-(2\lambda+1)=-1 \\ 2\lambda-(2\lambda-3)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \to \text{Sí}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda+1)-(\lambda+2)-(\lambda-2)=2 \\ \lambda+1-(\lambda+2)=-1 \\ \lambda+1-(\lambda-2)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \to \text{Sí}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda-3)-(\lambda-2)-(\lambda-6)=2 \\ \lambda-3-(\lambda-2)=-1 \\ \lambda-3-(\lambda-6)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \to \text{Sí}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda-1)-\lambda-(\lambda-4)=2 \\ \lambda-1-\lambda=-1 \\ \lambda-1-(\lambda-4)=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \to \text{Sí}$

77. Completa a la llibreta les ternes de valors perquè siguin solució del sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-3z=2 \\ 2x+\dfrac{y}{2}-z=4 \end{array}\right\}$$

a) (■, ■, λ)
b) (■, ■, 3)
c) (■, λ, ■)
d) (■, 3, ■)
e) (λ, ■, ■)
f) (3, ■, ■)

Primer es resol el sistema en funció d'un paràmetre μ, i després es calculen les solucions demanades:

$\left.\begin{array}{r} x-y-3z=2 \\ 2x+\dfrac{y}{2}-z=4 \end{array}\right\} \to \ldots \to$ Les infinites solucions estan determinades per la terna $\left(\dfrac{6+4\mu}{3}, -\dfrac{5}{3}\mu, \mu\right)$.

a) $\mu=\lambda \to \left(\dfrac{6+4\lambda}{3}, -\dfrac{5}{3}\lambda, \lambda\right)$

b) $\mu=3 \to (6, -5, 3)$

c) $-\frac{5}{3}\mu=\lambda\rightarrow\left(\frac{6+4\cdot\left(-\frac{3}{5}\lambda\right)}{3},\lambda,-\frac{3}{5}\lambda\right)=\left(\frac{10-4\lambda}{5},\lambda,-\frac{3}{5}\lambda\right)$

d) $-\frac{5}{3}\mu=3\rightarrow\mu=-\frac{9}{5}\rightarrow\left(-\frac{2}{5},3,-\frac{9}{5}\right)$

e) $\frac{6+4\mu}{3}=\lambda\rightarrow\mu=\frac{3\lambda-6}{4}\rightarrow\left(\lambda,-\frac{5}{3}\left(\frac{3\lambda-6}{4}\right),\frac{3\lambda-6}{4}\right)=\left(\lambda,\frac{10-5\lambda}{4},\frac{3\lambda-6}{4}\right)$

f) $\frac{6+4\mu}{3}=3\rightarrow\mu=\frac{3}{4}\rightarrow\left(3,-\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$

78. **Resol el sistema**

$$\left.\begin{aligned}x=y+z\\ x-3y+2z=13\end{aligned}\right\}$$

a) Per a x = 1.

b) Per a x = -4.

c) Per qualsevol valor de x.

a) $x=1\rightarrow\left.\begin{aligned}1=y+z\\1-3y+2z=13\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}y+z=1\\-3y+2z=12\end{aligned}\right\}\xrightarrow{z=1-y}-3y+2(1-y)=12\rightarrow\left\{\begin{aligned}&y=-2\\&z=3\end{aligned}\right.\rightarrow(1,-2,3)$

b) $x=-4\rightarrow\left.\begin{aligned}-4=y+z\\-4-3y+2z=13\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}y+z=-4\\-3y+2z=17\end{aligned}\right\}\xrightarrow{z=-4-y}-3y+2(-4-y)=17\rightarrow\left\{\begin{aligned}&y=-5\\&z=1\end{aligned}\right.\rightarrow(-4,-5,1)$

c) Hi ha infinites solucions, dependents d'un paràmetre λ:

$$x=\lambda\rightarrow\left.\begin{aligned}\lambda=y+z\\\lambda-3y+2z=13\end{aligned}\right\}\xrightarrow{y=\lambda-z}\lambda-3(\lambda-z)+2z=13\rightarrow\left\{\begin{aligned}&y=-\frac{13}{2}\\&z=\frac{13+2\lambda}{2}\end{aligned}\right.\rightarrow\left(\lambda,-\frac{13}{2},\frac{13+2\lambda}{2}\right)$$

79. **Considera**

$$\left.\begin{aligned}x-2=z-y\\3x+y=1-2z\end{aligned}\right\}.$$

a) Resol el sistema per a y = 3.

b) Resol el sistema per a qualsevol valor de y.

c) Calcula y per a x = 7.

d) Calcula z per a x = -2.

a) $y=3\rightarrow\left.\begin{aligned}x-2=z-3\\3x+3=1-2z\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}x-z=-1\\3x+2z=-2\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Reducció}}5z=1\rightarrow\left\{\begin{aligned}&x=-\frac{4}{5}\\&z=\frac{1}{5}\end{aligned}\right.\rightarrow\left(-\frac{4}{5},3,\frac{1}{5}\right)$

b) Òbviament, en aquest cas hi ha infinites solucions, determinades per un paràmetre λ:

$$y=\lambda \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2=z-\lambda \\ 3x+\lambda=1-2z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-z=2-\lambda \\ 3x+2z=1-\lambda \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducció}} \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{2\lambda-5}{5} \\ x=\dfrac{5-3\lambda}{5} \end{array}\right. \rightarrow \left(\frac{5-3\lambda}{5}, \lambda, \frac{2\lambda-5}{5}\right)$$

c) A partir de l'apartat anterior:

$$x=7 \rightarrow \frac{5-3\lambda}{5}=7 \rightarrow \lambda=y=-10$$

d) També a partir de l'apartat b):

$$x=-2 \rightarrow \frac{5-3\lambda}{5}=-2 \rightarrow \lambda=5 \rightarrow z=\frac{2\cdot 5-5}{5}=1$$

80. Resol aquests sistemes

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x-y-z=0 \\ x+z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ -x+y-z=4 \\ x+y+z=2 \\ x+2z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -x+2z=-5 \\ 4x-3y+z=5 \\ 3x-y-4z=-4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ x+5y+3x=-7 \\ 6x+7y-10z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y-z=0 \\ x+z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ -y+z=0 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_3=-3E_3+E_2} \\ \xrightarrow{E_4=3E_4+E_2} \end{array} \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ -4z=-2 \\ 2z=1 \end{array}\right\}$$

Les equacions tercera i quarta són proporcionals. Se n'elimina una i es continua resolent el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ 2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow z=\frac{1}{2} \xrightarrow{-3y-\frac{1}{2}=-2} y=\frac{1}{2} \xrightarrow{x+y=1} x=\frac{1}{2}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -x+2z=-5 \\ 4x-3y+z=5 \\ 3x-y-4z=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=E_1+2E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-2E_1+E_3} \\ \xrightarrow{E_4=-3E_1+2E_4} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -2y+7z=0 \\ y-5z=-15 \\ 4y-17z=-38 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_3=2E_3+E_2} \\ \xrightarrow{E_4=E_4+2E_2} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -2y+7z=0 \\ -3z=-30 \\ -3z=-38 \end{array}\right\}$$

Sistema incompatible

c) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ -x+y-z=4 \\ x+y+z=2 \\ x+2z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=2E_2+E_1} \\ \xrightarrow{E_3=-2E_3+E_1} \\ \xrightarrow{E_4=-2E_4+E_1} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ y+z=4 \\ -3y+z=-8 \\ -y-z=-4 \end{array}\right\}$$

Les equacions segona i quarta són proporcionals. Se n'elimina una i es continua resolent el sistema:

$$\left.\begin{aligned}2x-y+3z&=-4\\ y+z&=4\\ -3y+z&=-8\end{aligned}\right\}\xrightarrow{E_3=E_3+3E_1}\left.\begin{aligned}2x-y+3z&=-4\\ y+z&=4\\ 4z&=4\end{aligned}\right\}\to z=1\xrightarrow{y+z=4}y=3\xrightarrow{2x-y+3z=-4}x=-2$$

d) $$\left.\begin{aligned}2x+3y+5z&=0\\ x+5y+3x&=-7\\ 6x+7y-10z&=4\\ x-2y+2z&=7\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}2x+3y+5z&=0\\ 4x+5y&=-7\\ 6x+7y-10z&=4\\ x-2y+2z&=7\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\\ \xrightarrow{E_2=-2E_2+E_1}\\ \xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3}\\ \xrightarrow{E_4=-2E_4+E_1}\end{matrix}\left.\begin{aligned}2x+3y+5z&=0\\ -7y-10z&=14\\ 2y+25z&=-4\\ 7y+z&=-14\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\\ \\ \xrightarrow{E_3=2E_2+E_3}\\ \xrightarrow{E_4=7E_2+E_4}\end{matrix}\left.\begin{aligned}2x+3y+5z&=0\\ -7y-10z&=14\\ 5z&=-18\\ 23z&=21\end{aligned}\right\}$$

El sistema és incompatible, perquè de les equacions tercera i quarta s'obtenen valors diferents de z. Per tant, no té solució.

81. **Resol els sistemes d'equacions no lineals següents:**

a) $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=25\\ x+y&=7\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}x-y&=3\\ xy&=2\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned}2x-y&=0\\ xy-3y&=20\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=10\\ -x+y&=-2\end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned}x^2-3y^2&=6\\ x-y&=-2\end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned}xy&=-2\\ x^2-y^2&=3\end{aligned}\right\}$

a) $$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=25\\ x+y&=7\end{aligned}\right\}\xrightarrow{x=7-y}(7-y)^2+y^2=25\to y^2-7y+12=0\to\begin{cases}y_1=3\to x_1=4\\ y_2=4\to x_2=3\end{cases}$$

b) $$\left.\begin{aligned}x-y&=3\\ xy&=2\end{aligned}\right\}\xrightarrow{x=y+3}(y+3)y=2\to y^2+3y-2=0\to\begin{cases}y_1=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\to x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\\ y_2=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\to x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\end{cases}$$

c) $$\left.\begin{aligned}2x-y&=0\\ xy-3y&=20\end{aligned}\right\}\xrightarrow{y=2x}2x^2-6x=20\to x^2-3x-10=0\to\begin{cases}x_1=5\to y_1=10\\ x_2=-2\to y_2=-4\end{cases}$$

d) $$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=10\\ -x+y&=-2\end{aligned}\right\}\xrightarrow{y=x-2}x^2+(x-2)^2=10\to x^2-2x-3=0\to\begin{cases}x_1=3\to y_1=1\\ x_2=-1\to y_2=-3\end{cases}$$

e) $$\left.\begin{aligned}x^2-3y^2&=6\\ x-y&=-2\end{aligned}\right\}\xrightarrow{x=y-2}(y-2)^2-3y^2=6\to y^2+2y+1=0\to y=-1\to x=-3$$

f) $$\left.\begin{aligned}xy&=-2\\ x^2-y^2&=3\end{aligned}\right\}\xrightarrow{y=-\frac{2}{x}}x^2-\left(-\frac{2}{x}\right)^2=3\to x^2-\frac{4}{x^2}=3\to x^4-3x^2-4=0\to$$ És una equació biquadrada.

$$x^4-3x^2-4=0\xrightarrow{x^2=t}t^2-3t-4=0\to\begin{cases}t_1=4\to\begin{cases}x_1=2\to y_1=-1\\ x_2=-2\to y_2=1\end{cases}\\ t_2=-1\to\text{Impossible}\end{cases}$$

82. **Determina les solucions dels sistemes no lineals següents:**

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y+5=0 \\ xy-10=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{x+1}{y}=11 \\ x+y=4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} (x-2y)^2=4 \\ -2x+y=-16 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} (y-x)^2-xy=31 \\ x-(y-1)^2=xy \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{9y}=2 \\ x-\dfrac{x}{y}=-3 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-3y+5=0 \\ xy-10=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\}\xrightarrow{x=3y-5}(3y-5)y-10=\frac{3y-5}{2}\rightarrow 6y^2-13y-15=0\rightarrow\begin{cases} y_1=3\rightarrow x_1=4 \\ y_2=-\dfrac{5}{6}\rightarrow x_2=-\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right\}\xrightarrow{y=4-2x}x^2+(4-2x)^2=13\rightarrow 5x^2-16x+3=0\rightarrow\begin{cases} x_1=3\rightarrow y_1=-2 \\ x_2=\dfrac{1}{5}\rightarrow y_2=\dfrac{18}{5} \end{cases}$$

c) $$\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{x+1}{y}=11 \\ x+y=4 \end{array}\right\}\xrightarrow{x=4-y}4-y-\frac{(4-y)+1}{y}=11\rightarrow y^2+6y+5=0\rightarrow\begin{cases} y_1=-5\rightarrow x_1=9 \\ y_2=-1\rightarrow x_2=5 \end{cases}$$

d) $$\left.\begin{array}{r} (x-2y)^2=4 \\ -2x+y=-16 \end{array}\right\}\xrightarrow{y=2x-16}\left(x-2(2x-16)\right)^2=4\rightarrow 3x^2-64x+340=0\rightarrow\begin{cases} x_1=10\rightarrow y_1=4 \\ x_2=\dfrac{34}{3}\rightarrow y_2=\dfrac{20}{3} \end{cases}$$

e) $$\left.\begin{array}{r} (y-x)^2-xy=31 \\ x-(y-1)^2=xy \end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-3xy=31 \\ x(1-y)-y^2+2y=1 \end{array}\right\}\xrightarrow{x=\frac{1-2y+y^2}{1-y}}$$

$$\rightarrow\left(\frac{1-2y+y^2}{1-y}\right)^2+y^2-3y\left(\frac{1-2y+y^2}{1-y}\right)=31\rightarrow y^2-y-6=0\rightarrow\begin{cases} y_1=3\rightarrow x_1=-2 \\ y_2=-2\rightarrow x_2=3 \\ y_3=1\rightarrow\begin{cases} x_3=\dfrac{3+\sqrt{129}}{2} \\ x_4=\dfrac{3-\sqrt{129}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

f) $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{9y}=2 \\ x-\dfrac{x}{y}=-3 \end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r} x^2=18y \\ xy-x=-3y \end{array}\right\}\xrightarrow{y=\frac{x^2}{18}}x\left(\frac{x^2}{18}\right)-x=-3\left(\frac{x^2}{18}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow x^3+3x^2-18x=0\rightarrow x(x^2+3x-18)=0\rightarrow\begin{cases} x_1=0\rightarrow y_1=0\rightarrow \text{No és vàlida.} \\ x_2=3\rightarrow y_2=\dfrac{1}{2} \\ x_3=-6\rightarrow y_3=2 \end{cases}$$

83. **Resol aquests sistemes:**

a) $\left.\begin{array}{r} 3xy-2x=100 \\ \dfrac{x}{y+1}=2 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{7}=y-1 \\ \sqrt{x-2}=y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=-1 \\ 5x+6y=-1 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} \sqrt{y}+2\sqrt{x}=15 \\ \sqrt{y+x-1}=1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} (x-3)(y+1)=50 \\ \dfrac{x+2}{y-4}=2 \end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{r} x^2-xy+y=-1 \\ \sqrt{y-1}=x \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3xy-2x=100 \\ \dfrac{x}{y+1}=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2(y+1)} 3\cdot 2(y+1)y-2\cdot 2(y+1)=100 \rightarrow 3y^2+y-52=0 \rightarrow \begin{cases} y_1=4 \rightarrow x_1=10 \\ y_2=-\dfrac{13}{3} \rightarrow x_2=-\dfrac{20}{3} \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=-1 \\ 5x+6y=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=-xy \\ 5x+6y=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=\frac{-1-5x}{6}} 4x+3\left(\dfrac{-1-5x}{6}\right)=-x\left(\dfrac{-1-5x}{6}\right) \rightarrow$

$\rightarrow -5x^2+8x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow y_1=-1 \\ x_2=\dfrac{3}{5} \rightarrow y_2=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{r} (x-3)(y+1)=50 \\ \dfrac{x+2}{y-4}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} (x-3)(y+1)=50 \\ x+2=2y-8 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2y-10} (2y-10-3)(y+1)=50 \rightarrow$

$\rightarrow 2y^2+2y-10y-10-3y-3-50=0 \rightarrow 2y^2-11y-63=0 \rightarrow \begin{cases} y_1=9 \rightarrow x_1=8 \\ y_2=-\dfrac{7}{2} \rightarrow x_2=-17 \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{7}=y-1 \\ \sqrt{x-2}=y \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x+3}{7}=\sqrt{x-2}-1 \rightarrow (x+10)^2=\left(7\sqrt{x-2}\right)^2 \rightarrow x^2-29x+198 \rightarrow \begin{cases} x_1=11 \rightarrow y_1=3 \\ x_2=18 \rightarrow y_2=4 \end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{y}+2\sqrt{x}=15 \\ \sqrt{y+x-1}=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \left(\sqrt{y}\right)^2=\left(15-2\sqrt{x}\right)^2 \\ \left(\sqrt{y+x-1}\right)^2=1^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=225+4x-6\sqrt{x} \\ y=2-x \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Igualació}} 225+4x-6\sqrt{x}=2-x \rightarrow$

$\rightarrow (5x+223)^2=\left(6\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow 25x^2+2194x+49729=0 \rightarrow$ No té solució

f) $\left.\begin{array}{r} x^2-xy+y=-1 \\ \sqrt{y-1}=x \end{array}\right\} \rightarrow \left(\sqrt{y-1}\right)^2-y\sqrt{y-1}+y=-1 \rightarrow y\left(2-\sqrt{y-1}\right)=0 \rightarrow \begin{cases} y_1=0 \rightarrow x_1 \text{ no existeix} \\ y_2=5 \rightarrow \begin{cases} x_2=2 \\ x_3=-2 \rightarrow \text{no vàlida} \end{cases} \end{cases}$

84. **Determina la solució d'aquests sistemes:**

a) $\left.\begin{array}{r} 2^x\cdot 2^y=16 \\ 9^x=\dfrac{3^y}{3} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} xy=2 \\ \dfrac{125^x}{625}=25^y \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \log 2x=1+\log y \\ \sqrt{x-1}=y+1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 25^x\cdot 5^y=\dfrac{1}{5} \\ \sqrt{x+11}=y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2^x\cdot 2^y=16 \\ 9^x=\dfrac{3^y}{3} \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2^{x+y}=2^4 \\ 3^{2x}=3^{y-1} \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=4 \\ 2x=y-1 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=4 \\ 2x-y=-1 \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducció}} 3x=3\rightarrow x=1\rightarrow y=3$

b) $\left.\begin{array}{r} xy=2 \\ \dfrac{125^x}{625}=25^y \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} xy=2 \\ 5^{3x-4}=5^{2y} \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} xy=2 \\ 3x-4=2y \end{array}\right\}\xrightarrow{y=\frac{2}{x}} 3x-4=\dfrac{4}{x}\rightarrow 3x^2-4x-4=0\rightarrow \begin{cases} x_1=2\rightarrow y_1=1 \\ x_2=-\dfrac{2}{3}\rightarrow y_2=-3 \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{r} \log 2x=1+\log y \\ \sqrt{x-1}=y+1 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} \log 2x=\log 10y \\ \sqrt{x-1}=y+1 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} x=5y \\ \sqrt{x-1}=y+1 \end{array}\right\}\rightarrow \left(\sqrt{5y-1}\right)^2=\left(y+1\right)^2\rightarrow$

$\rightarrow 5y-1=y^2+2y+1\rightarrow y^2-3y+2=0\rightarrow \begin{cases} y_1=1\rightarrow x_1=5 \\ y_2=2\rightarrow x_2=10 \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r} 25^x\cdot 5^y=\dfrac{1}{5} \\ \sqrt{x+11}=y \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} 5^{2x}\cdot 5^y=5^{-1} \\ \sqrt{x+11}=y \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=-1 \\ \sqrt{x+11}=y \end{array}\right\}\rightarrow 2x+\sqrt{x+11}=-1\rightarrow$

$\rightarrow 4x^2+3x-10=0\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{5}{4}\rightarrow \begin{cases} y_1=-\dfrac{7}{2} \\ y_2=\dfrac{7}{2}\rightarrow \text{ No vàlida} \end{cases} \\ x_2=-2\rightarrow \begin{cases} y_3=3 \\ y_4=-3\rightarrow \text{ No vàlida} \end{cases} \end{cases}$

85. **Per produir llet semidesnatada que conservi el 40 % del greix mesclen dos tipus de llet: una amb el 20 % de greix i una altra amb el 70 % de greix. Quants litres de cada mena de llet necessiten per produir 200 ℓ de llet amb el 40 % de greix?**

Siguin x i y el nombre de litres que es necessiten de la llet amb un 20% de greix i amb un 70%, respectivament. Aleshores, es planteja el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ \frac{20}{100}x+\frac{70}{100}y=\frac{40}{100}\cdot 200 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ 2x+7y=800 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x+2y=400 \\ -2x-7y=-800 \end{array}\right\} \to -5y=-400 \to \left\{\begin{array}{l} x=120 \\ y=80 \end{array}\right.$$

Per tant, es necessiten 120 litres de llet amb un 20% de greix i 80 litres de llet amb un 70% de greix.

86. **En una bodega venen dos tipus de vi: de criança i reserva. Determina quin preu tenen si saps que en Joan ha pagat 69 € per 3 ampolles de reserva i 12 ampolles de criança, i la Betlem n'ha comprat 6 ampolles de criança i 8 ampolles de reserva i ha pagat 80 €.**

Siguin x i y els preus en € de les ampolles de criança i de reserva, respectivament. La despesa que han fet en Joan i la Betlem queda reflectit en el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{r} 12x+3y=69 \\ 6x+8y=80 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4x+y=23 \\ 3x+4y=40 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=23-4x} 3x+4(23-4x)=40 \to \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=7 \end{array}\right.$$

És a dir, una ampolla de criança costa 4 €; i una de reserva, 7€.

87. **Un ciclista i un cotxe surten l'un en direcció cap a l'altre des de dues ciutats separades per 180 km. Si saps que el ciclista va quatre vegades més a poc a poc que el cotxe i que triguen 1 h 48 min a trobar-se, quina és la velocitat de cada un?**

Plantegem un sistema d'equacions, tenint en compte que $e=v\cdot t$.

Anomenem x la distància recorreguda pel ciclista, i y la velocitat que porta:

$$1\text{ h }48\text{ min}=1{,}8\text{ h}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1{,}8y \\ 180-x=7{,}2y \end{array}\right\} \to 180-1{,}8y=7{,}2y \to \left\{\begin{array}{l} y=20 \\ x=1{,}8\cdot 20=36 \end{array}\right.$$

La velocitat del ciclista és de 20 km/h, i la del cotxe és de 80 km/h.

88. **Calcula un nombre si saps que la suma de les seves xifres es 14, i que si invertim l'ordre en que estan col·locades el nombre disminueix de 18 unitats.**

Anomenem *x* la xifra de les desenes, i *y* la de les unitats:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=14 \\ 10y+x+18=10x+y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=14-x \\ 9y-9x+18=0 \end{array}\right\} \rightarrow 126-9x-9x+18=0 \rightarrow 18x=144 \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=14-8=6 \end{cases}$$

El nombre és el 86.

89. **Un camió surt d'una ciutat a 80 km/h i dues hores després surt un cotxe en la mateixa direcció a 100 km/h. Quant trigarà a trobar-lo i quanta distància ha recorregut el cotxe fins aquell moment?**

Plantegem un sistema d'equacions, tenint en compte que e = v · t.

Anomenem x la distància recorreguda pel camió, i y el temps que triga a trobar-lo:

$$\left.\begin{array}{r} x=80y \\ x+160=100y \end{array}\right\} \rightarrow 80y+160=100y \rightarrow \begin{cases} y=8 \\ x=80\cdot 8=640 \end{cases}$$

Trigarà 8 hores a trobar-lo i haurà recorregut 800 km.

90. **Els costats d'un rectangle es diferencien de 2 m. Si augmentéssim 2 m cada costat, l'àrea s'incrementaria de 40 m2. Calcula les dimensions del polígon.**

Anomenem x el costat més petit del polígon i y la seva àrea:

$$\left.\begin{array}{r} x(x+2)=y \\ (x+2)(x+4)=y+40 \end{array}\right\} \rightarrow x^2+6x+8=x^2+2x+40 \rightarrow 4x=32 \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=8(8+2)=80 \end{cases}$$

Els costats del polígon original fan 8 m i 10 m, respectivament.

91. **En Jaume vol tancar un terreny de forma rectangular. Després de posar filferro a dos costats consecutius, s'adona que ha utilitzat 170 m de filferro. Si sap que la diagonal del rectangle fa 130 m, quines són les dimensions i l'àrea del terreny?**

Anomenem x i y les dimensions del terreny:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=170 \\ x^2+y^2=130^2 \end{array}\right\} \rightarrow y^2-170y+6000=0 \rightarrow y=\frac{-(-170)\pm\sqrt{(-170)^2-4\cdot 1\cdot 6000}}{2\cdot 1}=\frac{170\pm 70}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1=120 \\ y_2=50 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1=120 \rightarrow x_1=170-120=50$$

$$\text{Si } y_2=50 \rightarrow x_2=170-50=120$$

Les dimensions del terreny són 120 m i 50 m, respectivament.

L'àrea del terreny és de 6 000 m2.

92. **Determina les dimensions que te un plec rectangular de paper si sabem que si deixem els marges laterals d'1 cm i els verticals de 2,5 cm, l'àrea és 360 cm², i que si els marges laterals són de 2 cm i els verticals d'1,25 cm, l'àrea és la mateixa.**

Anomenem x i y les dimensions del plec:

$$\left.\begin{array}{r}(x-2)(y-5)=360\\(x-4)(y-2,5)=360\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{350+2y}{y-5}\\x=\dfrac{350+4y}{y-2,5}\end{array}\right\}\rightarrow 2y^2-15y-875=0\rightarrow y=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot2\cdot(-875)}}{2\cdot2}=\frac{15\pm85}{4}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}y_1=-\dfrac{35}{2}\rightarrow x_1=\dfrac{350+2\cdot\dfrac{-35}{2}}{\dfrac{-35}{2}-5}=-14\\ y_2=25\rightarrow x_2=\dfrac{350+2\cdot25}{25-5}=20\end{cases}$$

Les dimensions del plec són 20 cm i 25 cm, respectivament.

93. **Les habitacions de l'Aurora i la Marga tenen forma quadrada. La suma de les superfícies és 29,89 m² i la diferència d'aquestes superfícies és 5,39 m². Calcula'n les dimensions.**

Siguin x i y les longituds dels costats de les habitacions respectives. Suposem que $x>y$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=29,89\\x^2-y^2=5,39\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducció}}2x^2=35,28\rightarrow\begin{cases}x_1=4,2\xrightarrow{y^2=29,89-x^2}\begin{cases}y_1=3,5\\y_2=-3,5\rightarrow\text{ No vàlida}\end{cases}\\x_2=-4,2\rightarrow\text{No vàlida}\end{cases}$$

Les solucions negatives no tenen sentit. Per tant, les úniques mides vàlides de les habitacions són 4,2 m i 3,5 m respectivament.

94. **Considera un quadrat i la seva diagonal. Formem un rectangle de base igual a la diagonal del quadrat i de perímetre 4+6$\sqrt{2}$ cm. Determina les dimensions de les dues figures si sabem que la suma de les àrees és 9+6$\sqrt{2}$ cm².**

Sigui x la longitud del costat del quadrat en cm.

Primer, pel teorema de Pitàgores, se calcula la longitud de la diagonal del quadrat, en funció de x:

$$d^2=x^2+x^2\rightarrow d=x\sqrt{2}\text{ cm}$$

Sigui y la longitud de l'altura del rectangle. Les equacions que formaran el sistema són:

- Perímetre = $4+6\sqrt{2}=2x\sqrt{2}+2y$
- Suma d'àrees = $9+6\sqrt{2}=x^2+xy\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{r}4+6\sqrt{2}=2x\sqrt{2}+2y\\ 9+6\sqrt{2}=x^2+xy\sqrt{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=2+3\sqrt{2}-x\sqrt{2}\\ y=\dfrac{9+6\sqrt{2}-x^2}{x\sqrt{2}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Igualació}}2+3\sqrt{2}-x\sqrt{2}=\frac{9+6\sqrt{2}-x^2}{x\sqrt{2}}\rightarrow$$

$$\rightarrow x^2-x(6+2\sqrt{2})+9+6\sqrt{2}=0\rightarrow\begin{cases}x_1=3\rightarrow y_1=2\\ x_2=3+2\sqrt{2}\rightarrow y_2=-2\rightarrow \text{No vàlida}\end{cases}$$

Per tant, el costat del quadrat fa 3 cm; l'altura del rectangle, 2 cm; i la base del rectangle, $3\sqrt{2}$ cm.

95. Calcula les dimensions d'un rectangle de perímetre 40 cm del qual coneixem que la suma de les seves diagonals és 8 $\sqrt{13}$ cm.

Sigui x la longitud de la base del rectangle, i y l'altura. Primer, es calcula la longitud de la diagonal amb el teorema de Pitàgores. Després, tenint en compte que les diagonals d'un rectangle són iguals i que el semiperímetre fa 20 cm, es planteja i resol el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{r}2\sqrt{x^2+y^2}=8\sqrt{13}\\ x+y=20\end{array}\right\}\xrightarrow{y=20-x}\left(2\sqrt{x^2+(20-x)^2}\right)^2=\left(8\sqrt{13}\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x^2+400+x^2-40x)=832\rightarrow x^2-20x+96=0\rightarrow\begin{cases}x_1=8\rightarrow y_1=12\\ x_2=12\rightarrow y_2=8\end{cases}$$

Per tant, el rectangle té unes dimensions de 8 x 12 cm.

96. L'altura d'un rectangle és tres cinquenes parts de la base. La tercera part de la diagonal del rectangle fa $\sqrt{34}$ cm. Calcula les dimensions del rectangle.

Sigui x la longitud de la base del rectangle, i y l'altura. Amb el teorema de Pitàgores s'obté la diagonal, i amb ella es planteja i resol el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{r}y=\dfrac{3}{5}x\\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}=\sqrt{34}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{5}x\right)^2}}{3}=\sqrt{34}\rightarrow\left(\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{5}x\right)^2}\right)^2=\left(3\sqrt{34}\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+\left(\frac{3}{5}x\right)^2=306\rightarrow 34x^2=7650\rightarrow x^2=225\rightarrow\begin{cases}x_1=15\rightarrow y_1=9\\ x_2=-15\rightarrow \text{No vàlida}\end{cases}$$

Per tant, el rectangle té unes dimensions de 15 x 9 cm.

97. **La xifra de les unitats d'un nombre de dues xifres és 3 unitats més gran que el quadrat de la xifra de les desenes. El quadrat del consecutiu del nombre original supera de 55 unitats el quadrat de l'original. Determina el nombre del qual partim.**

Siguin x i y les xifres de les unitats i les desenes respectivament. Per trobar el nombre de partida s'ha de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 + y^2 \\ (x+10y+1)^2 = 55 + (x+10y)^2 \end{array}\right\} \to (3+y^2+10y+1)^2 = 55 + (3+y^2+10y)^2 \to$$

$$\to 108y^2 + 80y + 16 = 55 + 106y^2 + 60y + 9 \to y^2 + 10y - 24 = 0 \to \begin{cases} y_1 = -12 \to \text{No vàlida} \\ y_2 = 2 \to x_2 = 7 \end{cases}$$

El nombre de partida és 27.

98. **El lloguer d'una tenda de campanya és de 80 € al dia. L'Agnès fa els preparatius d'una excursió amb els seus amics i fa aquesta reflexió: ≪Si fóssim tres amics més, hauríem de pagar 6 € menys cada un.≫ Quants amics van d'excursió?**

Nre. d'amics	Preu en € per persona	TOTAL en €
x	y	80
$x + 3$	$y - 6$	80

S'ha de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{l} xy = 80 \\ (x+3)(y-6) = 80 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=\frac{80}{x}} (x+3)\left(\frac{80}{x} - 6\right) = 80 \to x^2 + 3x - 40 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 5 \to y_1 = 16 \\ x_2 = -8 \to \text{No vàlid} \end{cases}$$

Per tant, van d'excursió 5 amics, i cada un paga 16 €.

99. **La diferència de dos nombres és 5. La diferencia dels quadrats dels seus consecutius és 95. Troba els dos nombres.**

Siguin x i y els nombres que busquem. Suposem $x > y$. S'ha de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=5 \\ (x+1)^2-(y+1)^2=95 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=y+5} (y+5+1)^2-(y+1)^2=85 \rightarrow 10y=60 \rightarrow y=6 \rightarrow x=11$$

Els nombres són 6 i 11.

100. La suma de les arrels quadrades de dos nombres és 6. El quocient dels dos nombres és igual al més petit dels dos nombres. Troba aquests nombres.

Siguin x i y els nombres que busquem. Suposem $x > y$. S'ha de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{x}+\sqrt{y}=6 \\ \dfrac{x}{y}=y \end{array}\right\} \xrightarrow{x=y^2} \sqrt{y^2}+\sqrt{y}=6 \rightarrow y^2-13y+36=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1=4 \rightarrow x_1=16 \\ y_2=9 \rightarrow x_2=81 \end{array}\right.$$

Es comproven les solucions i es descarta (81, 9). Per tant, els nombres que es busquen són 16 i 4.

101. Busca dos nombres naturals que verifiquin que el seu producte menys 12 unitats coincideix amb el quàdruple del més petit, si sabem a més que la diferència del triple del més petit i el més gran és 1 unitat.

Siguin x i y els nombres que busquem. Suposem $x > y$. S'ha de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} xy-12=4y \\ 3y-x=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=3y-1} (3y-1)y-12=4y \rightarrow 3y^2-5y-12=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1=3 \rightarrow x_1=8 \\ y_2=-\dfrac{4}{3} \rightarrow \text{No vàlida} \end{array}\right.$$

Per tant, els nombres són 8 i 3.

102. Dues vaques i tres vedells valen el mateix que setze ovelles. Una vaca i quatre ovelles valen igual que tres vedells. Tres vedells i vuit ovelles costen el mateix que quatre vaques. Determina el preu de cada animal.

Siguin x, y, z els preus respectius, en €, d'una vaca, un vedell i una ovella.

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=16z\\ x+4z=3y\\ 3y+8z=4x\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\1&-3&4&0\\-4&3&8&0\end{array}\right)\xrightarrow[E_3=2E_1+E_3]{E_2=-2E_2+E_1}\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\0&-9&36&0\\0&9&-24&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_3=E_2+E_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\0&-9&36&0\\0&0&12&0\end{array}\right)\to x=y=z=0$$

S'obté la solució trivial nul·la. Òbviament, no té sentit per a aquest problema.

103. Troba dos nombres naturals si saps que la cinquena part de la seva diferència és 2 i que la suma dels seus inversos és $\frac{13}{72}$.

.Siguin x i y els nombres que busquem. Suposem $x>y$. S'ha de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x-y}{5}=2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{13}{72}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=y+10\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{13}{72}\end{array}\right\}\xrightarrow{x=y+10}\frac{1}{y+10}+\frac{1}{y}=\frac{13}{72}\to 72(2y+10)=13y(y+10)\to$$

$$\to 13y^2-14y-720=0\to\begin{cases}y_1=8\to x_1=18\\ y_2=-\frac{90}{13}\to\text{No vàlida}\end{cases}$$

Els nombres són 18 i 8.

104. Troba dos nombres naturals que verifiquin que l'invers del primer més el triple del segon és $\frac{31}{5}$ i la diferència entre el doble del primer i l'invers del segon és $\frac{19}{2}$.

Siguin x i y els nombres que busquem. Suposem $x>y$. S'ha de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+3y=\frac{31}{5}\\ 2x-\frac{1}{y}=\frac{19}{2}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x(31-15y)=5\\ y(4x-19)=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=\frac{5}{31-15y}}y\left(\frac{20}{31-15y}-19\right)=2\to$$

$$\to 285y^2-539y-62=0\to\begin{cases}y_1=2\to x_1=5\\ y_2=-\frac{31}{285}\to\text{No vàlida}\end{cases}$$

Els nombres són 5 i 2.

105. Calcula tres nombres si saps que sumen 6, la suma del doble del més gran i el triple de la diferència dels altres dos és -4, i la diferència del triple del més gran i el doble de la suma dels altres dos és 8.

Siguin x i y els nombres que busquem. Suposem $x>y,z$. S'ha de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x+3(y-z)=-4 \\ 3x-2(y+z)=8 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=-1 \\ z=3 \end{array}\right.$$

Els nombres són 4, –1 i 3.

106. **La suma de les tres xifres d'un nombre és 16. Calcula el nombre si saps que la diferència de les unitats i les desenes és el doble de les centenes, i la suma de les unitats i les centenes supera d'1 unitat el doble de les desenes.**

Siguin x, y, z les xifres de les centenes, desenes i unitats respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=16 \\ z-y=2x \\ z+x=1+2y \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -32 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -32 \\ 0 & 0 & 3 & 27 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=9 \end{array}\right.$$

El nombre que es busca és 259.

107. **Al portamonedes d'en Martí hi ha 11 monedes d'1 €, 0,5 € i 0,2 €, amb un valor total de 4,9 €. Calcula quantes monedes hi ha de cada tipus si saps que la suma del doble de monedes d'1 € més les monedes de 0,5 € coincideix amb el nombre de monedes de 0,2 €.**

	1 €	0,5 €	0,2 €	TOTAL
Nombre de monedes	x	y	z	11
€ que aporten	x	$0{,}5y$	$0{,}2z$	4,9

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=11 \\ 2x+y=z \\ x+0{,}5y+0{,}2z=4{,}9 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 4{,}9 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -22 \\ 0 & 0 & 1{,}4 & 9{,}8 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \\ z=7 \end{array}\right.$$

Per tant, en Martí té tres monedes d'1 €, una moneda de 0,5 € i set monedes de 0,2 €.

108. **Una llibreta gran, una de mitjana i una de petita costen juntes 3,9 €. Tres de grans, quatre de mitjanes i una de petita costen 11,1 €, i sis de petites i tres de mitjanes costen el mateix que cinc de grans. Calcula el preu de cada tipus de llibreta.**

Siguin x, y, z els preus d'una llibreta gran, una de mitjana i una de petita respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3{,}9 \\ 3x+4y+z=11{,}1 \\ 6z+3y=5x \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 3 & 4 & 1 & 11{,}1 \\ -5 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & -2 & -0{,}6 \\ 0 & 8 & 11 & 19{,}5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & -2 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 27 & 24{,}3 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=1{,}8 \\ y=1{,}2 \\ z=0{,}9 \end{array}\right.$$

Per tant, la llibreta gran val 1,8 €; la mitjana, 1,2 €; i la petita, 0,9 €.

109. **La Laura té bitllets de 5 €, 10 € i 20 €. En total són 16. Els triple dels bitllets de més valor és igual al total dels altres, i la meitat dels bitllets de més valor és igual a la diferència dels de menys valor i els de valor intermedi. Calcula quants bitllets de cada tipus té la Laura.**

Siguin x, y, z el nombre de bitllets de 5 €, 10 € i 20 € respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} 3z = x+y \\ \dfrac{z}{2} = x-y \\ x+y+z=16 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right) \to \begin{cases} x=7 \\ y=5 \\ z=4 \end{cases}$$

La Laura té 7 bitllets de 5 €, 5 de10 € i 4 de 20 €.

110. **Sobre un camió carreguen tres bidons. El doble del pes del primer menys el triple del pes del segon és 4 kg. El quíntuple del pes del segon menys un terç del pes del tercer és 50 kg. Calcula el pes de cada bidó si entre tots tres pesen 275 kg.**

Siguin x, y, z els pesos del primer, segon i tercer bidó respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=275 \\ 2x-3y=4 \\ 5y-\dfrac{1}{3}z=50 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x=275-y-z \\ 2(275-y-z)-3y=4 \\ 5y-\dfrac{1}{3}z=50 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5y+2z=546 \\ 15y-z=150 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{r} 5y+2z=546 \\ 30y-2z=300 \end{array}\right\} \to$$

$$\to 35y=846 \to \begin{cases} x=\dfrac{1339}{35}\approx 38{,}26 \\ y=\dfrac{846}{35}\approx 24{,}17 \\ z=\dfrac{1488}{7}\approx 212{,}57 \end{cases}$$

El primer bidó pesa 38,26 kg; el segon, 24,17 kg, i el tercer 212,57 kg.

111. **Un nombre que té tres xifres el representem xyz. Determina'l si saps que si l'escrivim xyz, el nombre disminueix de 459 unitats; si l'escrivim yxz, disminueix de 360 unitats, i que yzx és 45 unitats més petit que yxz.**

Anomenem a, b i c les xifres de les centenes, desenes i unitats, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} 100a+10b+c=100c+10a+b+459 \\ 100a+10b+c=100b+10a+c+360 \\ 100b+10c+a=100b+10a+c-45 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 90a+9b-99c=459 \\ 90a-90b=360 \\ -9a+9c=-45 \end{array}\right\} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} 10a+b-11c=51 \\ 10a-10b=40 \\ -a+c=-5 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=c+5} \left.\begin{array}{r} b-c=1 \\ -10b+10c=-10 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a=c+5 \\ b=c+1 \end{cases}$$

Per determinar la solució, sabem que els tres nombres són enters i, per tant, c és un nombre de 0 a 9. Com que a = c + 5, c només pot ser 0, 1, 2, 3 i 4. Per a cada un d'aquests valors de c:

Si $c=0 \rightarrow a=5$ i $b=1$. El nombre és 510.

Si $c=1 \rightarrow a=6$ i $b=2$. El nombre és 621.

Si $c=2 \rightarrow a=7$ i $b=3$. El nombre és 732.

Si $c=3 \rightarrow a=8$ i $b=4$. El nombre és 843.

Si $c=4 \rightarrow a=9$ i $b=5$. El nombre és 954.

112. Al bloc de pisos on visc han fet obres. L'administrador de la comunitat intenta esbrinar quant cobren per hora un electricista, un lampista i un paleta. Sabem que:

- **Al 4t A, l'electricista es va estar 1 hora i el paleta, 2 hores, i han hagut de pagar 78 € de mà d'obra.**
- **Al 3r D han pagat 85 € per les 2 hores que s'hi ha estat el lampista i l'hora del paleta.**
- **A casa meva s'hi han estat 1 hora el lampista, 1 hora l'electricista i 3 hores el paleta, i ens han cobrat 133 €.**

Determina les tarifes horàries de cada professional.

	€/h	hores 4t A	hores 3r D	hores a casa
Electricista	x	1	0	1
Lampista	y	0	2	1
Paleta	z	2	1	3
TOTAL en €		87	85	133

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=87 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 87 \\ 0 & 2 & 1 & 85 \\ 1 & 1 & 3 & 133 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 87 \\ 0 & 2 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 1 & 46 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 87 \\ 0 & 2 & 1 & 85 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=73 \\ y=39 \\ z=7 \end{array}\right.$$

L'electricista cobra 73 € per hora; el lampista, 39 €; i el paleta, 7 €.

113. **Quan l'any 1800 Beethoven escriu la seva primera simfonia, és deu vegades més gran d'edat que el jove Franz Schubert. Passa el temps i és Schubert qui compon la cèlebre Simfonia inacabada. Aleshores la suma de les edats dels dos músics és igual a 77 anys. Cinc anys després mor Beethoven i en aquell moment Schubert té els mateixos anys que tenia Beethoven quan va compondre la seva primera simfonia.**

Determina l'any de naixement de cadascun d'aquests dos compositors.

	Beethoven	Schubert	EQUACIÓ
Edat el 1800	$10x$	x	
Edat el 1800 + y anys	$10x+y$	$x+y$	$10x+y+x+y=77$
Edat el 1800 + y + 5 anys	$10x+y+5$	$x+y+5$	$x+y+5=10x$

$$\left.\begin{array}{r}10x+y+x+y=77\\ x+y+5=10x\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}11x+2y=77\\ 9x-y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}11x+2y=77\\ 18x-2y=10\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducció}}29x=87\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=22\end{array}\right.$$

Beethoven va morir l'any 1800 + 22 + 5 = 1827 a l'edat de 30 + 3 + 22 + 5 = 57 anys. Per tant, va néixer el 1770.

Schubert tenia 3 anys el 1800, per tant va néixer el 1797.

Amplia

114. **Escull la resposta adequada.**

Si a, b, c i d són nombres reals amb $a-1=b+2=c-3=d+4$, el més gran de tots quatre és:	a	b	c	d	No es pot determinar
Si m i n són enters amb $2m-n=3$, $m-2n$ ha de ser:	Igual a -3	Igual a 0	Múltiple de 3	Un enter imparell	Un enter parell
El gos de la Isabel té una edat, en mesos, igual a la meitat de l'edat de la Isabel, en anys. Però d'aquí a cinc anys l'edat del gos, en mesos, serà 5 unitats més que el doble de l'edat de la Isabel, en anys, en aquell moment. Quina edat té ara el gos, en mesos?	13	14	15	16	17
Ja saps que en un partit de bàsquet hi ha llançaments de 3 punts, de 2 punts i tirs lliures, que valen 1 punt cada un. En un partit estrany, un equip ha fet tants punts amb llançaments de 3 com amb llançaments de 2 punts, i el nombre d'encerts en tirs lliures ha superat d'1 el nombre d'encerts en llançaments de 2 punts. Si al final han fet 61 punts, quants tirs lliures han encistellat?	13	14	15	16	17

- De la successió d'igualtats obtenim el sistema següent:

$$\left.\begin{matrix} a-1=b+2 \\ a-1=c-3 \\ a-1=d+4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} a-b=3 \\ a-c=-2 \\ a-d=5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

És un sistema compatible indeterminat. Les infinites solucions vénen donades per un paràmetre λ:

$a=\lambda+5 \qquad b=\lambda+2 \qquad c=\lambda+7 \qquad d=\lambda$

A la vista dels resultats, està clar que la variable c sempre és la més gran de les quatre.

$m-2n=(*)$ ha de ser un múltiple de 3.

- Es planteja el sistema següent, on (*) representa la dada desconeguda:

$$\left.\begin{matrix} 2m-n=3 \\ m-2n=(*) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Reducció}} \left.\begin{matrix} -4m+2n=-6 \\ m-2n=(*) \end{matrix}\right\} \rightarrow -3m=-6+(*) \rightarrow 3(2-m)=(*) \rightarrow$$

-

	Edat del gos en mesos	Edat Isabel en mesos
Actualment	y	x
D'aquí 5 anys = 60 mesos	$y+60$	$x+60$

$$\left.\begin{matrix} y=\dfrac{x}{2\cdot 12} \\ y+60=5+2\cdot\dfrac{x+60}{12} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{y=\frac{x}{24}} \frac{x}{24}+60=5+\frac{x+60}{6} \rightarrow x+1440=120+4x+240 \rightarrow \begin{cases} x=360 \\ y=15 \end{cases}$$

Per tant, el gos té 15 mesos d'edat.

□

	Llançaments de 3 punts (z)	Llançaments de 2 punts (y)	Llançaments d'1 punt (x)
Punts	3z	2y	x

Es planteja i resol el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} 3z+2y+x=61 \\ x=1+y \\ 3z=2y \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=13 \\ y=12 \\ z=8 \end{array}\right.$$

Per tant, han encistellat 13 llançaments lliures.

115. **Escriu un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites de manera que compleixi la condició indicada en els casos següents:**

a) Que sigui compatible determinat amb solució x = -1, y = -2.

b) Que sigui compatible indeterminat i x = -1, y = -2, sigui una solució del sistema.

c) Que sigui compatible indeterminat i totes les solucions de la forma x = -1, y = λ **.**

Resposta oberta, per exemple:

a) $\left.\begin{array}{r} 4x-y=-2 \\ 5x-y=-3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 7x-5y=3 \\ 5(2y-x)+3=3(3x-1) \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} 2x-1+4y=-3\cdot(1-y)+y \\ 3y-2(y+1)=y-2 \end{array}\right\}$

116. **Escriu un sistema d'equacions lineals de tres equacions amb tres incògnites que compleixi les condicions següents:**

a) Que sigui compatible determinat amb solució x = 3, y = 2, z = 2.

b) Que sigui compatible indeterminat x = 3, y = 2 i z = 2, sigui una solució del sistema.

c) Que sigui compatible indeterminat i x = 3, y = 2 i z = 2 i x = 1, y = 1 i z = 1, dues solucions.

Resposta oberta, per exemple:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=7 \\ x+y-2z=1 \\ 7x-y-8z=3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=1 \\ 7x-y-8z=3 \\ 6x-6z=2(y+1) \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x-2y=-1 \\ x-2z=-1 \\ x-y-z=-1 \end{array}\right\}$

117. **Resol aquest sistema d'equacions:**

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1 \\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{17}{3} \\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}=\frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

Seguint el suggeriment, es fa el canvi de variable següent:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1\\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{17}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{X=\frac{1}{x}}\\ \xrightarrow{Y=\frac{1}{y}}\\ \xrightarrow{Z=\frac{1}{z}}\end{array}\left.\begin{array}{r}X+2Y-3Z=1\\ 2X-4Y+5Z=\frac{17}{3}\\ 3X+6Y-2Z=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\to\ldots\to\left\{\begin{array}{l}X=\frac{11}{6}\\ Y=-\frac{11}{12}\\ Z=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\begin{array}{c}\xrightarrow{x=\frac{1}{X}}\\ \xrightarrow{y=\frac{1}{Y}}\\ \xrightarrow{z=\frac{1}{Z}}\end{array}\left\{\begin{array}{l}x=\frac{6}{11}\\ y=-\frac{12}{11}\\ z=-3\end{array}\right.$$

118. **Tres nombres, a, b i c, diferents de zero, estan en progressió aritmètica. Si augmentem a d'1 unitat o c de 2 unitats, resulten progressions geomètriques. Determina aquests nombres.**

Sigui d la diferència de la progressió aritmètica.

Siguin r1 i r2 les raons de les dues progressions geomètriques que es poden obtenir. Les dades de l'enunciat s'expressen de la manera següent:

- Progressió aritmètica:
- Progressió geomètrica 1
- Progressió geomètrica 2

Progressió aritmètica	Progressió geomètrica 1	Progressió geomètrica 2
a	$a+1$	a
$b=a+d$	$b=(a+1)r_1$	$b=ar_2$
$c=b+d=a+2d$	$c=br_1=ar_1^2$	$c+2=br_2=ar_2^2$

Eliminant d de les dades de la progressió aritmètica: $a=2b-c$

Eliminant r_1 de les dades de la progressió geomètrica 1: $b=\sqrt{c(a+1)}$

Eliminant r2 de les dades de la progressió geomètrica 2: $b=\sqrt{a(c+2)}$

Resolent el sistema format per les tres equacions anteriors es determinen a, b i c:

$$\left.\begin{array}{r}a=2b-c\\ b=\sqrt{c(a+1)}\\ b=\sqrt{a(c+2)}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{Igualant } E_2 \text{ i } E_3]{\text{Substituint } E_2 \text{ en } E_1}\left.\begin{array}{r}a=2\sqrt{c(a+1)}-c\\ \sqrt{c(a+1)}=\sqrt{a(c+2)}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}a=2\sqrt{c(a+1)}-c\\ c=2a\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Substitució}}$$

$$\to a=2\sqrt{2a(a+1)}-2a\to\left\{\begin{array}{l}a=8\\ b=12\\ c=16\end{array}\right.$$

119. **En una cafeteria, un got de llimonada, tres entrepans i set pastissets han costat 1 xíling i 2 penics. Si tenim en compte que 1 xíling val 12 penics, calcula:**

a) El preu d'un got de llimonada, un entrepà i un pastisset.

b) El preu de dos gots de llimonada, tres entrepans i cinc pastissets.

Siguin x, y, z els preus respectius d'un got de llimonada, un entrepà i un pastisset, i a, b són els preus que es busquen.

Es verifica que:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+7z=14 \\ x+4y+10z=17 \\ x+y+z=a \\ 2x+3y+5z=b \end{array}\right\}$$

Considerant les dues primeres equacions del sistema, i agafant z com a paràmetre, s'obté:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=14-7z \\ x+4y=17-10z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=5+2z \\ y=3-3z \end{array}\right\}$$

Substituint aquests valors en les equacions tercera i quarta, es verifica que:

$$\left.\begin{array}{r} 5+2z+3-3z+z=a \\ 10+4z+9-9z+5z=b \end{array}\right\} \to a=8 \text{ i } b=19$$

MATEMÀTIQUES A LA TEVA VIDA

1. Explica per què la demanda i l'oferta no pugen o baixen al mateix temps.

Si la demanda d'un determinat producte puja, se'n faran més compres, hi haurà menys quantitat d'exemplars per vendre i, per tant, l'oferta disminueix.

Al contrari, si l'oferta augmenta, hi ha més exemplars per vendre, i per tant, la demanda disminueix.

2. El dia de l'espectador, els encarregats del cinema decideixen posar les entrades a 4 €. Si les equacions d'oferta i de demanda es mantenen, et sembla que hi haurà un excés de demanda o un excés d'oferta?

Com que el preu baixa, la demanda augmenta, i, en conseqüència, l'oferta disminueix. Això és reflecteix en les equacions de l'enunciat:

$$D(P_x) = 1500 - 100P_x \xrightarrow{P_x=4} D(P_x) = 1100$$

$$O(P_x) = \frac{700(P_x - 1)}{3} \xrightarrow{P_x=4} O(P_x) = 700$$

3. Quan el preu d'un producte, per exemple el pa, està intervingut, es pot aplicar la llei de l'oferta i la demanda?

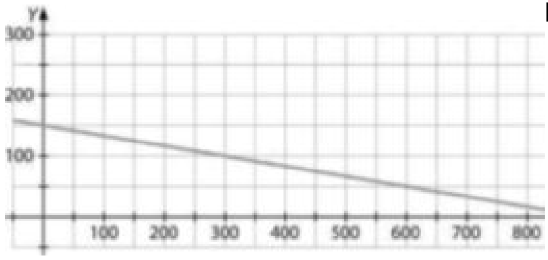
No, ja que en aquest cas, el preu del producte no depèn directament ni de l'oferta ni de la demanda, sinó d'altres factors.

4. Resol de manera gràfica el sistema que varia l'equació d'oferta perquè el preu de mercat:

a) Pugi a 6 €.

b) Baixi a 5 €.

a)



b)