Derivada d'una funció

11

ACTIVITATS

1. **Calcula la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = x^2 - x + 3$ en els intervals següents: [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 5], [3, 6]**

$$T.V.M.([2,3]) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{9-5}{1} = 4$$

$$T.V.M.([2,4]) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{15-5}{2} = 5$$

$$T.V.M.([2,5]) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{23-5}{3} = 6$$

$$T.V.M.([2,6]) = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{33-5}{4} = 7$$

$$T.V.M.([3,5]) = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{23-9}{2} = 7$$

$$T.V.M.([3,6]) = \frac{f(6)-f(3)}{6-3} = \frac{33-9}{3} = 8$$

2. **Determina la T.V.M. de la funció $f(x) = x^2 - x + 3$ en els intervals següents:**

a) [2, 2 + h] **b) [3, 3 + h]**

a) $$T.V.M.([2,2+h]) = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{(2+h)^2-(2+h)+3-(4-2+3)}{h} = \frac{h^2+3h}{h} = h+3$$

b) $$T.V.M.([3,3+h]) = \frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{(3+h)^2-(3+h)+3-(9-3+3)}{h} = \frac{h^2+5h}{h} = h+5$$

3. **Mitjançant la definició, calcula la derivada en x = 2 i en x = –1 d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ **b)** $f(x) = 2x^2 + x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) $$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h-3}-\frac{1}{2-3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{-1+h} = -1$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-1+h-3}-\frac{1}{-1-3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4-4+h}{4(-4+h)h} = -\frac{1}{16}$$

b) $$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)^2+(2+h)-(2\cdot 2^2+2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(4+h^2+4h)+2+h-10}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+9h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+9) = 9$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^2+(-1+h)-\left[2\cdot(-1)^2+(-1)\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(1+h^2-2h)-1+h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h-3) = -3$$

c) $$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{2^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4-(2+h)^2}{4h(2+h)^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4-(4+h^2+4h)}{4h(4+h^2+4h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-4h}{16h+4h^3+16h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-4}{16+4h^2+16h} = -\frac{1}{4}$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(-1+h)^2}-\frac{1}{(-1)^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-(1-2h+h^2)}{h(-1+h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2h-h^2}{h(1-2h+h^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{2-h}{1-2h+h^2} = 2$$

4. **Calcula la derivada de la funció $f(x) = x^3 + 4$ en els punts següents:**

a) x = 1 **b) x = –4** **c) x = 2** **d) x = –3**

a) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 + 4 - (1^3 + 4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + 3h + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} (3h + 3 + h^2) = 3$

b) $f'(-4) = \lim_{h\to 0} \frac{(-4+h)^3 + 4 - \left[(-4)^3 + 4\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^3 - 12h^2 + 48h - 64) + 4 - (-64+4)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} (h^2 - 12h + 48) = 48$

c) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 + 4 - (2^3 + 4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8 + h^3 + 6h^2 + 12h + 4 - 12}{h} = \lim_{h\to 0} (h^2 + 6h + 12) = 12$

d) $f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{(-3+h)^3 + 4 - \left[(-3)^3 + 4\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-27 + h^3 - 9h^2 + 27h + 4 - (-27+4)}{h} = \lim_{h\to 0} (h^2 - 9h + 27) = 27$

5. Determina l'equació de la recta tangent a la funció f (x) = x – x² en els punts d'abscissa x = 2 i x = –3.

$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[2 + h - (2+h)^2\right] - (2 - 2^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 + h - (4 + 4h + h^2) - 2 + 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3h - h^2}{h} = -3$

$f(2) = 2 - 2^2 = -2$

L'equació de la recta tangent al punt $P(2, -2)$ és:

$y - (-2) = f'(2) \cdot (x - 2) \rightarrow y + 2 = -3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 4$

$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{(-3+h) - (-3+h)^2 - \left[-3 - (-3)^2\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3 + h - (9 + h^2 - 6h) + 12}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 + 7h}{h} = 7$

$f(-3) = -3 - (-3)^2 = -12$

L'equació de la recta tangent en el punt $P(-3, -12)$ és:

$y - (-12) = f'(-3) \cdot (x - (-3))$

$y + 12 = 7(x + 3)$

$y = 7x + 9$

6. Calcula el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció *f*(x) = x² + 4x + 3 en els punts on talla els eixos X i Y.

Talls amb l'eix *X*: (-1, 0), (-3, 0)

La derivada $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent al punt $P(a, f(a))$.

$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 + 4(-1+h) + 3 - \left[(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 3\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + h^2 - 2h - 4 + 4h + 3 - 1 + 4 - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$

$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{(-3+h)^2 + 4(-3+h) + 3 - \left[(-3)^2 + 4\cdot(-3) + 3\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9 + h^2 - 6h - 12 + 4h + 3 - 9 + 12 - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$

Tall amb l'eix *Y*: (0, 3)

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2 + 4(0+h) + 3 - \left[(0)^2 + 4\cdot(0) + 3\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h + 3 - 3}{h} = 4$

7. **Utilitza la definició per calcular la funció derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = 4x^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x+3}$

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-4x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{12x^2h+12xh^2+4h^3}{h} = 12x^2$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h+3}-\frac{1}{x+3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+3-(x+h+3)}{(x+3)(x+h+3)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(x+3)(x+h+3)h} = -\frac{1}{(x+3)^2}$

8. **Determina les derivades segona i tercera de les funcions següents:**

a) $f(x) = x^3 + 4x^2$ **b)** $f(x) = x^2 - x + 5$

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3+4(x+h)^2-(x^3+4x^2)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+4(x^2+h^2+2xh)-x^3-4x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3+4h^2+8xh}{h} = 3x^2+8x$

$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2+8(x+h)-(3x^2+8x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x^2+h^2+2xh)+8x+8h-3x^2-8x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2+6xh+8h}{h} = 6x+8$

$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h)+8-(6x+8)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h}{h} = 6$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-(x+h)+5-(x^2-x+5)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+h^2+2xh-x-h+5-x^2+x-5}{h} = \lim_{h\to 0} (h+2x-1) = 2x-1$

$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$

$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-2}{h} = 0$

9. **Calcula la derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = 6$ **b)** $f(x) = x^4$ **c)** $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x^5}$

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \rightarrow f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -5\frac{1}{x^6}$

10. **Determina la derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$ **b)** $f(x) = x^8$ **c)** $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x^4}$

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4} = x^{\frac{4}{7}} \rightarrow f'(x) = \frac{4}{7}x^{\frac{4}{7}-1} = \frac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}} = \frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$

b) $f'(x) = 8 \cdot x^{8-1} = 8x^7$

c) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}} \rightarrow f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^4}=x^{-4} \rightarrow f'(x)=-4\cdot x^{-4-1}=-4x^{-5}=\frac{-4}{x^5}$

11. Calcula la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x)=2^x$ **b)** $f(x)=3^x$ **c)** $f(x)=4^x$

a) $f'(x)=2^x \ln 2$ b) $f'(x)=3^x \ln 3$ c) $f'(x)=4^x \ln 4$

12. Determina la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x)=\log_2 x$ **b)** $f(x)=\log_3 x$ **c)** $f(x)=\log_4 x$

a) $f'(x)=\frac{1}{x \ln 2}$ b) $f'(x)=\frac{1}{x \ln 3}$ c) $f'(x)=\frac{1}{x \ln 4}$

13. Determina la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x)=x^3+x^2-x+1$

b) $f(x)=-\frac{1}{x}+x$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x)=3^x-arc\,tg\,x$

a) $f'(x)=3x^2+2x-1$

b) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1$

c) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f'(x)=3^x \ln 3-\frac{1}{1+x^2}$

14. Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x)=2x^3+4x^2-8x+9$

b) $f(x)=2\sin x-3\cos x$

c) $f(x)=7\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x)=\frac{1}{2x}-5x$

a) $f'(x)=6x^2+8x-8$

b) $f'(x)=2\cos x-3(-\sin x)=2\cos x+3\sin x$

c) $f'(x)=7\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-3\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{9}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f'(x)=-\frac{1}{2x^2}-5$

Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x)=x\sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x)=x\cdot e^x$

c) $f(x)=x\cdot\sin x$

d) $f(x)=x\cdot\ln x$

e) $f(x)=\sin x\cdot\cos x$

f) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

g) $f(x)=\left(x^2+2x\right)\cdot\sin x$

h) $f(x)=(e^x-x)\cdot\ln x$

a) $f'(x)=1\cdot\sqrt[3]{x^2}+x\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

b) $f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x$

c) $f'(x)=1\cdot sen\,x+x\cdot\cos x$

d) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

e) $f'(x) = cos\ x \cdot cos\ x + sen\ x \cdot (-sen\ x) = cos^2 x - sen^2 x$

f) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x} + (x^2 + 1) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2 - 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

g) $f'(x) = (2x + 2) \cdot sen\ x + (x^2 + 2x) \cdot cos\ x$

h) $f'(x) = (e^x - 1) \cdot \ln x + \frac{e^x - x}{x}$

15. Determina la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x) = 3x^2 \cdot log_2 x$

b) $f(x) = e^x \cdot sinx$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot cos\ x$

d) $f(x) = cos\ x \cdot tg\ x$

e) $f(x) = 4x \cdot sin\ x + x^3 cos\ x$

f) $f(x) = ln\ x \cdot \frac{1}{x^4} + x^2 \cdot e^x$

g) $f(x) = (sin\ x - cos\ x) \cdot tg\ x$

h) $f(x) = 4x\sqrt{x} + \frac{sin\ x}{x}$

a) $f'(x) = 6x \cdot \log_2 x + 3x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = 6x \log_2 x + \frac{3x}{\ln 2}$

b) $f'(x) = e^x \cdot sin\ x + e^x \cdot cos\ x = e^x (sin\ x + cos\ x)$

c) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot cos\ x - \sqrt[3]{x} \cdot sin\ x$

d) $f'(x) = -sin\ x \cdot tg\ x + cos\ x \cdot (1 + tg^2 x) = -sin\ x \cdot tg\ x + cos\ x \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \frac{-sin^2 x}{cos\ x} + \frac{1}{cos\ x} = cos\ x$

e) $f'(x) = 4\ sin\ x + 4x\ cos\ x + 3x^2 cos\ x - x^3 sin\ x = (4 - x^3)\ sin\ x + (4x + 3x^2)\ cos\ x$

f) $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^4} + \ln x \cdot \frac{-4}{x^5} + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \frac{1}{x^5}(1 - 4 \ln x) + x\ e^x (2 + x)$

g) $f'(x) = (cos\ x + sin\ x)\ tg\ x + (sin\ x - cos\ x)(1 + tg^2 x)$

h) $f'(x) = 4 \cdot \sqrt{x} + 4x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{cos\ x}{x} - \frac{sin\ x}{x^2} = 6\sqrt{x} + \frac{cos\ x}{x} - \frac{\sin\ x}{x^2}$

16. Determina la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x+4}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x+1}$

a) $f'(x) = \frac{1 \cdot x - (x + 2) \cdot 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (3x + 4) - \sqrt{x} \cdot 3}{(3x + 4)^2} = \frac{-3x + 4}{2\sqrt{x} \cdot (3x + 4)^2}$

c) $f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 1) - (x^2 + x - 3) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2}$

17. **Calcula la derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ **b)** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$ **c)** $f(x) = \frac{\sin x + 2x}{x-3}$

a) $f'(x) = \frac{\cos x \cdot x^3 - \sin x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x \cos x - 3 \sin x}{x^4}$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}$

c) $f'(x) = \frac{(\cos x + 2) \cdot (x-3) - (\sin x + 2x) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{(x-3) \cdot \cos x - 6 - \sin x}{(x-3)^2}$

18. **Determina la derivada de les funcions que hi ha a continuació:**

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ **b)** $f(x) = (arc \sin x)^3$ **c)** $f(x) = ln\, 4x$

a) $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ b) $f'(x) = \frac{3(arc \sin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $f'(x) = \frac{1}{x}$

19. **Calcula la derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = (\cos x)^2$ **b)** $f(x) = tg\left(\frac{x}{x-5}\right)$ **c)** $f(x) = e^{x^2+7x-4}$

a) $f'(x) = -2 \cos x \sin x$ b) $f'(x) = \frac{-5}{\cos^2\left(\frac{x}{x-5}\right)} \cdot \frac{1}{(x-5)^2}$ c) $f'(x) = e^{x^2+7x-4} \cdot (2x+7)$

SABER FER

20. Calcula el valor de m en la funció $f(x) = \frac{3x+m}{mx^2}$ si saps que $f'(-1) = 5$.

$$f'(x) = \frac{3 \cdot mx^2 - (3x+m) \cdot 2mx}{m^2x^4}$$

$$f'(-1) = \frac{3m + 2m \cdot (-3+m)}{m^2} = \frac{-3m+2m^2}{m^2} = -\frac{3}{m} + 2 = 5 \rightarrow m = -1$$

21. Estudia la derivabilitat de $f(x) = \begin{cases} kx+2 & si \quad x < -1 \\ x^3 - x + k & si \quad x \geq -1 \end{cases}$ en x = –1 segons els valors de k.

Una funció és derivable si també és contínua, de manera que primer analitzem si la funció és contínua en x = -1:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -k+2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = k \end{array}\right\} \rightarrow \text{Perquè sigui contínua } -k+2 = k \rightarrow k = 1.$$

$f(x)$ únicament és contínua per a k = 1, per tant, pot ser derivable només per aquest valor. Analitzem la derivabilitat per aquest valor:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no és derivable per a cap valor de } k.$$

22. Determina l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = \sin 2x - \cos x$ en el punt d'abscissa $x = \frac{\pi}{3}$.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

L'equació de la recta tangent en el punt $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ és:

$$y - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)x + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

23. Determina els punts de la funció $f(x) = x^3 - 3x$ amb la tangent horitzontal.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = -2 \rightarrow A(1, -2)$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = 2 \rightarrow B(-1, 2)$$

24. **Determina quin ha de ser el valor de k en la funció $f(x) = (k-1)x^3 + x^2 - kx - 4$ si les rectes tangents en $x = \frac{1}{3}$ i en $x = -1$ són paral·leles.**

$f'(x) = 3(k-1)x^2 + 2x - k$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = f'(-1) \to 3(k-1)\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - k = 3(k-1) - 2 - k \to k = 2$

25. **Escriu l'equació de la recta tangent a l'el·lipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punt $x = \frac{12}{5}$.**

$y = \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}$

$x = \frac{12}{5} \to y = \frac{6}{5}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}} \cdot \left(\frac{-8x}{9}\right) = -\frac{4x}{9\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}$$

$$f'\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{8}{9}$$

L'equació de la recta tangent en el punt $P\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ és:

$$y - \frac{6}{5} = -\frac{8}{9}\cdot\left(x - \frac{12}{5}\right) \to y = -\frac{8}{9}x + \frac{96}{45} + \frac{6}{5} \to y = -\frac{8}{9}x + \frac{10}{3}$$

26. **Calcula les derivades segona i tercera per a la funció $f(x) = e^{2x} + \sin x$.**

$f'(x) = 2e^{2x} + \cos x \to f''(x) = 4e^{2x} - \sin x \to f'''(x) = 8e^{2x} - \cos x$

27. **Troba la derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = (4x^2 + 5x - 2)^3$

b) $f(x) = \sqrt[5]{\sin x}$

c) $f(x) = \frac{1}{tg^3 x}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 7x - 12}}$

a) $f'(x) = 3(4x^2 + 5x - 2)^2(8x + 5)$

b) $f'(x) = \frac{1}{5}\sin^{-\frac{4}{5}} x \cdot \cos x = \frac{\cos x}{5\sqrt[5]{\sin^4 x}}$

c) $f'(x) = -\frac{3}{tg^4 x}(1 + tg^2 x)$

d) $f'(x) = \frac{-1}{3}(x^2 - 7x - 12)^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x - 7) = \frac{7 - 2x}{\sqrt[3]{(x^2 - 7x - 12)^4}}$

28. **Determina la derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1}$

b) $f(x) = 7^{\cos x^2}$

a) $f'(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1} \ln 5 \cdot (6x - 2)$

b) $f'(x) = 7^{\cos x^2} \ln 7 \cdot 2x \cdot (-\sin x^2) = -7^{\cos x^2} \ln 7 \cdot 2x \sin x^2$

29. Troba la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = ln(\sqrt{2x})$ **b)** $f(x) = ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{2x}$

b) $f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{-2}{x}$

30. Determina la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x) = tg(2x - 5)$ **b)** $f(x) = cos\sqrt{x}$

a) $f'(x) = 2\left[1 + tg^2(2x - 5)\right]$

b) $f'(x) = -sin\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

31. Troba la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = (x + 1)^x$ **b)** $f(x) = (x^2 + 1)^{x^2}$

a) $\ln f(x) = \ln\left[(x+1)^x\right] = x\ln(x+1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right](x+1)^x$$

b) $\ln f(x) = \ln\left[(x^2+1)^{x^3}\right] = x^3\ln(x^2+1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 \cdot \ln(x^2+1) + x^3 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = 3x^2\ln(x^2+1) + \frac{2x^4}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \left[3x^2\ln(x^2+1) + \frac{2x^4}{x^2+1}\right](x^2+1)^{x^3}$$

32. Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = arc\ sin\ (x^3 + x)$ **b)** $f(x) = arc\ tg\ \left(\frac{1}{x}\right)$

a) $f'(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}$

b) $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$

33. Determina la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x) = e^{sin\,x^2}$ **b)** $f(x) = \sqrt{ln\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 2x\ cos\ x^2\ e^{sen\,x^2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln\sqrt[3]{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{6x\sqrt{\ln\sqrt[3]{x}}}$

ACTIVITATS

34. **Completa a la llibreta aquesta taula amb les taxes de variació mitjana de la funció $f(x) = 2x^2 - x + 1$.**

	[−3, −1]	[−5, 2]	[0, 3]	[1, 4]
T.V.M.				

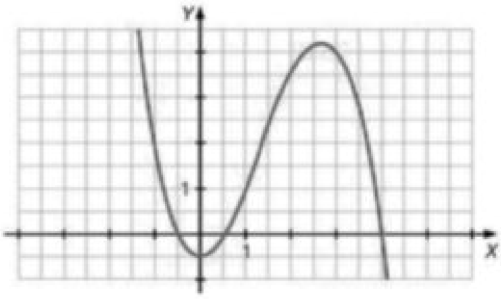
$$T.V.M.([-3,-1]) = \frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)} = \frac{4-22}{2} = -9$$

$$T.V.M.([0,3]) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{16-1}{3} = 5$$

$$T.V.M.([-5,2]) = \frac{f(2)-f(-5)}{2-(-5)} = \frac{7-56}{7} = -7$$

$$T.V.M.([1,4]) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{29-2}{3} = 9$$

35. **Determina la taxa de variació mitjana d’aquesta funció en cadascun dels intervals indicats:**



a) [-1, 1] **b) [1, 3]** **c) [-1, 3]**

a) $T.V.M.([-1,1]) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$

b) $T.V.M.([1,3]) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

c) $T.V.M.([-1,3]) = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$

36. **Calcula la taxa de variació mitjana d’aquestes funcions en els intervals següents:**

a) $\boldsymbol{f(x) = x \quad a \quad [-1, 1]}$

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 5 \quad a \quad [3, 4]}$

c) $\boldsymbol{f(x) = \sin x \quad a \quad [\frac{\pi}{2}, \pi]}$

a) $T.V.M.([-1,1]) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$

b) $T.V.M.([3,4]) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = 7 - \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$

c) $T.V.M.\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = \frac{f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

37. **Troba la taxa de variació mitjana de la funció *f*(x) = 2x² – x en l'interval [2, 2 + h]. Utilitza el resultat per determinar la taxa de variació mitjana de la funció en els intervals que hi ha a continuació:**

a) [2, 3] **c) [2, 8]**

b) [2, 5] **d) [2, 10]**

$$T.V.M.([2,2+h])=\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}=\frac{2(2+h)^2-(2+h)-6}{h}=$$

$$=\frac{\mathbf{8+8h+2h^2-2-h-6}}{\mathbf{h}}=\mathbf{7+2h}$$

a) $\text{T.V.M.}([2,3])=7+2\cdot 1=9$

b) $\text{T.V.M.}([2,5])=7+2\cdot 3=13$

c) $\text{T.V.M.}([2,8])=7+2\cdot 6=19$

d) $\text{T.V.M.}([2,10])=7+2\cdot 8=23$

38. **Calcula la taxa de variació mitjana de la funció $f(x)=\frac{1}{x}$ en l'interval [1, 1 + h]. Fes servir aquest resultat per determinar la taxa de variació mitjana de la funció en els intervals següents:**

a) [1, 2] **c) [1, 5]**

b) [1, 3] **d) [1, 10]**

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}=\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h}=\frac{1-(1+h)}{h(1+h)}=\frac{-1}{(1+h)}$$

a) $h=1\rightarrow\frac{-1}{(1+1)}=-\frac{1}{2}$

c) $h=4\rightarrow\frac{-1}{(1+4)}=-\frac{1}{5}$

b) $h=2\rightarrow\frac{-1}{(1+2)}=-\frac{1}{3}$

d) $h=9\rightarrow\frac{-1}{(1+9)}=-\frac{1}{10}$

39. **Calcula el valor que ha de tenir a perquè la taxa de variació mitjana de la funció *f*(x) = 2x² + ax – 5 en l'interval [0, 2] sigui 1.**

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3+2a-(-5)}{2}=4+a=1\rightarrow a=-3$$

40. **Troba dues funcions polinòmiques de segon grau que passin pels punts (0, 4) i (3, 10). Comprova que la taxa de variació mitjana en l'interval [0, 3] és la mateixa per a les dues funcions.**

Resposta oberta. Per exemple:

La funció és del tipus: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Atès que la gràfica passa pel punt (0, 4), es verifica que: $c = 4$

En passar també pel punt (3, 10), es compleix que: $9a + 3b + 4 = 10 \rightarrow 3a + b = 2$

Siguin $f(x) = x^2 - x + 4$ i $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$ les funcions demanades.

$$T.V.M.([0,3])=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{10-4}{3}=2$$

$$T.V.M.([0,3]) = \frac{g(3)-g(0)}{3-0} = \frac{10-4}{3} = 2$$

41. Per què la taxa de variació mitjana de la funció *f*(x) = 2 x – 3 en qualsevol interval sempre és 2?

Perquè la gràfica de la funció és una recta de pendent 2, i indica la seva variació en qualsevol interval.

42. Aplica la definició de derivada per calcular les derivades de les funcions en els punts indicats.

a) $f(x) = 3x - 1$ en $x = 2$

b) $f(x) = x2 + x$ en $x = 3$

c) $f(x) = \frac{4x+3}{2}$ en $x = -1$

d) $f(x) = \frac{6}{x}$ en $x = 1$

e) $f(x) = (x-1)^2$ en $x = -2$

f) $f(x) = x^3 + 5$ en $x = 0$

a) $f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-1-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h} = 3$

b) $f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+3+h-12}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2+h-9}{h} = \lim_{h\to 0}(7+h) = 7$

c) $f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4(-1+h)+3}{2}+\frac{1}{2}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{-4+4h+3+1}{2h} = 2$

d) $f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{6}{1+h}-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6-6-6h}{h(1+h)} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{-6}{1+h} = -6$

e) $f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-2+h-1)^2-9}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{9-6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}(-6+h) = -6$

f) $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3+5-5}{h} = 0$

43. A partir de la definició, calcula les funcions derivades de les funcions següents:

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = \frac{2x-1}{4}$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = 2x^2 - 3x$

e) $f(x) = \frac{12}{x}$

f) $f(x) = (3x^2 + 2)^2$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x+h)+3-(2x+3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x+2h-2x}{h} = 2$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2(x+h)-1}{4} - \dfrac{2x-1}{4}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x+2h-1-2x+1}{4h} = \dfrac{1}{2}$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (3x^2+3hx+h^2) = 3x^2$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x+h)^2-3(x+h)-(2x^2-3x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x^2+4hx+2h^2-3x-3h-2x^2+3x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (4x+2h-3) = 4x-3$

e) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{12}{x+h} - \dfrac{12}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{12x-12x-12h}{hx(x+h)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-12}{x(x+h)} = -\dfrac{12}{x^2}$

f) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3(x+h)^2+2)^2-(3x^2+2)^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9(x+h)^4+12(x+h)^2+4-9x^4-12x^2-4}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9x^4+36hx^3+54h^2x^2+36h^3x+9h^4+12x^2+24hx+12h^2-9x^4-12x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (36x^3+54hx^2+36h^2x+9h^3+24x+12h) = 36x^3+24x$

44. **Calcula la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ en l'interval [1, 1 + h].**

a) Utilitza el resultat per determinar la taxa de variació mitjana en els intervals [1, 3], [1, 5] i [1, 8].

b) Calcula el límit quan h tendeix a zero de la taxa de variació mitjana en l'interval [1, 1 + h] i comprova que equival a $f'(1)$.

$T.V.M.\ ([1, 1+h]) = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \dfrac{2(1+h)^2-2(1+h)+3-3}{h} =$

$= \dfrac{2+4h+2h^2-2-2h}{h} = 2h+2$

a) $T.V.M.\ ([1, 3]) = 2\cdot 2+2 = 6$

$T.V.M.\ ([1, 5]) = 2\cdot 4+2 = 10$

$T.V.M.\ ([1, 8]) = 2\cdot 7+2 = 16$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \lim\limits_{h\to 0} (2h+2) = 2 \qquad f'(x) = 4x-2 \rightarrow f'(1) = 2$

45. **Determina la derivada de cadascuna de les funcions següents en el punt indicat:**

a) $f(x) = (x+2)^2 - 1$ en x = 2

b) $f(x) = 5 - 2x$ en x = 0

c) $f(x) = \frac{7}{x-4}$ **en x = 1**

d) $f(x) = \sqrt{2-3x}$ **en x =–1**

e) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x+1}}$ **en x = 8**

a) $f'(x) = 2(x+2) \rightarrow f'(2) = 8$

b) $f'(x) = -2 \rightarrow f'(0) = -2$

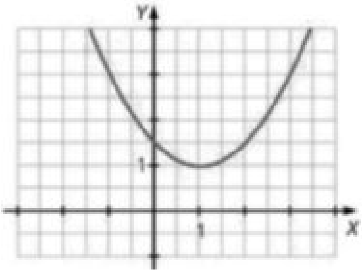
c) $f'(x) = \frac{-7}{(x-4)^2} \rightarrow f'(1) = -\frac{7}{9}$

d) $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}} \rightarrow f'(-1) = -\frac{3}{2\sqrt{5}}$

e) $f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{(x+1)^3}} \rightarrow f'(8) = -\frac{5}{54}$

46. Troba la derivada de la funció de la gràfica en els punts següents:

a) X = –1 **b) x = 0** **c) x = 1** **d) x = 3**

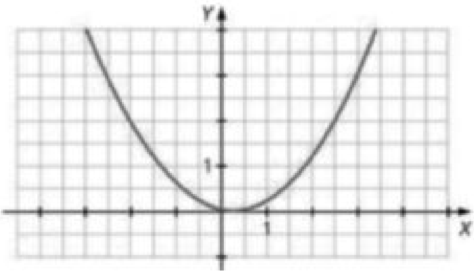


La paràbola passa pels punts $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, (1, 1), (3, 3). Substituint aquests punts en l'equació quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenim la funció:

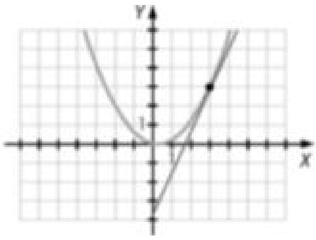
$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{2} = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 1 = a + b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{3}{2} \end{array}\right. \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \rightarrow f'(x) = x - 1$$

a) $f'(-1) = -2$ b) $f'(0) = -1$ c) $f'(1) = 0$ d) $f'(3) = 2$

47. Demostra gràficament que la derivada d'aquesta funció en el punt d'abscissa 3 té un valor inclòs entre 2 i 3:



La derivada de la funció en el punt x = 3 és el pendent de la recta tangent, i observant el dibuix s'obté que per cada unitat en horitzontal l'avanç vertical es troba comprès entre 2 i 3 unitats.



48. **Calcula el pendent de la recta tangent a cada funció f (x) en els punts següents:**

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ **en x = –2**

b) $f(x) = x^3 - x^2 + x$ **en x = 3**

c) $f(x) = 4x^2 - x - 5$ **en x = 0**

a) $f'(x) = 6x + 4 \rightarrow f'(-2) = -8$ b) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow f'(3) = 22$ c) $f'(x) = 8x - 1 \rightarrow f'(0) = -1$

49. **Calcula el pendent de les rectes tangents a la corba f (x) = x² – 4 en els punts de tall amb els eixos X i Y.**

$f'(x) = 2x$

La derivada $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent en el punt $P(a, f(a))$.

Talls amb l'eix *X*: (2, 0), (–2, 0).

$f'(2) = 4$ $f'(-2) = -4$

Tall amb l'eix *Y*: (0, –4).

$f'(0) = 0$

50. **Determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f (x) és horitzontal.**

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ **b)** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ **c)** $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$

La tangent a la corba *f*(*x*) és horitzontal quan el pendent de la recta tangent és zero, és a dir, quan la derivada és zero.

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$

És horitzontal als punts (0, 0) i (–2, 4).

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -1$

És horitzontal al punt (–1, –1).

c) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

És horitzontal als punts (–1, –5) i (–3, –1).

51. **Determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f*(x) en el punt indicat.**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ **en $x = 1$** **c)** $f(x) = x^2 - 2x$ **en $x = 1$**

b) $f(x) = x^3$ **en $x = 2$** **d)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **en $x = -1$**

a) $f'(x) = 6x \rightarrow f'(1) = 6$ $\quad f(1) = 2$

$y - 2 = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y - 2 = 6 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 6x - 4$

b) $f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(2) = 12$ $\quad f(2) = 8$

$y - 8 = f'(2) \cdot (x - 2) \rightarrow y - 8 = 12 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 12x - 16$

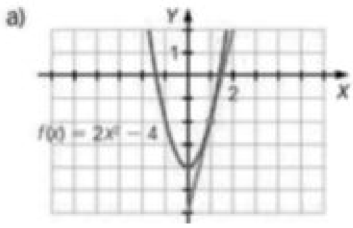
c) $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(1) = 0$ $\quad f(1) = -1$

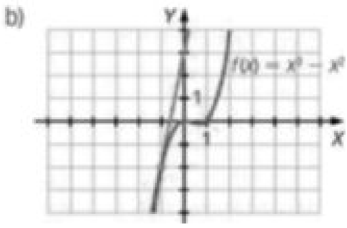
$y - (-1) = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y + 1 = 0 \rightarrow y = -1$

d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(-1) = -1$ $\quad f(-1) = -1$

$y - (-1) = f'(-1) \cdot [x - (-1)] \rightarrow y + 1 = -1 \cdot (x + 1) \rightarrow y = -x - 2$

52. Calcula l'equació de la recta tangent que hi ha a les gràfiques següents:





a) Hem de trobar l'equació de la recta tangent a la corba en $x = 1$.

$f'(x) = 4x \rightarrow f'(1) = 4$ $\quad f(1) = -2$

$y - (-2) = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y + 2 = 4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 4x - 6$

b) Hem de trobar l'equació de la recta tangent a la corba en $x = -1$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x \rightarrow f'(-1) = 5$ $\quad f(-1) = -2$

$y - (-2) = f'(-1) \cdot [x - (-1)] \rightarrow y + 2 = 5 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 5x + 3$

53. Escriu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f (x) = x² + 2x – 5.

a) En el punt d'abscissa 2.

b) En el punt d'abscissa –1.

c) En el punt d'ordenada –2.

d) En el punt de tall amb l'eix Y.

$f'(x) = 2x + 2$

a) $f'(2) = 6$ $\quad f(2) = 3$

$y - 3 = 6 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 6x - 9$

b) $f'(-1) = 0$ $\quad f(-1) = -6$

$y - (-6) = 0 \rightarrow y = -6$

c) $-2 = x^2 + 2x - 5 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$

$f'(1) = 4 \rightarrow y + 2 = 4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 4x - 6$

$f'(-3) = -4 \rightarrow y + 2 = -4 \cdot (x + 3) \rightarrow y = -4x - 14$

d) El punt de tall amb l'eix *Y* és (0, –5):

$f'(0) = 2 \rightarrow y - (-5) = 2 \cdot x \rightarrow y = 2x - 5$

54. Indica l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f*(x) = x³ + 3x².

a) En els punts de tall amb els eixos X i Y.

b) En el punt d'abscissa 1.

c) En els punts d'ordenada 4.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

a) Els punts de tall amb l'eix *X* són (0, 0) i (-3, 0).

El punt de tall amb l'eix *Y* és (0, 0).

$f'(0) = 0$

La recta tangent en (0, 0) és $y = 0$.

$f'(-3) = 9 \rightarrow y - 0 = 9\cdot[x-(-3)] \rightarrow y = 9x + 27$

b) $f'(1) = 9$ $\qquad f(1) = 4$

$y - 4 = 9\cdot(x-1) \rightarrow y = 9x - 5$

c) $4 = x^3 + 3x^2 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = -2$

$x_1 = 1$ coincideix amb l'apartat b).

$f'(-2) = 0 \rightarrow y - 4 = 0 \rightarrow y = 4$

55. Escriu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f*(x) = 2 + ln x en el punt d'abscissa 1.

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$ $\qquad f(1) = 2$ $\qquad y - 2 = 1\cdot(x-1) \rightarrow y = x + 1$

56. Determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f (x) = x^3 paral·lela a la recta y = x + 1.

Com que ha de ser paral·lela la recta *y* = *x* + 1, el pendent ha de ser 1, és a dir, la derivada ha de valer 1.

$$f'(x) = 3x^2 = 1 \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \rightarrow y - \frac{1}{3\sqrt{3}} = x - \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow y = x - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \rightarrow y - \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = x - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow y = x + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

57. Determina en els casos següents l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f*(x) que sigui paral·lela a la recta 3x – y + 6 = 0.

a) *f*(x) = x^2 + 4x – 2 $\qquad$ **c) *f*(x) = x^3 – 4**

b) $f(x) = \frac{3x}{1-x}$ $\qquad$ **d) $f(x) = \frac{3x^2+1}{x}$**

Com que *y* = 3*x* + 6, el pendent de la recta és 3.

a) $f'(x) = 2x + 4 = 3 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4} \rightarrow y - \left(-\frac{15}{4}\right) = 3\cdot\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \rightarrow y = 3x - \frac{9}{4}$$

b) $$f'(x) = \frac{3(1-x) - 3x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2} = 3 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow y = 3x \\ x_2 = 2 \rightarrow f(2) = -6 \rightarrow y - (-6) = 3(x-2) \rightarrow y = 3x - 12 \end{cases}$$

c) $$f'(x) = 3x^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow f(1) = -3 \rightarrow y - (-3) = 3(x-1) \rightarrow y = 3x - 6 \\ x_2 = -1 \rightarrow f(-1) = -5 \rightarrow y - (-5) = 3[x-(-1)] \rightarrow y = 3x - 2 \end{cases}$$

d) $f'(x)=\frac{6x\cdot x-3x^2-1}{x^2}=\frac{3x^2-1}{x^2}=3\to 3x^2-1=3x^2\to -1=0\to$ No té solució.

58. **Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=\frac{x}{x+3}$ paral·lela a la recta y – x = 6.**

Com que $y=x+6$, el pendent de la recta és 1.

$$f'(x)=\frac{x+3-x}{(x+3)^2}=\frac{3}{(x+3)^2}=1\to\begin{cases}x_1=-3+\sqrt{3}\to f\left(-3+\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+1\to y-\left(-\sqrt{3}+1\right)=x-\left(-3+\sqrt{3}\right)\\ x_2=-3-\sqrt{3}\to f\left(-3-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+1\to y=x+4+2\sqrt{3}\end{cases}$$

59. **Calcula el vèrtex de les paràboles següents si sabem que aquest punt de la corba té per tangent una recta paral·lela a l'eix X.**

a) ***f*(x) = x² – 4x + 6** **d)** ***f*(x) = 2x² + 4x – 3**

b) ***f*(x) = –x² + 2x – 1** **e)** ***f*(x) = 3x² – 6x + 5**

c) ***f*(x) = –x² + 2x + 1** **f)** ***f*(x) = (x – 1)(2x + 5)**

Com que la recta tangent al vèrtex és horitzontal, el pendent ha de ser zero, és a dir, la derivada ha de ser zero.

a) $f'(x)=2x-4=0\to x=2, f(2)=2$ $V(2, 2)$

b) $f'(x)=-2x+2=0\to x=1, f(1)=0$ $V(1, 0)$

c) $f'(x)=-2x+2=0\to x=1, f(1)=2$ $V(1, 2)$

d) $f'(x)=4x+4=0\to x=-1, f(-1)=-5$ $V(-1, -5)$

e) $f'(x)=6x-6=0\to x=1, f(1)=2$ $V(1, 2)$

f) $f(x)=(x-1)(2x+5)=2x^2+3x-5$

$f'(x)=4x+3=0\to x=-\frac{3}{4}, f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{49}{8}$ $V\left(-\frac{3}{4},-\frac{49}{8}\right)$

60. **Calcula el punt de tall de les rectes tangents a la corba f (x) en els punts d'abscissa 2 i 0.**

a) ***f*(x) = x² – x** **c)** ***f*(x) = x² + 1**

b) ***f*(x) = x² – 4x + 2** **d)** ***f*(x) = ln (x + 1)**

a) $f'(x)=2x-1$

$\left.\begin{matrix}f'(2)=3\\ f(2)=2\end{matrix}\right\}\to y-2=3(x-2)\to y=3x-4$ $\left.\begin{matrix}f'(0)=-1\\ f(0)=0\end{matrix}\right\}\to y=-x$

El punt de tall de les dues rectes és:

$\left.\begin{matrix}y=-x\\ y=3x-4\end{matrix}\right\}\to 3x-4=-x\to x=1, y=-1\to P(1,-1)$

b) $f'(x)=2x-4$

$\left.\begin{matrix}f'(2)=0\\ f(2)=-2\end{matrix}\right\}\to y-(-2)=0\to y=-2$ $\left.\begin{matrix}f'(0)=-4\\ f(0)=2\end{matrix}\right\}\to y-2=-4x\to y=-4x+2$

El punt de tall de les dues rectes és:

$\left.\begin{matrix}y=-2\\ y=-4x+2\end{matrix}\right\}\to y=-2, x=1\to P(1,-2)$

c) $f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4 \qquad f(2) = 5 \qquad y - 5 = 4(x-2) \rightarrow y = 4x - 3$

$f'(0) = 0 \qquad f(0) = 1 \qquad y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$

El punt de tall de les dues rectes és:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x - 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow y = 1,\ x = 1 \rightarrow P(1, 1)$$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2) = \dfrac{1}{3} \\ f(2) = \ln 3 \end{array}\right\} \rightarrow y - \ln 3 = \frac{1}{3}(x-2) \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 3 \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = x$$

El punt de tall de les dues rectes és:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3} + \ln 3 \\ y = x \end{array}\right\} \rightarrow y = x = -1 + \frac{3}{2}\ln 3 \rightarrow P\left(-1 + \frac{3}{2}\ln 3, -1 + \frac{3}{2}\ln 3\right)$$

61. **Indica en quins punts de la gràfica de la funció f (x) = $x^3 - x^2 + x$ la recta tangent té pendent 2.**

La recta tangent té pendent 2 en els punts en què la derivada és 2.

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 2 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \qquad A(1, 1),\ B\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{13}{27}\right)$

62. **Considera la funció $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$. Calcula els valors de la variable x en cada cas i interpreta geomètricament el que obtens.**

a) $f'(x) = 1$

b) $f'(x) = 4$

c) $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = \frac{1}{4}$

$$f'(x) = \frac{x + 2 - (x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

a) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} = 1 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -4$

La recta tangent a la corba té pendent 1 als punts d'abscissa 0 i –4.

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} = 4 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

La recta tangent a la corba té pendent 4 als punts d'abscissa –1 i –3.

c) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} \neq 0$

No existeixen punts en els quals la recta tangent a la corba sigui paral·lela l'eix *X*.

d) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{4} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -6$

La recta tangent a la corba té pendent $\frac{1}{4}$ en els punts d'abscissa 2 i –6.

63. Calcula el valor de k perquè la funció $f(x) = \frac{kx-5}{2x+3}$ verifiqui que $f'(-1) = 19$.

$f'(x) = \frac{k\cdot(2x+3)-(kx-5)\cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{3k+10}{(2x+3)^2}$

$f'(-1) = 3k+10 = 19 \rightarrow k = 3$

64. Troba els valors de a i b perquè les funcions *f*(x) i *g*(x) tinguin la mateixa recta tangent en x = 3.

$f(x) = ax^2 - 1$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + 3x + b$

$f'(x) = 2ax \qquad g'(x) = 2x+3$

Necessitem que coincideixin en el punt $x = 3$, és a dir, que $f(3) = g(3)$.

També necessitem que el pendent sigui el mateix en aquest punt, és a dir, que $f'(3) = g'(3)$.

Resolem el sistema de equacions:

$$\left.\begin{array}{l} 9a-1=9+9+b \\ 2\cdot 3a = 2\cdot 3+3 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{11}{2}$$

65. Determina l'equació de la recta normal de les funcions *f*(x) següents en el punt indicat:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ en $x = 2$

b) $f(x) = 2 - x^2$ en $x = 3$

c) $f(x) = x^3$ en $x = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = -1$

a) $f'(x) = 2x-2 \qquad f'(2) = 2 \qquad f(2) = 0$

La recta tangent és: $y = 2(x-2)$

La recta normal és: $y = -\frac{1}{2}(x-2)$

b) $f'(x) = -2x \qquad f'(3) = -6 \qquad f(3) = -7$

La recta tangent és: $y+7 = -6(x-3)$

La recta normal és: $y+7 = \frac{1}{6}(x-3) \rightarrow y = \frac{1}{6}x - \frac{15}{2}$

c) $f'(x) = 3x^2 \qquad f'(1) = 3 \qquad f(1) = 1$

La recta tangent és: $y-1 = 3(x-1)$

La recta normal és: $y-1 = -\frac{1}{3}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f'(-1) = -1 \qquad f(-1) = -1$

La recta tangent és: $y+1 = -(x+1)$

La recta normal és: $y+1 = x+1 \rightarrow y = x$

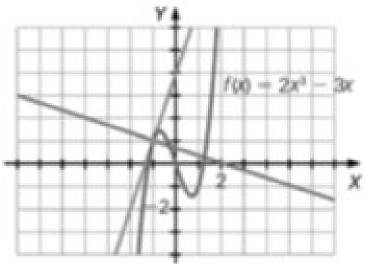
66. Calcula l'equació de la recta normal a la gràfica de *f*(x) = x² que sigui paral·lela a la recta y = 2x – 1.

Com que el pendent de la recta paral·lela a la recta normal és 2, el pendent de la recta tangent haurà ser $-\frac{1}{2}$.

$f'(x) = 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{4}$ $\qquad$ $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

L'equació de la recta normal és: $y - \frac{1}{16} = 2\left(x + \frac{1}{4}\right) \rightarrow y = 2x + \frac{9}{16}$

67. **Esbrina les equacions de les rectes perpendiculars que hi ha a la gràfica següent:**



$f'(x) = 6x^2 - 3$ $\qquad$ $f'(-1) = 3$ $\qquad$ $f(-1) = 1$

La recta tangent a la corba és: $y - 1 = 3(x + 1) \rightarrow y = 3x + 4$

La recta normal a la corba és: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

68. **Calcula la recta tangent i la recta normal a les funcions següents en els punts indicats:**

a) $\quad$ ***f*(x) = 2^{3x-8}** $\quad$ **en x = 3**

b) $\quad$ ***f*(x) = x² ln (x + 3)** $\quad$ **en x = –2**

c) $\quad$ ***f*(x) = (3x – 5)⁶** $\quad$ **en x = 2**

a) $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x-8} \cdot \ln 2$

L'equació de la recta tangent és: $y - 2 = 6\ln 2(x - 2) \rightarrow y = 6\ln 2(x - 2) + 2$

L'equació de la recta normal és: $y - 2 = -\frac{1}{6\ln 2}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{6\ln 2}(x - 2) + 2$

b) $f'(x) = 2x\ln(x + 3) + x^2 \cdot \frac{1}{x+3}$

L'equació de la recta tangent és: $y - 0 = 4(x + 2) \rightarrow y = 4x + 8$

L'equació de la recta normal és: $y - 0 = \frac{1}{4}(x + 2) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

c) $f'(x) = 6(3x - 5)^5 \cdot 3 = 18(3x - 5)^5$

L'equació de la recta tangent és: $y - 1 = 18(x - 2) \rightarrow y = 18x - 35$

L'equació de la recta normal és: $y - 1 = -\frac{1}{18}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{18}x + \frac{10}{9}$

69. **Determina la recta tangent i la recta normal a aquestes funcions en els punts indicats:**

a) *f*(x) = $\sqrt{2x + 6}$ $\quad$ **en x = 5** $\qquad$ **c) *f*(x) = $tg\,\frac{\pi - x}{2}$** $\quad$ **en x = π**

b) *f*(x) = sin (2 x + r) $\quad$ **en x = 0** $\qquad$ **d) *f*(x) = ln (x² + 1)** $\quad$ **en x = 0**

a) $f'(x) = \frac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$

L'equació de la recta tangent és: $y - 4 = \frac{1}{4}(x-5) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$

L'equació de la recta normal és: $y - 4 = -4(x-5) \rightarrow y = -4x + 16$

b) $f'(x) = \cos(2x+\pi) \cdot 2$

L'equació de la recta tangent és: $y - 0 = -2(x-0) \rightarrow y = -2x$

L'equació de la recta normal és: $y - 0 = \frac{1}{2}(x-0) \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

c) $f'(x) = \left(1 + tg^2\frac{\pi-x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

L'equació de la recta tangent és: $y - 0 = -\frac{1}{2}(x-\pi) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$

L'equació de la recta normal és: $y - 0 = 2(x-\pi) \rightarrow y = 2x - 2\pi$

d) $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

L'equació de la recta tangent és: $y = 0$

L'equació de la recta normal és: $x = 0$

70. Aplica la derivada de la suma a la funció $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 7x + 5$ per calcular:

a) La funció derivada.

b) La derivada en els punts d'abscissa x = –2, x = 0 i x = 1.

a) $f'(x) = 12x^3 - 4x - 7$

b) $f'(-2) = 12 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) - 7 = -95$ $\quad f'(0) = 12 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 - 7 = -7$ $\quad f'(1) = 12 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 - 7 = 1$

71. Considera la funció $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 6$, i calcula:

a) $f'(x)$

b) $f'(3)$, $f'(-2)$ i $f'(0)$

c) $f'(4 - 8)$ i $f'(4) - f'(8)$. Són iguals?

a) $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 1$

b) $f'(3) = 12 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 1 = 190$

$f'(-2) = 12 \cdot (-2)^3 - 15 \cdot (-2)^2 + 1 = -155$

$f'(0) = 12 \cdot 0^3 - 15 \cdot 0^2 + 1 = 1$

c) $f'(4-8) = 12 \cdot (-4)^3 - 15 \cdot (-4)^2 + 1 = -1007$

$f'(4) = 12 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 1 = 529$

$f'(8) = 12 \cdot 8^3 - 15 \cdot 8^2 + 1 = 5\,185$

$f'(4) - f'(8) = -4\,656 \neq -1007 = f'(4-8)$

72. Determina la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - x + 5$

b) $f(x) = -2(x^4 - 9x^2) + x$

c) $f(x) = x(2 + x^2) + 3$

d) $f(x) = x^6 - 10x^2 - x - 3$

a) $f'(x) = -9x^2 + 10x - 1$

b) $f'(x) = -8x^3 + 36x + 1$

c) $f'(x) = 3x^2 + 2$

d) $f'(x) = 6x^5 - 20x + \frac{3}{x^4}$

73. Fes servir les regles de derivació per calcular la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 12x - 1$

b) $f(x) = \frac{3x^2-5x}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{-3x^2+8x-9}{2}$

a) $f'(x) = 20x^3 + 9x^2 - 14x + 12$

b) $f'(x) = \frac{(6x-5)(x+1) - (3x^2-5x)}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x-5}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{-3\cdot 2x + 8}{2} = -3x + 4$

74. Aplica la derivada del producte a la funció $f(x) = (5x^2 - 3x)\cdot(x^4 - 2x + 5)$ per calcular:

a) La funció derivada.

b) La derivada en els punts d'abscissa –3, 0 i 2.

a) $f'(x) = (10x-3)(x^4 - 2x + 5) + (4x^3 - 2)(5x^2 - 3x) = 30x^5 - 15x^4 - 30x^2 + 62x - 15$

b) $f'(-3) = 30\cdot(-3)^5 - 15\cdot(-3)^4 - 30\cdot(-3)^2 + 62\cdot(-3) - 15 = -8\,976$

$f'(0) = 30\cdot 0^5 - 15\cdot 0^4 - 30\cdot 0^2 + 62\cdot 0 - 15 = -15$

$f'(2) = 30\cdot 2^5 - 15\cdot 2^4 - 30\cdot 2^2 + 62\cdot 2 - 15 = 709$

75. Utilitza les regles de derivació per calcular la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = (3x^2 - 1)\cdot 4x$

b) $f(x) = (-3x^2 + x - 1)\cdot\left(\frac{2x-3}{3}\right)$

c) $f(x) = 2x\cdot(5x - 3)\cdot(x^2 - 3x + 1)$

a) $f'(x) = 6x\cdot 4x + (3x^2 - 1)\cdot 4 = 36x^2 - 4$

b) $f'(x) = (-6x+1)\left(\frac{2x-3}{3}\right) + (-3x^2 + x - 1)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-18x^2 + 22x - 5}{3}$

c) $f'(x) = 2\left[(5x-3)(x^2-3x+1)\right] + 2x\left[5(x^2-3x+1) + (5x-3)(2x-3)\right] = 40x^3 - 108x^2 + 56x - 6$

76. **Aplica la regla del quocient a la funció $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-5x}$ per calcular:**

a) La funció derivada.

b) La derivada en els punts d'abscissa –1, 1 i 2.

a) $f'(x)=\frac{3(x^2-5x)-(3x-1)(2x-5)}{(x^2-5x)^2}=\frac{-3x^2+2x-5}{(x^2-5x)^2}$

b) $f'(-1)=\frac{-3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-5}{\left[(-1)^2-5\cdot(-1)\right]^2}=-\frac{10}{36}=-\frac{5}{18}$

$f'(1)=\frac{-3\cdot 1^2+2\cdot 1-5}{(1^2-5\cdot 1)^2}=-\frac{6}{16}=-\frac{3}{8}$ $\qquad f'(2)=\frac{-3\cdot 2^2+2\cdot 2-5}{(2^2-5\cdot 2)^2}=-\frac{13}{36}$

77. **Utilitza les regles de derivació per calcular la funció derivada de les funcions següents:**

a) $f(x)=\frac{7x^3-2x+4}{x-2}$ **c)** $f(x)=\frac{4}{x^2-1}$

b) $f(x)=\frac{6x^4}{7x^2-x+3}$ **d)** $f(x)=\frac{x^2+3-x}{2x^2-x}$

a) $f'(x)=\frac{(21x^2-2)(x-2)-(7x^3-2x+4)}{(x-2)^2}=\frac{14x^3-42x^2}{(x-2)^2}$

b) $f'(x)=\frac{24x^3(7x^2-x+3)-6x^4(14x-1)}{(7x^2-x+3)^2}=\frac{84x^5-18x^4+72x^3}{(7x^2-x+3)^2}$

c) $f'(x)=\frac{-4}{(x^2-1)^2}\cdot 2x=\frac{-8x}{(x^2-1)^2}$

d) $f'(x)=\frac{(2x-1)(2x^2-x)-(x^2-x+3)(4x-1)}{(2x^2-x)^2}=\frac{x^2-12x+3}{(2x^2-x)^2}$

78. **Efectua la derivada de la funció següent:**

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}$$

$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}+\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}=-\frac{8x}{(x^2-1)^2}$

79. **Calcula la derivada de les funcions següents:**

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^7}$ **c)** $f(x)=\sqrt[5]{x}\cdot(1-\sqrt{x})$

b) $f(x)=\sqrt{x^3}\cdot 3\sqrt[5]{x}$ **d)** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}=\frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$

b) $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}-\frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$

c) $f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[10]{x^7}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}-\frac{7}{10}x^{-\frac{3}{10}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}-\frac{7}{10\sqrt[10]{x^3}}$

d) $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1-\sqrt[3]{x})-\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}{(1-\sqrt[3]{x})^2}=\frac{3\sqrt[3]{x^2}-x}{6\sqrt[6]{x^7}(1-\sqrt[3]{x})^2}$

80. Determina la derivada de les funcions que hi ha a continuació:

a) $f(x) = \frac{x^2-4x}{5x+2} - \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{x+5}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{x^2-3x-1}{2x^2-x} + \frac{\sqrt{x+5}}{x}$

a) $f'(x) = \frac{(2x-4)(5x+2)-(x^2-4x)5}{(5x+2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+4x-8}{(5x+2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{x^2-3x+2} \to f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-3x+2)-(x^2+2x-15)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-5x^2+34x-41}{(x^2-3x+2)^2}$

c) $f'(x) = \frac{(2x-3)(2x^2-x)-(x^2-3x-1)(4x-1)}{(2x^2-x)^2} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}x - \sqrt{x+5}}{x^2} = \frac{5x^2+4x-1}{(2x^2-x)^2} - \frac{x+10}{2x^2\sqrt{x+5}}$

81. Calcula la derivada d'aquesta funció:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2-1}} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2-1}} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} + \frac{1}{x^2} \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}}} \cdot \left(\frac{2(x+1)-(2x+3)}{(x+1)^2}\right) - \frac{2}{x^3} = \frac{-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{2x+3}(x+1)^2} - \frac{2}{x^3}$

82. Troba la derivada de les funcions exponencials i logarítmiques següents:

a) $f(x) = \ln x + e^x$

b) $f(x) = x^2 \log x - 1$

c) $f(x) = (x^2+3)\log_2 x$

d) $f(x) = \frac{\ln x + 4}{e^x}$

e) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x} + 4$

f) $f(x) = 5e^x - 3^x$

a) $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$

b) $f'(x) = 2x\log x + x^2\frac{1}{x\ln 10} = x\left(2\log x + \frac{1}{\ln 10}\right)$

c) $f'(x) = 2x\log_2 x + \frac{x^2+3}{x\ln 2}$

d) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot e^x - (\ln x + 4)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x\ln x - 4x}{xe^x}$

e) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x\ln x}{xe^x}$

f) $f'(x) = 5e^x - 3^x \ln 3$

83. Deriva les funcions trigonomètriques següents:

a) $f(x) = sin\,x\,cos\,x$

b) $f(x) = x^2 log\,x - 1$

c) $f(x) = sec\,x\,cosec\,x$

d) $f(x) = x\,tg\,x$

e) $f(x) = x\,arc\,cos\,x$

f) $f(x) = \frac{1}{tg\,x}$

a) $f'(x) = cos^2 x - sin^2 x$

b) $f'(x) = \frac{-\sin x \cdot x^2 - cox\,x \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x \sin x - 2cox\,x}{x^3}$

c) $f'^{(x)} = \frac{\sin x \cdot}{cos^2 x} \cdot cosec\,x + \sec x \cdot \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{sin^2 x}$

d) $f'^{(x)} = 1 \cdot tg\,x + x \cdot (1 + tg^2\,x) = x + tg\,x + x\,tg^2 x$

e) $f'^{(x)} = 1 \cdot arc\,cos\,x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = arc\,cos\,x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f'^{(x)} = \frac{x + tg^2 x}{tg^2 x}$

84. Calcula la derivada de les funcions trigonomètriques següents:

a) $f(x) = 2x + arc\,sin\,x + arc\,cos\,x$

b) $f(x) = (1 + x^2)\,arc\,tg\,x$

c) $f(x) = ln\,x\,tg\,x$

d) $f(x) = e^x\,sin\,x$

e) $f(x) = \frac{cos\,x}{2-x}$

a) $f'(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2$

b) $f'(x) = 2x \cdot arc\,tg\,x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1 + 2x\,arc\,tg\,x$

c) $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot tg\,x + \ln x \cdot (1 + tg^2\,x)$

d) $f'(x) = e^x \cdot sen\,x + e^x \cdot cos\,x = e^x(sen\,x + cos\,x)$

e) $f'(x) = \frac{-sen\,x(2-x) - cos\,x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{(x-2)\,sen\,x + cos\,x}{(2-x)^2}$

85. Calcula les sis primeres derivades de les funcions *f*(x) = sin x i *g*(x) = cos x.

$f(x) = sen\,x \rightarrow f'(x) = cos\,x \rightarrow f''(x) = -sen\,x \rightarrow f'''(x) = -cos\,x \rightarrow f^{IV}(x) = sen\,x$
$\rightarrow f^{V}(x) = cos\,x \rightarrow f^{VI}(x) = -sen\,x$

$f(x) = cos\,x \rightarrow f'(x) = -sen\,x \rightarrow f''(x) = -cos\,x \rightarrow f'''(x) = sen\,x \rightarrow f^{IV}(x) = cos\,x$
$\rightarrow f^{V}(x) = -sen\,x \rightarrow f^{VI}(x) = -cos\,x$

86. Determina les tres primeres derivades de les funcions següents:

a) $f(x) = x^4 + 7x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

c) $f(x) = sinx^2$

d) $f(x) = e^{2x}$

a) $f'(x)=4x^3+21x^2$ $\quad f''(x)=12x^2+42x$ $\quad f'''(x)=24x+42$

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x}}$ $\quad f''(x)=\dfrac{3x^4-24x^2-16}{4(x^3-4x)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad f'''(x)=\dfrac{-3(x^6-20x^4-80x^2+64)}{8(x^3-4x)^{\frac{5}{2}}}$

c) $f'(x)=2x\cos x^2$ $\quad f''(x)=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$ $\quad f'''(x)=-12x\sin x^2-8x^3\cos x^2$

d) $f'(x)=2e^{2x}$ $\quad f''(x)=4e^{2x}$ $\quad f'''(x)=8e^{2x}$

87. Calcula les derivades primera, segona i tercera d'aquestes funcions:

a) $f(x)=x^3+7x^2+x-1$ **c)** $f(x)=\ln 2x$

b) $f(x)=\sqrt{x-2}$ **d)** $f(x)=e^{\sin x+\cos x}$

a) $f'(x)=3x^2+4x+1$ $\quad f''(x)=6x+4$ $\quad f'''(x)=6$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ $\quad f''(x)=-\dfrac{1}{4\sqrt{(x-2)^3}}$ $\quad f'''(x)=\dfrac{3}{8\sqrt{(x-2)^5}}$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ $\quad f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$

d) $f'(x)=(\cos x-\sin x)e^{\sin x+\cos x}$

$$f''(x)=(\cos x-\sin x)^2e^{\sin x+\cos x}-e^{\sin x+\cos x}(\sin x+\cos x)$$

$$f'''(x)=e^{\sin x+\cos x}\left[(\cos x-\sin x)^3-3(\cos^2x-\sin^2x)-(\cos x-\sin x)\right]$$

88. Troba els valors on s'anul·la la derivada segona de les funcions següents:

a) $f(x)=-3x^3+4x^2-3x+1$

b) $f(x)=\ln(x^2+2)$

a) $f'(x)=-9x^2+8x-3$ $\quad f''(x)=-18x+8=0\rightarrow x=\dfrac{4}{9}$

b) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ $\quad f''(x)=\dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}=0\rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

89. Donada $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ **, calcula el valor de x en aquests casos:**

a) $f'(x)=0$ **b)** $f''(x)=0$

a) $f'(x)=\dfrac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2}=\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}=0\rightarrow x_1=0,\ x_2=-6$

b) $f''(x)=\dfrac{(2x+6)(x+3)^2-2(x^2+6x)(x+3)}{(x+3)^4}=\dfrac{18}{(x+3)^3}\neq 0$

No existeix cap valor de *x* que anul·li la segona derivada.

90. Calcula la derivada enèsima, $f^n(x)$**, d'aquesta funció:**

$$f(x)=\frac{2}{x-1}$$

Calculem les primeres derivades:

$f'(x) = -2 \cdot (x-1)^{-2}$ $\quad f''(x) = 4(x-1)^{-3}$ $\quad f'''(x) = -12(x-1)^{-4}$ $\quad f^{IV}(x) = 48(x-1)^{-5}$

La derivada enèsima és del tipus:

$f^{n}(x) = (-1)^{n} 2 \cdot n!(x-1)^{-(n+1)}$

91. Escriu les funcions elementals que componen aquestes funcions i troba'n les derivades:

a) $f(x) = \ln(2x^2)$

b) $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

c) $f(x) = 10^{x+3}$

d) $f(x) = e^{3x}$

e) $f(x) = \cos(3x - 1)$

f) $f(x) = \sin(x^2 - 3)$

a) $f(x) = g[h(x)]$, on $g(x) = \ln x$ i $h(x) = 2x^2 \longrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{x}$

b) $f(x) = g[h(x)]$, on $g(x) = \log_3 x$ i $h(x) = x^2 - 1 \longrightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$

c) $f(x) = g[h(x)]$, on $g(x) = 10^x$ i $h(x) = x + 3 \longrightarrow f'(x) = 10^{x+3}\ln 10$

d) $f(x) = g[h(x)]$, on $g(x) = e^x$ i $h(x) = 3x \longrightarrow f'(x) = 3e^{3x}$

e) $f(x) = g[h(x)]$, on $g(x) = \cos x$ i $h(x) = 3x - 1 \longrightarrow f'(x) = -3\sin(3x-1)$

f) $f(x) = g[h(x)]$, on $g(x) = \sin x$ i $h(x) = x^2 - 3 \longrightarrow f'(x) = 2x\cos(x^2-3)$

92. Escriu les funcions que componen les funcions següents i calcula'n les derivades:

a) $f(x) = \log_3(2x + 1)$

b) $f(x) = (3x^2 - 3x + 1)^4$

c) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

d) $f(x) = \text{arc tg } e^x$

e) $f(x) = 2^{3x-4}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \cos\ln x$

h) $f(x) = 3^{\cos x}$

a) $g(x) = \log_3 x$ y $h(x) = 2x + 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 3} \cdot 2 = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$

b) $g(x) = x^4$ y $h(x) = 3x^2 - 3x + 1$

$f'(x) = 4(3x^2 - 3x + 1)^3(6x - 3)$

c) $g(x) = \text{sen } x$ y $h(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \cos\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

d) $g(x) = \text{arc tg } x$ y $h(x) = e^x$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

e) $g(x) = 2^x$ y $h(x) = 3x - 4$

$f'(x) = 2^{3x-4} \cdot \ln 2 \cdot 3$

f) $g(x) = \sqrt[4]{x}$ y $h(x) = x^2 - 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{4}(x^2-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x = \dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$

g) $g(x) = \cos x$ y $h(x) = \ln x$

$f'(x) = -\text{sen}\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\text{sen}\ln x}{x}$

h) $g(x) = 3^x$ y $h(x) = \cos x$

$f'(x) = 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot (-\text{sen } x)$

93. Aplica la regla de la cadena per calcular les derivades d'aquestes funcions exponencials i logarítmiques:

a) $f(x) = \ln\dfrac{x^2}{2x+1}$

e) $f(x) = \log_2\dfrac{2x^2}{x-7}$

b) $f(x) = e^x \ln x$

c) $f(x) = e^{\frac{3x^2-1}{x}}$

d) $f(x) = \frac{e^{4x+1}}{1+x^4}$

f) $f(x) = e^{\ln(x^4+2)}$

g) $f(x) = \frac{\ln x^3}{e^{-x^2-x}}$

h) $f(x) = \ln \frac{e^{3x}+e^x}{e^{\frac{1}{x}}}$

a) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^3} \cdot \dfrac{3x^2(2x+1)-2x^3}{(2x+1)^2} = \dfrac{4x+3}{x(2x+1)}$

b) $f'(x) = e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$

c) $f'(x) = e^{\frac{3x^2-1}{x}} \left(\dfrac{6x \cdot x - (3x^2-1)}{x^2} \right) = e^{\frac{3x^2-1}{x}} \left(\dfrac{3x^2+1}{x^2} \right)$

d) $f'(x) = \dfrac{4e^{4x+1}(1+x^4) - 4x^3 e^{4x+1}}{(1+x^4)^2} = \dfrac{4e^{4x+1}(1-x^3+x^4)}{(1+x^4)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{x-7}{2x^2} \cdot \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{4x(x-7)-2x^2}{(x-7)^2} = \dfrac{x-14}{x(x-7)\ln 2}$

f) $f'(x) = 3^{\ln(x^4+2)} \ln 3 \cdot \dfrac{1}{x^4+2} \cdot 4x^3$

g) $f'(x) = \dfrac{\frac{3}{x} e^{-x^2-x} - \ln x^3 \cdot e^{-x^2-x} \cdot (-2x-1)}{e^{-2x^2-2x}} = \dfrac{e^{x^2+x}\left[3 + (2x^2+x)\ln x^3\right]}{x}$

h) $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{3x}+e^x} \cdot \dfrac{(3e^{3x}+e^x)e^{\frac{1}{x}} - (e^{3x}+e^x)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}} = 3 + \dfrac{1}{x^2}$

94. Aplica la regla de la cadena per calcular les derivades d'aquestes funcions trigonomètriques:

a) $f(x) = \sin 3x^2$

b) $f(x) = \cos(x^2+1)$

c) $f(x) = tg\,(x^2-3x)$

d) $f(x) = \sin \sqrt{x^2+3x}$

e) $f(x) = \cos \frac{x-1}{x}$

f) $f(x) = tg \sqrt{x-1}$

g) $f(x) = -\sin \frac{x}{-x^4+x-1}$

h) $f(x) = tg \frac{2}{\sqrt{1-x}}$

a) $f'(x) = 6x \cos 3x^2$

b) $f'(x) = -2x \sin(x^2+1)$

c) $f'(x) = \left[1 + tg^2(x^2-3x)\right] \cdot (2x-3)$

d) $f'(x) = \cos\sqrt{x^2+3x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3x}} \cdot (2x+3)$

e) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \sin\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

f) $f'(x) = \left(1 + tg^2\sqrt{x-1}\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

g) $f'(x) = -\cos\left(\dfrac{x}{-x^4+x-1}\right) \cdot \dfrac{3x^4-1}{(-x^4+x-1)^2}$

h) $f'(x) = \left(1 + tg^2 \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}$

95. **Calcula la derivada d’aquestes funcions:**

a) $f(x) = (2x+1)^3 \cdot 3^x$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x^3}}$

c) $f(x) = \frac{x^2-3}{\sqrt{x^3}}$

d) $f(x) = \frac{2x-3}{e^x}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}$

f) $f(x) = x^2 - \frac{3}{\sqrt{x^3}}$

a) $f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 \cdot 3^x + (2x+1)^3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = [6 + (2x+1)\ln 3] \cdot (2x+1)^2 \cdot 3^x$

b) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2-3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x \cdot x^3 - (x^2-3) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-x^2+9}{2x^4} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{x^2-3}}$

c) $f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x^3} - (x^2-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = \frac{4x^3 - 3x(x^2-3)}{2x^2\sqrt{x^3}} = \frac{x^2+9}{2x^2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{2 \cdot e^x - (2x-3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{5-2x}{e^x}$

e) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot (x^2-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x^3 - \sqrt{x^2-3} \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3(x^2-3)}{x^4\sqrt{x^2-3}} = \frac{-2x^2+9}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

f) $f'(x) = 2x + \frac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = 2x + \frac{9x^2}{2x^3\sqrt{x^3}} = 2x + \frac{9}{2x^2\sqrt{x}}$

96. **Aplica la regla de la cadena per determinar les derivades d'aquestes funcions potencials:**

a) $f(x) = (3x^4 - 2x + 1)^5$

b) $f(x) = \left(\frac{x}{1-x^3}\right)^5$

c) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)^5$

d) $f(x) = (1 + 2e^x)^4$

e) $f(x) = ln^4(x^2-1)^3$

f) $f(x) = (1 - 3e^x)^6$

g) $f(x) = sin^2 x^2$

h) $f(x) = cos^3(x^2 - 7x + 1)$

i) $f(x) = tg^2(x^3 - 8)$

j) $f(x) = \left(sin\frac{1}{x} + cos\frac{1}{x}\right)^3$

a) $f'(x) = 5(3x^4 - 2x + 1)^4 (12x^3 - 2)$

b) $f'(x) = 5\left(\frac{x}{1-x^3}\right)^4 \left(\frac{1 - x^3 - x \cdot (-3x^2)}{(1-x^3)^2}\right) = \frac{5x^4(1+2x^3)}{(1-x^3)^6}$

c) $f'(x) = 5x^2(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$

d) $f'(x) = 8(1+2e^x)^3 e^x$

e) $f'(x) = 4\ln^3(x^2-1)^3 \cdot \frac{1}{(x^2-1)^3} \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = \frac{24x\ln^3(x^2-1)^3}{x^2-1}$

f) $f'(x) = -18e^x\left(1-3e^x\right)^5$

g) $f'(x) = 4x\ sin\ x^2\ cos\ x^2 = 2x\ sin(2x^2)$

h) $f'(x) = -3\ cos^2\left(x^2-7x+1\right)\cdot sin\left(x^2-7x+1\right)\cdot(2x-7)$

i) $f'(x) = 6x^2\ tg\left(x^3-8\right)\cdot\left[1+tg^2\left(x^3-8\right)\right]$

j) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2}\left(sin\ \dfrac{1}{x}+cos\ \dfrac{1}{x}\right)^2\left(sin\ \dfrac{1}{x}-cos\ \dfrac{1}{x}\right)$

97. **Aplica la regla de la cadena per determinar la funció derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = ln\ tg\ x$

b) $f(x) = \sqrt{cos\ x}$

c) $f(x) = log_2\ x^2$

d) $f(x) = (1+2e^x)^4$

e) $f(x) = arc\ tg\ x^2$

f) $f(x) = tg\ ln\ x$

g) $f(x) = cos\ \sqrt{x}$

h) $f(x) = log_2\ x^2$

i) $f(x) = tg^2\left(x^3-8\right)$

j) $f(x) = arc\ tg^2\ x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{tg\ x}\cdot(1+tg^2\ x)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(cos\ x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-sen\ x) = -\dfrac{sen\ x}{2\sqrt{cos\ x}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2\cdot \ln 2}\cdot 2x = \dfrac{2}{x\ln 2}$

d) $f'(x) = cos\ (cos\ x)\cdot(-sen\ x)$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x = \dfrac{2x}{1+x^4}$

f) $f'(x) = (1+tg^2\ \ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$

g) $f'(x) = \left(-sen\ \sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{sen\ \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

h) $f'(x) = 2\ log_2\ x\cdot\dfrac{1}{x\cdot\ln 2}$

i) $f'(x) = -sen\ (sen\ x)\cdot cos\ x$

j) $f'(x) = 2\ arc\ tg\ x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

98. **Deriva les funcions següents:**

a) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$

b) $f(x) = ln\ \left(\dfrac{x^2-1}{e^{2x}}\right)$

c) $f(x) = \sqrt{2e^x + log_2 3x}$

d) $f(x) = (ln(ln\ x))^2$

e) $f(x) = 3\ sin\ x^2 + 2\ sin^2 x$

f) $f(x) = sec\ \left(x^3+1\right)^2$

g) $f(x) = -cos(sin(tg\ x^2))$

h) $f(x) = ln\ \dfrac{sinx^2}{cos\ 2x}$

i) $f(x) = -e^{2x}.cos\ x^2$

j) $f(x) = \sqrt[3]{cos^2\ x^3}$

a) $f'(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x-2x^2+2}{x^2-1}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2e^x+\log_2 3x}}\left(2e^x+\dfrac{1}{x\ln 2}\right)$

d) $f'(x) = 2[\ln(\ln x)] \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$

e) $f'(x) = 6x\, cos\, x^2 + 4\, sin\, x\, cos\, x$

f) $f'(x) = \frac{6\, sin(x^3+1)^2 \cdot (x^3+1)x^2}{cos^2(x^3+1)^2}$

g) $f'(x) = 2x\, sin[sin(tg\, x^2)]cos(tg\, x^2)(1+tg^2 x^2)$

h) $f'(x) = \frac{2x\, cos\, x^2\, cos\, 2x + 2\, sin\, x^2 sin\, 2x}{sin\, x^2\, cos\, 2x}$

i) $f'(x) = 2e^{2x}\, cos\, x^2 - 2xe^{2x}\, sin\, x^2$

j) $f'(x) = \frac{-2x^2\, sin\, x^3}{\sqrt[3]{cos\, x^3}}$

99. Aplica la regla de la cadena per calcular la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}$

b) $f(x) = \sqrt{sin^2 x - cos^2(3x-1) + tg\frac{-3}{x^2+2}}$

c) $f(x) = tg^4\left(\frac{\sqrt{4x^2+10x-1}}{x-16}\right)$

d) $f(x) = ln\left(\frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x - cos^2 x} + tg^2 x\right)$

e) $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right)^{x^2+4}$

a) $f'(x) = 5\left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{8x^3}{5} - \frac{9x^2}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}\right)$

b) $f'(x) = \frac{\left[3\, sin^2 x\, cos\, x + 6\, cos(3x-1)\, sin(3x-1) + 6x\left(1 + tg^2\left(\frac{-3}{x^2+2}\right)\right)\frac{1}{(x^2+2)^2}\right]}{2\sqrt{sin^3 x - cos^2(3x-1) + tg\frac{-3}{x^2+2}}}$

c) $f'(x) = 4\, tg^3\left(\frac{\sqrt{4x^2+10x-1}}{x-16}\right)\left(1 + tg^2\left(\frac{\sqrt{4x^2+10x-1}}{x-16}\right)\right) \cdot \frac{\frac{4x+5}{\sqrt{4x^2+10x-1}}(x-16) - \sqrt{4x^2+10x-1}}{(x-16)^2}$

d) $f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{sin^2 x - cos^2 x} + tg^2 x} \cdot \left(\frac{-2\, sin\, 2x}{(sin^2 x - cos^2 x)^2} + 1 + tg^2 x\right)$

e) $\ln f(x) = (x^2+4)\left(\frac{1}{3}\ln(-3x^2+10x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^4-4)\right)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2x\ln\left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right)+\left(x^2+4\right)\left[\frac{-6x+10}{3\left(-3x^2+10x-1\right)}-\frac{4x^3}{2\left(x^4-1\right)}\right]$$

$$f'(x)=\left(2x\ln\left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right)+\left(x^2+4\right)\left[\frac{-6x+10}{3\left(-3x^2+10x-1\right)}-\frac{2x^3}{\left(x^4-1\right)}\right]\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right)^{x^2+4}$$

100. Determina els coeficients i els exponents desconeguts perquè es verifiqui que les funcions i les seves derivades es corresponen.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

b) $g(x) = a \ln x + bx$

$g'(x) = \frac{3}{x} - 5$

c) $h(x) = \frac{a^x}{x^b}$

$h'(x) = a^x\left(\frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

d) $i(x) = \frac{x}{\sqrt[b]{x}}$

$i'(x) = \frac{2}{3\sqrt[b]{x}}$

a) a = 2, b = - 3

b) a = 3, b = - 5

c) a = 2, b = 1

d) b = 3

101. Deriva les funcions trigonomètriques inverses següents:

a) $f(x) = \arcsin x^2$

b) $f(x) = \arccos (2x - 1)^2$

c) $f(x) = \text{arc tg} \sqrt{x}$

d) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x-1}$

e) $f(x) = \arccos e^{2x}$

f) $f(x) = \text{arc tg} \ln x$

a) $f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

b) $f'(x)=\frac{-4(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^4}}$

c) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}$

d) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(x-1)^2}}}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}$

e) $f'(x)=\frac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$

f) $f'(x)=\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$

102. Calcula les derivades de les funcions següents:

a) $f(x) = (x^2 + 1)^{3x}$

b) $f(x)\ x^{3x2\ 7x\ 1}$

c) $f(x) = (3x^2 + 1)^{\ln x}$

d) $f(x) = \sin^x x^2$

e) $f(x) = \cos^{3x} 2x$

f) $f(x) = \left(\sqrt[4]{-x^3 - 15}\right)^{x^2}$

g) $f(x) = (-x^{10} + 3x^5 - 1)^{\sin x}$

h) $f(x) = e^{-5x3+\ 4x\ -\ 1}$

a) $\ln f(x) = 3x \ln\left(x^2+1\right)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=3\ln\left(x^2+1\right)+\frac{6x^2}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \left(3\ln(x^2+1) + \frac{6x^2}{x^2+1}\right)(x^2+1)^{3x}$$

b) $\ln f(x) = (3x^2 - 7x - 1)\ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (6x-7)\ln x + \frac{3x^2-7x-1}{x}$$

$$f'(x) = \left((6x-7)\ln x + \frac{3x^2-7x-1}{x}\right)x^{3x^2-7x-1}$$

c) $\ln f(x) = \ln x \ln(3x^2 + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln(3x^2+1)}{x} + \ln x \cdot \frac{6x}{3x^2+1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(3x^2+1)}{x} + \frac{6x\ln x}{3x^2+1}\right)(3x^2+1)^{\ln x}$$

d) $\ln f(x) = x\ln(sin\ x^2)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(sin\ x^2) + \frac{2x^2\ cos\ x^2}{sin\ x^2}$$

$$f'(x) = \left[\ln(sinx^2) + \frac{2x^2\cos x^2}{sinx^2}\right]sin^x x^2$$

e) $\ln f(x) = 3x\ln(cos\ 2x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\ln(cos\ 2x) + 6x\frac{sin\ 2x}{cos\ 2x}$$

$$f'(x) = \left[3\ln(cos\ 2x) + 6x\frac{sin\ 2x}{cos\ 2x}\right]cos^{3x}2x$$

f) $\ln f(x) = \frac{x^2}{5}\ln(-x^3 - 15)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{5}\ln(-x^3-15) + \frac{3x^4}{5(x^3+15)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{5}\ln(-x^3-15) + \frac{3x^4}{5(x^3+15)}\right)\left(\sqrt[5]{-x^3-15}\right)^{x^2}$$

g) $\ln f(x) = sin\ x\ln(-x^{10} + 3x^5 - 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = cos\ x\ln(-x^{10}+3x^5-1) + \frac{(-10x^9+15x^4)sin\ x}{-x^{10}+3x^5-1}$$

$$f'(x) = \left(cos\ x\ln(-x^{10}+3x^5-1) + \frac{(-10x^9+15x^4)sin\ x}{-x^{10}+3x^5-1}\right)(-x^{10}+3x^5-1)^{sin\ x}$$

h) $\ln f(x) = -5x^3 + 4x - 1$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -15x^2 + 4$$

$$f'(x) = \left(-15x^2 + 4\right)e^{-5x^3+4x-1}$$

103. Calcula a, b i c en la funció *f*(x) = ax² + bx + c, sabent que la seva gràfica passa per (0, –3) i (2, 5), i la recta tangent en x = –1 és horitzontal.

$f(0) = c = -3$ $\qquad f(2) = 4a + 2b + c = 5$

$f'(x) = 2ax + b$ $\qquad f'(-1) = -2a + b$

$$\left.\begin{array}{r} c=-3 \\ 4a+2b+c=5 \\ -2a+b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a=1,\ b=2,\ c=-3$$

104. Determina quina és l'equació d'una paràbola que passa pel punt (0, 9) i en el punt (2, 9) té com a recta tangent y – 6x + 3 = 0?

Sigui f(x) = ax^2 + bx + c.

Com que la paràbola passa pel punt (0, 9) → c = 9

I com que també passa pel punt (2, 9) → 4a + 2b + 9 = 9 → 4a + 2b = 0 → b = –2a

Així, resulta que: *f*(x) = ax^2 – 2ax + 9 → *f'*(x) = 2ax – 2a

Si y = 6x – 3 és la tangent en el punt x = 2, aleshores:

f'(2) = 6 → 4a – 2a = 6 → a = 3

L'equació de la paràbola és: *f*(x) = 3x^2 – 6x + 9

105. Calcula els valors de a, b i c perquè la funció *f*(x) = x³ + ax² + bx + c passi per l'origen de coordenades, la seva recta tangent en x = 1 tingui pendent 3 i la segona derivada en x = –1 sigui nul·la.

$f(0) = c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad f'(1) = 3 + 2a + b = 3$

$f''(x) = 6x + 2a$ $\qquad f''(-1) = -6 + 2a = 0$

$$\left.\begin{array}{r} c=0 \\ 3+2a+b=3 \\ -6+2a=0 \end{array}\right\} \rightarrow a=3, b=-6, c=0$$

106. Determina els valors de a, b i c perquè la funció *f*(x) = x³ + ax² + bx + c passi per (3, 0) i les rectes tangents a la seva gràfica en x = 2 i x = 4 siguin paral·leles a l'eix X.

$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad f'(2) = 12 + 4a + b = 0$ $\qquad f'(4) = 48 + 8a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r}27+9a+3b+c=0\\12+4a+b=0\\48+8a+b=0\end{array}\right\}\rightarrow a=-9, b=24, c=-18$$

107. Troba a, b i c en la funció *f*(x) = ax^4 + bx + c, sabent que la seva gràfica passa per (1, –1), la recta tangent en x = 1 és horitzontal i la recta tangent en x = 0 és paral·lela a la recta y = 4x.

$f(1)=a+b+c=-1$

$f'(x)=4ax^3+b \qquad f'(1)=4a+b=0$

El pendent de la recta $y = 4x$ és 4, aleshores:

$f'(0)=b=4$

$$\left.\begin{array}{r}a+b+c=-1\\4a+cb=0\\b=4\end{array}\right\}\rightarrow a=-1, b=4, c=-4$$

108. Determina els valors de a, b i c perquè la funció *f*(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c passi per (1, 6) i les rectes tangents a la gràfica en x = 1 i x = 2 siguin horitzontals.

$f(1)=2+a+b+c=6$

$f'(x)=6x^2+2ax+b \qquad f'(1)=6+2a+b=0 \qquad f'(2)=24+4a+b=0$

$$\left.\begin{array}{r}2+a+b+c=6\\6+2a+b=0\\24+4a+b=0\end{array}\right\}\rightarrow a=-9, b=12, c=1$$

109. Justifica si existeix algun punt en el qual la tangent a la gràfica de la corba *f*(x) sigui horitzontal.

a) $f(x)=\frac{x-2}{x-3}$ **c)** $f(x)=\frac{3x}{x-3}$

b) $f(x)=\frac{x^2-2}{x-3}$ **d)** $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$

a) $f'(x)=-\frac{1}{(x-3)^2}\neq 0$

c) $f'(x)=-\frac{9}{(x-3)^2}\neq 0$

b) $f'(x)=\frac{x^2-6x+2}{(x-3)^2}=0\rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{28}}{2}\rightarrow x_1=3+\sqrt{7}, x_2=3-\sqrt{7}$

d) $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow x=\pm 1$

110. Indica si alguna de les rectes tangents de les funcions següents són paral·leles a la recta r: y – 2x + 3 = 0.

a) ***f*(x) = x^3 – x + 7** **c)** ***f*(x) = ln x^2**

b) ***f*(x) = x^2 + 4x + 3** **d)** ***f*(x) =** $\frac{1}{x+3}$

El pendent de la recta *r* és 2. Per tant, perquè una recta tangent a $f(x)$ sigui paral·lela a *r* hem de trobar la solució de l'equació $f'(x) = 2$.

a) $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2 \rightarrow x = \pm 1$

c) $f'(x) = \frac{2}{x} = 2 \rightarrow x = 1$

b) $f'(x) = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1$

d) $f'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2} = 2 \rightarrow \text{Sense solució.}$

111. Determina en cada cas els punts en els quals la tangent a la corba *f*(x) és paral·lela a la bisectriu dels quadrants primer i tercer.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

d) $f(x) = x \ln x$

La bisectriu del primer i tercer quadrants compleix amb l'equació $y = x$ i el seu pendent és 1, per tant $f'(x) = 1$.

a) $f'(x) = 2x - 3 = 1 \rightarrow x = 2$

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x = 1 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$

b) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

d) $f'(x) = \ln x + 1 = 1 \rightarrow x = 1$

112. Troba en cada cas els punts en els quals la tangent a la corba *f* (x) és paral·lela a la bisectriu dels quadrants segon i quart.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$

La bisectriu dels quadrants segon i quart compleix l'equació $y = -x$ i el seu pendent és –1, per tant $f'(x) = -1$.

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \rightarrow x = \pm 1$

c) $f'(x) = 6x^2 - 6x = -1 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

b) $f'(x) = 3x^2 + 4x = -1 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, \ x_2 = -1$

d) $f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} = -1 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

113. Considera la funció *f*(x) = ln x. Calcula els punts de la corba en els quals la recta tangent té el mateix pendent que les rectes següents:

a) r: y – x = 2

c) t: y + x – 1 = 0

b) s: 4y = 3 – x

d) u: 2y – x = –4

$f'(x) = \frac{1}{x}$

a) $r: y - x = 2 \rightarrow y = x + 2 \rightarrow$ El pendent de la recta *r* és 1.

$\frac{1}{x} = 1 \rightarrow x = 1$

b) $s: 4y = 3 - x \rightarrow y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x \rightarrow$ El pendent de la recta *s* és $-\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{x} = -\frac{1}{4} \rightarrow x = -4$

c) $t: y + x - 1 = 0 \rightarrow y = -x + 1 \rightarrow$ El pendent de la recta *t* és –1.

$\frac{1}{x}=-1\rightarrow x=-1$

d) $u: 2y-x=-4\rightarrow y=-2+\frac{1}{2}x\rightarrow$ El pendent de la recta u és $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\rightarrow x=2$

114. Considera la funció $f(x)=\frac{2}{x+3}$

a) Escriu les equacions de les rectes tangents a la gràfica de la funció el pendent de les quals sigui $-\frac{1}{2}$.

b) Indica si la gràfica de $f(x)$ és tangent en algun punt a la recta y + 2x + 2 = 0. Digues si aquest punt és únic.

$f'(x)=-\frac{2}{(x+3)^2}$

a) $-\frac{2}{(x+3)^2}=-\frac{1}{2}\rightarrow x^2+6x+5=0\rightarrow x_1=-1, x_2=-5$

$f(-1)=1 \qquad y-1=-\frac{1}{2}(x+1)\rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$f(-5)=-1 \qquad y+1=-\frac{1}{2}(x+5)\rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

b) $y+2x+2=0\rightarrow y=-2x-2\rightarrow$ El pendent de la recta és –2.

$-\frac{2}{(x+3)^2}=-2\rightarrow(x+3)^2=1\rightarrow x_1=-4, x_2=-2$

Existeixen dos punts on la gràfica és tangent a la recta $y+2x+2=0$.

115. La recta que té d'equació y = 9x – 14 és tangent a la funció y = x^3 – 3x + k. Determina en quin punt són tangents i troba el valor de k.

Hi ha una sola solució? La funció té dos punts en els quals la tangent és horitzontal. Calcula'ls i escriu l'equació d'aquestes rectes.

$f'(x) = 3x^2 – 3$.

Quan la recta és tangent: $3x^2 - 3 = 9 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x=\pm2$

Si x = 2 → y – (2 + k) = 9(x – 2) → y = 9x – 16 + k → k = 2

Si x = –2 → y – (–2 + k) = 9(x + 2) → y = 9x + 16 + k → k = –2

Així, resulta que hi ha dues solucions

Quan la tangent és horitzontal, es compleix que: $3x^2 – 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm1$

Si x = 1 → y – (–2 + k) = 0·(x – 1) → y = – 2 + k

Si x = –1 → y – (2 + k) = 0·(x + 1) → y = 2 + k

116. **Indica en quines de les parelles de funcions següents les seves gràfiques són tangents en algun punt:**

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$
$g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = e^x$
$g(x) = x$

c) $f(x) = \ln x$
$g(x) = x - 1$

d) $f(x) = \cos x$
$g(x) = x^2 + 1$

a) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x+3 \\ g'(x) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 2x+3 = 3 \rightarrow x = 0$

A més, $f(0) = g(0) = 2$.

Les seves gràfiques són tangents en el punt $x = 0$.

b) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = e^x \\ g'(x) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

Com que $f(0) = 1 \neq g(0) = 0$.

Les seves gràfiques no són tangents a cap punt.

c) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{x} = 1 \rightarrow x = 1$

A més, $f(1) = g(1) = 0$.

Les seves gràfiques són tangents al punt $x = 1$.

d) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = -\sin x \\ g'(x) = 2x \end{array}\right\} \rightarrow -\sin x = 2x \rightarrow x = 0$

A més, $f(0) = g(0) = 1$.

Les seves gràfiques són tangents al punt $x = 0$.

117. **Calcula l'expressió algèbrica d'una funció que passa per (2, 5) sabent que la seva derivada és:**

$$f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

Si $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + k$

Com que la funció passa pel punt (2, 5) $\rightarrow f(2)=5$

$\frac{2}{3} \cdot 8 + 12 - 6 + k = 5 \rightarrow k = -\frac{19}{3}$

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{19}{3}$

118. **La recta tangent a una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és $y = 5x - 7$. Calcula el valor de la funció i de la seva derivada en el punt d'abscissa 2.**

La de la recta és 5, per tant $f'(2) = 5$.

Com que la recta és tangent a f en $x = 2 \rightarrow f(2) = 5 \cdot 2 - 7 = 3$

119. **La recta $y = ax + b$ passa per (1, 6) i (2, 8) i és tangent a la corba $g(x)$ en $x = 0$. Calcula el valor de $g(0)$ i $g'(0)$.**

$\left.\begin{array}{l} 6 = a+b \\ 8 = 2a+b \end{array}\right\} \rightarrow a = 2, b = 4$

L'equació de la recta és $y = 2x + 4$.

$g(0) = y(0) = 4$ $\qquad$ $g'(0) = y'(0) = 2$

120. **La funció derivada d'una paràbola és una recta que passa pels punts $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ i $\left(-1, -\frac{11}{2}\right)$.**

Calcula l'abscissa del vèrtex d'aquesta paràbola.

Atès que l'equació d'una paràbola és y = $ax^2 + bx + c$, la seva derivada és y' = 2ax + b.

L'equació de la recta que passa pels punts és:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-6} \rightarrow = 3x - \frac{5}{2}$$

Igualem coeficients, resultant:

$2ax = 3x \longrightarrow a = \frac{3}{2}$

$b = -\frac{5}{2}$

L'abscissa del vèrtex és $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \dfrac{5}{6}$

121. **Si tracem la recta tangent i la normal a la funció *f*(x) = $x^3 - 12x^2 + 42x - 40$, en el punt (3, 5) es forma, amb els semieixos positius de coordenades, un quadrilàter. Determina'n l'àrea.**

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 42$

$f'(3) = -3$

L'equació de la recta tangent en (3, 5) és:

$y - 5 = -3(x - 3) \rightarrow y = -3x + 14$

I l'equació de la recta normal és:

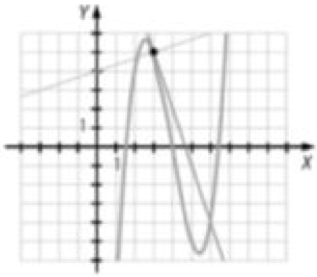
$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 4$

El quadrilàter té els vèrtex: (0, 0), (0, 4), (3, 5) i $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$.

Per calcular la seva àrea el descomponem en tres parts:

- El rectangle de vèrtex: (0, 0), (4, 0), (3, 4) i (3, 0) i la seva mida és 14 u^2.
- El triangle de vèrtex: (4, 0), (3, 4) i (3, 5) i la seva mida és $\frac{3}{2}$ u^2.
- El triangle de vèrtex: (3, 5), (3, 0) i $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$ i la seva mida és $\frac{25}{6}$ u^2.

Així doncs l'àrea del quadrilàter és: $12 + \frac{3}{2} + \frac{25}{6} = \frac{53}{3}$ u^2.



122. **Considera la corba $f_1(x) = \sqrt{5-x}$ i la recta d'equació $f_2(x) = ax$. Calcula el valor de a perquè la recta tangent a $f_1(x)$ sigui:**

a) Perpendicular a $f_2(x)$ en x = 1.

b) Paral·lela a $f_2(x)$ en x = –4.

$f_1'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$ $\quad f_2'(x) = a$

a) $f_1'(1) = -\dfrac{1}{4}$ $\quad f_1(1) = 2$ $\quad y-2 = -\dfrac{1}{4}(x-1) \rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4} \rightarrow -\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{a} \rightarrow a = 4$

b) $f_1'(-4) = -\dfrac{1}{6}$ $\quad f_1(-4) = 3$ $\quad y-3 = -\dfrac{1}{6}(x+4) \rightarrow y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{3} \rightarrow a = -\dfrac{1}{6}$

123. **Determina quant ha de valer a perquè la funció $f(x) = x \ln x - ax$ tingui, en el punt d'abscissa e, una recta tangent paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.**

La bisectriu del primer quadrant és y = x

Aquesta recta i la recta tangent són paral·leles si els seus pendents són iguals.

El pendent de la recta tangent a la funció, a x = e és:

$f'(x) = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} - a = \ln x + 1 - a \rightarrow f'(e) = 2 - a$

Aleshores, tenim que: 2 – a = 1 → a = 1

124. **Considera la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 20$. Escriu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa x = 4.**

Considerem l'arrel positiva: $y = \sqrt{20 - x^2}$

$y'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{20-x^2}}$ $\quad y(4) = 2$ $\quad y'(4) = -2$

$y - 2 = -2(x-4) \rightarrow y = -2x + 10$

125. **Considera la funció $f(x) = x^2 - 4x + 6$.**

a) Calcula les equacions de les rectes tangents a la seva gràfica paral·leles a les bisectrius dels quadrants.

b) Calcula el punt de tall entre elles i el de cada una amb l'eix de coordenades X.

c) Calcula l'àrea del triangle que té de vèrtexs els punts que has trobat abans.

a) $f'(x) = 2x - 4$

La bisectriu dels quadrants primer i tercer és $y = x$ i té pendent 1.

$2x-4=1 \to x=\frac{5}{2}$ $\qquad f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{9}{4}$

Anomenem *r* a la recta paral·lela a la bisectriu dels quadrants primer i tercer:

$r: y-\frac{9}{4}=x-\frac{5}{2} \to y=x-\frac{1}{4}$

La bisectriu dels quadrants segon i quart és $y = -x$ i té pendent -1.

$2x-4=-1 \to x=\frac{3}{2}$ $\qquad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

Anomenem *s* a la recta paral·lela a la bisectriu dels quadrants segon i quart:

$s: y-\frac{9}{4}=-\left(x-\frac{3}{2}\right) \to y=-x+\frac{15}{4}$

b) El punt de tall entre les dues rectes, *r* i *s*, és:

$$\left.\begin{aligned} y&=x-\frac{1}{4} \\ y&=-x+\frac{15}{4}\end{aligned}\right\} \to x=2,\ y=\frac{7}{4} \to P\left(2,\frac{7}{4}\right)$$

El punt de tall de la recta *r* amb l'eix *X* és: $y=0=x-\frac{1}{4} \to x=\frac{1}{4} \to P\left(\frac{1}{4},0\right)$

El punt de tall de la recta *s* amb l'eix *X* és: $y=0=-x+\frac{15}{4} \to x=\frac{15}{4} \to P\left(\frac{15}{4},0\right)$

c) La base mesura $\frac{15}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{2}$ i la altura mesura 2. $\qquad \grave{A}rea_T=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{7}{2}\ \mathrm{u}^2$

126. Considera la funció *f*(x) = x³ + 3x² + 4.

a) Calcula els punts en els quals la gràfica de la funció té recta tangent horitzontal.

b) Escriu l'equació de la recta que passa per aquests punts.

c) Calcula els punts de la corba que tenen per recta tangent una paral·lela a aquesta recta.

a) $f'(x)=3x^2+6x=0 \to x_1=0,\ x_2=-2$ $\qquad f(0)=4$ $\qquad f(-2)=8$

Els punts són (0, 4) i (-2, 8).

b) Si l'equació de la recta és del tipus $y = mx + n$, tenim:

$$\left.\begin{aligned} 4&=n \\ 8&=-2m+n\end{aligned}\right\} \to m=-2,\ n=4$$

L'equació de la recta és: $y = -2x + 4$

c) El pendent de la recta és -2: $f'(x)=3x^2+6x=-2 \to x_1=-1+\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

127. Considera la funció $f(x)=\frac{2x-9}{x-3}$

a) Calcula els punts de tall d'aquesta funció amb els eixos de coordenades.

b) Escriu l'equació de la recta tangent a la corba en cadascun d'aquests punts.

c) Troba l'àrea dels triangles que determinen aquestes rectes amb els eixos de coordenades.

$$f'(x)=\frac{3}{(x-3)^2}$$

a) Tall amb l'eix *X*: $\frac{2x-9}{x-3}=0 \rightarrow x=\frac{9}{2}$ Tall amb l'eix *Y*: $\frac{2\cdot 0-9}{0-3}=3$

b) $f'\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{4}{3}$ $y=\frac{4}{3}x-6$ $f'(0)=\frac{1}{3}$ $y=\frac{1}{3}x+3$

c) Calculem els punts de tall amb els eixos de la recta $y=\frac{4}{3}x-6$:

Tall amb l'eix *Y*: $x=0 \rightarrow y=-6$ Tall amb l'eix *X*: $y=0 \rightarrow x=\frac{9}{2}$

Àrea del triangle que formen: $A_T=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{9\cdot 6}{4}=\frac{27}{2}$ u^2

Calculem els punts de tall amb els eixos de la recta $y=\frac{1}{3}x+3$:

Tall amb l'eix *Y*: $x=0 \rightarrow y=3$ Tall amb l'eix *X*: $y=0 \rightarrow x=-9$

Àrea del triangle que formen: $A_T=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{3\cdot 9}{2}=\frac{27}{2}$ u^2

128. Llancem verticalment una pilota cap amunt amb una velocitat inicial de 49 m/s des de la part superior d'un edifici de 39 m d'altura. L'altura de la pilota *h*(t) sobre el terra després de t segons està determinada per *h*(t) = 39 + 49t – 4,9t^2. Calcula la velocitat mitjana de la pilota en cadascun dels intervals següents:

a) [0, 1] b) [4, 6] c) [11, 13]

Què podem deduir sobre el moviment de la pilota?

a) $\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=\frac{83,1-39}{1}=44,1$ m/s b) $\frac{h(6)-h(4)}{6-4}=\frac{156,6-156,6}{2}=0$ m/s c) $\frac{h(13)-h(11)}{13-11}=\frac{0-0}{2}=0$ m/s

En el primer interval la pilota es troba pujant i, per tant, la velocitat mitjana és positiva; en el segon interval la pilota recorre el mateix tram cap amunt i cap avall; en l'últim interval la pilota es troba a terra i no es mou, amb velocitat mitjana zero.

129. L'espai que recorre un objecte, en metres i en un temps t, s'expressa amb aquesta fórmula:

***e*(t) = 4t^2 + 2t + 1**

a) Quin espai ha recorregut al cap de 4 segons? I al cap de 7 segons?

b) Quina és la velocitat mitjana que ha mantingut entre els 4 i els 7 segons?

a) Als 4 segons: e = 73 m Als 7 segons: e = 211 m

b) T.V.M.([4, 7]) = $\frac{211-73}{7-4}$ = 46 m/s

130. L'espai, en metres, que recorre un mòbil considerant el temps, en segons, està descrit per l'expressió:

$e(t) = \frac{2}{3}t^2 + t$

Calcula la velocitat instantània del mòbil al cap de 3 segons.

$f'(t) = \frac{4}{3}t + 1 \rightarrow f'(3) = 5$

La velocitat instantània del mòbil als 3 segons és de 5 m/s.

AMPLIA

131. Escull la resposta adequada.

La inclinació més gran de la funció $f(x) = \sin x$ en un dels seus punts és:	1	2	3	4	$\frac{\pi}{2}$
La recta tangent a $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ en (1, 0), a més de tocar la corba en (1, 0), també la talla en:	(0, 1)	(−1, −4)	(2, 1)	(3, 10)	(−2, −11)
Quina de les rectes següents és tangent a $f(x) = x^2 - 3x + 1$?	$y = x + 1$	$y = 2x + 3$	$y = 3x - 8$	$y = -3x$	$y = 3x - 1$
Si $f(x) = \frac{1}{x}$ aleshores la derivada n-èsima de la funció és:	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$	$-\frac{n!}{x^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$

□ $f'(x) = \cos x$ Es defineix entre els valors -1 i 1, per tant la inclinació més gran de la funció és 1.

□ $f'(x) = 3x^2 - 4x$ $f'(1) = -1$ La recta tangent és: $y = -(x-1) = -x + 1$

$x^3 - 2x^2 + 1 = -x + 1 \rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ Talla també en el punt (0, 1).

□ $f'(x) = 2x - 3 = 3 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 1$ $y - 1 = 3(x-3) \rightarrow y = 3x - 8$

La recta tangent és $y = 3x - 8$.

□ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$ $f^{iv}(x) = \frac{24}{x^5}$

Per tant: $f^n(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$

132. Calcula l'expressió algèbrica d'una funció que passa per (2, 5) sabent que la seva derivada és: $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$

Si $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + k$

Atès que la funció passa pel punt (2, 5) $\rightarrow f(2) = 5$

$\frac{2}{3} \cdot 8 + 12 - 6 + k = 5 \rightarrow k = -\frac{19}{3}$

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{19}{3}$

133. Si f (x) i g(x) són funcions inverses, és a dir, $(g \circ f)(x) = x$, es verifica que $(g' \circ f')(x) = x$?

No es verifica. Si es consideren les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$, s'obté que són inverses atès que compleixen que: $(g \circ f)(x) = x$

No obstant això, tenim que: $(g' \circ f')(x) = g'(f'(x)) = g'(3x^2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3x^2)^2}} = \frac{1}{3x\sqrt[3]{9x}} \neq x$

Per tant $f'(x)$ i $g'(x)$ no són funcions inverses.

134. Considera $f(x) = arc\ tg\frac{\sin x}{1+\cos x}$. Estudia si *f*(x) i *f'*(x) són constants.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2}\cdot\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2+\sin^2 x} = \frac{\cos x+1}{1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x} =$$

$$\frac{\cos x+1}{2\cos x+2} = \frac{1}{2}$$

Atès que f'(x) és constant i no nul·la, la funció f(x) no és constant.

135. Verifica que si un polinomi té una arrel doble, també ho és de la seva derivada.

Resol l'equació $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$ sabent que una de les seves arrels és doble.

Si un polinomi té una arrel doble a, aleshores: $f(x) = (x - a)^2 \cdot p(x)$

$f'(x) = 2(x - a) \cdot p(x) + (x - a)^2 \cdot p'(x) = (x - a)[2p(x) + (x - a) \cdot p'(x)]$

Per tant, a també és una arrel de la derivada.

Sigui $f(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$

Com que $f'(x) = 36x^2 - 32x + 7$, tenim que: $36x^2 - 32x + 7 = 0 \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{18} \end{cases}$

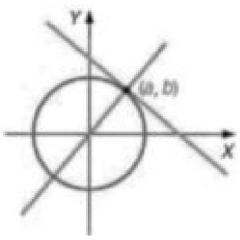
I atès que una de les arrels és doble coincideix amb una de les anteriors:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (12x^2 - 10x + 2)$

$12x^2 - 10x + 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{matrix}$

Les solucions de l'equació són: $\frac{1}{2}$ doble i $\frac{1}{3}$.

136. Demostra que la recta tangent a una circumferència en un punt és perpendicular al radi de la circumferència en aquest punt.



Sigui una circumferència amb centre a l'origen de coordenades, i de radi r: $x^2 + y^2 = r^2$

Si $y = \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow y' = \frac{-2}{2\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

Aleshores, l'equació de la recta tangent en un punt (a,b) és: $y - a = -\frac{a}{b}(x - a)$

La recta determinada pel radi de la circumferència que passa per aquest punt és:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\rightarrow y=\frac{b}{a}x$$

Les rectes són perpendiculars atès que: $\frac{b}{a}=-\frac{1}{-\frac{a}{b}}$

137. **Demostra que una funció que no és contínua en un punt no pot ser derivable en aquest punt.**

Sigui una funció $f(x)$ que no és contínua en $x = x_0$. $\rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Si la funció és derivable en $x = x_0$, aleshores, existeix el límit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l\rightarrow \lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=l\cdot \lim_{h\to 0} h\rightarrow \lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=0\rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0} f(x_0)$$

Això no és cert perquè la funció no és contínua en $x = x_0$, i la funció no pot ser derivable en aquest punt.

138. **Per calcular la derivada de la funció implícita has de suposar que y és una funció derivable respecte de x i aplicar la regla de la cadena.**

Utilitza aquesta tècnica per calcular la derivada de les funcions implícites que tens a continuació:

a) $y^3 - 2xy^2 = 3x^3y$

b) $3xy + y^3 = 2x$

a) $3y^2y' - 2y^2 - 2x2yy' = 9x^2y + 3x^3y'$

$y'(3y^2 - 4xy - 3x^3) = 9x^2y + 2y^2$

$$y'=\frac{9x^2y+2y^2}{3y^2-4xy-3x^3}$$

b) $3y + 3xy' + 3y^2y' = 2$

$y'(3x + 3y^2) = 2 - 3y$

$$y'=\frac{2-3y}{3x+3y^2}$$

139. **Demostra que l'equació de la recta tangent a la corba $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, en què a és un nombre real positiu, en el punt P (x_0, y0), es pot escriure de la manera següent:**

$$\frac{x}{x_0^{\frac{1}{2}}}+\frac{y}{y_0^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}$$

Derivem implícitament:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=0\rightarrow y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{y} \qquad y'(x_0)=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$$

Calculem la recta tangent que passa pel punt $P(x_0, y_0)$:

$$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)\rightarrow \frac{y-y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{x-x_0}{\sqrt{x_0}}=0\rightarrow \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{y}{y^{\frac{1}{2}}}=\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}$$

Comprovem que $\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}=a^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}=\frac{y_0\sqrt{x_0}+x_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0y_0}}=\frac{\left(y_0\sqrt{x_0}+x_0\sqrt{y_0}\right)\sqrt{x_0y_0}}{x_0y_0}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=a^{\frac{1}{2}}$$

MATEMÀTIQUES A LA TEVA VIDA

1. **Què és el cost marginal de la producció del qual es parla en el text?**
   El cost marginal és la derivada del cost total de producció respecte de la producció.

2. **Explica amb quin sentit es fa servir el terme entrada en el text anterior.**
   Els insums o inputs són tots els elements necessaris per produir un bé.

3. **Per què el cost marginal de producció es pot considerar com una derivada?**
   Perquè mesura la taxa de variació del cost entre la variació de la producció.

4. **Si tenim en compte la funció de cost, quin signe et sembla que deu tenir el paràmetre a?**
   Positiu.

5. **Calcula la funció del cost marginal en l’exemple de la manufactura de medicaments si a i b són nombres reals.**
   Funció cost: $f(x) = 3ax^2 + 2bx$

6. **Quin tipus de funció és el cost marginal?**
   És una funció quadràtica amb representació del tipus paràbola còncava; considerant que en l’eix d’abscisses es representa la producció i en l’eix d’ordenades els costos.