Geometria analítica

7

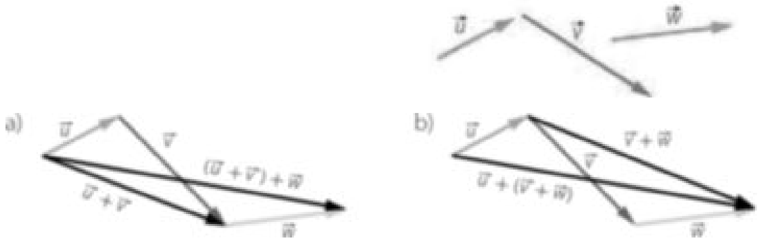
ACTIVITATS

1. **Copia aquests vectors i calcula gràficament**

$$\vec{u}+\vec{v} \text{ i } \vec{u}-\vec{v}$$

2. **Efectua aquestes sumes:**

a) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ **b)** $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

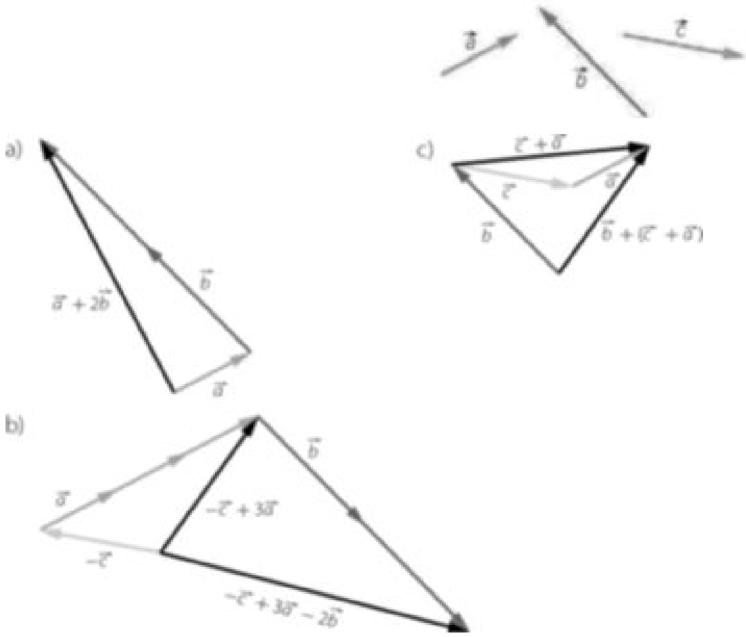


3. **Copia els vectors $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ i efectua gràficament les operacions següents:**

a) $\vec{a}+2\vec{b}$

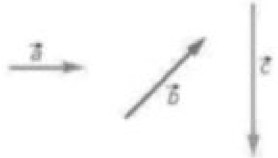
b) $-\vec{c}+3\vec{a}-2\vec{b}$

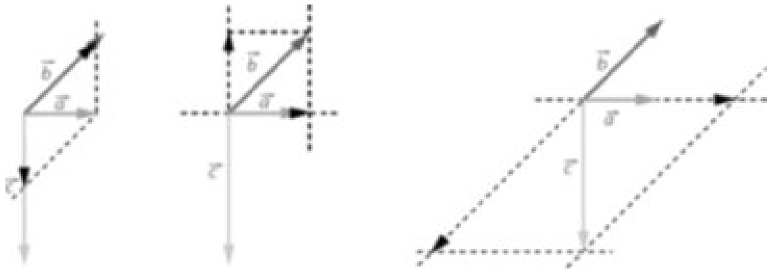
c) $\vec{b}+(\vec{c}+\vec{a})$



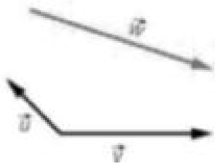
4. **Escriu el vector $\vec{a}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{b}$ i $\vec{c}$.**

   Expressa $\vec{b}$ en funció de $\vec{a}$ i $\vec{c}$, i també $\vec{c}$ en funció de $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

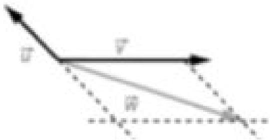




5. **Comprova que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base i expressa el vector $\vec{w}$ en funció d'aquests vectors.**



Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen direcció diferent, per la qual cosa, formen una base.

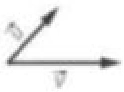


6. **Donada la base B = $\{\vec{u}, \vec{v}\}$:**

   a) Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.

   b) Comprova que $\vec{a}$ i $\vec{b}$ formen una base.

   c) Expressa $\vec{u}$ i $\vec{v}$ com a combinació lineal de $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



a)

b) Els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tenen direcció diferent, així doncs, formen una base.

c) $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}$; $\vec{v} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2}$

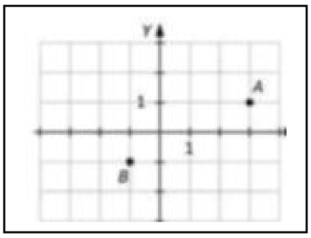
7. Dibuixa els punts A(3, 1) i B(–1, –1), i calcula les coordenades dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, i els seus mòduls.

$$\overrightarrow{AB}=(-1-3,-1-1)=(-4,-2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{BA}=(3-(-1),1-(-1))=(4,2)$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$$



8. Determina x perquè aquests parells de vectors siguin paral·lels:

a) (3, 2) i (9, x) **b) (–1, 4) i (x, –2)**

a) $\frac{9}{3}=\frac{x}{2}\rightarrow x=\frac{2\cdot 9}{3}=6$

b) $\frac{-1}{x}=\frac{4}{-2}\rightarrow x=\frac{-2\cdot(-1)}{4}=\frac{1}{2}$

9. Donats els punts A(3, –1), B(–1, 2), C (0, 2) i D (–1, –2), troba els vectors següents:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ **b)** $2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$ **c)** $-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}$

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(-4,3)+(-1,4)=(-5,-1)$

b) $2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2(-3,-3)-(0,-4)=(-6,6)-(0,-4)=(-6,10)$

c) $-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}=-(1,0)+2(-4,-1)=(-1,0)+(-8,-2)=(-9,-2)$

10. Donats $\vec{u}$ = (2, –1) i $\vec{v}$ = (0, 3), efectua les operacions de vectors següents:

a) $\vec{u}-3\vec{v}$ **b)** $5\vec{u}+\vec{v}$ **c)** $-\vec{u}+2\vec{v}$

a) $\vec{u}-3\vec{v}=(2,-1)-(0,-9)=(2,8)$

b) $5\vec{u}+\vec{v}=(10,-5)+(0,3)=(10,-2)$

c) $-\vec{u}+2\vec{v}=(-2,1)+(0,6)=(-2,7)$

11. Donats $\vec{u}$ = (0, 2), $\vec{v}$ = (1, -1) i $\vec{w}$ = (0, -1), calcula.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **c)** $\vec{w}\cdot\vec{v}$ **e)** $\vec{u}\cdot(\vec{v}-2\vec{w})$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ **d)** $\vec{u}\cdot\vec{w}$ **f)** $-2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,2)\cdot(1,-1)=-2$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(0,2)\cdot\big((1,-1)+(0,-1)\big)=(0,2)\cdot(1,-2)=-4$

c) $\vec{w}\cdot\vec{v}=(0,-1)\cdot(1,-1)=1$

d) $\vec{u}\cdot\vec{w}=(0,2)\cdot(0,-1)=-2$

e) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-2\vec{w})=(0,2)\cdot\big((1,-1)-(0,-2)\big)=(0,2)\cdot(1,1)=2$

f) $-2\vec{u}\cdot 3\vec{v} = (0,-4)\cdot(3,-3) = 12$

12. **Indica quins dels vectors següents són perpendiculars entre ells i quins no ho són:**

$\vec{u}$ = (–1, 3) $\quad$ $\vec{v}$ = (12, 4) $\quad$ $\vec{w}$ = $\left(\frac{1}{3},-1\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1\cdot 12 + 3\cdot 4 = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = -1\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot(-1) = -\frac{10}{3} \neq 0$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 12\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot(-1) = 0$$

Són perpendiculars $\vec{u}$ i $\vec{v}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

13. **Calcula l'angle dels vectors següents:**

a) a = (2, -1) i b = (3, 2) $\quad$ **c) a = (–3, –1) i b = (2, 3)**

b) a = (5, 2) i b = (–1, 1) $\quad$ **d) a = (–1, 5) i b = (4, –2)**

a) $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot 3 + 2\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{3^2+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}} \rightarrow \alpha = 60,3^{\circ}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{-1\cdot 5 + 2\cdot 1}{\sqrt{5^2+2^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{58}} \rightarrow \alpha = 113,2^{\circ}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{-3\cdot 2 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{-9}{\sqrt{130}} \rightarrow \alpha = 217,9^{\circ}$

d) $\cos\alpha = \dfrac{-1\cdot 4 + 5\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+5^2}\sqrt{4^2+(-2)^2}} = \dfrac{-14}{\sqrt{520}} \rightarrow \alpha = 232,1^{\circ}$

14. **Troba tres vectors perpendiculars i tres més de paral·lels als vectors següents:**

a) $\vec{a}$ = (1, 1) $\quad$ b) $\vec{b}$ = (3, 2) $\quad$ c) $\vec{c}$ = (0, 1)

Resposta oberta.

a) $\vec{a}$ = (1, 1)

Vectors paral·lels: $(2,2), (3,3)\ i\ (4,4)$

Vectors perpendiculars: $(-1,1), (-2,2)\ i\ (-3,3)$

b) $\vec{b}$ = (3, 2)

Vectors paral·lels: $(6,4), (9,6)\ i\ (12,8)$

Vectors perpendiculars: $(2,-3), (4,-6)\ i\ (6,-9)$

c) $\vec{c}$ = (0, 1)

Vectors paral·lels: $(0,2), (0,3)\ i\ (0,4)$

Vectors perpendiculars: $(1,0), (2,0)\ i\ (3,0)$

15. Donats els punts A (–1, 3), B (5, 1) i C (0, 3), calcula la distància del punt C al punt mitjà de A i B.

Punt mitjà de A i B: $M\left(\frac{-1+5}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(2,2)$

$$d(C,M)=\left|\overrightarrow{CM}\right|=\sqrt{(2-0)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$$

16. Determina els simètrics dels punts A(2, –5) i B(–1, 3) respecte del punt C(2, –1).

$$(2,-1)=\left(\frac{2+x}{2},\frac{-5+y}{2}\right)\rightarrow x=2,\ y=3$$

El simètric respecte de *A* és $(2,3)$.

$$(2,-1)=\left(\frac{-1+x}{2},\frac{3+y}{2}\right)\rightarrow x=5,\ y=-5$$

El simètric respecte de *B* és $(5,-5)$.

17. Escriu l'equació vectorial i les paramètriques de la recta que passa pels punts A(7, 3) i B(2, 2).

$\overrightarrow{AB}=(-5,-1)$

Equació vectorial:

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}\rightarrow (x,y)=(7,3)+t(-5,-1)$

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x=7-5t \\ y=3-t \end{cases}$$

18. Determina les equacions paramètriques de la recta que té de vector director $\vec{v}$ = (-1, 0) i que passa pel punt A(3, 2).

$$\begin{cases} x=3-t \\ y=2 \end{cases}$$

19. Calcula l'equació vectorial i les paramètriques de les rectes bisectrius dels quadrants.

Bisectriu del primer i tercer quadrants.

Equació vectorial:

(x, y) = *t*(1, 1)

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$$

Bisectriu del segon i quart quadrants.

Equació vectorial:

(x, y) = t(1, -1)

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$$

20. **Troba l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt mitjà de A (3, 1) i B (5, –3), i pel punt C (0, 3).**

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\frac{3+5}{2},\frac{1-3}{2}\right)=(4,-1) \\ \overrightarrow{CM}=(4,-4) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=t\cdot 4 \\ y=3-t\cdot 4 \end{array}\right\}$$

21. **Troba l'equació contínua de la recta que passa per A(2, –1) i té la direcció del vector $\vec{d} = (2,-1)$.**

Esbrina si el punt P(3, 1) és a la recta.

Calculem l'equació contínua de la recta:

$$\frac{x-2}{x}=\frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprovem si el punt P compleix les equacions de la recta:

$$\frac{3-2}{2}=\frac{1-(-1)}{-1}=-2$$

Així, el punt P no pertany a la recta.

22. **Determina l'equació general de la recta que passa per A (0, –2) i B (4, –1).**

$$\overrightarrow{AB}=(4,1)\rightarrow\frac{x-0}{4}=\frac{y-(-2)}{1}\rightarrow\frac{x}{4}-(y+2)=0\rightarrow x-4y-8=0$$

23. **Donades les següents equacions paramètriques d'una recta, determina:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - 2t} \\ \boldsymbol{y = -3 + t} \end{cases}$$

a) L'equació contínua de la recta.

b) L'equació general de la recta.

a) $$\left.\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=-3+t \end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l} t=\frac{x-1}{-2} \\ t=y+3 \end{array}\right\}\rightarrow\frac{x-1}{-2}=y+3$$

b) $$\frac{x-1}{-2}=y+3\rightarrow-2y-6=x-1\rightarrow x+2y+5=0$$

24. **Troba l'equació punt-pendent i l'explícita de la recta que passa per A(2, –3) i té la direcció del vector $\vec{v}$ = (–2, 1).**

$$m=\frac{d_2}{d_1}=-\frac{1}{2}$$

Equació punt-pendent: $y+3=-\frac{1}{2}(x-2)$

$$y=-\frac{1}{2}x+n\to -3=-\frac{1}{2}\cdot 2+n\to n=-2$$

Equació explícita: $y=-\frac{1}{2}x-2$

25. **Calcula la recta que passa pel punt A(2, 7) i forma un angle de 60º amb l'eix d'abscisses. Explica com ho fas.**

Calculem el pendent: tg 60º = m → m = √3

Esbrina l'equació punt-pendent: $y - 7 = \sqrt{3}(x-2)$

26. **Estudia la posició relativa de les rectes r i s.**

$\boldsymbol{r}: \frac{x}{3} = y - 5$ $\qquad$ $\boldsymbol{s}: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \end{cases}$

Les equacions generals de r i s són:

$r: x-3y+15=0$ $\qquad$ $s: 3x+y-6=0$

Donat $\frac{1}{3} \neq \frac{-3}{1}$, les rectes són secants.

27. **Estudia la posició relativa de dues rectes que tenen vectors directors no proporcionals. Quina condició cal que verifiquin perquè les rectes siguin perpendiculars?**

Si els vectors directors no són proporcionals, les rectes són secants.

Sigui $\vec{d} = (d_1, d_2)$ el vector director de la recta r, i sigui $\vec{c} = (c_1, c_2)$ el vector director de la recta s.

Les rectes són perpendiculars si el producte escalar dels vectors és zero.

$$d_1\cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0 \;\to\; d_1\cdot c_1 = -d_2\cdot c_2 \to \vec{c} = (-d_2, d_1)$$

28. **Troba la distància entre el punt P(2, -1) i la recta r, que té d'equació:**

$$\boldsymbol{r}: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expressem la recta en forma general

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \to 2x+3y-8=0$$

$$d(P, r) = \frac{\left|A_{x_0} + B_{y_0} + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} u$$

29. Calcula la distància que separa la recta següent de l'orígen de coordenades:

$$r: \begin{cases} \boldsymbol{x = 3 - t} \\ \boldsymbol{y = 2 + 2t} \end{cases}$$

Expressem la recta general:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3 - t} \\ \boldsymbol{y = 2 + 2t} \end{cases} \rightarrow -x + 3 = \frac{y - 2}{2} \rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{\left|A_{x_0} + B_{y_0} + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} u$$

30. Calcula la distància entre aquestes dues rectes paral·leles:

$$\boldsymbol{r: 5x - 2y + 2 = 0} \qquad \boldsymbol{s: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5}}$$

Prenem el punt $P(0,1)$ que pertany a la recta *r*.

L'equació general de la recta *s* és $5x - 2y + 6 = 0$.

$$d(P, s) = \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}$$

31. Calcula l'angle que formen aquestes dues rectes quan es tallen:

$$\boldsymbol{r: y = x - 3} \qquad \boldsymbol{s: \frac{x-1}{-2} = y + 3}$$

$$\cos\alpha = \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \alpha = 71{,}57^\circ$$

SABER FER

32. **Indica si els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base i determina les coordenades del vector $\vec{w}$ respecte de la base en cada cas:**

a) $\vec{u} = (-1, 0), \vec{v} = (2, -3)$ *i* $\vec{w} = (3, -3)$ **b)** $\vec{u} = (3, -3), \vec{v} = (1, -4)$ i $\vec{w} = (5, -2)$

a) Formen una base, ja que $\frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-3}$.

$$(3,-3) = a(-1,0) + b(2,-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = -a + 2b \\ -3 = -3b \end{array}\right\} \rightarrow b = 1,\ a = -1 \rightarrow \vec{w} = -\vec{u} + \vec{v}$$

b) Formen una base, ja que $\frac{3}{1} \neq \frac{-3}{-4}$.

$$(5,-2) = a(3,-3) + b(1,-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 3a + b \\ -2 = -3a - 4b \end{array}\right\} \rightarrow b = -1,\ a = 2 \rightarrow \vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

33. **Si els vectors $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{CD}$ i CD són equivalents, amb A (2, 1) i B (0, -2), calcula l'extrem desconegut en aquests casos:**

a) C(–5, 7) **c) C(0, –2)** **e) C(7, –5)** **g) C(0, 0)**

b) D(–5, 7) **d) D(0, –2)** **f) D(7, –5)** **h) D(0, 0)**

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-3)$$

a) $\overrightarrow{CD} = (a+5, b-7) = (-2,-3) \rightarrow D(-7,4)$

b) $\overrightarrow{CD} = (-5-a, 7-b) = (-2,-3) \rightarrow C(-3,10)$

c) $\overrightarrow{CD} = (a, b+2) = (-2,-3) \rightarrow D(-2,-5)$

d) $\overrightarrow{CD} = (-a, -2-b) = (-2,-3) \rightarrow C(2,1)$

e) $\overrightarrow{CD} = (a-7, b+5) = (-2,-3) \rightarrow D(5,-8)$

f) $\overrightarrow{CD} = (7-a, -5-b) = (-2,-3) \rightarrow C(9,-2)$

g) $\overrightarrow{CD} = (a, b) = (-2,-3) \rightarrow D(-2,-3)$

h) $\overrightarrow{CD} = (-a, -b) = (-2,-3) \rightarrow C(2,3)$

34. **Determina les coordenades de dos vectors si saps que la suma i la diferència són:**

$\vec{u}+\vec{v}=(2,3) \qquad \vec{u}-\vec{v}=(-1,4)$

$$\vec{u}=(a,b) \qquad \vec{v}=(c,d)$$

$$\vec{u}+\vec{v}=(a+c,b+d)=(2,3) \qquad \vec{u}-\vec{v}=(a-c,b-d)=(-1,4)$$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=2 \\ a-c=-1 \end{array}\right\} \rightarrow a=\frac{1}{2},\ c=\frac{3}{2} \qquad \left.\begin{array}{l} b+d=3 \\ b-d=4 \end{array}\right\} \rightarrow b=\frac{7}{2},\ d=-\frac{1}{2}$$

35. Calcula els vectors següents:

a) Perpendicular a $\vec{u}$ = (–2, 1) i de mòdul 2.

b) Perpendicular a $\vec{u}$ = (3, 1) i de mòdul 1.

c) Perpendicular a $\vec{u}$ = (–3, 4) i de mòdul 5.

d) Perpendicular a $\vec{u}$ = (1, 1) i de mòdul 1.

a) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ = (–2, 1) és $\vec{v}=(1,2)$.

Per obtenir el vector de mòdul 2, multipliquem per 2 i dividim entre el mòdul del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{2(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ = (3, 1) és $\vec{v}=(-1,3)$.

Per obtenir el vector de mòdul 1, dividim entre el mòdul del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{(-1,3)}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

c) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ = (–3, 4) és $\vec{v}=(4,3)$.

Per obtenir el vector de mòdul 5, multipliquem per 5 i dividim entre el mòdul del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{5(4,3)}{\sqrt{4^2+3^2}}=(4,3)$$

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ = (1, 1) és $\vec{v}=(-1,1)$.

Per obtenir el vector de mòdul 1, dividim entre el mòdul del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

36. Dibuixa el quadrilàter ABCD en uns eixos de coordenades i calcula'n el perímetre; has de tenir present que les coordenades dels vèrtexs són A (–4, –3), B (2, –3), C (2, 1) i D (–2, 2).

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|(6,0)\right| = 6$ $\qquad$ $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|(-4,1)\right| = \sqrt{17}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|(0,4)\right| = 4$ $\qquad$ $\left|\overrightarrow{DA}\right| = \left|(-2,-5)\right| = \sqrt{29}$

El perímetre del quadrilàter és $P = 10 + \sqrt{17} + \sqrt{29}$.

37. Divideix el segment AB en tres parts iguals.

a) A(–2, 3) i B(0, –1) $\qquad$ **b) A(1,1) i B(3, 6)**

a) $\overrightarrow{AB} = (2,-4)$

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-2,3) + \frac{1}{3}(2,-4) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-2,3) + \frac{2}{3}(2,-4) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) $\overrightarrow{AB} = (2,5)$

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1,1) + \frac{1}{3}(2,5) = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (1,1) + \frac{2}{3}(2,5) = \left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

38. Comprova si els punts A, B i C estan alineats.

a) A(–2, 0), B(1, –1) i C(–5, –1) $\qquad$ **b) A(0, 0), B(3, –1) i C(2, –2)**

a) $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-3,-1)$

No es troben alineats ja que $\frac{3}{-3} \neq \frac{-1}{-1}$.

b) $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (2,-2)$

No es troben alineats ja que $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{-2}$.

39. Calcula l'equació de la recta que passa per O (0, 0):

a) I passa també pel punt A(–5, 2).

b) I té pendent m = –2.

a) El vector director és $\vec{d} = (-5,2)$ i passa pel punt *O*.

Equacions paramètriques $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-5t \\ y=2t \end{array}\right\}$

b) Equació punt-pendent $\rightarrow$ $y=-2x$

40. **Determina l'equació de la recta paral·lela a $r:\ 3x-y-3=0$ que passa pel punt P (0, -4).**

El vector director és $\vec{d}=(1,3)$.

Equacions paramètriques $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=-4+3t \end{array}\right\}$

41. **Determina la recta s paral·lela a r : $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{4}$ que és a 2 unitats de distància.**

L'equació de la recta *s* és $4x-3y+C=0$.

Un punt de la recta *r* és $P(1,1)$.

$$d(P,s)=\frac{|4\cdot 1-3\cdot 1+C|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|1+C|}{5}=2\rightarrow C_1=9,\ C_2=-11$$

42. **Determina l'equació de la recta perpendicular a $r: 3x-y-3=0$ que passa pel punt P (0, –4).**

El vector perpendicular al vector director de *r* és $(3,-1)$.

Equació en forma contínua $\rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y+4}{-1}$

43. **Calcula l'equació de la recta que passa per P (0, 1) i forma un angle de 45º amb $r:\ x+y-1=0$.**

Equació punt-pendent $\rightarrow$ $y-1=mx$

Equació general $\rightarrow$ $mx-y+1=0$

$$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|m\cdot 2-1\cdot 1|}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{5}}$$

$$(2m-1)^2=\frac{5}{2}(m^2+1)\rightarrow 3m^2-8m-3=0\rightarrow m_1=3,\ m_2=-\frac{1}{3}$$

Hi ha dues rectes:

$s_1: y-1=3x$ $\qquad$ $s_2: y-1=-\frac{1}{3}x$

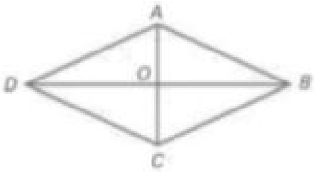
ACTIVITATS FINALS

44. **Fixa't en la figura i efectua les operacions següents:**

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ **d)** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$ **g)** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$ **e)** $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CB}$ **h)** $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$ **f)** $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}$ **i)** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$

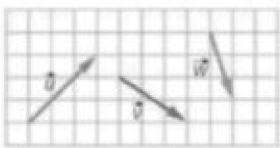


a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ g) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OD}$

b) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$ e) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}$ h) $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OD}$ f) $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$ i) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

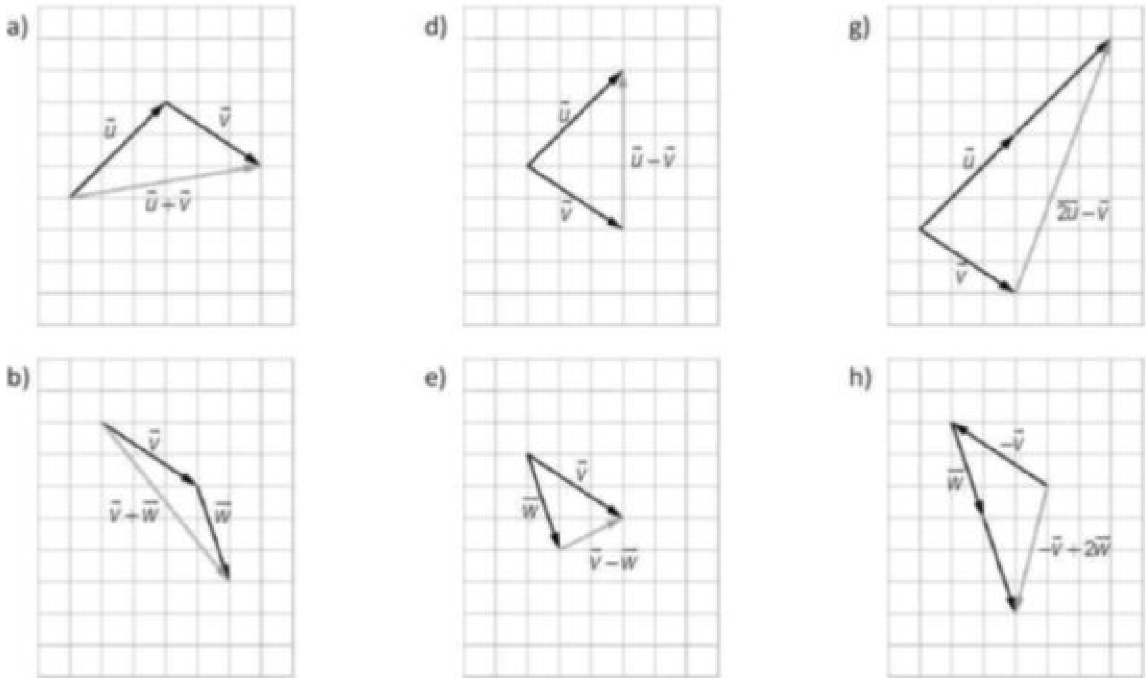
45. **Fes les operacions següents:**



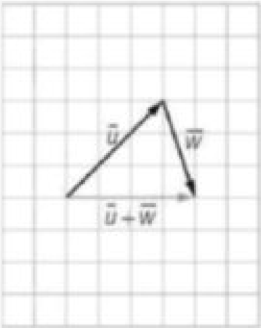
a) $\vec{u}+\vec{v}$ d) $\vec{u}-\vec{v}$ g) $2\vec{u}-\vec{v}$

b) $\vec{v}+\vec{w}$ e) $\vec{v}-\vec{w}$ h) $-\vec{v}+2\vec{w}$

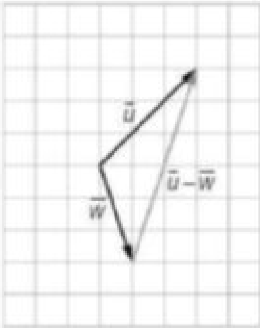
c) $\vec{u}+\vec{w}$ f) $\vec{u}-\vec{w}$ i) $-\vec{u}-2\vec{w}$



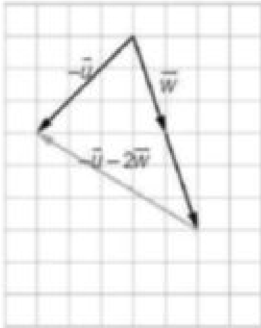
c)



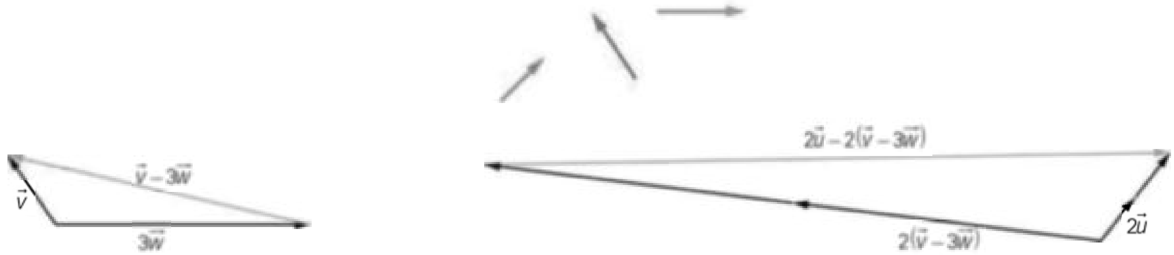
f)



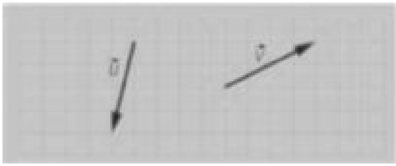
i)



46. **Donats els vectors següents, calcula gràficament $2\vec{u} - 2(\vec{v} - 3\vec{w})$.**



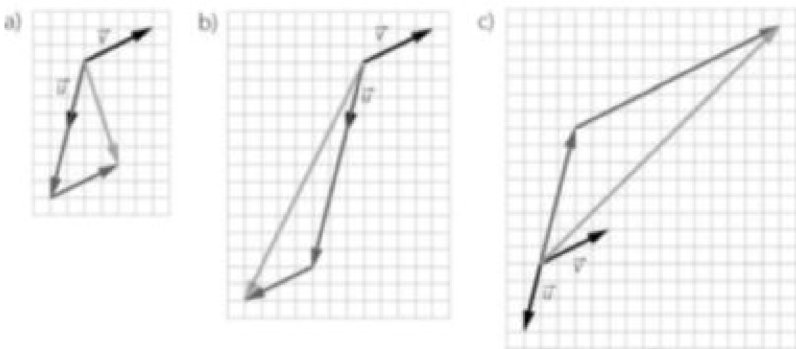
47. **Comprova que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de la figura formen una base.**



Dibuixa en aquesta base els vectors amb aquestes coordenades:

a) (2, 1) **b) (3, –1)** **c) (–2, 3)**

Com que els vectors tenen diferent direcció, formen una base.



48. **Comprova si els vectors $\vec{u}$ = (–1, –3) i $\vec{v}$ = (4, 2) formen una base i, si és així, calcula les coordenades dels vectors següents respecte de la base:**

a) $\vec{a}$ = (2, 1) **b) $\vec{b}$ = (3, –1)** **c) $\vec{c}$ = (–2, 3)**

Formen una base ja que $\frac{-1}{4} \neq \frac{-3}{2}$.

a) $(2,1) = a(-1,-3) + b(4,2)$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = -a + 4b \\ 1 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = 0,\ b = \frac{1}{2}$$

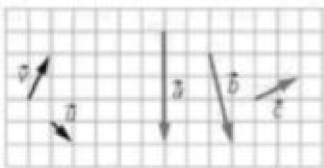
b) $(3,-1) = a(-1,-3) + b(4,2)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = -a + 4b \\ -1 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 1$$

c) $(-2,3) = a(-1,-3) + b(4,2)$

$$\left.\begin{array}{l} -2 = -a + 4b \\ 3 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = -\frac{8}{5},\ b = -\frac{9}{10}$$

49. Escriu els vectors $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$, b i c com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



Escriu les coordenades dels vectors respecte de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

$\vec{u} = (1,-1)$ $\quad$ $\vec{v} = (1,2)$ $\quad$ $\vec{a} = (0,-5)$ $\quad$ $\vec{b} = (1,-4)$ $\quad$ $\vec{c} = (2,1)$

$$(0,-5) = a(1,-1) + b(1,2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = a + b \\ -5 = -a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{5}{3},\ b = -\frac{5}{3}$$

$$(1,-4) = a(1,2) + b(1,-1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = a + b \\ -4 = -a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = 2,\ b = -1$$

$$(2,1) = a(1,2) + b(1,-1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = a + b \\ 1 = -a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 1$$

50. Expressa el vector $\vec{u}$ (7, 6) com a combinació lineal dels vectors $\vec{a}$ = (6, –3) i $\vec{b}$ = (–1, 3).

$$(7,6) = a(6,-3) + b(-1,3) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 7 = 6a - b \\ 6 = -3a + 3b \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{27}{15},\ b = \frac{19}{5}$$

51. Calcula el mòdul dels vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$ i $2\vec{b} - \vec{c}$, donats $\vec{a}$ = (–3, 4), $\vec{b}$ = (–5, –12) i $\vec{c}$ = (3, –1).

$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ $\qquad$ $\vec{a} + \vec{b} = (-8,-8)$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$ $\qquad$ $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

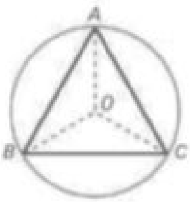
$|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ $\qquad$ $2\vec{b} - \vec{c} = (-10,-24) + (-3,1) = (-13,-23)$

$|2\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{(-13)^2 + (-23)^2} = \sqrt{698}$

52. **Calcula les coordenades del punt B perquè els vectors $\vec{u}$ i $\overrightarrow{AB}$ siguin equivalents si sabem que $\vec{u}$ = (2, –3) i A(–1, 2).**

$\overrightarrow{AB}=(x+1,y-2)=(2,-3)\rightarrow B=(1,-1)$

53. **El triangle equilàter següent està inscrit en una circumferència de 5 cm de radi.**



Calcula els productes escalars següents:

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ **b)** $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\cos\alpha=25\cdot\cos\left(-120^{\circ}\right)=-12,5$

b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\cos\alpha=25\cdot\cos120^{\circ}=-12,5$

54. **Considera que A, B, C i D són els vèrtexs d'un quadrat d'1 cm de costat. Calcula els productes escalars següents:**

a) $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}$ **c)** $\boldsymbol{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}}$

b) $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}$ d) $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}}$

Prenem el punt A com a orígen, i tenim les següents coordenades: A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1) i D(0, 1)

a) $\overrightarrow{AB}=(1,0),\overrightarrow{BC}=(0,1)$

$(1,0)\cdot(0,1)=0$

b) $\overrightarrow{AC}=(1,1),\overrightarrow{DB}=(1,-1)$

$(1,1)\cdot(1,-1)=1-1=0$

c) $\overrightarrow{AD}=(0,1),\overrightarrow{CB}=(0,-1)$

$(0,1)\cdot(0,-1)=-1$

d) $\overrightarrow{AC}=(1,1),\overrightarrow{CB}=(0,-1)$

$(1,1)\cdot(0,-1)=-1$

55. **Si $\vec{u}$ = (3, 1) i $\vec{v}$ = (2, -1), calcula.**

c) $\mathbf{\vec{u}\cdot\vec{v}}$ c) $\mathbf{(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot\vec{v}}$

d) $\mathbf{\vec{u}\cdot 2\vec{v}}$ d) $\mathbf{\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 1) \cdot (2, -1) = 6 - 1 = 5$

b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v} = (3,1) \cdot (4, -2) = 12 - 2 = 10$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v} = ((6,2) + (6, -3) \cdot (2, -1) \cdot (2, -1) = (12, -1) \cdot (2, -1) = 24 + 1 = 25$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (3,1) \cdot \big((3,1) + (-2,1)\big) = (3,1) \cdot (1,2) = 3 + 2 = 5$

56. Donats els vectors $\vec{a}$ = (2, –1), $\vec{b}$ = (–3, 1) i $\vec{c}$ = (4, 3), calcula.

a) $((\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$ **b) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c}$**

a) $\big((2,-1) - 2(-3,1)\big) \cdot (4,3) = (8,-3) \cdot (4,3) = 23$

b) $(2,-1)(-3,1) - (-3,1)(4,3) = -7 - (-9) = 2$

57. Calcula el valor de t perquè $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$, si $\vec{u}$ = (–1, 2) i $\vec{v}$ = (3, t). Troba el mòdul dels dos vectors.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$

$(-1, 2) \cdot (3, t) = 7 \rightarrow -3 + 2t = 7 \rightarrow t = 5$

$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

58. Determina un vector perpendicular a $\vec{u}$ = (–3, 2) amb mòdul 2.

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ és $\vec{v} = (2,3)$. Perquè tingui mòdul 2, multipliquem per 2 i dividim entre el mòdul de $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \frac{2(2,3)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

59. Donat el vector $\vec{p}$ = (6, 2), troba un vector $\vec{q}$ amb mòdul $\sqrt{89}$ tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (6, 2) \cdot (a, b) = 6a + 2b = 14 \rightarrow b = 7 - 3a$

$$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + (7 - 3a)^2} = \sqrt{89} \rightarrow 10a^2 - 42a - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{4}{5} \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

Si $a = -\frac{4}{5} \rightarrow b = \frac{47}{5}$

Si $a = 5 \rightarrow b = -8$

60. Calcula el valor de k perquè els vectors siguin perpendiculars.

a) $\vec{u}$ = (2, k), $\vec{v}$ = (1, –6)

b) $\vec{u}$ = ($-\frac{2}{3}$, k), $\vec{v}$ = (5, –1)

c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$, $\vec{v}$ = (k, –1)

d) $\vec{u}$ = (2, –3), $\vec{v}$ = (1, k)

a) $(2,k)\cdot(1,-6)=2-6k=0\rightarrow k=\dfrac{1}{3}$

b) $\left(-\dfrac{2}{3},k\right)\cdot(5,-1)=-\dfrac{10}{3}-k=0\rightarrow k=-\dfrac{10}{3}$

c) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{5}\right)\cdot(k,-1)=\dfrac{1}{3}k-\dfrac{2}{5}=0\rightarrow k=\dfrac{6}{5}$

d) $(2,-3)\cdot(1,k)=2-3k=0\rightarrow k=\dfrac{2}{3}$

61. **Calcula m perquè $\vec{v}$ = (7, –2) i $\vec{w}$ = (m, 6):**

a) Siguin perpendiculars.

b) Siguin paral·lels.

c) Tinguin el mateix mòdul.

a) $(7,2)\cdot(m,6)=7m+12=0\rightarrow m=-\frac{12}{7}$

b) $\frac{7}{m}\cdot\frac{-2}{6}\rightarrow m=-21$

c) $|\vec{v}|=\sqrt{7^2+(-2)^2}=\sqrt{53}$

$|\vec{w}|=m^2+6^2\rightarrow m=\sqrt{17}$

62. **Donats $\vec{a}$ = (6, –2) i $\vec{b}$ = (16, 12), calcula el valor de *m* perquè els vectors $\vec{u}$ = $m\vec{a}$ + $\vec{b}$ i $\vec{v}$ = $m\vec{a}$ – $\vec{b}$ siguin perpendiculars. Hi ha una solució única?**

$\vec{u}=m(6,-2)+(16,12)=(16+6m,12-2m)$

$\vec{v}=m(6,-2)-(16,12)=(-16+6m,-12-2m)$

Perquè els vectors siguin perpendiculars, el seu producte escalar ha de ser zero.

$(16+6m,12-2m)\cdot(-16+6m,-12-2m)=36m^2-256+4m^2-144=0$

$\rightarrow m=\pm\sqrt{10}$

La solució no és única.

63. **Calcula l'angle que formen els parells de vectors següents:**

a) $\vec{a}$ = (0, –2) i $\vec{b}$ = (–4, –3) **c) $\vec{a}$ = (–4, –3) i $\vec{b}$ = (1, 1)**

b) $\vec{a}$ = ($\frac{1}{3}$, 5) i $\vec{b}$ = (3, –1) **d) $\vec{a}$ = (1, $-\sqrt{3}$) i $\vec{b}$ = (1, $\sqrt{3}$)**

a) $\cos\alpha=\dfrac{(0,-2)\cdot(-4,-3)}{2\cdot 5}=\dfrac{3}{5}\rightarrow\alpha=306,87^{\circ}$

b) $\cos\alpha=\dfrac{\left(\dfrac{1}{3},5\right)\cdot(3,-1)}{\sqrt{\dfrac{226}{9}}\sqrt{10}}=\dfrac{-12}{\sqrt{2260}}\rightarrow\alpha=255,38^{\circ}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{(-4,-3)\cdot(1,1)}{5\sqrt{2}} = \dfrac{-7}{5\sqrt{2}} \to \alpha = 188{,}13^{\circ}$

d) $\cos\alpha = \dfrac{(1,-\sqrt{3})\cdot(1,\sqrt{3})}{2\cdot 2} = -\dfrac{1}{2} \to \alpha = 120^{\circ}$

64. Troba el valor de k perquè els vectors $\vec{a}$ = (1, k) i $\vec{b}$ = (2, –3) formin un angle de 120º.

$$\cos 120^{\circ} = -\frac{1}{2} = \frac{2-3k}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{13}} \to k = \frac{24+13\sqrt{3}}{23}$$

65. Calcula un vector a que formi un angle de 30º amb $\vec{b}$ = (3, –4) i tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\cdot|\vec{b}|$.

$$\cos 30^{\circ} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a-4b}{5\sqrt{3}+5} \to 15+5\sqrt{3} = 6a-8b$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 5\sqrt{3} \to a^2+b^2 = 75$$

El sistema es resol:

$$\begin{cases} 6a-8b = 15+5\sqrt{3} \\ a^2+b^2 = 75 \end{cases} \to a = \frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6} \to \left(\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}\right)^2 + b^2 = 75$$

$$50b^2 + 40\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)b + 75\sqrt{3} - 1200 = 0$$

$$\to b = -\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{5} \pm \sqrt{\frac{1296-27\sqrt{3}}{50}}$$

66. Determina si el triangle de vèrtexs A(12, 10), B(20, 16) i C(8, 32) és rectangle.

Calculem els vectors formats pels vèrtexs del triangle:

$\overrightarrow{AB} = (8,6)$, $\overrightarrow{BC} = (-12,16)$ i $\overrightarrow{AC} = (-4,22)$

Calculem els mòduls dels vectors:

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{64+36} = 10\,u$

$\overrightarrow{BC} = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20\,u$

$\overrightarrow{AC} = \sqrt{16+484} = \sqrt{500}\,u$

Si el triangle és rectangle, ha de verificar el teorema de Pitàgores.

$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2$

$10^2 + 20^2 = 500$

Així es comprova que el triangle és rectangle.

67. Tres dels vèrtexs d'un paral·lelogram són A(2,1), B(6, –1) i C(7, 1). Quines són les possibles coordenades de l'altre vèrtex?

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (4,-2) = (7-a, 1-b) \rightarrow D(3,3)$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \rightarrow (5,0) = (6-a, -1-b) \rightarrow D(1,-1)$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \rightarrow (5,0) = (a-6, b+1) \rightarrow D(11,-1)$

68. Donats els vectors $\vec{a}$ = (1, 5) i $\vec{b}$ = (–4, –3), calcula.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i $\vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$

c) L'angle que formen els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

d) El valor de k perquè el vector (3, k) sigui perpendicular al vector $\vec{a}$.

e) El valor de k perquè el vector (k, –1) sigui paral·lel al vector $\vec{b}$.

f) Un vector perpendicular al vector $\vec{b}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = (1,5) \cdot (-4,-3) = -19$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{26}$ $\quad |\vec{b}| = 5$

c) $\cos\alpha = \dfrac{-19}{5\sqrt{26}} \rightarrow \alpha = 138{,}18^{\circ}$

d) $(3,k) \cdot (1,5) = 3 + 5k = 0 \rightarrow k = -\dfrac{3}{5}$

e) $\dfrac{k}{-4} = \dfrac{-1}{-3} \rightarrow k = -\dfrac{4}{3}$

f) Un vector perpendicular a $\vec{b}$ és, per exemple, $\vec{c} = (3,-4)$.

69. Quines condicions han de complir els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ perquè $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$? Amb aquest resultat, demostra que si un paral·lelogram té les diagonals perpendiculars, només pot ser un quadrat o un rombe.

$\vec{u} = (a,b) \qquad \vec{v} = (c,d)$

$(a+c, b+d) \cdot (a-c, b-d) = 0 \quad \rightarrow a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

$\rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són els costats d'un paral·lelogram, $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u} - \vec{v}$ són les seves diagonals.

Per tant, si les diagonals són perpendiculars, els mòduls mesuren el mateix, així doncs únicament pot ser un quadrat o un rombe.

70. **Calcula el perímetre d'un triangle que té els vèrtexs situats en els punts A(1, 2), B(3, 2) i C(–1, 3).**

Calculem els vectors $\overrightarrow{AB} = (2{,}0)$, $\overrightarrow{BC} = (-4{,}1)$ i $\overrightarrow{CA} = (2, -1)$

Calculem el mòdul dels vectors:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

El perímetre és:

$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8{,}36\, u$

71. **Demostra que el quadrilàter format pels punts A(2, –2), B(5, 3), C(0, 6) i D(–3, 1) és un quadrat.**

Els costats $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$ són paral·lels:

$\overrightarrow{AB} = (3,5) = \overrightarrow{DC}$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{BC} = (-5,3) = \overrightarrow{AD}$

A més a més, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ són perpendiculars:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (3,5) \cdot (-5,3) = 0$

Com que tots els costats són iguals:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{34}$

Llavors és un quadrat.

72. **Demostra que el triangle de vèrtexs A(3, 1), B(9, –1) i C(5, –5) és isòsceles. També és equilàter? Quins són els costats iguals? Calcula'n l'àrea.**

Determinem els vectors formats pels vèrtexs del triangle:

$\overrightarrow{AB} = (6, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, -4)$ i $\overrightarrow{AC} = (2, -6)$

Calculem els mòduls dels vectors:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}\, u$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{40}\, u$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}\, u$

Com que el triangle té dos costats iguals, AB I AC, és un triangle isòsceles.

Per determinar l'àrea calculem l'altura, h, sobre el costat BC aplicant el teorema de Pitàgores:

h = $\sqrt{(\sqrt{40})^2 - \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2} = \sqrt{40 - 8} = \sqrt{32}\, u$

A = $\frac{B \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = 16\, u^2$

73. **Determina el punt mitjà dels segments que tenen els extrems següents:**

a) A(3, 5) i B(9, 11) **c) A(4, 5) i B(7, 1)**

b) A(–3, 1) i B(7, –4) **d) A(–6, –1) i B(–9, –3)**

M és el punt mitjà de A i B.

a) $M=\left(\frac{3+9}{2},\frac{5+11}{2}\right)=(6{,}8)$

b) $M=\left(\frac{-3+7}{2},\frac{1-4}{2}\right)=\left(2,-\frac{3}{2}\right)$

c) $M=\left(\frac{4+7}{2},\frac{5+1}{2}\right)=\left(\frac{11}{2},3\right)$

d) $M=\left(\frac{-6-9}{2},\frac{-1-3}{2}\right)=\left(-\frac{15}{2},-2\right)$

74. Si el punt mitjà del segment AB és M(3, 5), donat A(9, 7), calcula el punt B. Després, calcula A amb M(–1, 5) i B(4, –9).

Sigui B(x,y).

$$(3{,}5)=\left(\frac{9+x}{2},\frac{7+y}{2}\right)\rightarrow\begin{cases}3=\dfrac{9+x}{2}\\5=\dfrac{7+y}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$$

Sigui A(x,y).

$$(-1{,}5)=\left(\frac{4+x}{2},\frac{-9+y}{2}\right)\rightarrow\begin{cases}-1=\dfrac{4+x}{2}\\5=\dfrac{-9+y}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=-6\\y=19\end{cases}$$

75. Dos vèrtexs consecutius d'un quadrat són A(–2, 3) i B(1, –2). Si les dues diagonals es tallen en el punt O(2, 2), calcula els dos vèrtexs que falten.

$\overrightarrow{AO}=(4,-1)$ $\overrightarrow{BO}=(1,4)$

$$C=A+2\overrightarrow{AO}=(-2,3)+(8,-2)=(6,1)$$

$$D=B+\overline{2\overrightarrow{BO}}=(1,-2)+(2,8)=(3,6)$$

76. Tres vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular tenen de coordenades (0, 0), (2, 0) i (3,$\sqrt{3}$). Determina els altres tres vèrtexs.

Sabem que A($A(0{,}0), B(2{,}0)$ i $C(3,\sqrt{3})$.

Calculem el vèrtex D, amb una translació amb orígen en C i vector guia (-1, $\sqrt{3}$**):**

$$\mathrm{D}=(3,\sqrt{3})+(-1,\sqrt{3})=(2{,}2\sqrt{3})$$

Determinem el vèrtex E, amb una translació amb orígen en D i vector guia (-2,0):

$$\mathrm{E}=(2{,}2\sqrt{3})+(-2{,}0)=(0{,}2\sqrt{3})$$

Determinem el vèrtex F, amb una translació amb orígen en E i vector guia (-1,- $\sqrt{3}$):

$$\mathrm{F}=(0{,}2\sqrt{3})+(-1,-\sqrt{3})=(-1,\sqrt{3})$$

77. **Calcula les coordenades dels punts que divideixen el segment d'extrems A(5, –1) i B(17, 8) en tres parts iguals.**

Calculem el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (12{,}9)$

El primer punt estarà situat a $\frac{1}{3}$ de distància d'un dels extrems del segment, i el segon, a $\frac{2}{3}$ de distància.

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{3}(12{,}9) = (9{,}2)$$

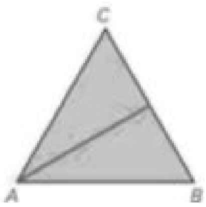
$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{2}{3}(12{,}9) = (13{,}5)$$

78. **Determina el valor de k perquè els punts A(2, –3), B(9, k) i C(6, –1) estiguin alineats.**

$\overrightarrow{AB} = (7, k+3)$ $\overrightarrow{AC} = (4, 2)$

$$\frac{7}{4} = \frac{k+3}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

79. **Calcula la longitud de la mitjana amb l'orígen a A en el triangle de vèrtexs A(–1, 4), B(6, 5) i C(10, –3). En el cas d'aquest triangle, la mitjana coincideix amb l'altura? Justifica la resposta.**



Calculem el punt mitjà, M, del segment CB:

$$M = \left(\frac{6-10}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (8{,}1)$$

Per determinar la longitud de la mitjana, determinem el mòdul del vector $\overrightarrow{AM}$:

$\overrightarrow{AM} = (9, -3)$ $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$

Perquè la mitjana, AM, coincideixi amb l'altura sobre el costat CB, els costats AC i AB han de ser iguals.

$\overrightarrow{AC} = (11, -7)$ $\overrightarrow{AB} = (7{,}1)$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{121+49} = \sqrt{170}$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Així doncs, la mitjana no coincideix amb l'altura.

80. Dos vèrtexs d'un triangle equilàter són A(3, 1) i B(5, –2). Calcula quines poden ser les coordenades del vèrtex que falta.

$\overrightarrow{AB} = (2,-3)$

La recta que passa pel tercer vèrtex, $C(c_x, c_y)$, i pel punt mitjà de *A* i *B* i té com a vector director $\vec{d} = (3,2)$. El punt mitjà del vector $\overline{AB}$ és $M\left(4,-\frac{1}{2}\right)$. Així, aquesta recta té com a equació:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+\frac{1}{2}}{2} \rightarrow 4x - 6y - 19 = 0$$

A més a més, el mòdul de $\overrightarrow{AC}$ és el mateix que el mòdul de $\overrightarrow{AB}$.

$$\sqrt{13} = \sqrt{(c_x-3)^2 + (c_y-1)^2} \rightarrow c_x^{\,2} - 6_x + c_y^{\,2} - 2c_y - 3 = 0$$

Resolem el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l} c_x = \dfrac{19+6c_y}{4} \\ c_x^{\,2} - 6c_x + c_y^{\,2} - 2c_y - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} c_x = 4 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ c_y = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \\ c_x = 4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ c_y = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \end{array}\right\}$$ Serien les possibles coordenades del punt *C*.

81. Donats els punts A(3, 0) i B(–3, 0), determina el punt C sobre l'eix de coordenades de manera que el triangle que descriguin sigui equilàter. Hi ha una solució única? Calcula l'àrea dels triangles que en resultin.

Els vectors formats pels vèrtexs han de tenir la mateixa longitud.

Si C(0,c):

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9+c^2}$ $\quad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9+c^2}$ $\qquad |\overrightarrow{AB}| = 6$

$6 = \sqrt{9+c^2} \rightarrow \sqrt{27}$

Els punts demanats són: $C_1(0,3\sqrt{3})$ i $C_2(0,-3\sqrt{3})$

Calculem l'àrea dels triangles:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\,u^2$$

82. Dos vèrtexs consecutius d'un quadrat són A(2, –4) i B(8, –2). Calcula els altres vèrtexs sabent que un dels que falten és sobre l'eix d'ordenades.

$\overrightarrow{AB} = (6,2)$ $\qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{40}$

El vèrtex *D* és sobre l'eix *Y*: $D(0,y)$

$\overrightarrow{AD} = (-2, y+4)$ $\qquad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-2)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{40} \rightarrow y^2 + 8y - 20 = 0 \rightarrow y = 2$

$$C = D + \overrightarrow{AB} = (0,2) + (6,2) = (6,4)$$

83. **Escriu les equacions vectorial, paramètrica, contínua, explícita i general de la recta que passa pel punt P(0, –3)), i té de vector director $\vec{v}$ = (3, –1).**

Equació vectorial → $(x,y)=(0,-3)+t(3,-1)$

Equació paramètrica → $\left.\begin{array}{l} x=3t \\ y=-3-t \end{array}\right\}$

Equació contínua → $\frac{x}{3}=\frac{y+3}{-1}$

Equació explícita → $y=-\frac{1}{3}x-3$

Equació general → $x+3y+9=0$

84. **Escriu les equacions vectorial, paramètrica, contínua explícita i general de la recta que passa pels punts P(–2, 3) i Q(5, 1).**

El vector director és $\vec{v}=(7,-2)$. Llavors:

Equació vectorial → $(x,y)=(-2,3)+t(7,-2)$

Equació paramètrica → $\left.\begin{array}{l} x=-2+7t \\ y=3-2t \end{array}\right\}$

Equació contínua → $\frac{x+2}{7}=\frac{y-3}{-2}$

Equació explícita → $y=-\frac{2}{7}x+\frac{17}{7}$

Equació general → $2x+7y-17=0$

85. **Determina l'equació contínua i la general de les rectes que contenen els costats del triangle de vèrtexs A(1, 4), B(–6, –5) i C(3, –1).**

- Costat 1:

El vector director és $\overrightarrow{AB}=(-7,-9)$. Llavors:

Equació contínua → $\frac{x-1}{-7}=\frac{y-4}{-9}$

Equació general → $9x-7y+19=0$

- Costat 2:

El vector director és $\overrightarrow{BC}=(9,4)$. Llavors:

Equació contínua → $\frac{x+6}{9}=\frac{y+5}{4}$

Equació general → $4x-9y-21=0$

- Costat 3:

El vector director és $\overrightarrow{CA} = (-2, 5)$

Equació contínua $\rightarrow \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{5}$

Equació general $\rightarrow 5x + 2y - 13 = 0$

86. Escriu les equacions d'aquestes rectes en les formes següents:

a) $y = -3x + 4$ **en forma paramètrica**

b) $-2x + y + 7 = 0$ **en forma contínua**

c) $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5}$ **en forma explícita**

d) $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 - t \end{cases}$ **en forma general**

a) Un punt de la recta és (0, 4) i el vector director és (1, –3) $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

b) Un punt de la recta és (0, –7) i el vector director és (1, 2) $\rightarrow x = \dfrac{y+7}{2}$

c) El pendent de la recta és $-\dfrac{5}{2}$ i l'ordenada en l'orígen és 3 $\rightarrow y = -\dfrac{5}{2}x + 3$

d) Un punt de la recta és (0, –2) i el vector normal és (1, 3) $\rightarrow x + 3y + 6 = 0$

87. Comprova si els punts A(–3, 2) i B(5, –1) són a les rectes següents:

a) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$

b) $y = \frac{5x-3}{3}$

c) $5x - 2y + 19 = 0$

d) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+7}{2}$

a) $\begin{cases} -3 = 3 - 2\lambda \\ 2 = 3 + 4\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = \frac{-1}{4} \end{cases}$

El punt (-3,2) no pertany a la recta.

$\begin{cases} 5 = 3 - 2\lambda \\ -1 = 3 + 4\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

El punt (5,-1) pertany a la recta.

b) $2 \neq \frac{-15-3}{3}$

El punt (-3,2) no pertany a la recta.

$-1 \neq \dfrac{25-3}{3}$

El punt (5,-1) no pertany a la recta.

c) $-15 - 4 + 19 = 0$

El punt (-3,2) pertany a la recta.

$25 + 4 + 19 \neq 0$

El punt (5,-1) no pertany a la recta.

d) $\frac{-3+4}{3} \neq \frac{2+7}{2}$

El punt (-3,2) no pertany a la recta.

$$\frac{5+4}{3} = \frac{-1+7}{2}$$

El punt (5,-1) pertany a la recta.

88. Calcula el valor de k perquè la recta $3x + 7y + k = 0$ passi pel punt P(–1, 4).

$$3\cdot(-1)+4\cdot 7+k=0 \rightarrow k=-25$$

89. Calcula el valor de k perquè la recta $4x - y + k = 0$ passi per l'orígen de coordenades.

$$4\cdot 0-0+k=0 \rightarrow k=0$$

90. Escriu dos punts de les rectes següents:

a) $y = 3x - 1$ **c)** $4x - 3y + 1 = 0$

b) $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$ **d)** $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1}$

Resposta oberta. Per exemple:

a) $(0,-1)$ i $(1,2)$

c) $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ i $\left(-\frac{1}{4},0\right)$

b) $(-2,4)$ i $(-3,1)$

d) $(2,-1)$ i $(-1,0)$

91. Escriu l'equació punt-pendent de la recta que compleix les condicions següents:

a) Passa pels punts A(2, –3) i B(0, –2).

b) Passa pel punt A(0, 3) i té per direcció la del vector $\vec{v}$ = (3, –1).

a) $\left.\begin{array}{l} A(2,-3) \\ B(0,-2) \end{array}\right\} \rightarrow m=-\frac{1}{2} \rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2,1) \rightarrow y+3=-\frac{1}{2}(x-2)$

b) $\left.\begin{array}{l} m=-\frac{1}{3} \\ A(0,3) \end{array}\right\} \rightarrow y-3=-\frac{1}{3}x$

92. Calcula el valor de k perquè la recta $8x - ky + 7 = 0$ tingui pendent 2.

El vector director és (k, 8) $\rightarrow$. $m=\frac{8}{k}=2 \rightarrow k=4$

93. Determina l'equació d'una recta que passa pels punts (–1, –10) i (2, c), sabent que té pendent 7. Expressa la recta en forma contínua i general.

Determinem el vector director: (3, c + 10)

Com que sabem que el pendent és: $7 = \frac{c+10}{3} \rightarrow 21 = c + 10 \rightarrow c = 11$

$\vec{u} = (3, 21)$

Expressem la recta en forma contínua:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+10}{21}$$

I l'expressem en forma general:

21x + 21 = 3y + 30 → 21x – 3y – 9 = 0

94. Determina l'equació en forma contínua, paramètrica, general i explícita de la recta que passa pel punt A(2, –4) i és perpendicular a la direcció del vector $\vec{v}$ = (4, –1).

El vector director de la recta és el (1, 4).

Equació contínua → $x - 2 = \frac{y+4}{4}$

Equació paramètrica → $\left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -4 + 4t \end{array}\right\}$

Equació general → $4x - y - 12 = 0$

Equació explícita → $y = 4x - 12$

95. Expressa en forma vectorial, paramètrica i contínua l'equació de la recta que:

a) Passa pel punt (1, 3) i és paral·lela a la recta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4}$

b) És paral·lela a la recta $5x - 2y + 12 = 0$ i passa pel punt (–2, 5).

a) Vector director de la recta: (2, -4)

Equació vectorial → (x, y) = (1, 3) + t(2, -4)

Equacions paramètriques → $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$

Equació contínua → $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4}$

b) Vector director de la recta: (2, 5)

Equació vectorial → (x, y) = (-2, 5) + t(2, 5)

Equacions paramètriques → $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{cases}$

Equació contínua → $\frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{5}$

96. Expressa en forma explícita la recta que:

a) Passa pel punt (0, -1) i és paral·lela a la recta $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 \end{cases}$

b) És paral·lela a la recta $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-1}$ y passa pel punt (5, –2).

a) Vector director de la recta: (3, 0)

Pendent: m = 0

-1 = 0x + n → n = -1

Equació explícita → y = -1

b) Vector director de la recta: (4, -1)

Pendent: m = $-\frac{1}{4}$

-2 = $-\frac{5}{4}$ + n → n = $-\frac{3}{4}$

Equació explícita → y = $-\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

97. **Escriu l'equació general de la recta que:**

a) Passa pel punt (10, –2) i és paral·lela a la recta $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

b) És paral·lela a la recta $y = \frac{8x-3}{2}$ i passa pel punt (4, 0).

a) Expressem la recta en forma contínua: $\frac{x-10}{-3} = \frac{y+2}{-2}$

I l'expressem en forma general: -2x + 20 = -3y - 6 → -2x + 3y + 26 = 0

b) Vector director de la recta: (1, 4)

Expressem la recta en forma contínua: $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{4}$

I l'expressem en forma general: 4x – 16 = y → 4x – y – 16 = 0

98. **Escriu en forma vectorial i paramètrica la recta que:**

a) Passa pel punt (0, -3) i és perpendicular a la recta $\frac{x+2}{-3} = \frac{y+1}{4}$

b) Passa pel punt (-5, 0) i és perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a (-3, 4) és (4, 3).

Equació vectorial → (x, y) = (0, -3) + t(4, 3)

Equació paramètriques → $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

b) Calculem el vector director de la recta.

A(1, 2), B(-1, 5) → $\overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a (-2, 3) és (-3, -2)

Equació vectorial → (x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)

Equació paramètriques → $\begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{cases}$

99. **Determina l'equació contínua de la recta que compleix les condicions següents:**

a) Passa pel punt (7, -1) i és perpendicular a la recta $y = \frac{-x+6}{3}$.

b) Passa pel punt (-4, 4) i és perpendicular a la recta $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculem el vector director de la recta:

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$

$\frac{x-7}{1} = \frac{y+1}{3}$

Un vector perpendicular a (3,-1) és (1,3).

Expressem la recta en forma contínua:

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y+1}{3}$$

b) Calculem el vector director de la recta:

A(0, -7), B (1, -5) $\rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Un vector perpendicular a (1, 2) és (-2, 1).

Expressem la recta en forma contínua:

$$\frac{\mathrm{x}+4}{-2} = \frac{\mathrm{y}-4}{1}$$

100. Determina el punt de la recta $\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y+1}}{\mathbf{-1}}$ que dista 2 unitats del punt P(-2, 2).

Expressem la recta en forma paramètrica:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}$$

Els punts de la recta són de la forma:

$A_1(1 + 2t, -1 - t)$

Calculem els vectors que van de la recta al punt P:

$\overrightarrow{A_1P} = (-3 - 2t, 3 + t)$

Veiem quins d'aquests vectors tenen mòdul 2.

$$2 = \sqrt{(-3-2t)^2 + (3+t)^2} \rightarrow 4 = 9 + 12t + 4t^2 + 9 + 6t + t^2$$

$$\rightarrow 5t^2 + 18t + 14 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-9-\sqrt{11}}{5} \\ t_2 = \frac{-9+\sqrt{11}}{5} \end{cases}$$

Per tant, els punts són:

$A_1\left(1 + \frac{-18-2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9+\sqrt{11}}{5}\right)$ $\qquad$ $A_2\left(1 + \frac{-18+2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9-\sqrt{11}}{5}\right)$

101. Estudia la posició relativa que tenen aquestes rectes:

a) r :$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 - 3t} \\ \boldsymbol{y = t} \end{cases}$ $\qquad$ **s :**$\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 6t} \\ \boldsymbol{y = 1 - 2t} \end{cases}$

b) r :$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - 6t} \\ \boldsymbol{y = -3 + 2t} \end{cases}$ $\qquad$ **s :**$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + 3t} \\ \boldsymbol{y = -t} \end{cases}$

a) $\overrightarrow{u_r} = (-3,1)$ i $\overrightarrow{u_s} = (6,-2)$.

Són vectors paral·lels i, a més a més, les rectes coincideixen en un punt, per exemple $(2,0)$, llavors són rectes coincidents.

b) $\overrightarrow{u_r} = (-6,2)$ i $\overrightarrow{u_s} = (3,-1)$.

Com que els vectors són proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Determinem si el punt $A_r(1,-3)$, de la recta r, pertany a la recta s.

$$\begin{cases} 1 = 2 + 3\mu \\ -3 = -\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = 3 \end{cases}$$

Les rectes són paral·leles.

102. Determina quina posició relativa tenen aquestes rectes:

a) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2}$ $\qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4}$

b) $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3}$ $\qquad s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-3}$

a) $\overrightarrow{u_r} = (3,-2)$ $\qquad \overrightarrow{u_s} = (2,-4)$.

$\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-4} \rightarrow$ Són rectes secants.

b) $\overrightarrow{u_r} = (2,-3)$ $\qquad \overrightarrow{u_s} = (2,-3)$.

Com que els vectors són iguals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Determinem si el punt $A_r(-1,2)$, de la recta r, pertany a la recta s.

$$\frac{-1+1}{2} \neq \frac{-2+3}{-3}$$

Les rectes són paral·leles.

103. Investiga la posició relativa que tenen els parells de rectes següents:

a) r : 2 x – 6y + 4 = 0 $\qquad$ **s: –x + 3y – 2 = 0**

b) r : 6x – 4y + 11 = 0 $\qquad$ **s: –9x + 6y – 1 = 0**

c) r : 4x – y + 1 = 0 $\qquad$ **s: 2 x – 3y + 13 = 0**

a) $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{4}{-2} \rightarrow$ Les rectes són coincidents.

b) $\frac{-9}{6} = \frac{6}{-4} \neq \frac{-1}{11} \rightarrow$ Les rectes són paral·leles.

c) $\frac{4}{2} \neq \frac{-1}{-3} \rightarrow$ Les rectes són secants.

104. **Assenyala la posició relativa d'aquestes rectes:**

a) $r: y = \frac{6x-1}{4}$ $s: y = \frac{-3x+5}{-2}$

b) $r: y = \frac{-3x+1}{2}$ $s: y = \frac{x-3}{-3}$

a) El pendent de la recta r és: $m_r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

El pendent de la recta s és: $m_s = \frac{3}{2}$

Com que els pendents són iguals , les rectes són paral·leles o coincidents.

Determinem si el punt $A_r(1, -1)$, de la recta s, pertany a la recta r.

$-1 \neq \frac{6-1}{4} \rightarrow$ Les rectes són paral·leles.

b) El pendent de la recta *r* és: $m_r = -\frac{3}{2}$

El pendent de la recta *s* és: $m_s = -\frac{1}{3}$

Com que els pendents són diferents, són rectes secants.

105. **En quina posició relativa es troben aquests parells de rectes?**

a) $r: \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ $s: x + 2y - 7 = 0$

b) $r: \frac{x}{2} = y - 3$ $s: 3x - 6y + 4 = 0$

c) $r: y = 3x - 1$ $s: \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -2t \end{cases}$

d) $r: y = \frac{5x+1}{-2}$ $s: \frac{x+3}{2} = \frac{y-7}{-5}$

a) Expressem la recta r en forma general:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow -2x - 2 = 4y - 12 \rightarrow -2x - 4y + 10 = 0$$

Les rectes són paral·leles

b) Expressem la recta r en forma general:

$r: x - 2y + 6 = 0$

Les rectes són paral·leles.

c) Expressem les rectes en forma general:

$r: 3x - y - 1 = 0$ $s: 2x - 3y - 8 = 0$

Les rectes són secants.

d) Expressem les rectes en forma general:

$r: -2y = 5x + 1$ $\qquad$ $s: -5x - 15 = 2y - 14$

$5x + 2y + 1 = 0$ $\qquad$ $5x + 2y + 1 = 0$

Les rectes són coincidents.

106. Determina la posició relativa de la recta r que passa pels punts (–1, 2) i (3, 4), i la recta s que queda definida pels punts (–3, 4) i (2, –1).

Describim les rectes en forma general:

$r: x - 2y + 5 = 0$ $\qquad$ $s: x + y - 1 = 0$

Les rectes són secants.

107. Quina posició relativa mantenen els parells de rectes següents?

a) r passa per (–3, 4) i per (8, –1).

s: x – 2y + 15 = 0

b) r passa per (–1, 4) i per (2, –5).

$\boldsymbol{s}: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-7}{3}$

a) $\begin{cases} y = mx + n \ \rightarrow (-3, 4) \rightarrow 4 = -3m + n \\ y = mx + n \ \rightarrow (8, -1) \rightarrow -1 = 8m + n \end{cases}$

$y = -\frac{5}{11}x + \frac{29}{11} \rightarrow 5x + 11y - 29 = 0 \rightarrow$ Les rectes són secants.

b) $\overrightarrow{u_r} = (3, -9)$ $\qquad$ $\overrightarrow{u_s} = (-1, 3)$.

Com que els vectors són proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Determinem si el punt $A_r(-1, 4)$, de la recta r, pertany a la recta s.

$\frac{-1+2}{-1} = \frac{4-7}{3} \rightarrow$ Les rectes són coincidents.

108. Assenyala en quina posició relativa es troben els parells de rectes següents:

a) r és perpendicular a 3x – 4y + 11 = 0.

s: $\begin{cases} x = -6t \\ y = -3 + 8t \end{cases}$

b) r és paral·lela a y = 2 x - 3.

$\boldsymbol{s}: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{6}$

a) Determinem el vector director de la recta:

$m = \frac{3}{4} \rightarrow (4, 3)$

Aquest vector és perpendicular al vector director de la recta s.

$\overrightarrow{u_r} = (4, 3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{u_s} = (-6, 8)$.

Les rectes r i s són perpendiculars.

b) Sigui $a \in \mathbb{R}$:

$\left.\begin{array}{l} r: 2x - y = a \rightarrow m_r = 2 \\ s: 2x - y = 8 \rightarrow m_s = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Són paral·leles o coincidents: $\begin{cases} \text{Si } a = 8 \rightarrow \text{Coincidents} \\ \text{Si } a \neq 8 \rightarrow \text{Paral·leles} \end{cases}$

109. **Determina si les rectes r i s es tallen. En cas afirmatiu, calcula'n el punt de tall.**

a) r : 2 x + 3y – 3 = 0 s: 3x - 4y – 13 = 0

b) r : 6x + 9y – 3 = 0 s: 2 x + 3y – 1 = 0

c) r : x – 2y + 3 = 0 s: –3x + 6y – 8 = 0

a) $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-4} \rightarrow$ Es tallen

Resolem el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-3=0 \\ 3x-4y-13=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=3,\ y=-1$$

b) $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{-3}{-1} \rightarrow$ Són rectes coincidents, es tallen en tots els punts.

c) $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \neq \frac{3}{-8} \rightarrow$ No es tallen, són rectes paral·leles.

110. **Indica, si és possible, els punts de tall dels parells de rectes següents:**

a) $r\!:\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $\quad s\!:\begin{cases} x = -1 - 4\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{cases}$

b) $r\!:\begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$ $\quad s\!:\begin{cases} x = 5 - 4\mu \\ y = 3 - 6\mu \end{cases}$

c) $r\!:\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -4 + 4\lambda \end{cases}$ $\quad s\!:\begin{cases} x = -3 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} 3-\lambda=-1-4\mu \\ -1+2\lambda=5+3\mu \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda=4(\mu+1)} -1+8(\mu+1)=5+3\mu \rightarrow \begin{cases} \mu=-\frac{2}{5} \\ \lambda=\frac{12}{5} \end{cases}$$

El punt d'intersecció és per tant, $\left(\frac{3}{5},\frac{19}{5}\right)$.

b) $$\left.\begin{array}{l} 7-2\lambda=5-4\mu \\ 3\lambda=3-6\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda-2\mu=1 \\ \lambda+2\mu=1 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda=1 \rightarrow \mu=0$$

El punt d'intersecció és per tant, $(5,3)$.

c) $$\left.\begin{array}{l} 1-2\lambda=-3+\mu \\ -4+4\lambda=-1+2\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\lambda+\mu=4 \\ 4\lambda-2\mu=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\mu=4-2\lambda} 4\lambda-2(4-2\lambda)=3 \rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{11}{8} \\ \mu=\frac{5}{4} \end{cases}$$

El punt d'intersecció és per tant, $\left(-\frac{7}{4},\frac{3}{2}\right)$.

111. **Calcula els punts de tall, si és possible, dels parells de rectes següents:**

a) $r\!: 2x - y + 8 = 0$ $\quad s\!:\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 + t \end{cases}$

b) $r\!: y = \frac{-2x+7}{3}$ $\quad s\!: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2}$

c) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-6}$ $\quad$ $s: 3x + y + 2 = 0$

d) $r: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 5 + 8t \end{cases}$ $\quad$ $s: \frac{x-3}{1} = \frac{y+7}{-4}$

e) $r: y = \frac{6x+3}{2}$ $\quad$ $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \frac{3}{2} + 3t \end{cases}$

a) $2(2 + 3t) - (7 + t) + 8 = 0 \rightarrow 4 + 6t - 7 - t + 8 = 0 \rightarrow t = -1$

El punt de tall és P(-1, 6).

b) $\begin{cases} 3y = -2x + 7 \\ -2x + 4 = 3y - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 3y = -7 \end{cases}$

Hi ha infinits punts de tall, i les rectes són coincidents.

c) $\begin{cases} -6x + 6 = 2y + 6 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x - 2y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$

No hi ha punts de tall, i les rectes són paral·leles.

d) $\frac{-1-3t-3}{1} = \frac{5+8t+7}{-4} \rightarrow 12t + 16 = 8t + 12 \rightarrow t = -1$

El punt de tall és P(2, -3).

e) $\frac{3}{2} + 3t = \frac{6+6t+3}{2} \rightarrow 3 + 6t = 6t + 9$

No té solució, les rectes són paral·leles.

112. Calcula els punts de tall d'aquestes rectes:

a) $r: x + 2y - 5 = 0$ $\quad$ $s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$

b) $r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$ $\quad$ $s: x + 3y - 2 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ $\quad$ $s: 2x - y + 5 = 0$

a) $s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} \rightarrow -x + 3 = 2y - 2 \rightarrow x + 2y - 5 = 0$

Són rectes coincidents, tots els seus punts són de tall.

b) $(2-3t) + 3(5+t) - 2 = 0 \rightarrow 2 - 3t + 15 + 3t - 2 \neq 0 \rightarrow$ No es tallen.

c) $2(2+t) - (3-5t) + 5 = 0 \rightarrow 4 + 2t - 3 + 5t + 5 = 0 \rightarrow t = -\frac{6}{7} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{7} \\ y = \frac{51}{7} \end{cases}$

113. Calcula el valor que ha de prendre k perquè la recta $\frac{x+1}{k} = \frac{y-2}{3}$ sigui paral·lela a $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$.

Per tal que les rectes siguin paral·leles, els vectors directors han de ser proporcionals.

$\frac{k}{-1} = \frac{3}{5} \rightarrow k = -\frac{3}{5}$

114. Troba el valor de a perquè la recta ax + 3y – 7 = 0 sigui paral·lela a $\frac{x-1}{5} = y + 2$.

Perquè les rectes siguin paral·leles, els vectors directors han de ser proporcionals.

$$\frac{-3}{5}=\frac{a}{1}\rightarrow a=-\frac{3}{5}$$

115. **Calcula el valor de k perquè les rectes r i s siguin paral·leles.**

r : kx + (k + 1)y + 8 = 0 s: 5x + 6y - 12 = 0

$$\frac{k}{5}=\frac{k+1}{6}\neq\frac{8}{-12}\rightarrow 6k=5k+5\rightarrow k=5$$

116. **Determina el valor de k perquè les rectes r i s siguin perpendiculars.**

r : k^2x + (k + 1)y + 8 = 0 s: 16x – 9y – 5 = 0

$(a,b)\perp t(-b,a)$ o també $(a,b)\perp t(b,-a)$

$$\left.\begin{array}{l} k^2=-9t \\ k+1=-16t \end{array}\right\}\rightarrow t=\frac{k^2}{-9}=\frac{k+1}{-16}\rightarrow k=\frac{9\pm\sqrt{657}}{32}$$

117. **Prova que totes les rectes amb l'equació del tipus y =ax + a passen pel mateix punt. Troba el punt i la recta d'aquest tipus que és paral·lela a** $\begin{cases} \boldsymbol{x=21-3t} \\ \boldsymbol{y=-1+2t} \end{cases}$

Determinem el punt de tall:

$$\begin{cases} y=ax+a \\ y=bx+b \end{cases}$$

Totes les rectes passen per (-1, 0).

Com que la recta és paral·lela a la recta donada, el seu vector director és (-3,2).

$$m=-\frac{2}{3}$$

La recta és: $y=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

118. **Calcula la distància entre el punt P i la recta r en els casos següents:**

a) P(0, 0) r : x – 4y + 1 = 0

b) P(2, 1) r : 2 x + 3y – 1 = 0

c) P(–3, –1) r : 3x – 2y – 3 = 0

a) $d(P,r)=\frac{|1\cdot 0-4\cdot 0+1|}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$

b) $d(P,r)=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 1-1|}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$

c) $d(P,r)=\frac{|3\cdot(-3)-2\cdot(-1)-3|}{\sqrt{13}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$

119. **Calcula la distància del punt P (4, –2) a les rectes.**

a) **–6x + 8y – 5 = 0**

b) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

c) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6}$

d) $y = \frac{4x-5}{3}$

a) $d(P,r) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-6\cdot 4+8\cdot(-2)-5|}{\sqrt{(-6)^2+8^2}} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}\ u$

b) Calculem l'equació general de la recta:

$$-x+2 = \frac{y-2}{2} \rightarrow 2x+y-6=0$$

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 4-1\cdot(-2)-6|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 0\ u$$

c) Determinem l'equació general de la recta:

6x – 6 = 3y – 6 → 6x - 3y = 0 → 2x – y = 0

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 4-1\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}\ u$$

d) Determinem l'equació general de la recta:

3y = 4x – 5 → -4x + 3y + 5 = 0

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-4\cdot 4+3\cdot(-2)+5|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{17}{5}\ u$$

120. **Determina la distància entre la recta que passa pels punts A(–2, 4) i B(4, –2), i el punt P(–3, 2).**

La recta en forma general és:

$$r: x+y-2=0$$

$$d(P,r) = \frac{|1\cdot(-3)+1\cdot 2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

121. Calcula la distància de l'orígen de coordenades a la recta que passa per (-3, 6) i és paral·lela a $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{8}$

Determinem la recta demanada: $\frac{x+3}{-6}=\frac{y-6}{8}$

Calculem l'equació general de la recta:

8x + 24 = -6y +36 → 8x + 6y – 12 = 0

$$d(P,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|8\cdot 0+6\cdot 0-12|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}u$$

122. Assenyala la distància entre les rectes paral·leles següents:

a)	**r : 4x – 3y + 1 = 0**	**s: 8x – 6y – 5 = 0**
b)	**r : x + 2y – 5 = 0**	**s: 4x + 8y + 2 = 0**
c)	**r : 5x – y – 16 = 0**	**s: 5x – y + 16 = 0**

a) Un punt de la recta *r* és *P*(2, 3).

$$d(P,s)=\frac{|8\cdot 2-6\cdot 3-5|}{10}=\frac{7}{10}$$

b) Un punt de la recta *r* és *P*(–1, 3).

$$d(P,s)=\frac{|4\cdot(-1)+8\cdot 3+2|}{\sqrt{96}}=\frac{11\sqrt{6}}{12}$$

c) Un punt de la recta *r* és *P*(3, –1).

$$d(P,s)=\frac{|5\cdot 3-1\cdot(-1)+16|}{\sqrt{26}}=\frac{16\sqrt{26}}{13}$$

123. Quina distància hi ha entre les rectes r i s?

a)	$r:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=3+t\end{cases}$	$s: x+2y+5=0$
b)	$r:\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{6}$	$s: y=\frac{8x-3}{4}$
c)	$r:\begin{cases}x=2+3t\\ y=-1-t\end{cases}$	$s: y=\frac{-x-1}{3}$

a) $\overrightarrow{u_1}=(2,1)$, $\overrightarrow{u_2}=(-2,-1)$. Els vectors són proporcionals. Un punt de r és P (-1,3)

$$d(r,s)=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

b) $\overrightarrow{u_1}=(2,6)$, $\overrightarrow{u_2}=(4,8)$. Els vectors no són proporcionals. Per tant, les rectes són secants.

c) $\overrightarrow{u_1}=(3,-1)$, $\overrightarrow{u_2}=(3,-1)$. Com que els vectors són iguals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Prenem un punt de la recta r, A(2,-1), i veiem si pertany a $-1=\frac{-2-1}{3}$.

Les rectes són coincidents.

124. **Calcula el valor de a perquè la distància entre el punt A(2, a) i la recta r : 13x – 12y + 2 = 0 sigui de 3 unitats.**

$$d(A,r)=\frac{|13\cdot 2-12\cdot a+2|}{\sqrt{313}}=3\rightarrow |28-12a|=3\sqrt{313}$$

- Si $28-12a\geq 0$:

$$28-12a=3\sqrt{313}\rightarrow a=\frac{28-3\sqrt{313}}{12}$$

- Si $28-12a\leq 0$:

$$-28+12a=3\sqrt{313}\rightarrow a=\frac{3\sqrt{313}+28}{12}$$

125. **Indica el valor de b perquè la recta i el punt es trobin a 5 unitats de distància.**

$$\boldsymbol{r}\colon \frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{y}+\mathbf{3}}{\mathbf{3}} \qquad \boldsymbol{P}(-\mathbf{4},\mathbf{1})$$

Expressem la recta en forma general:

3x + 3 = by + 3b → 3x – by + 3 - 3b = 0

$$S=\frac{|3\cdot(-4)-b\cdot 1+3-3b|}{\sqrt{3^2+(-b)^2}}\rightarrow 5\sqrt{9+b^2}=|-9-4b|$$

$$9b^2-72b+144=0\rightarrow b=4$$

126. **Calcula el valor de k perquè la distància entre les rectes r : 3x + 4y + k = 0 i s: 6x – 8y – 10 = 0 sigui 4.**

Un punt de la recta *s* és *P*(–5,–5).

$$d(P,r)=\frac{|3\cdot(-5)+4\cdot(-5)+k|}{5}=4\rightarrow|-35+k|=20$$

- Si $-35+k\geq 0$:

$$-35+k=20\rightarrow k=55$$

- Si $-35+k\leq 0$:

$$35-k=20\rightarrow k=15$$

127. **Determina l'equació d'una recta que sigui paral·lela a $\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{-\mathbf{3}}=\frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$ i que s'hi trobi a 8 unitats de distància.**

La recta té aquesta equació general.

4x + 3y + C = 0

$$8=\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot 5+C|}{\sqrt{4^2+3^2}}\rightarrow 40=|11+C|$$

C = 29, C = -51

Les següents rectes compleixen les condicions indicades.

4x + 3y + 29 = 0

4x + 3y – 51 = 0

128. Assenyala l'angle que formen les rectes r i s.

a) $r\colon\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases}$ $\qquad s\colon\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{cases}$

b) $r\colon y = 3x + 2$ $\qquad s\colon y = \frac{4x+1}{-2}$

c) $r\colon \frac{x}{2} = \frac{y-4}{6}$ $\qquad s\colon \frac{2x+3}{-1} = \frac{y}{2}$

d) $r\colon 20x - 4y + 1 = 0$ $\qquad s\colon -15x + 3y + 7 = 0$

a) $\overrightarrow{u_r} = (3, 2)$, $\overrightarrow{u_s} = (2, 3)$.

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3\cdot 2 + 2\cdot 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{12}{13}$$

$\alpha = 22°37'11{,}51''$

b) $\overrightarrow{u_r} = (1, 3)$, $\overrightarrow{u_s} = (-4, 8)$.

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1\cdot(-4) + 3\cdot 8|}{\sqrt{1^2 + 3^2}\cdot\sqrt{(-4)^2 + 8^2}} = \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45°$

c) $\overrightarrow{u_r} = (2, 6)$ $\qquad \overrightarrow{u_s} = (-1, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|2\cdot(-1) + 6\cdot 4|}{\sqrt{40}\sqrt{17}} = \frac{11}{\sqrt{170}} \to \alpha = 32°\ 28'\ 16{,}3''$$

d) $\overrightarrow{u_r} = (4, 20)$, $\overrightarrow{u_s} = (3, 15)$.

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|4\cdot 3 + 20\cdot 15|}{\sqrt{4^2 + 20^2}\cdot\sqrt{3^2 + 15^2}} = \frac{312}{312} = 1$$

$\alpha = 0°$

129. Quin angle formen les rectes següents?

a) $r\colon \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3}$ $\qquad s\colon y = -5x + 3$

b) $r\colon y = 3x - 2$ $\qquad s\colon\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$

c) $r\colon\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$ $\qquad s\colon 2x + 2y - 1 = 0$

d) $r\colon 3x - y - 3 = 0$ $\qquad s\colon \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-4}$

a) $\overrightarrow{u_r} = (-2,3)$, $\overrightarrow{u_s} = (1,-5)$

$$\cos\alpha = \frac{|-2-15|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{17\sqrt{2}}{26} \rightarrow \alpha = 22^{\circ}\ 22'\ 48''$$

b) $\overrightarrow{u_r} = (1,3)$, $\overrightarrow{u_s} = (-1,3)$

$$\cos\alpha = \frac{|-1+9|}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{4}{5} \rightarrow \alpha = 36^{\circ}\ 52'\ 11{,}6''$$

c) $\overrightarrow{u_r} = (1,1)$, $\overrightarrow{u_s} = (2,-2)$

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 2+1\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2}\ \sqrt{1^2+(-2)^2}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^{\circ}$$

d) $\overrightarrow{u_r} = (1,3)$, $\overrightarrow{u_s} = (2,-4)$

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 2+3\cdot(-4)|}{\sqrt{1^2+3^2}\ \sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^{\circ}$$

130. Calcula l'angle que formen entre elles les rectes r : y = x + 1, s: x + 4y + 4 = 0 i t:$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-3}$

$r: x - y + 1 = 0$

$s: x + 4y + 4 = 0$

$t = 3x + 2y - 12 = 0$

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 4|}{\sqrt{2}\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \rightarrow \alpha = 59^{\circ}$$

$$\cos\left(\widehat{r,t}\right) = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 2|}{\sqrt{2}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \rightarrow \beta = 78{,}7^{\circ}$$

$$\cos\left(\widehat{s,t}\right) = \frac{|1\cdot 3 + 4\cdot 2|}{\sqrt{17}\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{221}} \rightarrow \alpha = 42{,}3^{\circ}$$

131. Troba l'angle que formen la recta que passa pels punts P(-1, 4) i Q(3, 8) i la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8}$

$\overrightarrow{PQ} = (4,4), \overrightarrow{u_r} = (2,8)$

$$\cos\propto = \frac{|d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|4\cdot 2+4\cdot 8|}{\sqrt{4^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+8^2}} = \frac{40}{\sqrt{2176}}$$

$\alpha = 30°57'49{,}52''$

132. Determina la mida dels angles que formen els parells de rectes r i s següents:

a) $r: y = \frac{4x-3}{2}$

s passa per (-1, 6) i és paral·lela a 4x + 2y + 7 = 0.

b) $r: \boldsymbol{x+3=\frac{y}{2}}$

s passa per (3, 8) i és paral·lela a $\frac{x-1}{2}=\frac{y+9}{4}$.

c) $r: \boldsymbol{8x-2y-3=0}$

s és perpendicular a $\begin{cases} x=6-t \\ y=-1+3t \end{cases}$ i passa per (3, -2).

a) $\overrightarrow{u_r}=(2,4)$, $\overrightarrow{u_s}=(2,-4)$.

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{|2\cdot 2+4\cdot(-4)|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$\alpha=53°\,7'48''$

b) $\overrightarrow{u_r}=(1,2)$, $\overrightarrow{u_s}=(2,4)$.

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{|1\cdot 2+2\cdot 4|}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{10}{10}=1$$

$\alpha=0°$

c) $\overrightarrow{u_r}=(2,8)$,

El vector $\overrightarrow{u_s}$ ha de ser perpendicular a (-1, 3); per tant pot ser $\vec{u}=(3,1)$

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{|2\cdot 3+8\cdot 1|}{\sqrt{2^2+8^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{680}}=\frac{7\sqrt{170}}{170}$$

$\alpha=57°\,31'43{,}71''$

133. Calcula el valor que ha de tenir b perquè la recta 3x + by + 6 = 0 formi un angle de 60º amb la recta $y=\frac{x+4}{-3}$.

$\overrightarrow{u_r}=(-3,1)$, $\overrightarrow{u_s}=(b,-3)$.

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\to\frac{1}{2}=\frac{|-3\cdot b+1\cdot(-3)|}{\sqrt{(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{b^2+(-3)^2}}$$

$$\to m=\frac{-18-15\sqrt{3}}{13}, m=\frac{-18+15\sqrt{3}}{13}$$

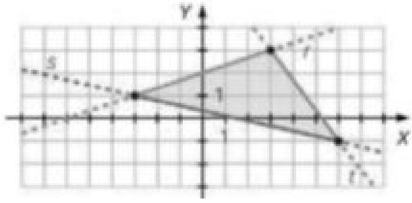
134. Assenyala el valor de k perquè les rectes r i s formin un angle de 45º.

$r: \begin{cases} x=2+t \\ y=-3+2t \end{cases}$ $\qquad s: \mathbf{kx-2y+1=0}$

$r: 2x-y-7=0$

$$\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2k+2|}{\sqrt{k^2+4}\sqrt{5}}\to k_1=\frac{1}{3},\ k_2=-3$$

135. **Escriu les equacions en la forma general de les rectes que configuren el triangle següent:**



La recta *r* passa pels punts $(-3,1)$ i $\left(3,\dfrac{5}{2}\right)$:

$\overrightarrow{u_r} = (4,1)$ $\qquad r: -x + 4y - 7 = 0$

La recta *s* passa pels punts $\left(3,\dfrac{5}{2}\right)$ i $\left(6,-\dfrac{5}{4}\right)$:

$\overrightarrow{u_s} = (4,-5)$ $\qquad s: 5x + 4y - 25 = 0$

La recta *t* passa pels punts $\left(6,-\dfrac{5}{4}\right)$ i $(-3,1)$:

$\overrightarrow{u_t} = (-4,1)$ $\qquad t: x + 4y - 1 = 0$

136. **Determina la recta paral·lela a r que passa pel punt simètric de P respecte de la recta r.**

a) $r\colon \mathbf{2x - 3y + 10 = 0} \qquad \boldsymbol{P(4,-7)}$

b) $\boldsymbol{r}\colon \begin{cases} \boldsymbol{x = -2t} \\ \boldsymbol{y = 2 - t} \end{cases} \qquad \boldsymbol{P(4,4)}$

c) $\boldsymbol{r}\colon \boldsymbol{y = \frac{3x-1}{4}} \qquad \boldsymbol{P(5,-9)}$

a) Calculem la recta s, perpendicular a r, i que passa per P:

$$s\colon \frac{x-4}{-2} = \frac{y+7}{3}$$

Determinem el punt de tall de les rectes:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 3x - 12 = -2y - 14 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 3y = -10 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$(-2,2) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-7+y}{2}\right) \to \begin{cases} x = -8 \\ y = 11 \end{cases}$$

La recta és $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = 11 + 2t \end{cases}$

b) Calculem la recta s, perpendicular a r, i que passa per P:

$$s\colon \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{-2}$$

Determinem el punt de tall de les rectes:

$$\frac{-2t-4}{1} = \frac{2-t-4}{-2} \to t = 2$$

(-4,0) és el punt mitjà de P i el seu simètric,P', respecte de r.

Calculem P'(x, y):

$(-4, 0) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -4 \end{cases}$

La recta és: $\begin{cases} x = -12 - 2t \\ y = -4 - t \end{cases}$

c) Calculem la recta s, perpendicular a r, i que passa per P:

$s: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+9}{4}$

Determinem el punt de tall de les rectes:

$\begin{cases} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 20 = -3y - 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

(-1, -1) és el punt mitjà de P i el seu simètric, P', respecte de r.

Calculem P' (x,y):

$(-1, -1) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 7 \end{cases}$

La recta és: $\begin{cases} x = -7 + 4t \\ y = 7 + 3 \end{cases}$

137. Assenyala l'equació de la recta simètrica de r respecte de la recta s.

a) $r: y = \frac{x-4}{2}$ $\qquad s: -x + 2y + 4 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ $\qquad s: 2x + y - 7 = 0$

a) $\overrightarrow{u_r} = (2, 1)$, $\overrightarrow{u_s} = (2, 1)$.

Les rectes són paral·leles o coincidents.

Escollim un punt, P, de r i calculem la distància fins a s:

$$P(4,0) \qquad d(P,s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-4 + 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = 0$$

Les rectes són coincidents i, per tant, la recta simètrica és la mateixa.

b) $\overrightarrow{u_r} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{u_s} = (1, -2)$.

Com que els vectors són proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Escollim un punt, P, de r i calculem la distància fins s:

$$P(2,3) \qquad d(P,s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0$$

Les rectes són coincidents i, per tant, la recta simètrica és la mateixa.

138. Els punts P (3, 3) i Q (6, –1) són simètrics respecte d'una recta. Troba l'equació general d'aquesta recta.

$\overrightarrow{PQ} = (3, -4)$ és el vector normal de la recta.

$$M\left(\frac{3+6}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},1\right)$$

$$r: 3x-4y-\frac{19}{2}=0 \rightarrow 6x-8y-19=0$$

139. Comprova si els punts P(–1, 4), Q(3, 1) i R(11, –5) estan alineats. En cas afirmatiu, escriu l'equació de la recta que els inclou.

Calculem els vectors formats pels punts:

$\overrightarrow{PQ} = (4,-3)$

$\overrightarrow{PR} = (12,-9)$

Com que els vectors són proporcionals, els punts són alineats.

Calculem l'equació de la recta que els conté:

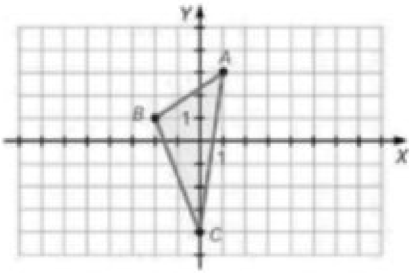
$r: \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 4-3t \end{cases}$

140. Demostra que els punts A(3, –2), B(9, 6) i C(10, 5) són els vèrtexs d'un triangle rectangle.

$\overrightarrow{AC} = (7,7)$ $\quad\quad\quad$ $\overrightarrow{BC} = (1,-1)$

Són ortogonals: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 7\cdot 1 + 7\cdot(-1) = 0$

141. Calcula els valors següents per a aquest triangle:



a) La longitud del segment AC

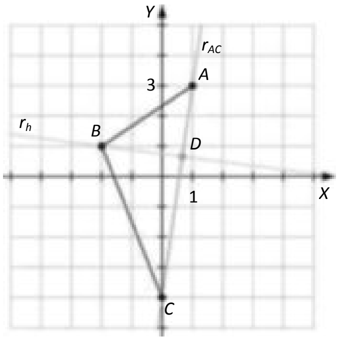
b) L'equació de la recta que passa per A i per C.

c) L'àrea del triangle ABC.

a) $\left.\begin{array}{l} A(1,3) \\ C(0,-4) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AC} = C - A = (-1,-7) \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b) La recta passa pel punt *A* i té vector director $\overrightarrow{AC}$. Per tant, la seva equació és $r_{AC}:\ 7x-y=4$.

c) Per calcular l'àrea és necessari conèixer la base, *b*, i l'altura, *h*, del triangle:



$b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 5\sqrt{2}$.

La recta que defineix *h* compleix:

$$r_h : \begin{cases} \overrightarrow{v_h} \perp \overrightarrow{AC} \\ B(-2,1) \end{cases} \rightarrow r_h : \begin{cases} \overrightarrow{v_h} = (7,-1) \\ B(-2,1) \end{cases} \rightarrow \frac{x+2}{7} = \frac{y-1}{-1} \rightarrow r_h : x + 7y = 5$$

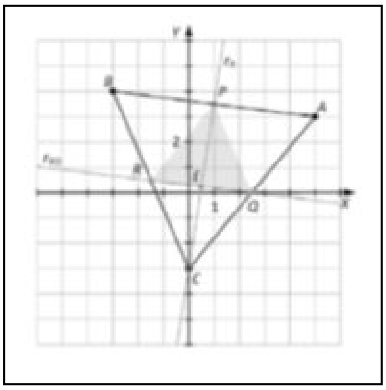
El punt d'intersecció de r_h amb la recta r_{AC} , permet obtenir la longitud de l'altura, *h*:

$$\left.\begin{array}{l} 7x - y = 4 \\ x + 7y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow D\left(\frac{33}{50}, \frac{31}{50}\right) \rightarrow h = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\left(\frac{133}{50}, -\frac{19}{50}\right)\right| = \frac{19\sqrt{2}}{10}$$

Per tant, $A_{triángulo} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot \dfrac{19\sqrt{2}}{10}}{2} = \dfrac{19}{2}\ \text{u}^2$.

142. Calcula l'àrea del triangle format quan unim els punts mitjans del triangle que té com a vèrtexs els punts A (5, 3), B (–3, 4) i C (0, –3).

Primer, es determinen els vèrtexs del triangle del que es cerca l'àrea:



- Punt mitjà de $\overline{AB}$: $P = \left(\dfrac{5-3}{2}, \dfrac{3+4}{2}\right) = \left(1, \dfrac{7}{2}\right)$
- Punt mitjà de $\overline{AC}$: $Q = \left(\dfrac{5+0}{2}, \dfrac{3-3}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$
- Punt mitjà de $\overline{BC}$: $R = \left(\dfrac{-3+0}{2}, \dfrac{4-3}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Prenem com a base el segment $\overline{RQ}$, és a dir:

$$b = \left|\overrightarrow{RQ}\right| = \sqrt{(4)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4{,}03$$

$$r_{RQ} : \begin{cases} \overrightarrow{RQ} = \left(4, -\dfrac{1}{2}\right) \\ Q = \left(\dfrac{5}{2}, 0\right) \end{cases} \rightarrow 2x + 16y = 5$$

La recta que definirà h complirà que:

$$r_h:\begin{cases}\overrightarrow{v_h}\perp\overrightarrow{RQ}\\ P\left(1,\frac{7}{2}\right)\end{cases}$$, és a dir, $$r_h:\begin{cases}\overrightarrow{v_h}=\left(\frac{1}{2},4\right)\\ P\left(1,\frac{7}{2}\right)\end{cases}\to\frac{x-1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{7}{2}}{4}\to 16x-2y=9$$

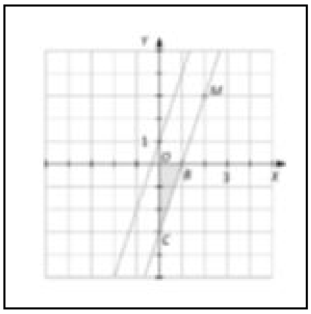
El punt de intersecció de r_h amb r_{RQ} permet obtenir la longitud de l'altura:

$$\left.\begin{array}{l}2x+16y=5\\16x-2y=9\end{array}\right\}\to E\left(\frac{31}{130},-\frac{337}{130}\right)\to h=\left|\overrightarrow{EP}\right|=\left|\left(\frac{99}{130},\frac{396}{65}\right)\right|\approx 6{,}14$$

Per tant, $A_{triángulo}=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{4{,}03\cdot 6{,}14}{2}=12{,}3721\ \mathrm{u}^2$ u^2.

143. La recta que passa per M (2, 3) i és paral·lela a la recta r : y = 3x + 1 determina un triangle amb els eixos de coordenades. Calcula'n l'àrea.

Primer calculem l'equació de la recta *s*:



$$s:\begin{cases}s\parallel r\\ M\in s\end{cases}\to\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(1,3)\\ M(2,3)\end{cases}\to 3x-y=3$$

A continuació, s'obtenen els punts d'intersecció de la recta *s* amb els eixos de coordenades:

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\3x-y=3\end{array}\right\}\to B(0,-3)\qquad\qquad \left.\begin{array}{l}y=0\\3x-y=3\end{array}\right\}\to C(1,0)$$

El triangle está format pels punts *O*, *B*, *C*. Com que són punts que es troben sobre els eixos de coordenades, els vectors $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OB}$ són perpendiculars. Llavors:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{1^2+0^2}=1\quad\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$$

I finalment s'obté l'àrea:

$$A_{triángulo}=\frac{\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}{2}=\frac{1\cdot 3}{2}=\frac{3}{2}\ \mathrm{u}^2$$

144. Els punts A(2, 2) i B(–10, –2) són els vèrtexs que corresponen al costat desigual d'un triangle isòsceles. L'altre costat es troba sobre la recta $\begin{cases}x=1-6t\\y=1+2t\end{cases}$. Determina el triangle i calcula'n l'àrea.

Igualem el mòdul dels vectors que van de la recta fins als punts A i B.

$$\sqrt{(1-6t-2)^2+(1+2t-2)^2}=\sqrt{(1-6t+10)^2+(1+2t+2)^2}$$

$$\to t=1\to C(-5,3)$$

Determinem les tongituds dels costats: $\overrightarrow{AB}=(-12,-4),\overrightarrow{AC}=(-7,1)i\ \overrightarrow{BC}=(5,5)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-12)^2 + (-4)^2} = \sqrt{160}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

Determinem l'altura sobre el costat diferent, utilitzant el teorema de Pitàgores:

$$H = \sqrt{(\sqrt{50})^2 - \left(\frac{\sqrt{160}}{2}\right)^2} = \sqrt{10}\ u$$

Per tant, l'àrea és: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{160} \cdot \sqrt{10}}{2} = 20\ u^2$

145. **Calcula l'àrea del quadrilàter que formen els punts (1, 3), (–2, 4), (–1, –3) i (3, –2).**

Siguin $A(1, 3)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, -3)$, $D(3, -2)$ els punts donats.

La representació gràfica mostra que el quadrilàter no és un paral·lelogram. Així doncs, per calcular l'àrea l'hem de dividir en dos triangles mitjançant una de les seves diagonals:

La diagonal, r_{AC}, té per equació:

$$r_{AC}: \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-2, -6) \\ A(1, 3) \end{cases} \rightarrow y = 3x$$

- Triangle *ABC*:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2, -6) \cdot (-3, 1) = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ Els costats $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ són perpendiculares. Llavors:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \rightarrow A_{ABC} = \frac{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 10\ \text{u}^2.$$

- Triangle *ADC*:

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = (2, -5) \cdot (4, 1) = 8 - 5 \neq 0 \rightarrow$ Els costats $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ són perpendiculars. Llavors, hem de calcular l'altura, *h*, relativa al costat del triangle que es triï com a base:

Base $= |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{10}$

La recta que definirà l'altura, h, compleix que:

$$r_h: \begin{cases} \overrightarrow{v_h} \perp \overrightarrow{AC} \\ D(3, -2) \end{cases}, \text{ és a dir, } r_h: \begin{cases} \overrightarrow{v_h} = (6, -2) \\ D(3, -2) \end{cases} \rightarrow x + 3y = -3$$

El punt d'intersecció de r_h amb r_{AC} permet obtenir la longitud de l'altura:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x \\ x + 3y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow E\left(-\frac{3}{10}, -\frac{-9}{10}\right) \rightarrow h = |\overrightarrow{ED}| = \left|\left(\frac{33}{10}, -\frac{11}{10}\right)\right| = \frac{11\sqrt{10}}{10}$$

Per tant, $A_{ADC} = \dfrac{2\sqrt{10}\cdot\dfrac{11\sqrt{10}}{10}}{2} = 11\,\text{u}^2$.

Així, $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = 10 + 11 = 21\ \text{u}^2$.

146. Determina el centre d'un paral·lelogram del qual coneixem tres vèrtexs: (5, –1), (9, 5) i (–1, –5). Quantes solucions té aquest problema? Per què? Fes un dibuix en què es vegin totes les solucions.

Assignem nom als punts indicats A(5, -1), B(9, 5) i C(-1,, -5)

$\overrightarrow{AB} = (4, 6)$

Fem una translació amb orígen en C i vector (4, 6) , i obtenim un punt D, que forma un paral·lelogram: D(3,1)

Calculem el centre del paral·lelogram, E:

$$(x, y) = \left(\frac{9-1}{2}, \frac{5-5}{2}\right) \rightarrow E(4, 0)$$

Fem una translació amb orígen en C i vector (-4, -6), i obtenim un punt D', que forma un paral·lelogram: D'(-5,-11)

Calculem el centre del paral·lelogram, E':

$$(x, y) = \left(\frac{9-5}{2}, \frac{5-11}{2}\right) \rightarrow E(2, -3)$$

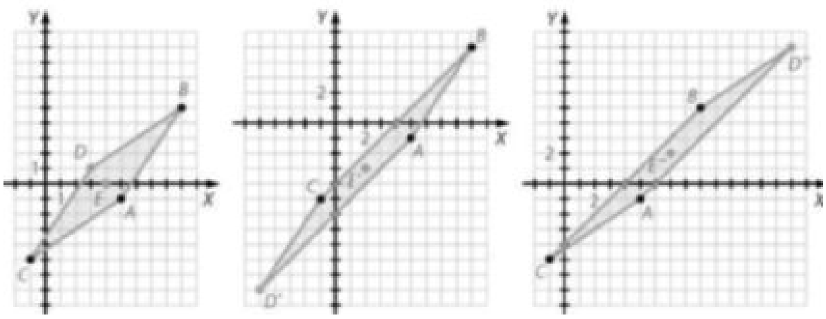
$\overrightarrow{CB} = (10, 10)$

Fem una translació amb orígen en A i vector (10, 10), i obtenim un punt D''=(15, 9)

Calculem el centre del paral·lelogram, E'':

$$(x, y) = \left(\frac{15-1}{2}, \frac{9-5}{2}\right) \rightarrow E''(7, 2)$$

Aquest problema té tres solucions.



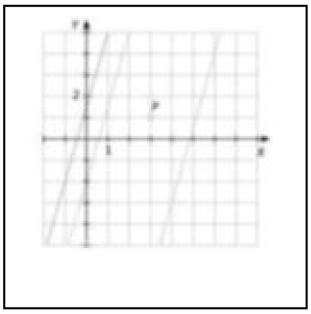
147. Calcula l'equació de les rectes paral·leles a la recta r: 10x – 3y + 4 = 0 que és a una distància 2 del punt P(3, 1).

Únicament hi ha dues rectes que compleixin les característiques donades. Com que són paral·leles a *r*, tenen el mateix vector director, és a dir són:

$s: 10x - 3y + c = 0 \qquad t: 10x - 3y + c' = 0$

Llavors, imposem la condició de la distància:

$$d = \frac{|10 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + c|}{\sqrt{9+100}} = 2 \to \frac{|27+c|}{\sqrt{109}} \to \begin{cases} \dfrac{27+c}{\sqrt{109}} = 2 & \text{si } c \geq -27 \\ \dfrac{-27-c}{\sqrt{109}} = 2 & \text{si } c < -27 \end{cases} \to \begin{cases} c = 2\sqrt{109} - 27 \\ c' = -2\sqrt{109} - 27 \end{cases}$$

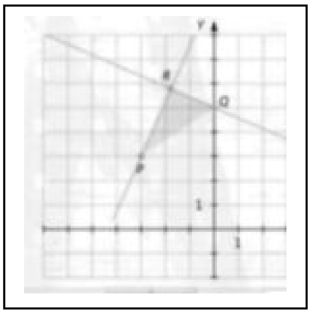


148. **Troba l'equació de la recta que passa pel punt P(–3, 3) i que és a una distància de 2 unitats del punt Q(0, 5).**

Com que la recta passa pel punt *P*:

$$ax + by + c = 0 \xrightarrow{P(-3,3)} -3a + 3b + c = 0$$

Es crea un triangle rectangle, amb vèrtexs *P*, *Q* i *R*, on *R* és la projecció del punt *Q* sobre la recta cercada:



$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \qquad |\overrightarrow{QR}| = 2 = |(x_R, y_R - 5)| = \sqrt{x_R^2 + (y_R - 5)^2} \to 4 = x_R^2 + (y_R - 5)^2$$

Pel teorema de Pitàgores:

$$13 = 4 + |\overrightarrow{PR}|^2 \to 3 = |\overrightarrow{PR}| \to (x_R + 3)^2 + (y_R - 3)^2 = 9$$

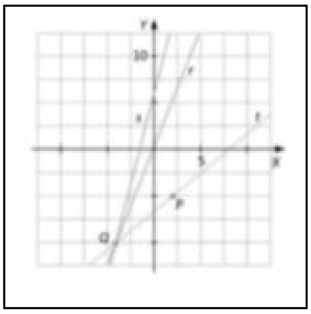
Resolem el sistema, s'obtenen les coordenades del punt *R*:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = x_R^2 + (y_R - 5)^2 \\ (x_R + 3)^2 + (y_R - 3)^2 = 9 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x_R = 0, \ y_R = 3 \to \text{No vàlida} \\ x_R = -\dfrac{24}{13}, \ y_R = \dfrac{75}{13} \end{cases} \to R\left(-\dfrac{24}{13}, \dfrac{75}{13}\right)$$

La recta que cerquem, és troba determinada pels punts *P* i *R*:

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{PR}=R-P=\left(\dfrac{15}{13},\dfrac{36}{13}\right)\\ P(-3,3)\end{cases}\to r:36x-15y=-153$$

149. **Assenyala l'equació de la recta que passa pel punt P(2, –5) i per la intersecció de les rectes r : 5x – 2y + 1 = 0 i s: 4x – y + 7 = 0.**



Primer s'obté el punt *Q*, intersecció de les rectes *r* i *s*:

$$\left.\begin{array}{l}5x-2y+1=0\\ 4x-y+7=0\end{array}\right\}\xrightarrow{y=4x+7}5x-2(4x+7)+1=0\to Q\left(-\frac{13}{3},-\frac{31}{3}\right)$$

Per finalitzar es calcula l'equació de la recta que passa pels punts *P* i *Q*:

$$\left.\begin{array}{l}P(2,-5)\\ Q\left(-\dfrac{13}{3},-\dfrac{31}{3}\right)\end{array}\right\}\to m=\frac{-5+\dfrac{31}{3}}{2+\dfrac{13}{3}}=\frac{16}{19}\to t:16x-19y-127=0$$

150. **Calcula el valor de k perquè aquestes tres rectes es tallin en el mateix punt. Determina les coordenades d'aquest punt.**

2 x + 5y – 1 = 0 –x + 2y + k = 0 4x + 7y – 5 = 0

Posem nom a les rectes donades *r*, *s*, i *t,* respectivament:

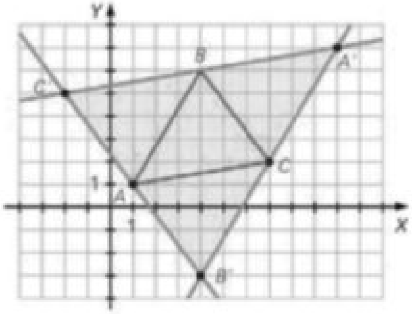
$$r:2x+5y-1=0$$
$$s:-x+2y+k=0$$
$$t:4x+7y-5=0$$

Calculem el punt d'intersecció, *P*, de les rectes *r* i *t*, i fem que aquest punt pertanyi a la recta, s'obté *k*:

$$\left.\begin{array}{l}2x+5y-1=0\\ 4x+7y-5=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}-4x-10y+2=0\\ 4x+7y-5=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}-3y-3=0\to P(3,-1)$$

$$-x+2y+k=0\xrightarrow{P(3,-1)\,\in\, s}-3-2+k=0\to k=5$$

151. **Considera el triangle de vèrtexs A(1, 1), B(4, 6) i C(7, 2). Les rectes paral·leles per cada vèrtex al costat oposat formen un triangle A'B'C'**



.

Determina les coordenades d'aquests vèrtexs i comprova que els dos triangles són semblants calculant-ne els angles respectius.

Primer es calculen les equacions de les rectes determinades pels punts A', B' i C' dos a dos:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_{A'B'}} = B - A = (3,5)\\ C(7,2)\end{aligned}\right\} \rightarrow r_{A'B'}:\ 5x - 3y = 29$$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{v_{AC}} = \overrightarrow{v_{A'C'}} = C - A = (6,1)\\ B(4,6)\end{aligned}\right\} \rightarrow r_{A'C'}:\ x - 6y = -32$$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{v_{BC}} = \overrightarrow{v_{B'C'}} = C - B = (3,-4)\\ A(1,1)\end{aligned}\right\} \rightarrow r_{B'C'}:\ 4x + 3y = 7$$

A continuació, s'obtenen les coordenades de A', B' i C' amb les respectives interseccions de les rectes anteriors:

$$A' = r_{A'B'} \cap r_{A'C'} \rightarrow \left.\begin{aligned}5x - 3y = 29\\ x - 6y = -32\end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=6y-32} 5(6y-32) - 3y = 29 \rightarrow A'(10,7)$$

$$B' = r_{A'B'} \cap r_{B'C'} \rightarrow \left.\begin{aligned}5x - 3y = 29\\ 4x + 3y = 7\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Reducció}} B'(4,-3)$$

$$C' = r_{A'C'} \cap r_{B'C'} \rightarrow \left.\begin{aligned}x - 6y = -32\\ 4x + 3y = 7\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}-4x + 24y = 128\\ 4x + 3y = 7\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Reducció}} C'(-2,5)$$

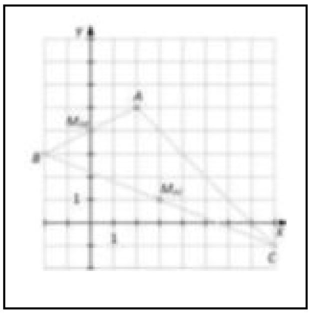
Per acabar, es comprova que els dos triángles són semblants:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{v_{AB}} \cdot \overrightarrow{v_{BC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AB}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{BC}}\right|} = \frac{\overrightarrow{v_{A'B'}} \cdot \overrightarrow{v_{B'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'B'}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{B'C'}}\right|} = \cos\beta' = \frac{-11}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{9+16}} \rightarrow \beta = \beta' = 67{,}834° \rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{v_{AC}} \cdot \overrightarrow{v_{BC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AC}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{BC}}\right|} = \frac{\overrightarrow{v_{A'C'}} \cdot \overrightarrow{v_{B'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'C'}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{B'C'}}\right|} = \cos\gamma' = \frac{14}{\sqrt{36+1} \cdot \sqrt{9+16}} \rightarrow \gamma = \gamma' = 62{,}592° \rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_{AB}} \cdot \overrightarrow{v_{AC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AB}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{AC}}\right|} = \frac{\overrightarrow{v_{A'B'}} \cdot \overrightarrow{v_{A'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'B'}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{A'C'}}\right|} = \cos\alpha' = \frac{23}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{36+1}} \rightarrow \alpha = 49{,}574° \rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

152. **En un triangle ABC, un vèrtex és A(2, 5). El punt mitjà del costat BC és (3, 1) i el punt mitjà del costat AB és (0, 4). Calcula els vèrtexs B i C del triangle.**



$$M_{AB} = \frac{A+B}{2} \to (0,4) = \frac{(2,5)+(b_1+b_2)}{2} \to B(-2,3)$$

$$M_{BC} = \frac{B+C}{2} \to (3,1) = \frac{(-2,3)+(c_1+c_2)}{2} \to C(8,-1)$$

153. **Determina les coordenades d'un punt P sabent que pertany a la recta r : x – y + 1 = 0 i que dista 5 unitats de l'orígen de coordenades.**

Sigui el punt $P(x,y)$. P ha de complir $\left.\begin{array}{r} d(P,O)=5 \\ P\in r \end{array}\right\}$. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{PO}\right| = \sqrt{a^2+b^2} = 5 \to a^2+b^2 = 25 \\ a-b+1=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=b-1} (b-1)^2+b^2 = 25 \to \begin{cases} P_1(-4,-3) \\ P_2 = (3,4) \end{cases}$$

154. **Calcula les coordenades dels punts de la recta r : 2 x + 3y + 4 = 0 que es troben a una distancia de 2 unitats de la recta s: 3x + 4y – 6 = 0.**

Anomenarem $P(a,b)$ al punt o punts buscats:

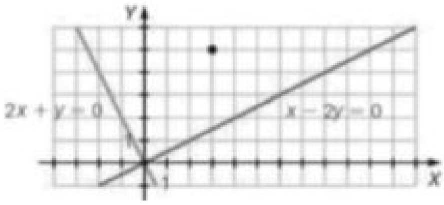
- Per una banda, $P\in r \to 2a+3b+4=0$.
- D'altra banda, imposem la condició de la distància: $d(P,s) = \frac{|3a+4b-6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|3a+4b-6|}{5} = 2$

Resolem el sistema format per ambes equacions, s'obté *P*:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+3b+4=0 \\ \frac{3a+4b-6}{5} = 2 \end{array}\right\} \to x = 64 \to y = -44 \to P_1(64,-44)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a+3b+4=0 \\ \frac{-3a-4b+6}{5} = 2 \end{array}\right\} \to x = 4 \to y = -4 \to P_2(4,-4)$$

155. Un dels vèrtexs d'un paral·lelogram és l'orígen de coordenades i un altre vèrtex és el punt (3, 5). Troba les coordenades dels altres dos vèrtexs si un és a la recta d'equació x – 2y = 0 i l'altre es troba a la recta d'equació 2 x + y = 0.



Sigui $A(3,5)$, $r: x-2y=0$ i $s: 2x+y=0$ el punt i les rectes conegudes.

Les rectes donades són perpendiculars, ja que el seu producte escalar és zero.

$(2,1)\cdot(-1,2)=-2+2=0$

Amb aquesta observació és fàcil calcular les equacions dels costats que manquen:

- Recta *t*:

Aquella paral·lela a *s* que passa per *A*:

$\vec{v_s}=(-1,2)\rightarrow\vec{v_t}=(-1,2)\xrightarrow{A\in t} t:\ 2x+y=11$

- Recta *z*:

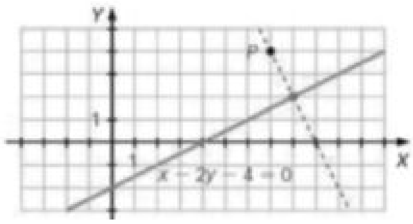
Aquella paral·lela a *r* que passa per *A*:

$\vec{v_r}=(2,1)\rightarrow\vec{v_z}=(2,1)\xrightarrow{A\in z} z:\ x-2y=-7$

Llavors, els vèrtexs desconeguts del rectangle són els punts d'intersecció següents:

$B=r\cap t\rightarrow \left.\begin{array}{l}x-2y=0\\2x+y=11\end{array}\right\}\rightarrow B\left(\frac{22}{5},\frac{11}{5}\right)$ $\qquad C=s\cap z\rightarrow \left.\begin{array}{l}2x+y=0\\x-2y=-7\end{array}\right\}\rightarrow C\left(-\frac{7}{5},\frac{14}{5}\right)$

156. Determina la projecció ortogonal del punt P (7, 4) sobre la recta x – 2y – 4 = 0.



Sigui $r: x-2y-4=0$.

Per començar es calcula la recta, *s*, perpendicular a *r* que passa per *P*:

$\vec{v_r}=(2,1)\rightarrow\vec{v_s}=(-1,2)\xrightarrow{P\in s} s:\ 2x+y=18$

Així, la projecció ortogonal del punt *P* sobre la recta *r*, és un altre punt, Q, que ve determinat per l'intersecció entre *r* i *s*:

$\left.\begin{array}{l}x-2y=4\\2x+y=18\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2y+4}2(2y+4)+y=18\rightarrow y=2\rightarrow x=8\rightarrow Q(8,2)$

157. **Troba un punt a l'eix d'abscisses que estigui a la mateixa distància del punt A(5, 4) que de la recta $\boldsymbol{r}$: $\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{3}$.**

Sigui $P(a,0)$ el punt que busquem. Llavors:

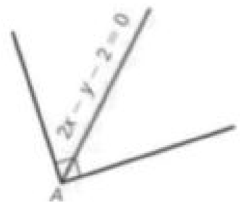
$$d(P,A)=d(P,r)\rightarrow\sqrt{(5-a)^2+4^2}=\frac{|3a+19|}{\sqrt{4^2+3^2}}\rightarrow\left(\sqrt{(5-a)^2+4^2}\right)^2=\frac{(3a+19)^2}{25}\rightarrow$$

$$\rightarrow 16a^2-364a+664=0\rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=\dfrac{83}{4}\end{cases}$$

És senzill comprovar que ambdues solucions són vàlides. Per tant, hi ha dos punts que són solució:

$P_1(2,0)$ $\qquad$ $P_2\left(\frac{83}{4},0\right)$

158. **Un angle recte té el vèrtex en el punt A(3, 4) i l'equació de la seva bisectriu és 2 x – y – 2 = 0. Troba les equacions dels costats.**



La bisectriu té per vector director (1, 2).

Escrivim l'equació punt-pendent dels costats:

Y - 4 = m (x – 3) → -mx + y – 4 + 3m = 0

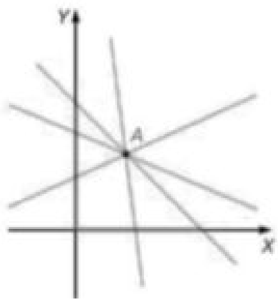
Apliquem la fórmula de l'angle entre dues rectes:

$$\cos 45° = \frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|1\cdot 1+2\cdot m|}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+m^2}}$$

$$\rightarrow m=-3, m=\tfrac{1}{3}$$

Les equacions són: $3x+y-13=0$ $\qquad$ $-\frac{1}{3}x+y-3=0$

159. **De totes les rectes que passen pel punt A(2, 3), calcula la recta que determina segments iguals quan talla els eixos cartesians.**



Les rectes que passen per A són de la forma

$y-3 = m(x-2)$

Aquestes rectes tallen als eixos en els punts:

$(0, 3-2m)\left(\frac{-3+2m}{m}, 0\right)$

La distància a l'orígen (0,0) ha de ser sigual:

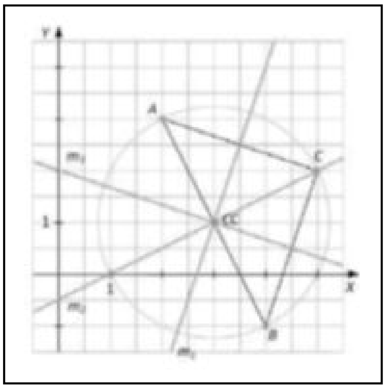
$\sqrt{(3-2m)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3+2m}{m}\right)^2}$ → Hi ha tres solucions.

$m_1 = -1 \rightarrow y = -x+5$

$m_2 = 1 \rightarrow y = x+1$

$m_3 = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$

160. **Indica les coordenades del circumcentre del triangle de vèrtexs A(2, 3), B(4, –1) i C(5, 2), sabent que el circumcentre equidista dels vèrtexs.**



Per trobar les coordenades del circumcentre només cal calcular les equacions de dues de les mediatrius del triangle i obtenir la seva intersecció:

- Mediatriu 1:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (3,-1) \rightarrow \overrightarrow{v_{m_1}} = (1,3) \\ M_1 = \frac{A+C}{2} \rightarrow M_1 = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) \end{array}\right\} \rightarrow m_1 : 3x - y = 8$$

- Mediatriu 2:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,-4) \rightarrow \overrightarrow{v_{m_2}} = (4,2) \\ M_2 = \frac{A+B}{2} \rightarrow M_2 = (3,1) \end{array}\right\} \rightarrow m_2 : x - 2y = 1$$

Així, el circumcentre és el punt $CC = m_1 \cap m_2$:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 8 \\ x - 2y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2y+1} CC(3,1)$$

Obtenim la tercera mediatriu, i veiem si passa pel circumcentre, es comprova si l´hem calculat bé:

$m_3 :\ x+3y=6 \xrightarrow{CC(3,1)} 3+3=6 \rightarrow$ És correcte.

161. **Determina l'equació de la recta que talla els eixos de coordenades en els punts (3, 0) i (0, 5).**

Confirma que aquesta equació es pot escriure en la forma $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$.

Comprova que si una recta talla els eixos en els punts (a, 0) i (0, b), la seva equació es pot escriure en la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Aquesta manera d'escriure una recta s'anomena forma canònica o segmentària.

Siguin $A(3,0)$ i $B(0,5)$:

La recta *r*, que passa per (3,0) i (0,5) és:

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_r=(3,0)-(0,5)=(3,-5)\\ A(3,0)\end{aligned}\right\} \rightarrow r:\ 5x+3y=15$$

En general, si una recta talla als eixos en els punts $P(a,0)$ i $Q(0,b)$, la seva equació és:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-a,b)\\ P(a,0)\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b} \rightarrow -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b} \rightarrow s:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

162. **Donat el segment AB, en què A(–2, 1) i B(2, 3), construeix els possibles triangles equilàters en els quals AB és un dels costats.**

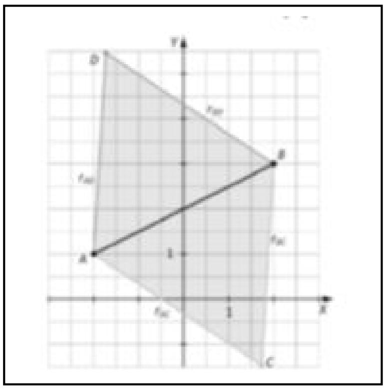
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=(4,2)\\ A(-2,1)\end{aligned}\right\} \rightarrow r_{AB}:\ x-2y=-4$$

L'equació genèrica de les rectes cercades que passen per *A* és:

$y+2=m(x-1) \rightarrow mx-y-(2+m)=0$

Així, apliquem la condició de l'angle, i s'obtenim les possibles pendents:

$$\cos 60^\circ=\frac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}\right)^2 \rightarrow m^2-16m-11=0 \rightarrow \begin{cases} m_1=8-5\sqrt{3}\\ m_2=8+5\sqrt{3}\end{cases}$$



Llavors, tenim que:

$$\begin{cases} m_1 = 8-5\sqrt{3} \rightarrow & r_{AC}: \ (8-5\sqrt{3})x - y - (10-5\sqrt{3}) = 0 \\ m_2 = 8+5\sqrt{3} \rightarrow & r_{AD}: \ (8+5\sqrt{3})x - y - (10+5\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

L'equació genèrica de les rectes que busquem, passen per les $y-3 = m(x-2) \rightarrow mx - y + (3-2m) = 0$:

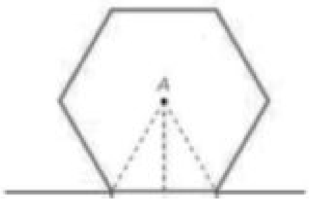
Així, tenim $\begin{cases} m_1 = 8-5\sqrt{3} \rightarrow & r_{BD}: \ (8-5\sqrt{3})x - y + (-13+10\sqrt{3}) = 0 \\ m_2 = 8+5\sqrt{3} \rightarrow & r_{CB}: \ (8+5\sqrt{3})x - y + (-13-10\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$

Fent les corresponents interseccions s'obté els punts *C* i *D*, vèrtexs dels dos triangles possibles:

$$C = r_{AC} \cap r_{CB} \rightarrow \left.\begin{matrix} (8-5\sqrt{3})x - y - (10-5\sqrt{3}) = 0 \\ (8+5\sqrt{3})x - y + (-13-10\sqrt{3}) = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \ldots \rightarrow C\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{10}, \ \frac{1}{2}-\frac{17\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$D = r_{AD} \cap r_{BD} \rightarrow \left.\begin{matrix} (8+5\sqrt{3})x - y - (10+5\sqrt{3}) = 0 \\ (8-5\sqrt{3})x - y + (-13+10\sqrt{3}) = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \ldots \rightarrow D\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{10}, \ \frac{1}{2}+\frac{17\sqrt{3}}{10}\right)$$

163. **El centre d'un hexàgon regular és el punt A(6, –2) i un costat es troba sobre la recta d'equació –4x + 3y + 5 = 0. Determina'n les coordenades dels vèrtexs i l'àrea.**



Calculem la longitud de l'apotema:

$$d(A,r) = \frac{|-4\cdot 6 + 3\cdot(-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 5$$

Determinem la longitud del costat: $l = \sqrt{5^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow l = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ u$

Determinem l'àrea: $A = \frac{P\cdot a_p}{2} = \frac{6\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot 5}{2} = 50\sqrt{3}u^2$

Calculem els punts sabent que la distància entre ells és $\frac{10\sqrt{3}}{3}\ u$ i que pertanyen a la recta donada:

$$\begin{cases} \frac{10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{(6-x)^2 + (-2-y)^2} \\ -4x + 3y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} + 2, y_1 = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} + 2, y_2 = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$B\left(\sqrt{3} + 2{,}1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ $\qquad$ $C\left(-\sqrt{3} + 2{,}1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

Altres dos vèrtexs són simètrics als vèrtexs calculats respecte de A.

$$(6,-2)=\left(\frac{\sqrt{3}+2+x}{2},\frac{1+\frac{4\sqrt{3}}{3}+y}{2}\right)\rightarrow D\left(10-\sqrt{3},-5-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(6,-2)=\left(\frac{-\sqrt{3}+2+x}{2},\frac{1-\frac{4\sqrt{3}}{3}+y}{2}\right)\rightarrow E\left(10+\sqrt{3},-5+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

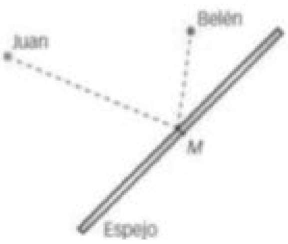
Per calcular la resta de vèrtexs tenim en consideració la longitud dels costats.

$$\begin{cases}\sqrt{(10+\sqrt{3}-x)^2+\left(-5+\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ \sqrt{(\sqrt{3}+2-x)^2+\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=6,y=-2\\ x=2\sqrt{3}+6,y=\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{(10-\sqrt{3}-x)^2+\left(-5-\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ \sqrt{(-\sqrt{3}+2-x)^2+\left(1-\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=6,y=-2\\ x=-2\sqrt{3}+6,y=-\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\end{cases}$$

$F\left(2\sqrt{3}+6,\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\right)$ $\qquad$ $G\left(-2\sqrt{3}+6,-\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\right)$

164. En Joan i la Betlem es miren l'un a l'altra a través d'un mirall situat segons la recta d'equació y = –x + 2. La Betlem es troba en el punt (–9, –1), i en Joan en el (–4, 3). Quines coordenades té el punt M on miren?



Determinem el vector director de la recta donada:

$\overrightarrow{u_r}=(1,-1)$

Un vector perpendicular és $\overrightarrow{u_s}=(1,1)$.

La recta, perpendicular al mirall, que passa per on hi ha la Betlem és:

$$\begin{cases}x=-9+\lambda\\ y=-1+\lambda\end{cases}$$

Determinem el punt de tall de les dues rectes:

$-1+\lambda\ =9-\ \lambda+2\rightarrow\ \lambda=6\rightarrow\ (-3,5)$

Determinem el punt simètric respecte del mirall, B':

$$(-3,5)=\left(\frac{x-9}{2},\frac{y-1}{2}\right)\rightarrow B'=(3,11)$$

Repetim el procés amb l'altre punt donat i obtenim J':

$$\begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$$

$$3 + \lambda = 4 - \lambda + 2 \to \lambda = \frac{3}{2} \to \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \to J'(-1{,}6)$$

Determinem la recta que passa per (-9,1) i per J':

$$\begin{cases} x = -9 + 8\lambda \\ y = -1 + 7\lambda \end{cases}$$

Calculem la recta que passa per (-4,3) i per B':

$$\begin{cases} x = -4 + 7\mu \\ y = 3 + 8\mu \end{cases}$$

Determinem el punt de tall de ler rectes.

$$\begin{cases} -9 + 8\lambda = -4 + 7\mu \\ -1 + 7\lambda = 3 + 8\mu \end{cases} \to \lambda = \frac{4}{5} \to \mu = \frac{1}{5}$$

El punt de tall és: $\left(-\frac{13}{5}, \frac{23}{5}\right)$

165. La recta –2 x + y = –3 és la mediatriu d'un segment AB amb A(–2, 3). Quines són les coordenades del punt B?

La recta perpendicular a la mediatriu que conté el punt *A*, és a dir, la recta que conté al segment *AB* és:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{AB}} = (2,-1) \\ A(-2,3) \end{array}\right\} \to \quad r: \ x + 2y = 4$$

El seu punt de tall amb la mediatriu és $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ -2x + y = -3 \end{array}\right\} \to C(2,1)$, que és el punt mitjà del segment *AB*.

Llavors, les coordenades de *B*, punt simètric de *A* respecte de *C* són:

$$B(2 \cdot 2 + 2, \ \ 2 \cdot 1 - 3) = (6,-1)$$