Trigonometria

5

ACTIVITATS

1. **Determina l'equivalència en radians d'aquests angles:**

a) 10º **b) 135º** **c) -60º**

a) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{20\pi}{360} = \frac{\pi}{18}$ rad

b) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{135} \rightarrow x = \frac{270\pi}{360} = \frac{3\pi}{4}$ rad

c) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{-60} \rightarrow x = \frac{-120\pi}{360} = \frac{-\pi}{3}$ rad

2. **Calcula la mida en graus dels angles següents:**

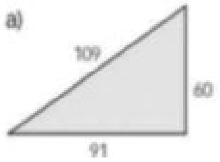
a) $\frac{2\pi}{3}$ rad **b) 3 rad** **c) -$\frac{4\pi}{3}$ rad**

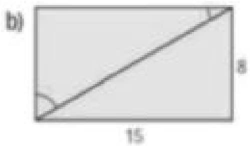
a) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{\frac{2\pi}{3}} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 2\pi}{6\pi} = 120^\circ$

b) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{3} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 3}{2\pi} = 171{,}88^\circ$

c) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{-\frac{4\pi}{3}} \rightarrow x = \frac{-360 \cdot 4\pi}{6\pi} = -240^\circ$

3. **Calcula les raons trigonomètriques dels triangles aguts següents:**





a) $\sin\alpha = \frac{60}{109}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{60}{91}$ $\quad$ $\sec\alpha = \frac{109}{91}$

$\cos\alpha = \frac{91}{109}$ $\quad$ $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{109}{60}$ $\quad$ $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{91}{60}$

$\sin\beta = \frac{91}{109}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{91}{60}$ $\quad$ $\sec\beta = \frac{109}{60}$

$\cos\beta = \frac{60}{109}$ $\quad$ $\mathrm{cosec}\,\beta = \frac{109}{91}$ $\quad$ $\mathrm{cotg}\,\beta = \frac{60}{91}$

b) $\sin\alpha=\sin\gamma=\frac{8}{17}$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha=\text{tg}\,\gamma=\frac{8}{15}$ $\quad$ $\sec\alpha=\sec\gamma=\frac{17}{15}$

$\cos\alpha=\cos\gamma=\frac{15}{17}$ $\quad$ $\text{cosec}\,\alpha=\text{cosec}\,\gamma=\frac{17}{8}$ $\quad$ $\text{cotg}\,\alpha=\text{cotg}\,\gamma=\frac{15}{8}$

$\sin\beta=\sin\delta=\frac{15}{17}$ $\quad$ $\text{tg}\,\beta=\text{tg}\,\delta=\frac{15}{8}$ $\quad$ $\sec\beta=\sec\delta=\frac{17}{8}$

$\cos\beta=\cos\delta=\frac{8}{17}$ $\quad$ $\text{cosec}\,\beta=\text{cosec}\,\delta=\frac{17}{15}$ $\quad$ $\text{cotg}\,\beta=\text{cotg}\,\delta=\frac{8}{15}$

4. **Demostra que es compleixen les igualtats següents:**

a) $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$

b) $\text{cosec}\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

c) $\text{cotg}\,\alpha=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

a) $\sec\alpha=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\cos\alpha}$

b) $\text{cosec}\,\alpha=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\sin\alpha}$

c) $\text{cotg}\,\alpha=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5. **Calcula les raons trigonomètriques de l'angle a si:**

a) $\cos\alpha=\frac{7}{25}$ $\qquad$ **c)** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{tg}\,\alpha=1{,}67$ $\qquad$ **d)** $\text{tg}\,\alpha=0{,}3$

a) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=\frac{24}{25}$

$\text{tg}\,\alpha=\frac{24}{7}$ $\quad$ $\text{cosec}\,\alpha=\frac{25}{24}$ $\quad$ $\sec\alpha=\frac{25}{7}$ $\quad$ $\text{cotg}\,\alpha=\frac{7}{24}$

b) $1+\text{tg}^2\,\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+1{,}67^2}}=0{,}51$

$\sin\alpha=\text{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha=1{,}67\cdot0{,}51=0{,}85$

$\text{cotg}\,\alpha=0{,}60$ $\quad$ $\text{cosec}\,\alpha=1{,}18$ $\quad$ $\sec\alpha=1{,}96$

c) $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \text{tg}\,\alpha = 1 \quad \text{cosec}\,\alpha = \sqrt{2} \quad \sec\alpha = \sqrt{2} \quad \text{cotg}\,\alpha = 1$

d) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+0{,}3^2}} = 0{,}96 \quad \sin\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}3 \cdot 0{,}96 = 0{,}29$

$\text{cosec}\,\alpha = 3{,}45 \quad \sec\alpha = 1{,}04 \quad \text{cotg}\,\alpha = 3{,}33$

6. Justifica si hi ha cap angle per al qual es verifiqui que:

a) sin α = 0,3 i cos α = 0,8

b) sin α = 0,72 i tg α = 1,04

c) cos α = 0,1 i sin α = 0,99

a) No existeix, ja que no verifica les relacions trigonomètriques.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 0{,}3^2 + 0{,}8^2 = 0{,}73 \neq 1$

b) Sí que existeix, ja que verifica les relacions trigonomètriques.

Calculem el cosinus: $1{,}04 = \frac{0{,}72}{\cos\alpha} \rightarrow \cos\alpha = 0{,}69 \rightarrow 0{,}72^2 + 0{,}69^2 = 1$

c) Sí que existeix, ja que verifica les relacions trigonomètriques.

$0{,}1^2 + 0{,}99^2 = 1$

7. Calcula el valor de les expressions següents:

a) cos 30º - sin 60º + tg 45º

b) cos² 60º - sin² 45º

c) tg 60º + sin 45º - cos² 30º

d) tg 30º + tg 60º - sin 30º cos 30º

a) $\cos 30° - \sin 60° + \text{tg}\,45° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$

b) $\cos^2 60° - \sin^2 45° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

c) $\text{tg}\,60° + \sin 45° - \cos^2 30° = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-3+4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{4}$

d) $\text{tg}\,30° + \text{tg}\,60° - \sin 30° \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{12}$

8. Determina aquests valors amb la calculadora:

a) cos 79º **b) sin 43,5º** **c) tg 10º 28'**

a) $\cos 79° = 0{,}19$ b) $\sin 43{,}5° = 0{,}69$ c) $10°28' = 10{,}4\widehat{6}° \rightarrow \text{tg}\,10°28' = 0{,}18$

9. Troba aquestes raons trigonomètriques amb la calculadora:

a) sin (0,35 rad) **b) cos (1 rad)** **c) tg (1,27 rad)**

a) $\sin 0{,}35\text{rad} = 0{,}34$ b) $\cos 1\ \text{rad} = 0{,}54$ c) $\text{tg}\, 1{,}27\ \text{rad} = 3{,}22$

10. Indica el signe de les raons trigonomètriques d'aquests angles i identifica el quadrant on són:

a) 66º **c) 175º** **e) 342º**

b) 18º **d) 135º** **f) 120º**

a) És al 1r quadrant; totes les raons trigonomètriques són positives.

b) És al 1r quadrant; totes les raons trigonomètriques són positives.

c) És al 2n quadrant; el sinus i la cosecant són positius, i la resta de les raons trigonomètriques són negatives.

d) És al 2n quadrant; el sinus i la cosecant són positius, i la resta de les raons trigonomètriques són negatives.

e) És al 4t quadrant; el cosinus i la secant són positius, i la resta de les raons trigonomètriques són negatives.

f) És al 2n quadrant; el sinus i la cosecant són positius, i la resta de les raons trigonomètriques són negatives.

11. Ordena de més petit a més gran els cosinus dels angles següents sense calcular-los:

34º 72º 98º 160º 251º 345º

S'ordenen tenint en compte que el cosinus és positiu en angles del primer i del quart quadrants:

$\cos 160° < \cos 251° < \cos 98° < \cos 72° < \cos 34° < \cos 345°$

12. Justifica la resposta.

a) Per què no existeix tg 90º?

b) Passa el mateix amb tots els angles que són múltiples de 90º?

No existeix, perquè cos 90º = 0

Si multipliquem 90º per un nombre parell, la tg és cero, perquè el sinus és 0 i el cosinus és 1.

Si multipliquem 90º per un nombre imparell, la tangent no és definida, perquè el cosinus és 0.

13. **Ordena de més petita a més gran les tangents dels angles següents sense calcular-les:**

65º **110º** **170º** **210º** **315º**

Les tangents del primer i del tercer quadrants són positives, les del segon i del quart són negatives.

$\mathrm{tg}\,110^\circ < \mathrm{tg}\,315^\circ < \mathrm{tg}\,170^\circ < \mathrm{tg}\,210^\circ < \mathrm{tg}\,65^\circ$

14. **Si saps que cos 50° = 0,6428 troba les raons trigonomètriques d'aquests angles.**

a) 130º **b) 230º** **c) -50º** **d) 310º**

Calculem el sinus de 500: $\sin^2 50^\circ + 0,6428^2 = 1 \rightarrow \sin 50^\circ = 0,766$

a) $-\cos 50^\circ = \cos 130^\circ = -0,6428$ $\sin 50^\circ = \sin 130^\circ = 0,766$ $\mathrm{tg}\,130^\circ = -1,1918$

$\sec 130^\circ = -1,5557$ $\mathrm{cosec}\,130^\circ = 1,3054$ $\mathrm{cotg}\,130^\circ = -0,8391$

b) $-\cos 50^\circ = \cos 230^\circ = -0,6428$ $-\sin 50^\circ = \sin 230^\circ = -0,766$ $\mathrm{tg}\,230^\circ = 1,1918$

$\sec 230^\circ = -1,5557$ $\mathrm{cosec}\,230^\circ = -1,3054$ $\mathrm{cotg}\,230^\circ = 0,8391$

c) $-\cos 50^\circ = \cos(-50^\circ) = 0,6428$ $-\sin 50^\circ = \sin(-50^\circ) = -0,766$ $\mathrm{tg}(-50^\circ) = -1,1918$

$\sec(-50^\circ) = 1,5557$ $\mathrm{cosec}(-50^\circ) = -1,3054$ $\mathrm{cotg}(-50^\circ) = -0,8391$

d) $\cos 50^\circ = \cos 310^\circ = 0,6428$ $-\sin 50^\circ = \sin 310^\circ = -0,766$ $\mathrm{tg}\,310^\circ = -1,1918$

$\sec 310^\circ = 1,5557$ $\mathrm{cosec}\,310^\circ = -1,3054$ $\mathrm{cotg}\,310^\circ = -0,8391$

15. **Si saps que sin 25° = 0,4226 troba les raons trigonomètriques dels angles següents.**

a) 745º **b) 565º** **c) 1055º** **d) 1235º**

a) $745^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 25^\circ \rightarrow \sin 745^\circ = 0,4226$

$\cos 745^\circ = 0,9063 \rightarrow \mathrm{tg}\,745^\circ = 0,4663$

b) $565^\circ = 360^\circ + 180^\circ + 25^\circ \rightarrow \sin 565^\circ = -0,4226$

$\cos 565^\circ = -0,9063 \rightarrow \mathrm{tg}\,565^\circ = 0,4663$

c) $1055^\circ = 3 \cdot 360^\circ - 25^\circ \rightarrow \sin 1055^\circ = -0,4226$

$\cos 1055^\circ = 0,9063 \rightarrow \mathrm{tg}\,1055^\circ = -0,4663$

d) $1235^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 180^\circ - 25^\circ \rightarrow \sin 1235^\circ = 0,4226$

$\cos 1235^\circ = -0,9063 \rightarrow \mathrm{tg}\,1235^\circ = -0,4663$

16. Si saps que $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, calcula:

a) sin (90º– α) **b) sin (180º– α)** **c) sin (– α)**

a) $\frac{1}{5} = \sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

Substituïm en l'expressió per calcular $\sin(180° - \alpha)$:

$$\cos^2(90° - \alpha) + \sin^2(90° - \alpha) = 1 \rightarrow \sin^2(90° - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

b) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{1}{5}$

c) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha = -\frac{1}{5}$

17. Si sin 18° = 0,309 i cos 18° = 0,951; calcula:

a) sin 72º **b) cos 162º** **c) tg(-72º)**

a) $\sin 72° = \sin(90° - 18°) = \cos 18° = 0{,}951$

b) $\cos 162° = \cos(180° - 18°) = -\cos 18° = -0{,}951$

c) $\mathrm{tg}(-72°) = -\mathrm{tg}\,72° = -\mathrm{tg}(90° - 18°) = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,18°} = -\frac{\cos 18°}{\sin 18°} = -\frac{0{,}951}{0{,}309} = -3{,}0777$

18. Donats els angles següents, contesta les preguntes que tens a continuació:

25º 65º 115º 155º -25 -65º

a) Quins angles tenen el mateix sinus? I el mateix cosinus?

b) Quins angles tenen igual la tangent?

a) $\sin 25° = \sin 155°$ $\sin 65° = \sin 115°$ $\cos 65° = \cos(-65°)$ $\cos 25° = \cos(-25°)$

b) $\mathrm{tg}\,115° = \mathrm{tg}(-65°)$ $\mathrm{tg}\,155° = \mathrm{tg}(-25°)$

19. A partir de les raons de 45º i 60º, calcula les raons trigonomètriques de 105º i 15º.

$$\sin(60° + 45°) = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}9659$$

$$\cos(60° + 45°) = \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}2588$$

$$\mathrm{tg}\,(60° + 45°) = \frac{\mathrm{tg}\,60° + \mathrm{tg}\,45°}{1 - \mathrm{tg}\,60°\,\mathrm{tg}\,45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -3{,}7321$$

$$\sin\left(60^\circ-45^\circ\right)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}2588$$

$$\cos(60^\circ-45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}9659$$

$$\text{tg}\,(60^\circ-45^\circ)=\frac{\text{tg}\,60^\circ-\text{tg}\,45^\circ}{1+\text{tg}\,60^\circ\,\text{tg}\,45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=0{,}2679$$

20. **Calcula les raons trigonomètriques de 76º i 19º si saps que cos 38° = 0,788 i sin 38° = 0,6157.**

$$\cos 76^\circ=\cos(2\cdot 38^\circ)=\cos^2 38^\circ-\sin^2 38^\circ=0{,}2419$$
$$\sin 76^\circ=\sin(2\cdot 38^\circ)=2\sin 38^\circ\cos 38^\circ=0{,}9703$$
$$\text{tg}\,38^\circ=\frac{0{,}6157}{0{,}788}=0{,}7813\rightarrow \text{tg}\,76^\circ=\text{tg}(2\cdot 38^\circ)=\frac{2\,\text{tg}\,38^\circ}{1-\text{tg}^2\,38^\circ}=4{,}011$$

$$\cos 19^\circ=\cos\frac{38^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos 38^\circ}{2}}=0{,}9455$$
$$\sin 19^\circ=\sin\frac{38^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 38^\circ}{2}}=0{,}3256$$
$$\text{tg}\,19^\circ=\text{tg}\frac{38^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 38^\circ}{1+\cos 38^\circ}}=0{,}3443$$

21. **Resol les equacions trigonomètriques següents en l'interval [0º, 360º]:**

a) 5 sin x = 2

b) 7 cos x = –1

c) 5 tg x = 12

d) 2 tg x = 2

a) $5\sin x=2\rightarrow \sin x=\frac{2}{5}\rightarrow\begin{cases}x_1=23^\circ 34'41{,}44''\\ x_2=156^\circ 25'18{,}56''\end{cases}$

b) $7\cos x=-1\rightarrow \cos x=-\frac{1}{7}\rightarrow\begin{cases}x_1=98^\circ 12'47{,}56''\\ x_2=261^\circ 47'12{,}44''\end{cases}$

c) $5\,\text{tg}\,x=12\rightarrow \text{tg}\,x=\frac{12}{5}\rightarrow\begin{cases}x_1=67^\circ 22'48{,}49''\\ x_2=247^\circ 22'48{,}49''\end{cases}$

d) $2\,\text{tg}\,x=2\rightarrow \text{tg}\,x=1\rightarrow\begin{cases}x_1=45^\circ\\ x_2=225^\circ\end{cases}$

22. **Resol aquestes equacions trigonomètriques i simplifica'n el resultat:**

a) cos 2x = 1

b) cos 2x + sin x = 1

c) sin 2x – cos x = 0

d) 2 tg 4x = 1

a) $\cos 2x=1\rightarrow x=k\pi \text{ amb } k\in\mathbb{Z}$

b) $\cos 2x+\sin x=1\rightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+\sin x=1\rightarrow -2\sin^2 x+\sin x=0$

$x_1 = k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin 2x - \cos x = 0 \rightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = \cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$x_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ amb $k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

d) $2\,\mathrm{tg}\,4x = 1 \rightarrow \mathrm{tg}\,4x = \frac{1}{2} \rightarrow 4x = 26{,}56^\circ + 180^\circ k \rightarrow x = \frac{26{,}56^\circ + 180^\circ k}{4}$ amb $k \in \mathbb{Z}$

23. **D'un triangle sabem que els catets fan 7 m i 24 m. Calcula'n la hipotenusa i l'amplitud dels angles.**

Calcula la hipotenusa utilitzant el Teorema de Pitàgores:

$$h = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 \text{ m}$$

$$\alpha = arcsin\frac{7}{25} = 16,26^\circ \qquad \beta = arcsin\frac{24}{25} = 73,74^\circ$$

24. **D'un triangle rectangle, $\widehat{ABC}$, sabem que $\hat{C}$ = 62° i que la hipotenusa a fa 1 m. Troba'n els elements.**

Apliquem la relació d'angles complementaris per calcular el tercer angle:

$$\hat{\beta} = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$$

Utilitzem una de les seves raons trigonomètriques, trobem l'altre dels seus costats:

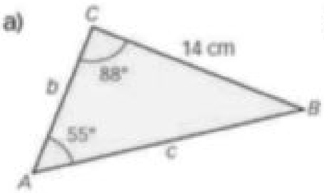
$$\sin\beta = \frac{b}{a} = b \rightarrow b = \sin 28^\circ = 0{,}4695\ m$$

Amb el Teorema de Pitàgores determinem el tercer costat:

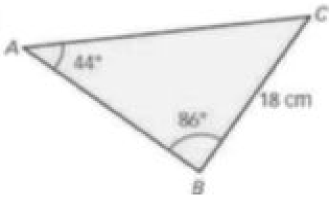
$$c = \sqrt{1^2 - 0{,}4695^2} = 0{,}8829\ m$$

25. **Calcula b i c en els triangles següents:**

a)



b)



a) $\widehat{B} = 180^\circ - 88^\circ - 55^\circ = 37^\circ$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 37^\circ} = \frac{14}{\operatorname{sen} 55^\circ} \rightarrow b = 10{,}29 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} 88^\circ} = \frac{14}{\operatorname{sen} 55^\circ} \rightarrow c = 17{,}08 \text{ cm}$$

b) $\widehat{C} = 180^\circ - 44^\circ - 86^\circ = 50^\circ$

Apliquem el teorema del sinus com a l'apartat anterior:

b = 25,85 cm c = 19,85 cm

26. Justifica si poden ser certes les igualtats següents:

a) $\mathbf{a} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$

b) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$

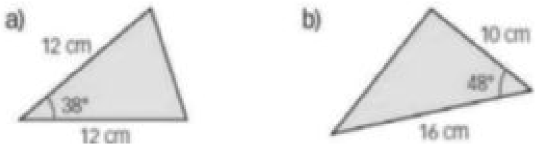
c) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$

a) És possible si $\sin\widehat{A} = 1$, és a dir, si $\widehat{A} = 90^\circ$.

b) No és possible perquè $a = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$ i $b = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$, però no existeix cap triangle amb dos angles rectes.

c) És possible si $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

27. Calcula la longitud del costat desconegut.



a) $a = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos 38^\circ} = 7{,}81 \text{ cm}$

b) $a = \sqrt{10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cos 48^\circ} = 11{,}91 \text{ cm}$

28. Determina si les mides següents corresponen a les longituds dels costats d'un triangle i indica si és acutangle, rectangle o obtusangle:

a) 12, 11 i 9 cm **c) 26, 24 i 10 cm**

b) 23, 14 i 8 cm **d) 40, 30 i 20 m**

a) $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow 12^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 \cos\widehat{A}}$

$\rightarrow \cos\widehat{A} = 0{,}2929 \rightarrow \widehat{A} = 72^\circ 57' 59{,}7''$ →El triangle és acutangle

b) Les mides no formen un triangle, perquè la suma dels costats menors és mes petita que el costat més gran.

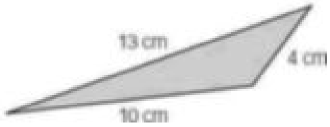
c) $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow 26^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cos\widehat{A}}$

$\rightarrow \cos\widehat{A} = 0 \rightarrow \widehat{A} = 90°$ →El triangle és rectangle.

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow 40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20\cos\widehat{A}$

$\rightarrow \cos\widehat{A} = 0,25 \rightarrow \widehat{A} = 104°28'39''$ →El triangle és obtusangle.

29. Resol el triangle següent:

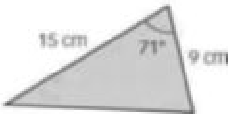


$13^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4\cos\widehat{A} \rightarrow \widehat{A} = 131,49°$

$10^2 = 13^2 + 4^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4\cos\widehat{B} \rightarrow \widehat{B} = 35,18°$

$180° - 131,49° - 35,18° = 13,33°$

30. Resol el triangle següent:



$a = \sqrt{15^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 15\cos 71°} = 14,77$ cm

Aplica el teorema del sinus:

$$\frac{14,77}{sin71°} = \frac{9}{sin\widehat{B}} \rightarrow \widehat{B} = 35,18°$$

$\widehat{B} = 180° - 71° - 35,18° = 73,82°$

31. Resol un triangle sabent que dos dels costats fan 14 cm i 18 cm, i que l'angle oposat a un dels costats és de 70º. Dibuixa el triangle.

Apliquem el teorema del sinus per calcular l'angle oposat al costat conegut:

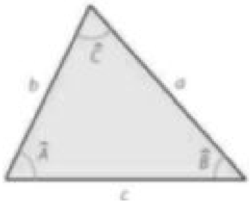
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} \rightarrow \frac{14}{\sin\widehat{B}} = \frac{18}{\sin 70°} \rightarrow \widehat{B} = 46°57'34,4''$$

La suma dels angles d'un triangle és 180º, així trobem el tercer angle:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \rightarrow \widehat{A} + 46°57'34,4'' + 70° = 180° \rightarrow \widehat{A} = 63°2'25,6''$

Utilitzem el teorema del sinus per trobar el tercer costat:

$$\frac{a}{sin\,\hat{A}} = \frac{b}{sin\,\hat{B}} = \frac{c}{sin\,\hat{C}} \rightarrow \frac{a}{\sin 63°2'25,6''} = \frac{18}{\sin 70°} \rightarrow a = 17,07\ cm$$



32. **Resolem el triangle a = 4 m, c = 6 m i $\hat{A}$ = 25°, i obtenim com a solucions dos triangles obtusangles. Comprova que això és possible i dibuixa'n les solucions.**

Utilitzem el teorema del sinus per calcular l'angle oposat al costat conegut:

$$\frac{a}{sin\,\hat{A}} = \frac{b}{sin\,\hat{B}} = \frac{c}{sin\,\hat{C}} \rightarrow \frac{4}{\sin 25°} = \frac{6}{\sin \hat{C}} \rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 39°20'25,7'' \\ \hat{C} = 140°39'34'' \end{cases}$$

Si els angles d'un triangle sumen 180 º:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \rightarrow 25° + \hat{B} + 39°20'25,7'' = 180° \rightarrow \hat{B} = 115°39'34''$$

1a solució: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \rightarrow 25° + \hat{B} + 39°20'25,7'' = 180° \rightarrow \hat{B} = 115°39'34''$

2a solució: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \rightarrow 25° + \hat{B} + 140°39'34'' = 180° \rightarrow \hat{B} = 14°20'26''$

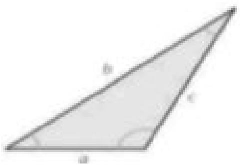
Utilitzem el teorema del sinus per calcular l'angle oposat al costat conegut:

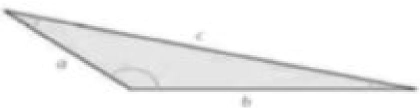
1a solució:

$$\frac{a}{sin\,\hat{A}} = \frac{b}{sin\,\hat{B}} = \frac{c}{sin\,\hat{C}} \rightarrow \frac{b}{\sin 115°39'34''} = \frac{4}{\sin 25°} \rightarrow b = 8,53\ cm$$

2a solució:

$$\frac{a}{sin\,\hat{A}} = \frac{b}{sin\,\hat{B}} = \frac{c}{sin\,\hat{C}} \rightarrow \frac{b}{\sin 14°20'26''} = \frac{4}{\sin 25°} \rightarrow b = 2,34\ cm$$





SABER FER

33. Calcula el sinus, el cosinus i la tangent de l'angle α.

a) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ **amb** $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ **b)** $tg\,\alpha = -2$ **amb** $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

a) $sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -0,9682$ $\qquad tg\alpha = \frac{-0,9682}{0,25} = -3,8728$

b) $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} = -0,4472$ $\qquad sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 0,8944$

34. Calcula els cosinus següents mitjançant les raons trigonomètriques de 50º:

a) cos 40º **c)** cos 310º **e)** cos 5º **g)** cos 25º

b) cos 130º **d)** cos 80º **f)** cos 100º

$\cos 50^\circ = 0,6428 \qquad sin 50^\circ = 0,7660 \qquad tg 50^\circ = 1,1918$

a) $\cos 40^\circ = \cos\left(90^\circ - 50^\circ\right) = \cos 90^\circ \cos 50^\circ + sen 90^\circ sin 50^\circ = 0,7660$

b) $\cos 130^\circ = \cos\left(180^\circ - 50^\circ\right) = \cos 180^\circ \cos 50^\circ + sin 180^\circ sin 50^\circ = -0,6428$

c) $\cos 310^\circ = \cos\left(360^\circ - 50^\circ\right) = \cos 360^\circ \cos 50^\circ + sin 360^\circ sin 50^\circ = 0,6428$

d) $\cos 80^\circ = \cos\left(30^\circ + 50^\circ\right) = \cos 30^\circ \cos 50^\circ - sin 30^\circ sin 50^\circ = 0,1736$

e) $\cos 5^\circ = \cos\left(50^\circ - 45^\circ\right) = \cos 50^\circ \cos 45^\circ + sin 50^\circ sin 45^\circ = 0,9962$

f) $\cos 100^\circ = \cos\left(2\cdot 50^\circ\right) = \cos^2 50^\circ - sin^2 50^\circ = -0,1736$

g) $\cos 25^\circ = \cos\frac{50^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 50^\circ}{2}} = 0,9063$

35. Resol les equacions següents:

a) sin (2x + 5º) = 1 **b)** cos (2x + 5º) = 1

a) $sin\left(90^\circ + k\cdot 360^\circ\right) = 1 \rightarrow 2x + 5^\circ = 90^\circ + k\cdot 360^\circ \rightarrow x = \frac{85^\circ}{2} + k\cdot 180^\circ \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos\left(k\cdot 360^\circ\right) = 1 \rightarrow 2x + 5^\circ = k\cdot 360^\circ \rightarrow x = k\cdot 180^\circ - \frac{5^\circ}{2} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$

36. Resol les equacions següents:

a) $sin 2x - 2 sin x = 0$ **b)** $sin 2x + sin x = 0$

a) $sin2x-2sinx=0\rightarrow 2sinx\cos x-2sinx=0\rightarrow 2sinx\left(\cos x-1\right)=0$

$x_1=k\pi$ amb $k\in\mathbb{Z}$ $\qquad x_2=2k\pi$ *amb* $k\in\mathbb{Z}$

b) $sin2x+sinx=0\rightarrow 2sinx\cos x+sinx=0\rightarrow sinx\left(2\cos x+1\right)=0$

$x_1=k\pi$ amb $k\in\mathbb{Z}$ $\qquad x_2=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ amb $k\in\mathbb{Z}$

$x_3=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$ amb $k\in\mathbb{Z}$

37. **Resol aquesta equació:**

$\cos 2x-3\cos x+2=0$

$\cos^2 x-sin^2 x-3\cos x+2=0\rightarrow\ 2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

$$\cos x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\begin{cases}1\\ \dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi\qquad x_2=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad x_3=2k\pi$$

38. **Resol l'equació següent:**

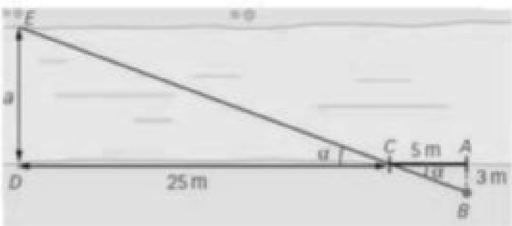
cos 3x + cos x = 0

$\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x+\cos x=0\rightarrow\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cos x-2\sin x\cos x\sin x+\cos x=0$

$2\cos^3 x-2\cos x+2\cos^3 x=0\rightarrow 2\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)=0$

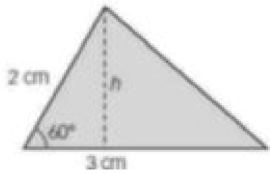
$x_1=\dfrac{(2k-1)\pi}{2}$ amb $k\in\mathbb{Z}$ $\qquad x_2=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$ amb $k\in\mathbb{Z}$

39. **En Joan vol saber l'amplada d'un riu sense haver-se de desplaçar a l'altra riba. Pren mides amb els seus passos i arriba a la situació següent:**



$tg\alpha=\dfrac{3}{5}=\dfrac{a}{25}\rightarrow a=15\,\text{m}$

40. **Calcula l'àrea d'aquest triangle:**



$$\sin 60^o = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \sqrt{3} \qquad \grave{A}rea = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}60\text{cm}^2$$

41. **Calcula l'altura d'un triangle de base 100 cm i amb els angles adjacents α = 45° i β = 60°.**

$$\left.\begin{array}{r} tg 45^o = \dfrac{h}{100 - x} = 1 \\ tg 60^o = \dfrac{h}{x} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \rightarrow 100 - x = \sqrt{3}x \rightarrow x = \frac{100}{\sqrt{3} + 1} = 36{,}6 \text{ cm}$$

$$h = 63{,}4 \text{ cm}$$

42. **Determina l'àrea d'un pentàgon regular de 15 cm de radi.**

$$sin 36^o = \frac{l/2}{15} \rightarrow l = 17{,}64 \text{ cm}$$

$$15^2 - (l/2)^2 = ap^2 \rightarrow ap = 12{,}13 \text{ cm}$$

$$\grave{A}rea = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{88{,}167 \cdot 12{,}13}{2} = 534{,}86 \text{ cm}^2$$

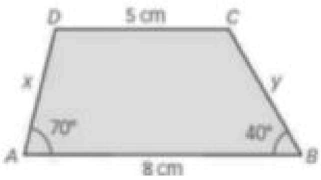
43. **Dos vaixells surten simultàniament d'un port amb rumbs que formen un angle de 82º. El primer navega a una velocitat de 18 milles per hora, i el segon a 25 milles per hora. Si mantenen els rumbs inalterats i l'abast dels seus equips de ràdio és de 180 milles, es podran mantenir en contacte al cap de 3 hores?**

El primer recorre 54 milles i el segon 75.

$$a = \sqrt{54^2 + 75^2 - 2 \cdot 54 \cdot 75 \cdot \cos 82^o} = 86{,}1 \text{ milles}$$

Com 86,1<180 si podran mantenir el contacte.

44. **Calcula la longitud dels costats que falten en el trapezi rectangle següent:**



Afegint un triangle amb els angles de 40º, 70º i 70º.

$$\frac{3}{\sin 70^o} = \frac{y}{\sin 70^o} = \frac{x}{\sin 40^o} \rightarrow y = 3\ cm,\ x = 2,05\ cm$$

ACTIVITATS FINALS

45. Determina l'equivalència en radians d'aquests angles donats en graus sexagesimals:

a) 35º

b) 185º

c) 84º 12'

d) 62º 25'

a) $\dfrac{7\pi}{36}\text{rad}$

b) $\dfrac{37\pi}{36}\text{rad}$

c) $84,2^{\text{o}} = \dfrac{42,1\pi}{90}\text{rad=1,47 rad}$

d) $62,42^{\text{o}} = \dfrac{31,21\pi}{90}\text{rad=1,09 rad}$

46. Calcula l'equivalència en graus d'aquests angles donats en radians:

a) 1,5 rad

b) 3,5 rad

c) 1,5 π rad

d) $\frac{6\pi}{5}$ rad

a) 85,94º

b) 200,54º

c) 270º

d) 216º

47. En els triangles rectangles ABC següents, A és el vèrtex de l'angle recte. Tenim les mides de la hipotenusa, a, i dels catets, b i c. Contesta les qüestions que hi ha plantejades.

a) Troba sin $\hat{B}$ i tg $\hat{B}$ si b = 12 cm, c = 16 cm.

b) Troba cos $\hat{B}$ i cotg $\hat{B}$ si a = 30 cm, c = 22 cm.

c) Troba cos $\hat{C}$ i cosec $\hat{C}$ si a = 3 cm, b = 2 cm.

d) Troba cos $\hat{B}$ i tg $\hat{B}$ si b = 20 cm, c = 20 cm.

a) $a = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm}$ $\quad \sin B = \dfrac{b}{a} = 0,6$ $\quad tgB = \dfrac{b}{c} = 0,75$

b) $b = \sqrt{30^2 - 22^2} = \sqrt{416}$ cm $\quad \cos B = \dfrac{c}{a} = \dfrac{11}{15}$ $\quad \text{cotg}\, B = \dfrac{c}{b} = \dfrac{11}{\sqrt{104}}$

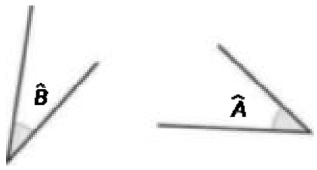
c) $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ cm $\qquad \cos C = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \qquad \cos ec C = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

d) $a = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800}$ cm $\qquad \cos B = \frac{c}{a} = \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tgB = \frac{b}{c} = 1$

48. **Dibuixa dos angles $\hat{A}$ i $\hat{B}$ que verifiquin que:**

$\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\hat{B} = \sqrt{5}$

Resposta oberta. Per exemple:



49. **Sense fer servir la calculadora, determina el valor més simplificat possible de les expressions següents:**

a) **sin 30º + sin 60º**

b) **tg $\frac{\pi}{3}$ + sec $\frac{\pi}{6}$**

c) **cotg 90º – cotg 30º**

d) **cosec 60º – cos 60º**

a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3+2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

c) $0 - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$

d). $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

50. **Sense fer servir la calculadora, indica si les afirmacions següents són certes o falses:**

a) **sin 30º + sin 60º = sin 90º**

b) **cos 30º + cos 60º = cos 90º**

c) **sin 90º = 2 sin 45º**

d) **cos 90º = 2 cos 45º**

a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 1 \rightarrow$ Falsa

c) $1\neq 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow$ Falsa

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\neq 0 \rightarrow$ Falsa

d) $0\neq 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow$ Falsa

51. Calcula la cosecant, la secant i la cotangent:

a) De l'angle de 30°. **c) De l'angle de 60°.**

b) De l'angle de 45°. **d) De l'angle de 90°.**

a) $\cos ec 30^{o} = 2$ $\quad s ec 30^{o} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad \cot g 30^{o} = \sqrt{3}$

b) $\cos ec 45^{o} = \sqrt{2}$ $\quad \sec 45^{o} = \sqrt{2}$ $\quad \cot g 45^{o} = 1$

c) $\cos ec 60^{o} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad s ec 60^{o} = 2$ $\quad \cot g 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\cos ec 90^{o} = 1$ La secant no existeix $\quad cotg 90^{o} = 0$

52. Els angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ i $\hat{C}$ són aguts. Completa la taula següent a la llibreta sense arribar a determinar els angles:

53. Sinus	Cosinus	Tangent
sin $\hat{A}$ = 0,5602		
	cos $\hat{B}$ = 0,1849	
		tg $\hat{C}$ = 2,7804

Sinus	Cosinus	Tangent
sin $\hat{A}$ = 0,5602	cos $\hat{A}$ = 0,8284	tg $\hat{A}$ = 0,6763
sin $\hat{B}$ = 0,9828	cos $\hat{B}$ = 0,1849	tg $\hat{B}$ = 5,3151
sin $\hat{C}$ = 0,6616	cos $\hat{C}$ = 0,3384	tg $\hat{C}$ = 2,7804

$$0,5602^2 + \cos^2\hat{A} = 1 \rightarrow \cos\hat{A} = \sqrt{1-0,5602^2} = 0,8284$$

$$\text{tg}\,\hat{A} = \frac{0,5602}{0,8284} = 0,6763$$

$$\sin^2\hat{B} + 0,1849^2 = 1 \rightarrow \sin\hat{B} = \sqrt{1-0,1849^2} = 0,9828$$

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{0,9828}{0,1849} = 5,3151$$

$$\cos\widehat{C} = \sqrt{\frac{1}{1+2,7804^2}} = 0,3384$$

$$\sin^2\widehat{C} + 0,3384^2 = 1 \rightarrow \sin\widehat{C} = \sqrt{1-0,3384^2} = 0,6616$$

53. Utilitza la calculadora per determinar els angles aguts que compleixen que:

a) $\cos\widehat{A} = 0,3453$ **e)** $\mathrm{tg}\,\widehat{E} = 0,3554$

b) $\mathrm{tg}\,\widehat{B} = 2,3688$ **f)** $\sin\widehat{F} = 0,0968$

c) $\mathrm{cosec}\,\widehat{C} = 1,9044$ **g)** $\sin\widehat{G} = 0,2494$

d) $\cos\widehat{D} = 0,9726$ **h)** $\mathrm{cotg}\,\widehat{H} = 2,5$

a) $\cos\widehat{A} = 0,3453 \rightarrow \widehat{A} = 69°\,47'\,59,6''$

b) $\mathrm{tg}\,\widehat{B} = 2,3688 \rightarrow \widehat{B} = 67°\,6'\,45,84''$

c) $\mathrm{cosec}\,\widehat{C} = 1,9044 \rightarrow \sin\widehat{C} = 0,5251 \rightarrow \widehat{C} = 31°\,40'\,29,9''$

d) $\cos\widehat{D} = 0,9726 \rightarrow \widehat{D} = 13°\,26'\,36,3''$

e) $\mathrm{tg}\,\widehat{E} = 0,3554 \rightarrow \widehat{E} = 19°\,33'\,54,8''$

f) $\sin\widehat{F} = 0,0968 \rightarrow \widehat{F} = 5°\,33'\,17,75''$

g) $\sin\widehat{G} = 0,2494 \rightarrow \widehat{G} = 14°\,26'\,31,2''$

h) $\mathrm{cotg}\,\widehat{H} = 2,5 \rightarrow \mathrm{tg}\,\widehat{H} = 0,4 \rightarrow \widehat{H} = 21°\,48'\,5,0$[illegible]''

54. Determina les raons trigonomètriques següents:

a) sin 19° 22' 37" **g)** tg 83° 41' 57"

b) cos 44° 52' **h)** sin 37° 25"

c) cos 1,03 **i)** $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}$

d) $\sin\frac{2\pi}{5}$ **j)** cos 0,845

e) sec 54° 28' **k)** cotg 35° 40'

f) cosec π **l)** $\sec\frac{\pi}{6}$

a) sin 19º 22' 37" = 0,3318

b) cos 44º 52' = 0,7088

c) cos 1,03 = 0,5148

d) $\sin\frac{2\pi}{5}$ = 0,9511

e) sec 54º 28' = 1,7206

f) No és definida

g) tg 83º 41' 57" = 9,0567

h) sin 37º 25' = 0,6019

i) tg $\frac{\pi}{8}$ = 0,4142

j) cos 0,845 = 0,6637

k) cotg 35º 40' = 1,3934

l) sec $\frac{\pi}{6}$ = 1,1547

55. Resol els triangles rectangles corresponents considerant que $\widehat{A}$ és l'angle recte.

a) b = 7 m, $\widehat{B}$ = 48º

b) c = 12 m, $\widehat{B}$ = 28º

c) a = 13 m, c = 5 m

d) a = 6 cm, $\widehat{C}$ = 42º 12'

e) b = 3 m, c = 6 m

f) b = 8 m, a = 10 m

a) Apliquem la relació d'angles complementaris, i calculem el tercer angle:

$\widehat{C}$ = 90º - 48º = 42º

Amb una de les seves raons trigonomètriques trobem l'altre dels seus costats:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\rightarrow\frac{7}{\sin 48^{\circ}}=a\rightarrow a=9,42\ m$$

Amb el Teoremes de Pitàgores obtenim el tercer costat:

$$c=\sqrt{9,42^2-7^2}=6,3m$$

b) Apliquem la relació d'angles complementaris, i calculem el tercer angle:

$\widehat{C}$ = 90º - 28º = 62º

Amb una de les seves raons trigonomètriques trobem l'altre dels seus costats:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\rightarrow\frac{b}{\sin 28^{\circ}}=\frac{12}{\sin 62^{\circ}}\rightarrow b=6,38\ m$$

Amb el Teoremes de Pitàgores obtenim el tercer costat:

$$a=\sqrt{12^2-6,38^2}=13,59m$$

c) Apliquem el Teoremes de Pitàgores, i calculem el tercer costat:

$$b=\sqrt{13^2-5^2}=12m$$

$$\sin\hat{B}=\frac{12}{13}\rightarrow\hat{B}=67^{\circ}\ 22'\ 48{,}5''$$

$$\sin\hat{C}=\frac{5}{13}\rightarrow\hat{C}=22^{\circ}\ 37'\ 11{,}5''$$

d) Apliquem la relació d'angles complementaris, i calculem el tercer angle:

$\widehat{C}$ = 90º - 42º12' = 47º 48'

Amb una de les seves raons trigonomètriques trobem l'altre dels seus costats:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\rightarrow\frac{b}{\sin 47^{\circ}48'}=6\rightarrow b=4,44\ m$$

Amb el Teoremes de Pitàgores obtenim el tercer costat:

$$c=\sqrt{6^2-4,44^2}=4,04m$$

e) Apliquem el Teoremes de Pitàgores, i calculem el tercer costat:

$$a=\sqrt{3^2+6^2}=6,71m$$

$$\sin\hat{B}=\frac{3}{6,71}\rightarrow\hat{B}=26^{\circ}\ 33'\ 26,6''$$

$$\sin\hat{C}=\frac{6}{6,71}\rightarrow\hat{C}=63^{\circ}\ 26'\ 33,4''$$

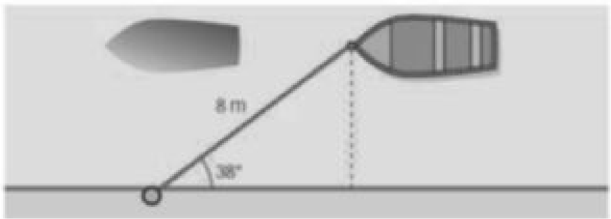
f) Apliquem el Teoremes de Pitàgores, i calculem el tercer costat:

$$c=\sqrt{10^2-8^2}=6m$$

$$\sin\hat{B}=\frac{8}{10}\rightarrow\hat{B}=53^{\circ}\ 7'\ 48,37''$$

$$\sin\hat{C}=\frac{6}{10}\rightarrow\hat{C}=36^{\circ}\ 52'\ 11,63''$$

56. Una barca està lligada a la riba d'un canal amb una corda que fa 8 m. En un moment determinat, aquesta corda forma un angle de 38º amb la vora. A quina distància de la riba es troba la barca?



Distància = 8 sin 38º = 4,93 m

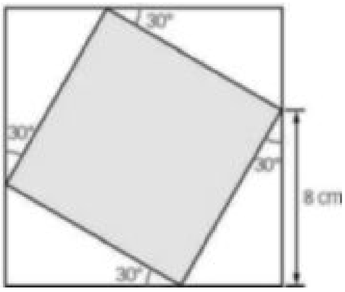
57. Si ens trobem a 40 m de la xemeneia d'una fàbrica i la veiem sota un angle de 26º, quina altura té? Considera que els ulls de l'observador estan situats a 175 cm del terra.

$$\mathbf{tg\,26^{\circ}=\frac{a}{40}\rightarrow a=19,51\ m}$$

19,51 +1,75 = 21,26 m

L'altura de la xemeneia és de 21,26 m.

58. Calcula l'àrea del quadrat interior.



$\cos 30^\circ = \frac{8}{l} \rightarrow l = 9{,}24 \text{ cm}$ $\quad\quad$ $\grave{A}rea = l^2 = 85{,}3 \text{ cm}^2$

59. **Determina la longitud de l'apotema d'un hexàgon regular de 4 cm de costat.**

L'hexàgon regular es pot dividir en dotze triangles rectangles.

Calculem l'angle central: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

$\cos 30^\circ = \frac{ap}{4} \rightarrow ap = 3{,}46 \text{ cm}$

60. **Un pentàgon regular està inscrit en una circumferència de 20 cm de radi. Determina la mida del costat.**

El pentàgon regular pot dividir en cinc triangle isòscels.

Calculem l'angle central: $\frac{\mathbf{360}}{\mathbf{5}} = \mathbf{72°}$

Els restants angles del triangle:

180º = 72º + 2 $\widehat{\boldsymbol{A}} \rightarrow \widehat{\boldsymbol{A}} = \mathbf{54°}$

Apliquem el Teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \rightarrow \frac{b}{\sin 72^\circ} = \frac{20}{\sin 54^\circ} 6 \rightarrow b = 23{,}51\ m$$

La mida del costat és de 23,51 cm.

61. **Escriu de més petit a més gran els cosinus dels angles següents sense calcular-los:**

55° 110° 165° 220° 275° 330°

Els cosinus són negatius en el segon i tercer quadrants.

$\cos 165^\circ < \cos 220^\circ < \cos 110^\circ < \cos 275^\circ < \cos 55^\circ < \cos 330^\circ$

62. **Escriu de més petit a més gran els sinus dels angles següents sense calcular-los:**

45° 120° 135° 200° 225° 310°

Els sinus són negatius en el tercer i quart quadrants.

$\sin 310^\circ < \sin 225^\circ < \sin 200^\circ < \sin 45^\circ = \sin 135^\circ < \sin 120^\circ$

63. **La taula següent mostra les raons trigonomètriques d'angles de quadrants diferents. Sense determinar-los, completa-la a la llibreta amb les raons que falten.**

Quadrant	sin	cos	Tg
Segon	0,6702		
Tercer		-0,4539	
Quart			-0,7459
Tercer	-0,7822		
Segon			-1,9004
Quart		0,6983	

Quadrant	sin	cos	Tg
Segon	**0,6702**	-0,7422	-0,903
Tercer	0,8911	**-0,4539**	-1,9631
Quart	0,8016	-0,5979	**-0,7459**
Tercer	**-0,7822**	-0,623	1,2555
Segon	0,8849	-0,4657	**-1,9004**
Quart	-0,7158	**0,6983**	-1,0251

$0{,}6702^2 + \cos^2 \hat{A} = 1 \rightarrow \cos \hat{A} = \sqrt{1 - 0{,}6702^2} = -0{,}7422$

$\text{tg}\,\hat{A} = \dfrac{0{,}6702}{-0{,}7422} = -0{,}903$

$\sin^2 \hat{B} + (-0{,}4539)^2 = \sin \hat{B} = \sqrt{1 - 0{,}4539^2} = 0{,}8911$

$\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{0{,}8911}{-0{,}4539} = -1{,}9631$

$\cos \hat{C} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + (-0{,}7459)^2}} = 0{,}8016$

$\sin^2 \hat{C} + 0{,}8016 = 1 \rightarrow \sin \hat{C} = \sqrt{1 - 0{,}8016^2} = -0{,}5979$

$(-0{,}7822)^2 + \cos^2 \hat{D} = 1 \rightarrow \cos \hat{D} = \sqrt{1 - 0{,}7822^2} = -0{,}623$

$\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{-0{,}7822}{-0{,}623} = 1{,}2555 \qquad \cos \hat{E} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + (-1{,}9004)^2}} = -0{,}4657$

$sin^2 \hat{E} + (-0{,}4657)^2 = 1 \rightarrow \sin \hat{E} = \sqrt{1 - 0{,}657^2} = 0{,}8849$

$sin^2 \hat{F} + (-0{,}6983)^2 = 1 \rightarrow \sin \hat{F} = \sqrt{1 - 0{,}683^2} = -0{,}7158$

$\text{tg}\,\hat{F} = \dfrac{-0{,}7158}{0{,}6983} = -1{,}0251$

64. **Sense fer servir la calculadora, calcula el valor del sinus, el cosinus i la tangent dels angles següents mesurats en radians:**

a) $-\pi\ rad$

b) $-\frac{\pi}{2}\ rad$

c) $-\frac{\pi}{6}\ rad$

d) $\frac{\pi}{4}\ rad$

e) $\frac{\pi}{3}\ rad$

f) $\frac{\pi}{2}\ rad$

g) $-\frac{3\pi}{2}\ rad$

h) $\pi\ rad$

i) $\frac{3\pi}{2}\ rad$

j) $2\pi\ rad$

k) $\frac{7\pi}{2}\ rad$

l) $\frac{9\pi}{2}\ rad$

a) $\sin(-\pi)=0$ $\cos(-\pi)=-1$ $tg(-\pi)=0$

b) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ La tangent no existeix.

c) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

e) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ $tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ La tangent no existeix.

g) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1$ $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0$ La tangent no existeix.

h) $\sin(\pi)=0$ $\cos(\pi)=-1$ $tg(\pi)=0$

i) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ La tangent no existeix.

j) $\sin(2\pi)=0$ $\cos(2\pi)=1$ $tg(2\pi)=0$

k) $\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=-1$ $\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)=0$ La tangent no existeix.

l) $\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)=1$ $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)=0$ La tangent no existeix.

65. **Sense fer servir la calculadora, determina el valor del sinus, el cosinus i la tangent dels angles següents mesurats en graus:**

a) –60º	**e) 120º**	**i) 210º**
b) –45º	**f) 135º**	**j) 225º**
c) –30º	**g) 150**	**k) 240º**
d) –30º	**h) 180º**	**l) 270º**

a) $\sin\left(-60^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos\left(-60^{\circ}\right)=\frac{1}{2}$ $\quad tg\left(-60^{\circ}\right)=-\sqrt{3}$

b) $\sin\left(-45^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos\left(-45^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\left(-45^{\circ}\right)=-1$

c) $\sin\left(-30^{\circ}\right)=-\frac{1}{2}$ $\quad\cos\left(-30^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg\left(-30^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\sin\left(0^{\circ}\right)=0$ $\quad\cos\left(0^{\circ}\right)=1$ $\quad tg\left(0^{\circ}\right)=0$

e) $\sin\left(120^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos\left(120^{\circ}\right)=-\frac{1}{2}$ $\quad tg\left(120^{\circ}\right)=-\sqrt{3}$

f) $\sin\left(135^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos\left(135^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\left(135^{\circ}\right)=-1$

g) $\sin\left(150^{\circ}\right)=\frac{1}{2}$ $\quad\cos\left(150^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg\left(150^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\sin\left(180^{\circ}\right)=0$ $\quad\cos\left(180^{\circ}\right)=-1$ $\quad tg\left(180^{\circ}\right)=0$

i) $\sin\left(210^{\circ}\right)=-\frac{1}{2}$ $\quad\cos\left(210^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg\left(210^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

j) $\sin\left(225^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos\left(225^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\left(225^{\circ}\right)=1$

k) $\sin\left(240^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos\left(240^{\circ}\right)=-\frac{1}{2}$ $\quad tg\left(240^{\circ}\right)=\sqrt{3}$

l) $\sin\left(270^{\circ}\right)=-1$ $\quad\cos\left(270^{\circ}\right)=0$ $\quad$ La tangent no existeix.

66. **Utilitza la calculadora per trobar aquestes raons:**

a) sin 319º 12' 52"	**g) tg 183º13'53"**
b) cos 434º26'	**h) sin 333º55''**
c) tg 7,03	**i)** $tg\left(\frac{11\pi}{8}\right)$
d) $\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$	**j) cos 3,845**
e) Cosec 200º 16'	**k)** $cotg\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
f) $\sec\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	**l) cosec 5,24**

a) sin 319º 12' 52" = - 0,6532	g) tg 183º13'53" = 0,0565
b) cos 434º26' = 0,2684	h) sin 333º55'' = - 0,4538
c) tg 7,03 = 0,9257	i) $tg\left(\frac{11\pi}{8}\right)$ = 2,4142
d) $\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ = -0,9511	j) cos 3,845 = -0,7626
e) Cosec 200º 16' = -2,8869	k) $cotg\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ = -1,7321
f) $\sec\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ = -1,4142	l) cosec 5,24 = -1,1574

67. **Calcula aquestes raons trigonomètriques relacionant-les amb les d'un angle del primer quadrant:**

a) $301^\circ\ 21'\ 15''$	**c)** $190^\circ\ 43''$	**e)** $386^\circ\ 56'$
b) $902^\circ\ 40'$	**d)** $295^\circ\ 12'\ 45''$	**f)** $612^\circ\ 43'\ 2''$

a) $301^\circ\ 21'\ 15'' = 360^\circ - (58^\circ\ 38'\ 45'')$

$$\sin(301^\circ\ 21'\ 15'') = -\sin(58^\circ\ 38'\ 45'') = -0,8540$$

$$\cos(301^\circ\ 21'\ 15'') = \cos(58^\circ\ 38'\ 45'') = 0,5203$$

$$tg(301^{\circ}\ 21'\ 15'') = -tg(58^{\circ}\ 38'\ 45'') = -1{,}6412$$

b) $902^{\circ}\ 40' = 2 \cdot 360^{\circ} + 180^{\circ} + 2^{\circ}\ 40'$

$$\sin(902^{\circ}\ 40') = -\sin(2^{\circ}\ 40') = -0{,}0465$$

$$\cos(902^{\circ}\ 40') = -\cos(2^{\circ}\ 40') = -0{,}9989$$

$$tg(902^{\circ}\ 40') = tg(2^{\circ}\ 40') = 0{,}0466$$

c) $190^{\circ}\ 43'' = 180^{\circ} + 10^{\circ}\ 43''$

$$\sin(190^{\circ}\ 43'') = -\sin(10^{\circ}\ 43'') = -0{,}1739$$

$$\cos(190^{\circ}\ 43'') = -\cos(10^{\circ}\ 43'') = -0{,}9848$$

$$tg(190^{\circ}\ 43'') = tg(10^{\circ}\ 43'') = 0{,}1765$$

d) $295^{\circ}\ 12'\ 45'' = 360^{\circ} - (64^{\circ}\ 47'\ 15'')$

$$\sin(295^{\circ}\ 12'\ 45'') = -\sin(64^{\circ}\ 47'\ 15'') = -0{,}9047$$

$$\cos(295^{\circ}\ 12'\ 45'') = \cos(64^{\circ}\ 47'\ 15'') = 0{,}4260$$

$$tg(295^{\circ}\ 12'\ 45'') = -tg(64^{\circ}\ 47'\ 15'') = -2{,}1239$$

e) $386^{\circ}\ 56' = 360^{\circ} + 26^{\circ}\ 56'$

$$\sin(386^{\circ}\ 56') = \sin(26^{\circ}\ 56') = 0{,}4530$$

$$\cos(386^{\circ}\ 56') = \cos(26^{\circ}\ 56') = 0{,}8915$$

$$tg(386^{\circ}\ 56') = tg(26^{\circ}\ 56') = 0{,}5081$$

f) $612^{\circ}\ 43'\ 2'' = 360^{\circ} + 180^{\circ} + 72^{\circ}\ 43'\ 2''$

$$\sin(612^{\circ}\ 43'\ 2'') = -\sin(72^{\circ}\ 43'\ 2'') = -0{,}9549$$

$$\cos(612^{\circ}\ 43'\ 2'') = -\cos(72^{\circ}\ 43'\ 2'') = -0{,}2971$$

$$tg(612^{\circ}\ 43'\ 2'') = tg(72^{\circ}\ 43'\ 2'') = 3{,}2140$$

68. Dibuixa tots els angles possibles, més petits de 360º, que verifiquin les condicions següents:

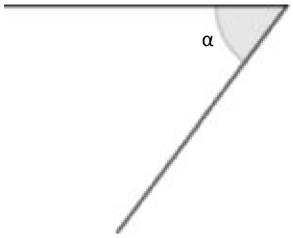
a) Que el sinus valgui 0,8.

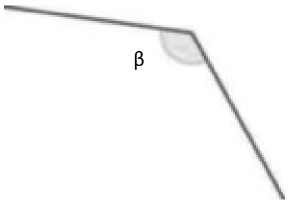
b) Que el cosinus valgui -0,4.

c) Que la tangent valgui 0,5.

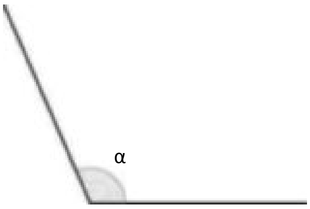
d) Que el sinus valgui -0,4.

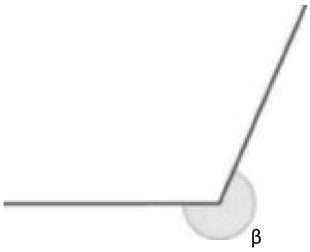
a) $\alpha = 53{,}13^{\circ}$ $\beta = 126{,}87^{\circ}$



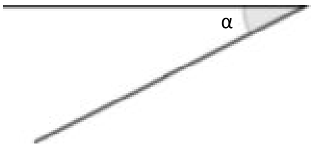


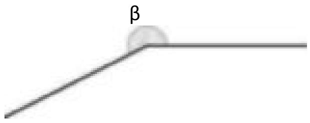
b) $\alpha = 113{,}58^{\circ}$ $\beta = 246{,}42^{\circ}$



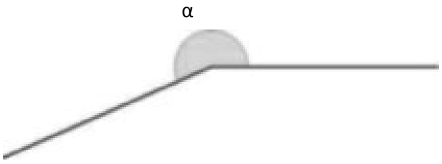


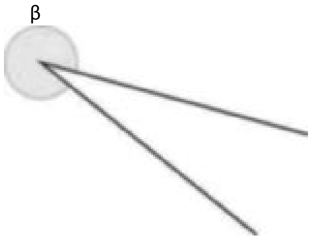
c) $\alpha = 26{,}57^{\circ}$ $\beta = 206{,}57^{\circ}$





d) $\alpha = 203{,}58^{\circ}$ $\beta = 336{,}42^{\circ}$





69. Determina aquests angles per mitjà de la calculadora:

a) arc cos 0,4539

b) arc sin 0,9284

c) arc tg (-0,5459)

d) arc tg 2,1618

e) arc cos (-0,2926)

f) arc sin (-0,3308)

a) $arc\ cos\ 0{,}4539 = 63^{\circ}\ 20{,}95''$

d) $arc\ tg\ 2{,}1618 = 65^{\circ}\ 10'\ 32{,}9''$

b) $arc \sin 0,9284 = 68° \ 11' \ 12,3''$

c) $arc \ tg \ (-0,5459) = 331° \ 22' \ 12''$

e) $arc \ cos \ (-0,2926) = 107° \ 49,2''$

f) $arc \sin (-0,3308) = 340° \ 40' \ 58''$

70. Calcula l'angle a del 1r quadrant amb les raons trigonomètriques que verifiquen que:

a) $\sin \ \alpha = |\sin \ 249° \ 31'|$

b) $cos \ \alpha = |cos \ 249° \ 31'|$

c) $tg \ \alpha = |tg \ 249° \ 31'|$

d) $tg \ \alpha = |tg \ 183° \ 30'|$

Determina'n la resta de les raons trigonomètriques.

a) $\sin \ \alpha = |\sin \ 249° \ 31'| = 0,9368 \rightarrow \alpha = 69° \ 31'$

b) $cos \ \alpha = |cos \ 249° \ 31'| = 0,3499 \rightarrow \alpha = 69° \ 31'$

c) $tg \ \alpha = |tg \ 249° \ 31'| = 2,6770 \rightarrow \alpha = 69° \ 31'$

d) $tg \ \alpha = |tg \ 183° \ 30'| = 0,0612 \rightarrow \alpha = 3° \ 30' \ 7,68'' \rightarrow \begin{cases} \sin \ 3° \ 30' \ 7,68'' = 0,0611 \\ cos \ 3° \ 30' \ 7,68'' = 0,9981 \end{cases}$

71. De l'angle d'un triangle sabem que el sinus és 0,7. Podries determinar de quin angle es tracta?

$\sin\alpha = 0,7 \rightarrow \alpha = 44,43^{\circ}$ o, $\alpha = 135,57^{\circ}$

Els dos angles poden pertànyer a un triangle, per tant no podem determinar de quin angle es tracta.

72. De l'angle d'un triangle coneixem el cosinus, que val 0,2. Podries determinar quin angle és?

$\cos\alpha = 0,2 \rightarrow \alpha = 78,46^{\circ}$ o, $\alpha = 281,54^{\circ}$

Únicament pot pertàyer a un triangle l'angle $\alpha = 78,46^{\circ}$.

73. D'un angle donat, a, sabem que sin α = 0,3 i que la tangent és negativa. Indica a quin quadrant pertany aquest angle i calcula el valor de la tangent.

$\sin\alpha > 0$ i $\text{tg}\alpha < 0$ per tant, l'angle pertany al segon quadrant.

$\sin\alpha = 0,3 \rightarrow \alpha = 162,54^{\circ}$

$tg 162,54^{\circ} = -0,3145$

74. Si sabem que la tangent d'un angle és dues vegades el seu sinus, que el signe d'aquest sinus és positiu i que el del cosinus és negatiu, indica a quin quadrant pertany l'angle i calcula'n la resta de les raons trigonomètriques.

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha > 0\\ \cos\alpha < 0\end{array}\right\} \rightarrow \text{L'angle és al segon quadrant}$$

$$tg\ \alpha = 2\sin\alpha \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120° \rightarrow \begin{cases}\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ tg\ \ \alpha = -\sqrt{3}\end{cases}$$

75. D'un angle ∝ del 2n quadrant sabem tan sols que el seu sinus és 0,5. Determina la resta de les raons trigonomètriques d'aquest angle.

$\sin\alpha = 0,5 \rightarrow \alpha = 150^{\circ}$ $\qquad \cos 150^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad tg150^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

76. Si sabem que sin ∝= 0,23 i que a és un angle agut, determina les raons trigonomètriques següents:

a) cos α **c) tg (-α)** **e) sin (180° + α)**

b) tg α **d) cos (180° - α)** **f) sin (720° + α)**

a) $0{,}23^2 + cos^2 \propto = \ 1 \rightarrow cosa = \sqrt{1 - 0{,}23^2} = 0{,}9732$

b) $tg \propto = \frac{0{,}23}{0{,}9732} = 0{,}2363$

c) $tg(-\propto) = -tg \ \propto = -0{,}2363$

d) $co\,s(180°-\propto) = -cosα = -0{,}9732$

e) $\sin(180° + \alpha) = -sinα = -0{,}23$

f) $\sin(720° + \alpha) = \sin\alpha = 0{,}23$

77. Si sabem que la tangent d'un angle és tres vegades el seu sinus i que les dues raons són negatives, calcula'n la resta de les raons trigonomètriques.

Tenim que:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha < 0\\ \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} < 0\end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha > 0 \rightarrow \text{L'angle és al quart quadrant.}$$

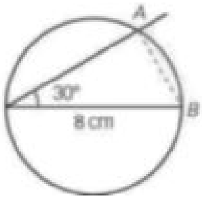
D'altra banda:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3\sin\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 289,47^{\circ}.$$

Llavors, la resta de raons trigonomètriques són:

$\sin 289,47^{\circ} = -0,9428 \quad tg\,289,47^{\circ} = -2,8284$.

78. **En la circumferència següent, calcula la mida del segment AB i de l'arc de circumferència $\widehat{AB}$.**



Com que l'angle A = 90º, l'angle B = 90º - 30º = 60º.

$\sin 30° = \frac{AB}{8} \rightarrow AB = 4\ cm$

La mida del segment AB és 4 cm.

Com que l'angle de 30º és inscrit, l'angle central de l'arc $\widehat{AB}$ és de 60º

Calculem la longitud d'un arc de 60º dins d'una circumferència de radi 4 cm:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 60°}{360°} = \frac{4\pi}{3} = 4{,}19\ cm$$

La mida de l'arc $\widehat{AB}$ és 4,19 cm.

79. **Calcula les raons trigonomètriques d'aquests angles:**

a) cos γ = -0,54 amb $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$

b) sin δ = 0 amb $\frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$

a) $\mathbf{\sin^2\gamma + (-0,54)^2 = 1 \rightarrow \sin\gamma = -\sqrt{1-(-0,54)^2} = -0,8417}$

$\mathbf{tg\gamma = \frac{-0,8417}{-0,54} = 1,5587}$

b) No existeix cap angle amb aquestes condicions, perquè si sin $\boldsymbol{\delta}$ =0, llavors $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{2k\pi}$.

80. **Resol els triangles que tens a continuació:**

a) a = 10 cm b = 14 cm c = 8 cm

b) b = 6 cm c = 9 cm $\hat{A}$ = 39° 12'

c) a = 7 cm $\hat{B}$ = 38° 49' $\hat{C}$ = 66° 40'

a) Apliquem el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A} \rightarrow \cos\hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-100 + 196 + 64}{2 \cdot 14 \cdot 8} = 0,7143$$

$$\hat{A} = 44°24'1''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} \rightarrow \cos\hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-196 + 100 + 64}{2 \cdot 10 \cdot 8} = -0,2$$

$$\hat{B} = 101°32'13''$$

$$\hat{C} = 180° \rightarrow 44°24'1'' \rightarrow 101°32'13'' = 34°2'85''$$

b) Apliquem el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A} \rightarrow a^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 39°12' \rightarrow a = 5,77 \text{ cm}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} \rightarrow \cos\hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-36 + 33,3 + 81}{2 \cdot 5,77 \cdot 9} = 0,7534$$

$$\hat{B} = 41°24'14,51'' \rightarrow \hat{C} = 180° - 39°12' - 41°4',51'' = 99°43'45,49''$$

c) $\hat{A} = 180° - 38°49' - 66°40' = 74°31'$

Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{a}{\sin\hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\sin 38°49'} = \frac{7}{\sin 74°31'} \rightarrow b = 4,55 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{a}{\sin\hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\sin 66°40'} = \frac{7}{\sin 74°31'} \rightarrow c = 6,67 \text{ cm}$$

81. **Resol els triangles següents:**

a) a = 9 cm	**c = 5 cm**	**B = 103° 27'**
b) b = 8,3 cm	**c = 9,1 cm**	**C = 112° 50'**
c) c = 6 cm	**A = 27° 42'**	**B = 98° 20'**

a) Apliquem el teorema del cosinus:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} \rightarrow b = \sqrt{81 + 25 - 90 \cdot \cos 103°27'} = 11,27\ cm$$

Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{a}{\sin\hat{A}} \rightarrow \frac{11,27}{\sin 103°27'} = \frac{9}{\sin\hat{A}} \rightarrow \sin\hat{A} = 0,7767$$

$$\hat{A} = 50°57'26,6'' \rightarrow \hat{C} = 180 - 50°57',6'' - 103°27' = 25°35',4''$$

b) Apliquem el teorema del sinus:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\widehat{B} \rightarrow cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-196 + 100 + 64}{2 \cdot 10 \cdot 8} = -0,2$$

$$\widehat{B} = 101°32'13''$$

$$\frac{c}{sin\,\widehat{C}} = \frac{b}{sin\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{9,1}{sin\,112°50'} = \frac{8,3}{sin\,\widehat{B}} \rightarrow sin\,\widehat{B} = 0,8406$$

$$\widehat{B} = 57°12'18,2'' \rightarrow \widehat{A} = 180° - 112°50' - \ 57°12'18,2'' = 9°57',8''$$

$$a = \frac{9,1 \cdot sin\,91°57'8''}{sin112°50'} = 1,71\ cm$$

c) $\widehat{C} = 180° - 27°42' - 98°20' = 53°58'$

Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{c}{sin\,\widehat{C}} = \frac{a}{sin\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{6}{sin\,53°58'} = \frac{a}{sin\,27°\,42'} \rightarrow a = 3,45\ cm$$

$$\frac{c}{sin\,\widehat{C}} = \frac{b}{sin\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{6}{sin\,53°58'} = \frac{b}{sin\,98°\,20'} \rightarrow b = 7,34\ cm$$

82. **Troba les solucions per als triangles següents:**

a) a = 12 cm b = 7 cm c = 6 cm

b) a = 8 cm c = 9 cm $\widehat{A}$ = 42° 55'

c) a = 10 cm c = 9 cm $\widehat{A}$ = 72° 55'

a) Apliquem el teorema del cosinus:

$$cos\,\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-144 + 49 + 36}{2 \cdot 7 \cdot 6} = -0,7024$$

$$\widehat{A} = 134°\,37'6''$$

$$cos\,\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-49 + 144 + 36}{2 \cdot 12 \cdot 6} = 0,9097$$

$$\widehat{B} = 24°\,31'58,8''$$

$$\widehat{C} = 180° - 24°\,31'58,8'' - 134°\,37'6'' = \ 20°\,50'55,2''$$

b) Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{c}{sin\,\widehat{C}} = \frac{a}{sin\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{9}{sin\,\widehat{C}} = \frac{8}{sin\,42°\,55'} \rightarrow sin\,\widehat{C} = 0,7661$$

$$\widehat{C} = 50°\,2'' \qquad \widehat{B} = 180° - 42°\,55' - 50°\,2'' = \ 87°\,4'58''$$

$$\frac{b}{sin\,\widehat{B}} = \frac{a}{sin\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sin\,87°\,4'58''} = \frac{8}{sin\,42°\,55'} \rightarrow b = 11,73\ cm$$

c) Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{c}{\sin\widehat{C}}=\frac{a}{\sin\widehat{A}}\rightarrow\frac{9}{\sin\widehat{C}}=\frac{10}{\sin 72^\circ\,55'}\rightarrow \sin\widehat{C}=0,8603$$

$$\widehat{C}=59^\circ\,20'57,2'' \qquad \widehat{B}=180^\circ-59^\circ\,20'57,2''-72^\circ\,55'=\;47^\circ 44'2,76''$$

$$\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{a}{\sin\widehat{A}}\rightarrow\frac{b}{\sin 47^\circ 44'2,76''}=\frac{10}{\sin 72^\circ\,55'}\rightarrow b=7,74\ cm$$

83. Resol els triangles següents:

a) a = 10 cm, $\widehat{A}$ = 30°, $\widehat{B}$ = 70°

b) a = 25 cm, $\widehat{A}$ = 60°, $\widehat{C}$ = 80°

a) $\widehat{C}=180^\circ-30^\circ-70^\circ=80^\circ$

Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}\rightarrow b=\frac{10\sin\ 70^\circ}{\sin\ 30^\circ}=18,79\text{ cm} \qquad \frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}\rightarrow c=\frac{10\sin\ 80^\circ}{\sin\ 30^\circ}=19,70\text{ cm}$$

b) $\widehat{B}=180^\circ-60^\circ-80^\circ=50^\circ$

Apliquem el teorema del sinus:

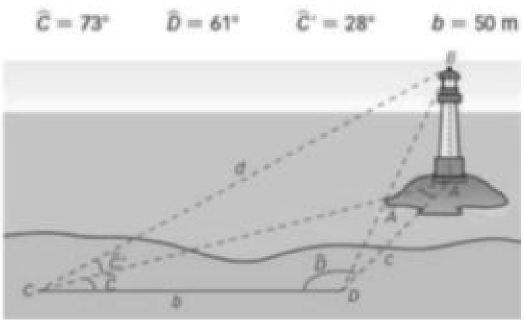
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}\rightarrow b=\frac{25\sin\ 50^\circ}{\sin\ 60^\circ}=22,11\text{ cm} \qquad \frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}\rightarrow c=\frac{25\sin\ 80^\circ}{\sin\ 60^\circ}=28,43\text{ cm}$$

84. El pedestal d'una estàtua fa 8 m i, quan ens separem 15 m de la base, veiem l'estàtua sota un angle de 28º. Quina altura té l'estàtua?

$$\frac{8+x}{15}=tg\ 38^\circ\rightarrow 8+x=0,7813\cdot 15\rightarrow x=3,7193\text{ m}$$

85. Determina l'altura del far situat en un illot amb les dades següents:

$\widehat{C}$ = 73° $\widehat{D}$ = 61° $\widehat{C}'$ = 28°   b = 50 m



$$\widehat{A}=180^\circ-73^\circ-61^\circ=46^\circ$$

Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{50}{\sin\widehat{A}}=\frac{x}{\sin\widehat{D}}\to\frac{50}{\sin 46^\circ}=\frac{x}{\sin 61^\circ}\to x=60,79\text{ m}$$

$$h=60,79\cdot tg 28^\circ=32,32\text{ m}$$

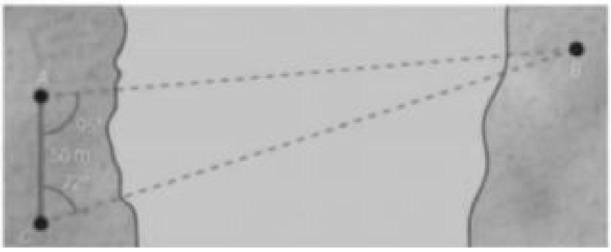
86. **En una construcció, dues bigues de 10 m estan soldades pels extrems i formen un triangle de 15 m amb una altra biga. Calcula els angles que formen entre elles.**

Apliquem el teorema del sinus:

$$\widehat{A}=\widehat{B}\to\frac{10}{\sin\widehat{A}}=\frac{10}{\sin\widehat{B}}=\frac{15}{\sin\left(180^\circ-2\widehat{A}\right)}=\frac{15}{\sin 2\widehat{A}}=\frac{15}{2\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}}$$

$$\cos\widehat{A}=\frac{3}{4}\to\widehat{A}=\widehat{B}=41,41^\circ\to\widehat{C}=97,18^\circ$$

87. **Determina la distància que hi ha entre els punts A i B amb les dades del gràfic.**

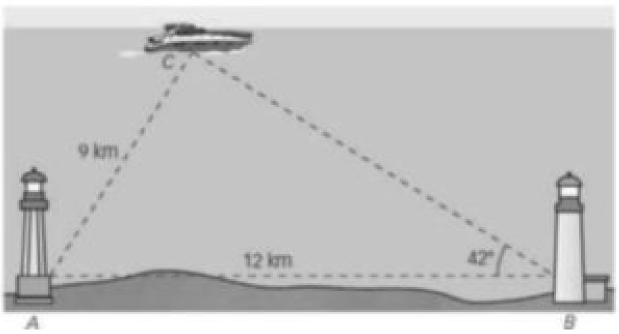


$$\widehat{B}=180^\circ-72^\circ-95^\circ=13^\circ$$

Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{50}{\sin 13^\circ}=\frac{c}{\sin 72^\circ}\to c=211,39\text{ m}$$

88. **Un far A es troba a 12 km a l'oest d'un altre far B. Un iot surt del far A i navega 9 km en línia recta. En aquell moment, des del far B, el iot observa que forma un angle de 42º amb la direcció est-oest. Determina la distància del iot al far B.**



Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{9}{\sin 42^{\circ}}=\frac{12}{\sin \widehat{C}} \rightarrow \widehat{C}=63,15^{\circ}$$

$$\widehat{A}=180^{\circ}-42^{\circ}-63,15^{\circ}=74,85^{\circ}$$

$$\frac{a}{\sin 74,85^{\circ}}=\frac{9}{\sin 42^{\circ}} \rightarrow a=12,98 \text{ km}$$

89. **Dos cables de 10 m i 6 m que subjecten una antena vertical situada sobre un pedestal formen entre ells un angle de 25º. Calcula l'altura de l'antena.**

Apliquem el teorema del cosinus i obtenim la distància a la qual esta lligats els cables a terra:

$$a=\sqrt{10^{2}+6^{2}-2\cdot 10\cdot 6\cdot \cos 25^{\circ}}=5,22 \text{ m}$$

Sigui x la distància que hi ha des de la base de l'antena fins el connector d'un dels cables.. D'aquesta manera tenim que la distància de la base de l'antena a l'altre connector és de 5,22 – x. Així:

$$\left.\begin{array}{l} Altura=\sqrt{10^{2}-x^{2}} \\ Altura=\sqrt{6^{2}-(5,22-x)^{2}} \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{10^{2}-x^{2}}=\sqrt{6^{2}-(5,22-x)^{2}} \rightarrow x=8,74 \text{ m}$$

Substituïm x pel seu valor i obtenim l'altura:

$$Altura=\sqrt{10^{2}-8,74^{2}}=4,86 \text{ m}$$

90. **En una paret hi ha dues argolles a 8 m l'una de l'altra. Un nen lliga cada argolla a un extrem d'una corda i s'allunya de la paret fins que la corda queda tesada. En aquell moment, la corda forma angles de 50º i 37º amb la paret.**

a) Quina mida té la corda?

b) A quina distància es troba el nen de la paret?

L'altura del costat conegut divideix el triangle inicial en dos triangles rectangles. Apliquem la definició de tangent en els angles coneguts i formem un sistema d'equacions.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{tg}50^{\circ}=\dfrac{\text{h}}{\text{x}} \\ \text{tg } 37^{\circ}=\dfrac{h}{8-\text{x}} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{h}=\text{x}\cdot \text{tg}50^{\circ} \\ \text{h}=(8-\text{x})\cdot \text{tg } 37^{\circ} \end{array}\right. \rightarrow x=\frac{8\cdot tg37^{\circ}}{tg37^{\circ}+tg50^{\circ}}=3,1\ m$$

h = 3,1 · tg50º = 3,69 m

El nen es troba a una distància de 3,69 m de la paret.

$$\sin 50^{\circ} = \frac{3,69}{BA} \rightarrow BA = \frac{3,69}{\sin 50^{\circ}} = 4,82m$$

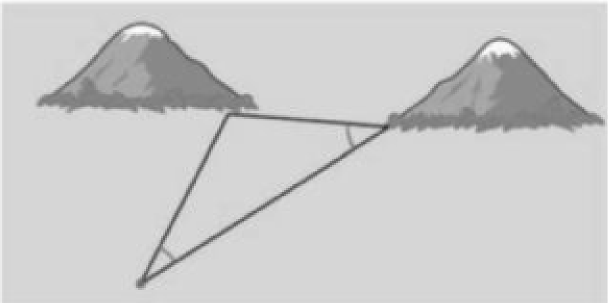
$$\sin 37^{\circ} = \frac{3,69}{CA} \rightarrow CA = \frac{3,69}{\sin 37^{\circ}} = 6,13m$$

Es calcula la longitud de la corda

8 + 4,82 + 6,13 = 18,95 m.

La corda té 18,95 m.

91. **Per determinar la distància entre dos turons, tenim les dades del dibuix i sabem que la distància de l'observador al turó A és 1 km. Quina distància hi ha entre els dos turons?**



$$\frac{1}{\sin 40^{\circ}} = \frac{d}{\sin 30^{0}} \rightarrow d = 0,78 \text{ km}$$

92. **Simplifica les expressions següents:**

a) $\boldsymbol{sin(\alpha - 120°) + sin\alpha + sin(\alpha + 120°)}$

b) $\boldsymbol{sin(\alpha + 30°) + cos(\alpha + 45°)}$

c) $\boldsymbol{cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)}$

d) $\boldsymbol{tg(\alpha + \pi) - tg(\alpha - \pi)}$

e) $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos(-\alpha)}$

a) $\sin\left(\alpha - 120^{\circ}\right) + \sin\alpha + \sin\left(\alpha + 120^{\circ}\right) =$

$$= \sin\alpha\cos 120^{\circ} - \sin 120^{\circ}\cos\alpha + \sin\alpha + \sin\alpha\cos 120^{\circ} + \sin 120^{\circ}\cos\alpha = 0$$

b) $\sin(\alpha + 30^{\circ}) + \cos(\alpha + 45^{\circ}) = \sin\alpha\cos 30^{\circ} + \sin 30^{\circ}\cos\alpha + \cos\alpha\cos 45^{\circ} - \sin\alpha\sin 45^{\circ}$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}+1}{2}\cos\alpha$$

c) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{2} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\cos\frac{3\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{3\pi}{4} =$

$$= -\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$$

d) $tg(\alpha + \pi) - tg(\alpha - \pi) = \frac{tg\alpha + tg\pi}{1 - tg\alpha tg\pi} - \frac{tg\alpha - tg\pi}{1 + tg\alpha tg\pi} = 0$

e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(-\alpha) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha + \cos\alpha = -\sin\alpha + \cos\alpha$

93. **Simplifica aquestes expressions trigonomètriques:**

a) $2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$

b) $2 + \cos 2\alpha - \cos^2\alpha$

c) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha}$

d) $\cos\alpha(1 + \cos\alpha) + \sin^2\alpha$

e) $2\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$

a) $2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$

b) $2 + \cos 2\alpha - \cos^2\alpha = 2 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2 - \sin^2\alpha$

c) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = tg 2\alpha$

d) $\cos\alpha(1 + \cos\alpha) + \sin^2\alpha = \cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos\alpha + 1$

e) $2\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = 2\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}{\cos\alpha} = 2\frac{\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}}{\cos\alpha} = 2\frac{\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}{\cos\alpha} = 2tg\alpha(1+\cos\alpha)$

94. **Si sabem que la tangent de ∝ és 2,5 i que ∝ és un angle del primer quadrant, calcula tg (∝ + 45°). Determina també en quin quadrant es troba l'angle ∝ + 45°.**

$$tg\left(\alpha+45^{\circ}\right)=\frac{tg\alpha+tg45^{\circ}}{1-tg\alpha tg45^{\circ}}=\frac{2,5+1}{1-2,5}=-2,33$$

L'angle és al segon quadrant.

95. **D'un angle agut sabem que tg ∝ =$\frac{5}{4}$**

Calcula tg 2∝.

$$tg\left(2\alpha\right)=\frac{2tg\alpha}{1-tg^{2}\alpha}=\frac{2\cdot\frac{5}{4}}{1-\frac{25}{16}}=-\frac{40}{9}$$

96. **Troba una fórmula per calcular sin 3x en funció de sin x. Aplica-la per calcular sin 3x si saps que sin x =$\frac{1}{3}$.**

$$\sin\left(2x+x\right)=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=2\sin x\cos^{2}x+\sin x\left(\cos^{2}x-\sin^{2}x\right)=$$

$$=3\sin x\left(1-\sin^{2}x\right)-\sin^{3}x=3\sin x-4\sin^{3}x$$

Si $\sin x=\frac{1}{3}$ llavors $\sin\left(3x\right)=3\frac{1}{3}-4\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\frac{23}{27}$

97. **Sabem que sin 56° = 0,83 i cos 23° = 0,92.**

a) Calcula la resta de raons d'aquests angles.

b) Troba les raons trigonomètriques de 79º.

c) Determina les raons de 33º.

d) Podries calcular les raons de 28º?

e) I les raons de 46º?

a) $\mathbf{0,83^{2}+\boldsymbol{cos}^{2}56°=1\ \rightarrow \cos 56°=\sqrt{1-0,83^{2}}=0,56}$

$$\mathbf{tg\,56°=\frac{0,83}{0,56}=1,48}$$

$$\mathbf{\boldsymbol{sin}^{2}23°+0,92^{2}=1\ \rightarrow \sin 23°=\sqrt{1-0,92^{2}}=0,39}$$

$$\mathbf{tg\,23°=\frac{0,39}{0,92}=0,42}$$

b) $\sin 79° = \sin(56° + 23°) = \sin 56° \cdot \cos 23° + \cos 56° \cdot \sin 23° = 0,83 \cdot 0,92 + 0,56 \cdot 0,39 = 0,98$

$$\cos 79° = \cos(56° + 23°)$$
$$= \cos 56° \cdot \cos 23° - \sin 56° \cdot \sin 23° = 0,56 \cdot 0,92 - 0,83 \cdot 0,39 = 0,19$$

$$\operatorname{tg} 79° = \operatorname{tg}(56° + 23°) = \frac{\operatorname{tg} 56° + \operatorname{tg} 23°}{1 - \operatorname{tg} 56° \cdot \operatorname{tg} 23°} = \frac{1,48 + 0,42}{1 - 1,48 \cdot 0,42} = 5,02$$

c) $\sin 33° = \sin(56° - 23°) = \sin 56° \cdot \cos 23° - \cos 56° \cdot \sin 23° = 0,83 \cdot 0,92 - 0,56 \cdot 0,39 = 0,55$

$$\cos 33° = \cos(56° - 23°)$$
$$= \cos 56° \cdot \cos 23° + \sin 56° \cdot \sin 23° = 0,56 \cdot 0,92 + 0,83 \cdot 0,39 = 0,84$$

$$\operatorname{tg} 33° = \operatorname{tg}(56° - 23°) = \frac{\operatorname{tg} 56° - \operatorname{tg} 23°}{1 + \operatorname{tg} 56° \cdot \operatorname{tg} 23°} = \frac{1,48 - 0,42}{1 + 1,48 \cdot 0,42} = 0,65$$

d) $\sin 28° = \sin\frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 56°}{2}} = \sqrt{\frac{1-0,56}{2}} = 0,47$

$$\cos 28° = \cos\frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 56°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,56}{2}} = 0,88$$

$$\operatorname{tg} 28° = \operatorname{tg}\frac{56°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 56°}{1 + \cos 56°}} = \sqrt{\frac{1 - 0,56}{1 + 0,56}} = 0,53$$

e) $\sin 46° = \sin(2 \cdot 23°) = 2 \cdot \sin 23° \cos 23° = 2 \cdot 0,39 \cdot 0,92 = 0,72$

$$\cos 46° = \cos(2 \cdot 23°) = \cos^2 23° - \sin^2 23° = 0,92^2 - 0,39^2 = 0,69$$

$$\operatorname{tg} 46° = \operatorname{tg}(2 \cdot 23°) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 23°}{1 - \operatorname{tg} 23°} = \frac{2 \cdot 0,42}{1 - 0,42^2} = 1,02$$

98. Indica una fórmula simplificada de:

a) sin (30° + $\widehat{A}$) **c) tg (45° – $\widehat{C}$)**

b) cos ($\widehat{B}$ – 60°) **d) cos ($\widehat{D}$ + 30°)**

a) $\sin(30° + \widehat{A}) = \sin 30° \cdot \cos \widehat{A} + \cos 30° \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}\cos \widehat{A} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \widehat{A} = \frac{1}{2}(\cos \widehat{A} + \sqrt{3}\sin \widehat{A})$

b) $\cos(\widehat{B} - 60°) = \cos \widehat{B} \cdot \cos 60° + \sin \widehat{B} \cdot \sin 60° = \frac{1}{2}\cos \widehat{B} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \widehat{B} = \frac{1}{2}(\cos \widehat{B} + \sqrt{3}\sin \widehat{B})$

c) $\operatorname{tg}(45° - \widehat{C}) = \frac{1-tg\,\widehat{C}}{1+tg\,\widehat{C}}$

d) $\cos(\widehat{D} + 30°) = \cos \widehat{D} \cdot \cos 30° - \sin \widehat{D} \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \widehat{D} - \frac{1}{2}\sin \widehat{D} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos \widehat{D} - \sin \widehat{D})$

99. Si sabem que sin x = $\frac{2}{5}$ i que $\frac{2}{5} < x < \pi$, sense calcular prèviament el valor de x, troba:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad tg\ (x-\frac{\pi}{3})$$

a) Expressa els resultats utilitzant radicals.

b) Explica com determinaries les raons

de $\frac{\pi}{4}$ $rad\ i\ \frac{\pi}{3}\ rad.$

Trobem les raons trigonomètriques de x:

cos x = $-\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ tg = $-\frac{2\sqrt{21}}{21}$

a) i b) Les raons trigonomètriques de $\frac{\pi}{4}$ $rad, 45°\ i\ \frac{\pi}{3}\ rad, 60°$ són conegudes.

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \quad tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{42}}{10}$$

$$tg(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{tgx-tg\frac{\pi}{3}}{1+tgx\cdot tg\frac{\pi}{3}} = -\frac{8\sqrt{21}+25\sqrt{3}}{9}$$

100. **Sabem que** $\pi < x < \frac{3\pi}{2}\ i\ tg\ x = \frac{3}{4}$

a) Troba sin x i cos x.

b) Utilitzant radicals, troba les raons dels angles $\frac{\pi}{6}$ **i** $\frac{\pi}{4}$

c) Sense determinar l'angle x, calcula:

$$cos(x-\frac{\pi}{4}) \qquad tg(x+\frac{\pi}{6})$$

d) Sense determinar l'angle x, decideix raonant en quin quadrant són aquests angles.

$$x-\frac{\pi}{4} \qquad x+\frac{\pi}{6}$$

a) $\cos x = \sqrt{\frac{1}{1+0{,}75^2}} = -0{,}8 \qquad sen^2x+0{,}8^2=1 \rightarrow \sin x = \sqrt{1-0{,}8^2} = -0{,}6$

b) $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad tg\frac{\pi}{4}=1$

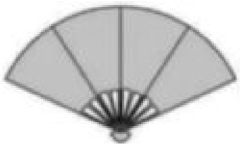
c) $\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+sinx\cdot\sin\frac{\pi}{4} = -0{,}8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-0{,}6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}7\sqrt{2}$

$$tg(x+\frac{\pi}{6}) = \frac{tgx+tg\frac{\pi}{6}}{1-tgx\cdot tg\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{48+25\sqrt{3}}{39}$$

d) Com que el sinus de l'angle x $-\frac{\pi}{4}$ és positiu, l'angle és al segon quadrant.

e) I com la tangent de l'angle x + $\frac{\pi}{6}$ és positiva, l'angle és al tercer quadrant.

101. **L'angle que forma un ventall és de 170º. Si el ventall té tres varetes centrals, calcula les raons trigonomètriques dels angles que es formen quan el despleguem vareta a vareta si saps que cos 170° = – 0,98 i que sin 170° = 0,17.**



Els angles que es formen són de 42,5º, 85º, 127,5º i 170º.

X=170º

$$\sin(85^\circ)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=0,99 \qquad \cos(85^\circ)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=0,1$$

$$\sin(42,5^\circ)=\sin\left(\frac{x}{4}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}}=0,67 \qquad \cos(42,5^\circ)=\cos\left(\frac{x}{4}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}}=0,74$$

$$\sin(127,5^\circ)=\sin(42,5^\circ+85^\circ)=\sin(42,5^\circ)\cos(85^\circ)+\sin(85^\circ)\cos(42,5^\circ)=0,79$$

$$\cos(127,5^\circ)=\cos(42,5^\circ+85^\circ)=\cos(42,5^\circ)\cos(85^\circ)-\sin(42,5^\circ)\sin(85^\circ)=-0,59$$

102. **Calcula cos 285º a partir de les raons dels angles de 330º i de 45º.**

$$\cos(285^\circ)=\cos(330^\circ-45^\circ)=\cos(330^\circ)\cos(45^\circ)+\sin(330^\circ)\sin(45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0,2588$$

103. **Si les raons de 32º són:**

sin 32° = 0,53 **cos 32° = 0,848**

a) Calcula les raons trigonomètriques de 62º.

b) Determina les raons de 31º.

c) Pots calcular les raons trigonomètriques de qualsevol angle que tingui la mida en graus, però sense minuts ni segons?

a) $\sin 62^\circ=\sin(32^\circ+30^\circ)=\sin 32^\circ\cdot cos30^\circ+cos32^\circ sin30^\circ=0,53\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0,848\cdot\frac{1}{2}=0,88$

$$\cos 62^\circ=\cos(32^\circ+30^\circ)=\cos 32^\circ\cdot\cos30^\circ-\sin32^\circ\sin30^\circ=0,848\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-0,53\cdot\frac{1}{2}=0,46$$

$$\mathrm{tg}\,62^\circ=\frac{0,88}{0,46}=1,91$$

b) $\sin 31^\circ=\sin\frac{62^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 62^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-0,46}{2}}=0,52$

$$\cos 31^\circ=\cos\frac{62^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos 62^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+0,46}{2}}=0,85$$

$$\mathbf{tg\,31° = \frac{0,52}{0,85} = 0,61}$$

c) A partir de les mides de 32º i de 31º, podem trobar les mides de 1º, i a partir d'aquestes podem calcular les raons de qualsevol angle.

104. Escriu les expressions que tens a continuació en forma de producte:

a) cos 2∝ – cos ∝ **d) sin ∝ – cos ∝**

b) cos ∝ – cos 4∝ **e) cos ∝ + sin 3∝**

c) sin 8∝ – sin 2∝ **f) sin ∝ – sin 3∝**

a) $\cos 2\alpha - \cos\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha(\cos\alpha - 1) - (1 - \cos^2\alpha) =$

$= \cos\alpha(\cos\alpha - 1) - (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = (\cos\alpha - 1)\cdot(2\cos\alpha + 1)$

b) $\cos\alpha - \cos 4\alpha = \cos\alpha - \cos(3\alpha + \alpha) = \cos\alpha + tg\alpha\cos\alpha\sin 3\alpha - \cos a\cos 3\alpha =$

$= \cos\alpha(1 + tg\alpha\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)$

c) $\sin 8\alpha - \sin 2\alpha = \sin(2\alpha + 6\alpha) - \sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\cos 2\alpha - \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\cos 6\alpha + (\sin 2\alpha\cos 4\alpha + 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 2\alpha)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha =$

$= 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 2\alpha)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = \sin 2\alpha(\cos 6\alpha + \cos 4\alpha\cos 2\alpha + 2\cos^3 2\alpha - 1)$

d) $\sin\alpha - \cos\alpha = tg\alpha\cdot\cos\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha(tg\alpha - 1)$

e) $\cos\alpha + \sin 3\alpha = \cos\alpha + \sin(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha =$

$= \cos\alpha + \cos\alpha tg\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha = \cos\alpha(1 + tg\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$

f) $\sin\alpha - \sin 3\alpha = \sin\alpha - \sin(2\alpha + \alpha) = \sin\alpha - \sin 2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos 2\alpha =$

$= \sin\alpha - 2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos 2\alpha = \sin\alpha(1 - 2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha)$

105. Simplifica i escriu les expressions següents amb una sola raó trigonomètrica:

a) $\dfrac{\boldsymbol{sin} \propto - \boldsymbol{sin^2} \propto}{\boldsymbol{cos^4} \propto + \boldsymbol{cos^2} \propto \cdot \boldsymbol{sin^2} \propto}$

b) $\boldsymbol{cos^2 5 \propto - sin^2 5 \propto}$

c) $\boldsymbol{sec \propto (sin \propto cos \propto + cos^2 \propto) - sin \propto}$

d) $\boldsymbol{sin^4 \propto - cos^4 \propto + cos^2 \propto}$

a) $\dfrac{\sin\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{(1-\sin^2\alpha)^2 + (1-\sin^2\alpha)\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{1-\sin^2\alpha} = \text{sen}\,\alpha$

b) $\cos^2 5\alpha - \sin^2 5\alpha = \cos 10\alpha$

c) $\sec\alpha\left(\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)-\sin\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}\left(\cos\alpha\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)\right)-\sin\alpha=\cos\alpha$

d) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)-\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

106. Demostra que es verifiquen les igualtats que hi ha a continuació:

a) $1+\sin 2\propto\,=2\sin(\propto+45°)\cos(\propto-45°)$

b) $\cos 2\alpha=-2\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha+45°)$

c) $\sin 2\alpha=-2tg(\alpha+\pi)[\sin^2(\alpha+\pi)-1]$

d) $\cos\left(\frac{\propto}{2}\right)=\sin\left(\frac{\propto+\pi}{2}\right)$

a) $2\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)=$

$2(\sin\alpha\cdot\cos 45°+\cos\alpha\cdot\sin 45°)(\cos\alpha\cdot\cos 45°+\sin\alpha\cdot\sin 45°)=$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{2\cdot\cos^2\propto}{4}+\frac{4\sin\propto\cdot\cos\propto}{4}+\frac{2\cdot\sin^2\propto}{4}\right)=$$

$$=\cos^2\propto+\sin^2\propto+2\sin\propto\cos\propto\,=1+\sin 2\propto$$

b) $2\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)=$

$2(\sin\alpha\cdot\cos 45°+\cos\alpha\cdot\sin 45°)(\cos\alpha\cdot\cos 45°-\sin\alpha\cdot\sin 45°)=$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{2\cdot\cos^2\propto}{4}-\frac{2\cdot\sin^2\propto}{4}\right)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$

c) $-2tg(\alpha+\pi)\left[\sin^2(\alpha+\pi)-1\right]=\dfrac{-(-2\sin\alpha)}{-\cos\alpha}\left[\sin^2\alpha-1\right]=-\dfrac{2\sin\alpha(-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin 2\alpha$

d) $$\sin\left(\frac{\alpha+\pi}{2}\right)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{2\cos\left(\dfrac{\alpha+\pi}{2}\right)}=\frac{-\sin\alpha}{2\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{\dfrac{\cos^2\alpha-1}{4(1+\cos\alpha)}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{2(1+\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

107. Demostra que la igualtat següent és certa:

$$\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2tg\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

108. **Demostra les igualtats trigonomètriques següents:**

a) $\frac{sin2\alpha}{sin\alpha} - \frac{cos2\alpha}{cos\alpha} = sec\alpha$

c) $\frac{1}{1-sin\alpha} + \frac{1}{1+sin\alpha} = 2sec^2\alpha$

b) $tg\alpha + cotg\alpha = sec\alpha \cdot cosec\alpha$

d) $cos\,\alpha + tg\alpha \cdot sin\alpha = sec\alpha$

a) $$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

b) $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\sin\alpha} = \sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$$

c) $$\frac{1+\sin\alpha+1-\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha} = 2\sec^2\alpha$$

d) $$\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

109. **Comprova que la igualtat següent és certa substituint a per un angle conegut:**

$$\frac{2sin\alpha}{tg2\alpha} = cos\alpha - sin\alpha \cdot tg\alpha$$

Demostra que aquesta propietat es compleix per a qualsevol angle α.

Escollim l'angle de 30°

$$\frac{2sin30°}{tg2\cdot 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cos 30° - sin30° \cdot tg30° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2sin\alpha}{tg2\alpha} = \frac{2sin\alpha}{\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}} = \frac{sin\alpha\cdot(1-tg^2\alpha)}{tg\alpha} = \frac{sin\alpha}{tg\alpha} - \frac{sin\alpha\cdot tg^2\alpha}{tg\alpha} = cos\alpha - sin\alpha\cdot tg\alpha$$

110. **Determina la solució de les equacions següents:**

a) **cos x tg x =** $\frac{1}{2}$

e) **sin x cotg x =** $-\frac{1}{4}$

b) **cos 2 x + sin 2 x = 1**

f) **sin 2 x + sin 2 x = 0**

c) **cos 2 x – sin 2 x = 0**

g) **tg x + sin x = 0**

d) **sin 2 x + cos x = 1**

h) **tg x – sin 2 x = 0**

a) $\cos x \cdot tg\, x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°\cdot k \\ x_2 = 150° + 360°\cdot k \end{cases}$

b) $\cos 2x + \sin 2x = 1 \rightarrow \cos^2 x - sin^2x + 2sinx\cdot cosx = cos^2x + sin^2x$

$$\rightarrow -2sin^2x + 2\sin x\, cosx\ = 0\ \rightarrow 2\sin x\,(-\sin x + \cos x) = 0$$

$\sin x = 0\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\sin x = \cos x\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $\cos 2x - \sin 2x = 0\ \rightarrow \cos 2x = \sin 2x\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 22{,}5° + 180° \cdot k \\ x_2 = 112{,}5° + 180° \cdot k \end{cases}$

d) $\sin 2x + \cos x = (2\sin x + 1)cosx = 0\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k & x_3 = 210° + 360° \cdot k \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k & x_4 = 330° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\rightarrow -2sin^2x + 2\sin x\, cosx\ = 0\ \rightarrow 2\sin x\,(-\sin x + \cos x) = 0$

$\sin x = 0\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\sin x = \cos x\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

e) $\sin x \cot gx = -\frac{1}{4} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 104{,}48° + 360° \cdot k \\ x_2 = 255{,}52° + 360° \cdot k \end{cases}$

f) $\sin 2x + \sin 2x = 0\ \rightarrow 2\sin 2x = 0\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 180° \cdot k \\ x_2 = 90° + 180° \cdot k \end{cases}$

g) $tgx + \sin x = 0\ \rightarrow \sin x \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right) = 0$

$\sin x = 0\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\frac{1}{cos\ x} + 1 = 0\ \rightarrow\ x_3 = 180° + 360° \cdot k$

h) $\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0\ \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x \cos x = 0\ \rightarrow \sin x(1 - 2cos^2x) = 0$

$\sin x = 0\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\rightarrow 1 - 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow\ x_3 = 45° + 360° \cdot k$

111. **Resol les equacions trigonomètriques que tens a continuació:**

a) $\dfrac{\boldsymbol{sin(60°-x)}}{\boldsymbol{cos\ x}} = \mathbf{1}$

b) $\boldsymbol{tg\ \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x - 1 = 0}$

c) **sin (x + 30°) + cos (x + 60°) = 1 + cos 2 x**

a) $\dfrac{\sin(60°-x)}{\cos x} = 1 \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{2\cos x} = 1 \rightarrow \sqrt{3} - tg\ x = 2$

$\rightarrow$ tg x =-0,2679 $\rightarrow$ x=345° + 360°·k

b) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x - 1 = 0 \rightarrow \frac{1-tg\ x}{1+tg\ x} + tg\ x - 1 = 0$

$\rightarrow tg^2 x - tg\ x = 0 \rightarrow tg\ x(tg\ x - 1) = 0$

$\mathrm{tg}\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\mathrm{tg}\, x - 1 = 0 \rightarrow tg\ x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $\sin(x + 30°) + cos\ (x + 60°) = 1 + \cos 2x$

$\rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2} + \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{\cos x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2} = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = 2\cos^2 x \rightarrow \cos x(2\cos x\text{-}1) = 0$

$\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k \end{cases}$

$2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60° + 360° \cdot k \\ x_2 = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

112. **Resol les equacions trigonomètriques següents:**

a) tg (x + 45°) + tg (x - 45°) = 2 cotg x

b) 4 sin 2(x + 30°) = 1

c) $\mathbf{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ **– 1 = 0**

d) sin (x + 30°) - cos x = 0

a) $tg(x+45°) + tg(x-45°) = 2cotg\ x \rightarrow \dfrac{tgx + tg45°}{1 - tgxtg45°} + \dfrac{tgx - tg45°}{1 + tgxtg45°} = \dfrac{2}{tgx} \rightarrow$

$(tgx+1)^2\, tgx + (tgx-1)(tgx+1)tgx = 2(1 - tg^2 x) \rightarrow$

$\rightarrow 6tg^2 x = 2 \rightarrow tgx = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30° + 180° \cdot k,\ 150° + 180° \cdot k$

b) $\sin\left(2x+60^\circ\right)=0,25 \to \begin{cases} 2x+60^\circ=14,48^\circ \to x=-22,76^\circ+180^\circ\cdot k \\ 2x+60^\circ=165,52^\circ \to x=52,76^\circ+180^\circ\cdot k \end{cases}$

c) $tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1=0 \to \frac{tg\frac{\pi}{4}-tgx}{1+tg\frac{\pi}{4}\cdot tgx}=1 \to \frac{1-tgx}{1+tgx}=1 \to tgx=0 \to x=0^\circ+180^\circ k$

d) $\sin(x+30^\circ)-\cos x=0 \to \sin x\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos x-\cos x=0 \to$

$\to \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\cos x \to \sqrt{3}\sin x=\cos x \to \left(\sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2 x}\right)^2=\left(\cos x\right)^2 \to$

$\to 3-3\cos^2 x=\cos^2 x \to 3=4\cos^2 x \to \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{cases} \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \to 30^\circ+360^\circ k,\ 330^\circ+360^\circ k \\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \to 150^\circ+360^\circ k,\ 210^\circ+360^\circ k \end{cases}$

De totes les solucions possibles s'observa que únicament són vàlides:

$x=30^\circ+360^\circ k$ $\qquad$ $x=210^\circ+360^\circ k$

113. Resol aquests sistemes d'equacions trigonomètriques:

a) $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=1 \\ \cos^2 x-\cos^2 y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} x+y=120 \\ \cos x=\frac{1}{2\cos y}+\sin x\cdot tgy \end{cases}$

a) $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=1 \\ \cos^2 x-\cos^2 y=\frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \sin^2 x=1-\sin^2 y=\cos^2 y \\ \cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\cos 2x=\frac{1}{2} \to x=30^\circ+180^\circ\cdot k$

$\cos^2 y=\sin^2 30^\circ \to \cos y=\sqrt{\frac{1}{4}} \to y=60^\circ+180^\circ\cdot k$

b) $\begin{cases} x+y=120 \\ \cos x=\frac{1}{2\cos y}+\sin x\cdot tgy \end{cases} \to$ x=120° - y → cos (120°-y) =

$\frac{1}{2\cos y}+\sin(120^\circ-y)\text{tg}\,y$

$-\cos^2 y+\sqrt{3}\sin y\cdot\cos y=1+\sqrt{3}\sin y\cdot\cos y-\sin^2 y$

$\to \cos^2 y-\sin^2 y=1 \to \cos 2y=-1 \to y=90^\circ+180^\circ\cdot k$

$x=120^\circ-y=120^\circ-90^\circ-180^\circ\cdot k=30^\circ-180^\circ\cdot k$

114. Resol aquests sistemes d'equacions trigonomètriques:

a) $\begin{cases} x+y=60^\circ \\ \cos x=\sin y \end{cases}$ $\qquad$ **c)** $\begin{cases} \sin x+2\cos y=2 \\ 3\sin x-4\cos y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y-x=30^\circ \\ tg\,y=tg(y-3x) \end{cases}$ $\qquad$ **d)** $\begin{cases} 4\sin x+\cos^2 y=2 \\ 2\sin x\mp\cos y=1 \end{cases}$

a) $x = 60^{o} - y \rightarrow \cos\left(60^{o} - y\right) = \sin y \rightarrow \cos 60^{o} \cos y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y = \sin y$

$\frac{1}{2}\cos y = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\sin y \rightarrow \frac{1}{2-\sqrt{3}} = tg\ y \rightarrow y = 75^{o} + 360^{o}\cdot k,\ x = -15^{o} + 360^{o}\cdot k$

b) $y = 30^{o} + x \rightarrow tg\left(30^{o} + x\right) = tg\left(30^{o} - 2x\right) \rightarrow \frac{tg30^{o} + tgx}{1 - tg30^{o}tgx} = \frac{tg30^{o} - tg2x}{1 + tg30^{o}tg2x}$

$tg30^{o} + tg^{2}30^{o}tg2x + tgx + tg30^{o}tg2xtgx = tg30^{o} - tg^{2}30^{o}tgx - tg2x + tg30^{o}tg2xtgx$

$\frac{4}{3}tg2x + \frac{4}{3}tgx = 0 \rightarrow \frac{2tgx}{1 - tg^{2}x} + tgx = 0 \rightarrow tgx\left(3 - tg^{2}x\right) = 0$

$x = 180^{o}\cdot k,\ y = 180^{o}\cdot k + 30^{o}$

$x = 60^{o} + 180^{o}\cdot k,\ y = 90^{o} + 180^{o}\cdot k$

$x = 120^{o} + 180^{o}\cdot k,\ y = 150^{o} + 180^{o}\cdot k$

c)
$$\begin{array}{r} 2\sin x + 4\cos y = 4 \\ +\quad 3\sin x - 4\cos y = 1 \\ \hline 5\sin x = 5 \end{array}$$

$5\sin x = 5 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \rightarrow x = 90^{o} + 360^{o}\cdot k,\ y = 60^{o} + 360^{o}\cdot k$

d)
$$\begin{array}{r} 4\sin x + \cos^{2}x = 2 \\ -\quad 4\sin x + 2\cos y = 2 \\ \hline \cos^{2}y - 2\cos y = 0 \end{array}$$

$$\cos^{2}y - 2\cos y = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \rightarrow \sin\ x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 180^{o}\cdot k,\ x = 30^{o} + 360^{o} \\ \cos y = 2 \rightarrow \text{Sense solució} \end{cases}$$

115. **Resol aquestes equacions trigonomètriques:**

a) $4\sin x - sec\ x = 0$

b) $\frac{cos^{2}x}{2cos\ x + sin\ x} = sin\ x$

c) $\frac{1}{cos\ x + sin\ x} + 2\ sin\ x = 2\ cos\ x$

d) $sinx(sinx - 1) = 5\ cos^{2}x - 4$

e) **2 cosx – 1 = sec x**

f) **2 cos x + sin x = 1**

g) **sin x + cos x = 0**

a) $4\sin x - \sec x = 0 \ \rightarrow 4\sin x \cos x - 1 = 0 \ \rightarrow 2\sin 2x = 1 \ \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_1 = 15° + 180° \cdot k \\ x_2 = 75° + 180° \cdot k \end{cases}$$

b) $\frac{\cos^2 x}{2\cos x + \sin x} = \sin x \ \rightarrow \cos^2 x = 2\sin x \cos x + \sin^2 x \ \rightarrow \cos 2x = \sin 2x$

$$\begin{cases} x_1 = 22,5° + 180° \cdot k \\ x_2 = 112,5° + 180° \cdot k \end{cases}$$

c) $\frac{1}{\cos x + \sin x} + 2\sin x = 2\cos x \rightarrow \frac{2\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x}{2\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x} = 1$

$$\rightarrow \frac{\sin x\ (\cos x + \sin x)}{\cos x\,(\cos x + \sin x)} = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$$

d) $\sin x(\sin x - 1) = 5\cos^2 x - 4 \rightarrow \sin^2 x - \sin x = 5(1 - \sin^2 x) - 4$

$6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\rightarrow \sin x = -\frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 340°31'44'' + 360° \cdot k \\ x_2 = 119°28'16'' + 360° \cdot k \end{cases}$

$\rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 150° + 360° \cdot k \end{cases}$

e) $2\cos x - 1 = \sec x \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\rightarrow \cos x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 120° + 360° \cdot k \\ x_2 = 240° + 360° \cdot k \end{cases}$

f) $2\cos x + \sin x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 - 2\cos x \rightarrow 5\cos^2 x - 4\cos x = 0$

$\rightarrow \cos(5\cos x - 4) = 0 \rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36°52'11,6'' + 360° \cdot k \\ x_2 = 323°7'4'' + 360° \cdot k \end{cases}$

g) $\rightarrow \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135° + 360° \cdot k \\ x_2 = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$

116. Determina quin és l'angle agut tal que el triple de la seva tangent és igual al doble del seu cosinus.

$$3tgx = 2\cos x \rightarrow 3\frac{\sin x}{\cos x} = 2\cos x \rightarrow 3\sin x = 2\cos^2 x \rightarrow 3\sin x = 2\left(1 - \sin^2 x\right)$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} -2 \rightarrow \text{No pot ser} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'angle agut és $x = 30°$.

117. Indica quin és l'angle obtús tal que el seu sinus sumat amb el triple del seu cosinus dóna -1?

$$\sin x + 3\sqrt{1-\sin^2 x} = -1 \to -3\sqrt{1-\sin^2 x} = (1+\sin x)$$

$$9\left(1-\text{sen}^2 x\right) = 1 + 2\sin x + \sin^2 x \to 5\sin^2 x + \sin x - 4 = 0 \to \sin x = \begin{cases} -1 \to x = 270^\circ \\ \dfrac{4}{5} \to x = 126{,}87^\circ \end{cases}$$

118. Quin és l'angle agut tal que el seu sinus multiplicat pel seu cosinus dóna $\frac{1}{4}$?

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4} \to \sin 2x = \frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x = 30^\circ \to x = 15^\circ \\ 2x = 150^\circ \to x = 75^\circ \end{cases}$$

119. Si sabem que l'àrea d'un triangle rectangle és 28 cm^2 i que un dels angles fa 60º:

a) Quina mida té cadascun dels angles?

b) Calcula'n la longitud dels costats i el perímetre.

a) L'angle desconegut és: 90º - 60º = 30º

b) Prenem com base i altura els catets del triángle rectangle:

$$28 = \frac{b \cdot a}{2} \to b = \frac{56}{a}$$

$$tg\ 30^\circ = \frac{\frac{56}{a}}{a} \to a = \sqrt{\frac{56}{tg 30^\circ}} = 9{,}85\ cm$$

b=5,68 cm

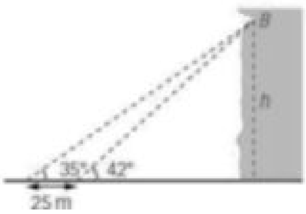
Apliquem el teorema de Pitàgores per calcular la hipotenusa:

$$c = \sqrt{9{,}85^2 + 5{,}68^2} = 11{,}37\ cm$$

Els costats són de 11,37, 5,68 i 9,85 cm respectivament.

El perímetre és 26,9 cm.

120. Fixa't en la situació i, mitjançant la trigonometria, calcula l'altura, h, a la qual es troba el punt B.

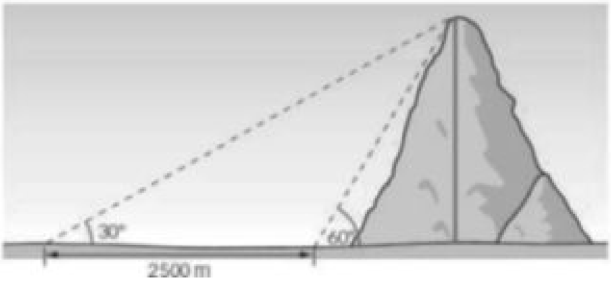


Si B es troba a la altura h

$$\begin{cases} \text{tg}\,35^\circ = \frac{h}{25+x} \\ \text{tg}\,42^\circ = \frac{h}{x} \end{cases} \to x = 1{,}11h \to h = 17{,}51 + 0{,}63h \to h = 47{,}38\ m$$

El punt B es troba a l'altura de 47,38 m.

121. **Determina l'altura de la muntanya de la figura a partir de les dades que ens proporcionen.**



180º - 60º = 120º 180º - 120º - 30º = 30º

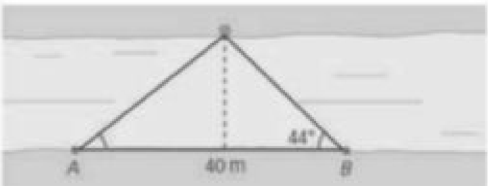
Els angles del primer triangle són 30º, 120º i 30º. Pel teorema del sinus

$$\frac{2500}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ} \rightarrow a = 2500 \text{ m}$$

Es resol el triangle rectangle sabent que un angle és 60º i la seva hipotenusa és 2.500 m.

$$\frac{h}{2500} = \sin 60^\circ \rightarrow h = 2165,06 \text{ m}$$

122. **Dos amics estan separats per una distància de 40 m i veuen un arbre a la riba del davant del riu, com indica la figura. Calcula l'amplada del riu.**

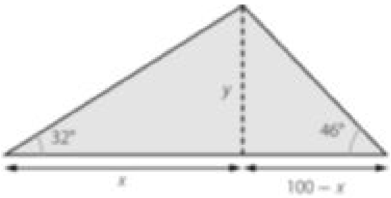


Anomenem h a l'amplada del riu.

$$\begin{cases} \text{tg}\,38^\circ = \frac{\text{h}}{\text{x}} \\ \text{tg}\,44^\circ = \frac{\text{h}}{40-\text{x}} \end{cases} \rightarrow \text{x} = 1{,}28\text{h} \rightarrow 38{,}63 - 1{,}24\text{h} \rightarrow \text{h} = 17{,}25 \text{ m}$$

L'amplada del riu és 17,25 m.

123. **Dos focus, situats en el terra i en costats diferents, il·luminen el campanar d'una església. La suma de les distàncies dels focus fins al peu de la torre és de 100 m. Si els angles que formen els feixos de llum amb el terra són de 32º i 46º, determina l'altura que té el campanar.**



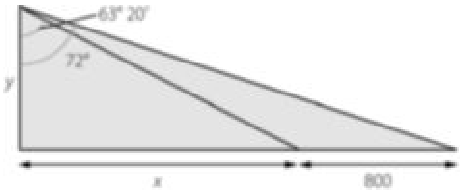
Anomenem y l'altura del campanar

$$\begin{cases} \text{tg}\, 32° = \frac{y}{x} \\ \text{tg}\, 46° = \frac{y}{100-x} \end{cases} \rightarrow\ x = 1{,}64\ \rightarrow\ 103{,}55 - 1{,}66y = y\ \rightarrow\ y = 38{,}93\ \text{m}$$

L'altura del campanar és 38,93 m.

124. **Des d'un turó es poden veure, en línia recta cap a l'est, dos poblets que estan separats 800 m l'un de l'altre. Des del cim s'observen amb angles de 18º i 26º 40', respectivament.**

a) Quina és l'altura del turó? **b) A quina distància es troba cada poblet de l'observador?**



a) Anomenem y l'altura del turó.

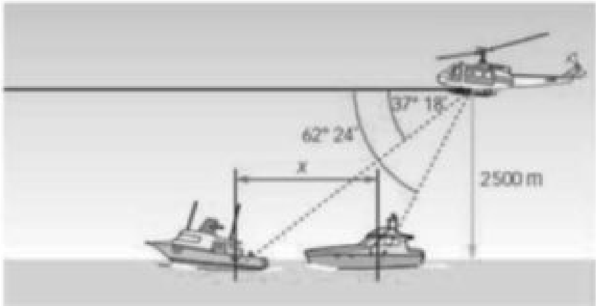
90º - 18º = 72º 90º - 26º 40' = 63º 20'

$$\begin{cases} \text{tg}\, 72° = \frac{x+800}{y} \\ \text{tg}\, 63°20' = \frac{x}{y} \end{cases} \rightarrow\ x = 1{,}99y\ \rightarrow\ 3{,}08y = 1{,}99y + 800\ \rightarrow\ y = 735{,}94\ \text{m}$$

x = 199y = 1504,42 m 800 + x = 2304,42 m

La distància de l'observador a cada poblet és 1.674,78 m i 2.419,18 m, respectivament.

125. **El pilot d'un helicòpter de reconeixement que vola sobre el mar a una altura de 2 500 m albira dues embarcacions que es troben en un mateix pla vertical, amb angles de depressió de 62º 24' i 37º 18', respectivament. Calcula la distància que separa una embarcació de l'altra.**



$$a = \frac{2500}{\sin(37°18')} = 4125,49 \text{ m}$$

Es calculen els angles:

$62°24' - 37°18' = 25°6'$

$90° - 62°24' = 27°36'$

$180° - 90° - 27°36' = 62°24'$

$180° - 62°24' = 117°36'$

$180° - 117°36' - 25°6' = 37°18'$

Pel teorema del sinus:

$$\frac{4125,49}{\sin 117°36'} = \frac{x}{\sin 25°6'} \rightarrow x = 1974,52 \text{ m}$$

126. **Entre les dues plantes d'un edifici han d'instal·lar una escala. La diferència d'altura entre les plantes és de 3,5 m i disposen de 5 m en horitzontal per posar l'escala.**

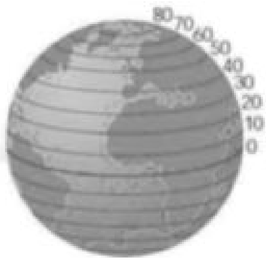
a) Calcula l'angle d'inclinació de l'escala.

b) Determina la longitud de l'escala.

a) $tg\alpha = \frac{3,5}{5} \rightarrow \alpha = 35°$

b) $\sin 35° = \frac{3,5}{l} \rightarrow l = 6,10 \text{ m}$

127. **Calcula la longitud del paral·lel 38º nord si considerem que el radi de la Terra és de 6 370 m.**

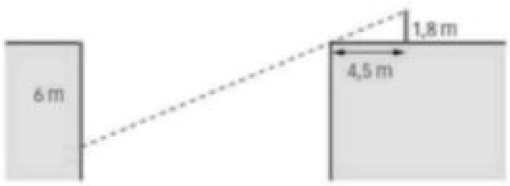


$90° - 38° = 52°$

$r = 6370 \cdot \sin 52^\circ = 5019,63 \text{ km}$

$2\pi r = 31539,26 \text{ km}$

128. **L'Eulàlia i la Miranda volen mesurar l'amplada d'un congost. Per fer-ho, es col·loquen en una de les vores. L'Eulàlia porta una corda de 6 m de llargada i la deixa lliscar des de la vora del congost. De la seva banda, la Miranda, que té els ulls a 1,8 m del terra, s'ha d'enretirar 4,5 m per veure la vora més próxima coincidint amb el final de la corda.**



a) Quina amplada té el congost? **b) Es podria fer sense utilitzar la trigonometria?**

L'amplada del congost és x:

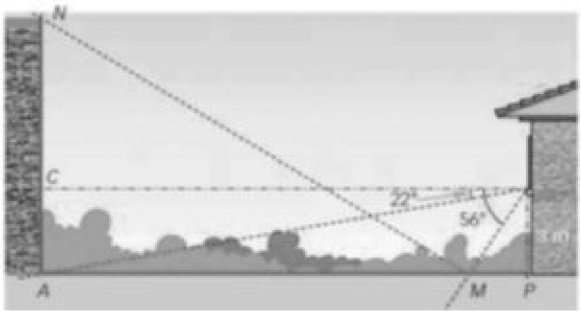
$\text{tg}\, a = \dfrac{1,8}{4,5} = 0,4$

$0,4 = \dfrac{6}{x} \rightarrow x = 15 \text{ m}$

a) L'amplada del congost és 15 m.

b) Es podria utilitzar la semblança de triangles per resoldre el problema.

129. **Des de la finestra d'un edifici, situada a 3 m d'altura, es veu la base d'un altre edifici amb un angle de 22º per sota de l'horitzontal. La part superior d'aquest segon edifici no es pot veure, però sí que se'n pot observar el reflex en un estany amb un angle de 56º sota l'horitzontal. Quina altura té aquest segon edifici? Quina distància hi ha entre totes dues edificacions?**



Sigui *V* el punt que representa la finestra. Llavors:

$90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$

$\overline{MP} = 3 \cdot tg 34^\circ = 2 \text{ m}$ $\overline{MV} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ m}$

Pel teorema del sinus:

$$\frac{3,6}{\sin 22^{\circ}}=\frac{\overline{AM}}{\sin 34^{\circ}}\rightarrow \overline{AM}=5,4\text{ m}$$

La distància entre els dos edificis és: $2+5,4=7,4\text{ m}$

Com l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió, s'utilitza la semblança de triangles per trobar l'altura.

$$\frac{3}{\overline{AN}}=\frac{2}{5,4}\rightarrow \overline{AN}=8,1\text{ m}$$

130. Les piràmides de Gizeh, a Egipte, són d'un gran interés arqueològic, artístic i històric. Aquestes tres piràmides –Kheops, Kefren i Micerí– les van construir els antics egipcis com a cambres mortuòries per als faraons que donen nom a les piràmides. La més gran, la de Kheops, va ser considerada pels antics com una de les set meravelles del món, es tracta d'una piràmide recta de base quadrada de 233 m de costat.

Calcula'n l'altura si quan ens en separem 80 m veiem el vèrtex amb un angle de 29º 30' amb l'horitzontal.

$$\frac{233}{2}=116,5\text{ m}$$

$$tg 29^{\circ}30' =\frac{h}{116,5m+80m}\rightarrow h=111,17\text{ m}$$

131. Una casa de planta rectangular fa 12 m de llarg i 8 m d'ample. La teulada, amb una inclinació de 18º, és una superfície plana inclinada que té la part més elevada situada sobre un dels costats grans del rectangle. Calcula l'àrea de la teulada.

Com sabem que la teulada té forma rectangular i que un dels seus costats té 12 m, trobem la longitud de l'altre costat, x.

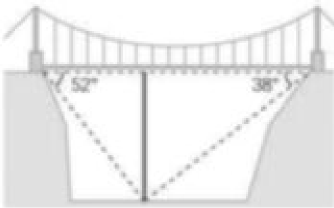
$$\cos 18^{\circ} = \frac{8}{x} \rightarrow \text{x} = 8{,}41\text{ m}$$

Calculem l'àrea de la teulada:

A = 12 · 8,41 = 100,92 m^2

L'àrea de la teulada és 100,92 m2

132. **Determina l'altura a la qual caminen els senderistes que travessen un congost per un pont penjant com el de la figura.**



Anomenem y a l'altura del pont penjant.

$$\begin{cases} \text{tg}\, 52° = \frac{y}{x} \\ \text{tg}\, 38° = \frac{y}{82-x} \end{cases} \rightarrow \; x = 0{,}78y \; \rightarrow \; 64{,}07 - 0{,}61y = y \; \rightarrow \; y = 39{,}8 \text{ m}$$

L'altura del pont penjant és de 39,8 m.

133. **Demostra que la suma de les tangents dels tres angles d'un triangle és igual que el seu producte.**

La suma dels angles d'un triangle és 180º.

a + b + c = 180º

$$\text{tg}\, c = tg[180° - (a+b)] = -tg(a+b) = -\frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$$

Per tant, la suma de tangents és:

$$\text{tg}\, a + tg\, b + tg\, c = \; tg\, a + tg\, b - \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$$

$$tg\, c = -\frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b} \rightarrow tg\, c\,(1 - tg\, a \cdot tg\, b) = \; -tg\, a - tg\, b$$

$$\rightarrow tg\, c - tg\, a \cdot tg\, b \cdot tg\, c \; = \; -tg\, a - tg\, b$$

$$\rightarrow tg\, a + tg\, b + tg\, c \; = \; tg\, a \cdot tg\, b \cdot tg\, c$$

134. **Les mides dels costats d'un triangle són proporcionals a 5, 6 i 7, i la seva àrea és $24\sqrt{6}$. Determina la mida dels costats i dels angles del triangle.**

Com els costats són proporcionals,els triangles són semblants I els seus angles són iguals. Apliquem el teorema del cosinus:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow \cos \widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-49 + 36 + 25}{2 \cdot 6 \cdot 5} = 0,2}$$

$$\mathbf{\widehat{A} = 78°27'46,9''}$$

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow \cos \widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-36 + 49 + 25}{2 \cdot 7 \cdot 5} = 0,5429}$$

$$\mathbf{\widehat{B} = 57°7'7,42''}$$

$$\mathbf{\widehat{C} = 180° - 78°27'46,9'' - 57°7'7,42'' = 44°25'5,68''}$$

Per trobar la longitud dels costats apliquem la fórmula d'Heró.

Si anomenem p el semiperímetre, llavors:

$$\mathbf{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$\mathbf{a = 5t; b = 6t; c = 7t; p = \frac{5t+6t+7t}{2} = \frac{18t}{2} = 9t}$$

$$\mathbf{24\sqrt{6} = \sqrt{9t(9t-7t)(9t-6t)(9t-5t)} \rightarrow 3,456 = 9t \cdot 2t \cdot 3t \cdot 4t \rightarrow t = 2}$$

La mida dels costats és de 10, 12 i 14, respectivament.

135. Expressa les raons trigonomètriques següents mitjançant raons trigonomètriques de grau 1:

a) $\cos^2 x$ b) $\sin^2 x$

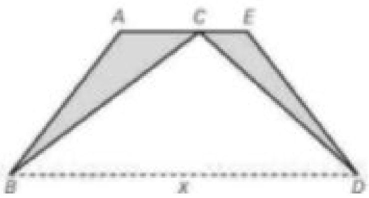
a) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ b) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

136. En l'estructura de la figura, els punts A, C i E están alineats i en coneixem les dades següents:

AB = 15 cm AC = 1m CW = 30°

DE = 2m WD = 14° WE = 124°

Calcula el valor de x.



$$180^\circ - 124^\circ - 14^\circ = 42^\circ$$

Pel teorema del sinus: $\dfrac{2}{\sin 42^\circ} = \dfrac{a}{\sin 124^\circ} \rightarrow a = 2,48 \text{ m}$

$$\sin 42^\circ = \frac{h}{a} \rightarrow h = 2,48 \cdot \sin 42^\circ = 1,66 \text{ m}$$

$$\cos 42^\circ = \frac{b}{a} \rightarrow b = 2,48 \cdot \cos 42^\circ = 1,84 \text{ m}$$

$$tg 60^\circ = \frac{c}{h} \rightarrow c = 1,66 \cdot tg 60^\circ = 2,88 \text{ m}$$

$$x = 2,88 + 1,84 = 4,72 \text{ m}$$

137. **Sabem que tg z = 1,5. Amb aquestes dades, pots calcular tg $(z+\frac{\pi}{2})$ sense determinar l'angle z?**

Si apliques la fórmula de l'angle suma et costarà. Fes servir aquesta expressió:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$$

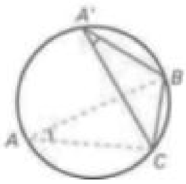
$$tg\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=tg\left(\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+1}{1-tg\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1+\frac{tg\,z+1}{1-tg\,z}}{1-\frac{tg\,z+1}{1-tg\,z}}=$$

$$=\frac{2}{-2\,tg\,z}=-cotg\,z$$

138. **Dos angles inscrits en una circumferència que abasten el mateix arc tenen la mateixa mida. Utilitza-ho per demostrar:**

$$\frac{a}{sin\,\widehat{A}}=\frac{b}{sin\,\widehat{B}}=\frac{c}{sin\,\widehat{C}}$$

en què d és el diàmetre de la circumferència circumscrita al triangle.



El triangle CBA' és recte per ser un dels seus costats el diàmetre de la circumferència.

Els costats oposats als angles $\hat{B}\ i\ \widehat{D}$ són iguals.

Els angles $\hat{A}\ i\ \widehat{A}'$ són iguals per abastar el mateix arc, així, els seus sinus són iguals.

$$\frac{a}{sin\,\widehat{A}}=\frac{b}{sin\,\widehat{A}'}=\frac{a}{\frac{a}{d}}=d$$

$$\frac{a}{sin\,\widehat{A}}=\frac{c}{sin\,\widehat{C}}=\frac{b}{sin\,\widehat{B}}=d$$

PER APROFUNDIR

139. Escull la resposta adequada.

Quin és el valor de $\sin\frac{\pi}{32}$? $\cos\frac{\pi}{32}$? $\cos\frac{\pi}{16}$? $\cos\frac{\pi}{8}$? $\cos\frac{\pi}{4}$?	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
En el triangle ABC es verifica que $\cos(2A - B) + \sin(A + B) = 2$. Si el costat AB és de 4, quant fa el costat BC?	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$
Un triangle de costats a, b i c verifica que $(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab$. El valor de l'angle oposat al costat c és:	15°	30°	45°	60°	150°
En un triangle acutangle, un costat fa 7 m, l'angle oposat és 60° i l'altre costat fa 8 m. Quants metres té el tercer costat?	2	3	4	5	6

□ $$\left(\sin\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{8}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}.$$

□ Com el cosinus i el sinus sols poden valdre com a molt 1:

$$\left.\begin{array}{l}2A-B\\A+B=90\end{array}\right\}\rightarrow A=30^\circ \qquad B=60^\circ$$

$$\sin 30^o=\frac{\overline{BC}}{4}\rightarrow\overline{BC}=2$$

□ $$(a+b+c)\cdot(a+b-c)=a^2+b^2-c^2+2ab=3ab$$

$$\left.\begin{array}{l}c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\\c^2=a^2+b^2-ab\end{array}\right\}\cos C=\frac{1}{2}\rightarrow C=60^\circ$$

□ $$7^2=8^2+x^2-2\cdot 8\cdot x\cos 60^\circ\rightarrow x^2-8x+15=0\rightarrow x_1=5,\ x_2=3$$

$3^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos\alpha\rightarrow\alpha=21{,}79^\circ\rightarrow$ El tercer angle no seria agut.

$5^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos\alpha\rightarrow\alpha=38{,}21^\circ\rightarrow$ Tots els angles són aguts.

El tercer costat mesura 5 m.

140. Per a quins valors de k té solució l'equaciósin x cos x = k ?

Determina'n les possibles solucions.

$\sin x\cdot\cos x=k\ \rightarrow 2\sin x\cdot\cos x=2k\ \rightarrow\sin 2k=2k$

Com sin x < $|1|$ → $-\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{2}$

Les solucions estarán acotades en [0º, 180º] + 180º · k.

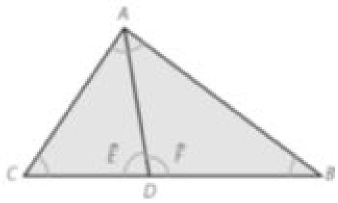
141. **Demostra que la bisectriu interior de l'angle $\hat{A}$ en el triangle ABC divideix el costat oposat en dos segments proporcionals als costats AB i AC.**

Anomenem D al punt de tall de la bisectriu amb el costat CB.

Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{CD}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{AD}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{E}} \rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{\sin\frac{\hat{A}}{2}}{\sin\hat{E}}$$

$$\frac{DB}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{AD}{\sin\hat{B}} = \frac{AB}{\sin\hat{F}} \rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{\sin\frac{\hat{A}}{2}}{\sin\hat{F}}$$



Com que els angles són suplementaris, els seus sinus són iguals.

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

142. **D'un port surten dos vaixells amb rumbs diferents. El rumb del primer és N 23º E, a una velocitat d'11 milles/h. El segon navega en dirección S 67º E a 15 milles/h.**

Calcula, aproximadament, el rumb des del segon vaixell cap al primer una hora després.

Resol el problema també en el cas que el segon angle sigui de 77º.

$\omega = 180^\circ - 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$

$\sqrt{11^2 + 15^2} = 18,6$ milles

$\sin\alpha = \dfrac{11}{18,6} \rightarrow \alpha = 36,25^\circ$

$\omega + \alpha = 23^\circ + 36,25^\circ = 59,25^\circ$

El rumb des del segon vaixell cap al primer serà N 59,25º O.

En el cas que el segon angle sigui de 77º :

$\omega = 180^\circ - 90^\circ - 77^\circ = 13^\circ$

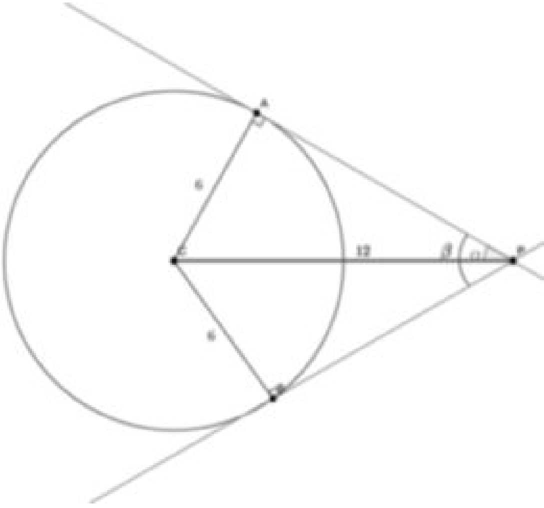
$d^2 = 11^2 + 15^2 - 2\cdot 11\cdot 15\cdot\cos 80^\circ \rightarrow d = 17$ milles

Pel teorema del sinus: $\dfrac{\sin\alpha}{11} = \dfrac{\sin 80^\circ}{17} \rightarrow \alpha = 39,59^\circ$

$$\omega + \alpha = 13^{\text{o}} + 39,59^{\text{o}} = 52,59^{\text{o}}$$

El rumb des del segon vaixell cap al primer serà N 52,59º O.

143. Un punt P dista 12 cm del centre d'una circumferència de 6 cm de radi. Determina l'angle que formen entre elles les dues tangents traçades des d'aquest punt de la circumferència.

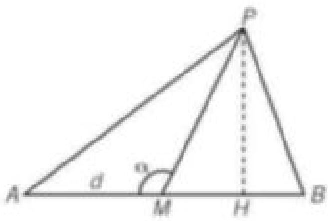


En el triangle $\widehat{CPA}$ $\sin\alpha = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^{\text{o}}$

Com $\beta = 2\alpha \rightarrow \beta = 60^{\circ}$, que és l'angle comprès entre les dues tangents.

144. Considera M el punt mitjà del segment d'extrems A i B; estudia el lloc geomètric dels punts P del pla que verifiquen que PM és mitjana proporcional entre PA i PB.

PM és una mitjana del triangle PAB.



Apliquem el teorema del cosinus en els triangles PAM i PMB:

$PA^2 = d^2 + PM^2 - 2d \cdot PM \cdot \cos\alpha$

$PB^2 = d^2 + PM^2 - 2d \cdot PM \cdot \cos(180^{\circ} - \alpha) =$

$= d^2 + PM^2 - 2d \cdot PM \cdot \cos\alpha$

Sumant, s'obtè: $PA^2 + PB^2 = 2d^2 + 2PM^2$

Com $PM^2 = PA \cdot PB$, resulta que:

$PA^2 + PB^2 = 2d^2 + 2PA \cdot PB \rightarrow PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB = 2d^2 \rightarrow (PA - PB)^2 = 2d^2$

Per tant, tenim que PA – PB = d $\sqrt{2}$, és a dir, la diferència de les distàncies de P als punts A i B és constant, per la qual cosa el lloc demanat és una hipèrbole de focus A i B, així, la distància focal és

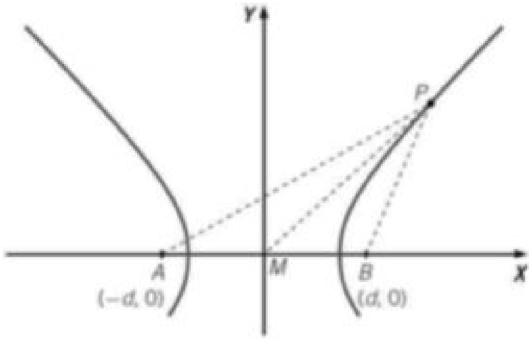
2c = 2d i l'eix real és 2a = d$\sqrt{2}$.

En una hipèrbole es verifica que $b^2 = c^2 - a^2$:

$$b^2 = d^2 - \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{2} \rightarrow 2b = d\sqrt{2}$$

Com que els dos eixos són iguals, la hipèrbole és equilàtera.

Una altra manera:



Siguin els punts A(-d , 0) i B(d , 0). El punt mig és l'origen de coordenades i P és el punt de coordenades (x, y).

Es verifica que:

$PM^2 = PA \cdot PB$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$$

Després d'operar i simplificar, resol l'equació:

$x^2 - y^2 = \frac{d^2}{2}$, d'una hipèrbole equilàtera referida als seus eixos.

$$a^2 = \frac{d^2}{2} \rightarrow 2a = 2b = d\sqrt{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2 = d^2 \rightarrow 2c = 2d$$

Els seus focus són els punts A i B.

145. Calcula els valors dels cosinus dels angles x que verifiquen l'equació següent:

$$\sin^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} - 2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = -1 + \cos 2x + 2 + 2\cos 2x$$

$$3\cos 2x - \sin 2x + 1 = 0$$

Sigui $t = \cos 2x$. Així:

$$3t - \sqrt{1-t^2} + 1 = 0 \rightarrow (3t+1)^2 = 1 - t^2 \rightarrow 10t^2 + 6t = 0 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -\frac{3}{5}$$

$t_2 = -\frac{3}{5}$ no és solució.

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les solucions són $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

146. Determina els dos valors enters de x més propers a 2 013º, tant per defecte com per excés, que compleix aquesta equació trigonomètrica:

$$\mathbf{2^{sin^2 x} + 2^{cos^2 x} = 2\sqrt{2}}$$

$$2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 2\sqrt{2}$$

Sigui $t = 2^{\sin^2 x}$

$$t + \frac{2}{t} = 2\sqrt{2} \rightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{2}$$

$$2^{\sin^2 x} = \sqrt{2} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45^\circ,\ 135^\circ,\ 225^\circ,\ 315^\circ$$

$$2\,013 = 5 \cdot 360 + 213 = 1800 + 213$$

Aproximació per defecte: $1800^\circ + 135^\circ = 1935^\circ$

Aproximació per excés: $1800^\circ + 225^\circ = 2\,025^\circ$