Obsah

1. Vysvětlete, čím se zabývá teorie her, zařaďte ji mezi matematické disciplíny, uveďte alespoň tři aplikační oblasti teorie her.

Zabývá se analýzou rozhodovacích situací, ve kterých výsledek záleží na rozhodnutí více účastníků.

Spadá do aplikované matematiky.

- Ekonomie a obchodní strategie – stanování cen
- Politologie – modelování vyjednávání
- Informatika – programování autonomních agentů

2. Vysvětlete, v čem spočívá Petrohradský paradox.

Hází se mincí, dokud se neobjeví orel. V ten moment hra končí. Za každé kolo hráč získá 2^{n-1} dukátů. Za kolik dukátů by byl hráč ochoten prodat svou účast ve hře?

Střední hodnota výhry je:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{1}{16}\cdot 8 + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty \end{aligned}$$

Nekonečno ale nelze vyplatit, tudíž se hráč spokojí i s menší částkou, přestože matematicky by měl dostat nekonečno.

Kritika: nekonečná hra se nedá dohrát, nekonečnou částku nemá, kdo prakticky vyplatit.

3. Vysvětlete pojem rozhodovací situace z pohledu teorie her, definujte hru jako matematický objekt (nejlépe na vhodném příkladu).

Rozhodovací situace:

- Alespoň 2 hráči
- Každý má své volby a zná volby protivníka
- Každý účastník dokáže ohodnotit efektivnost svojí volby
- Každý volí nezávisle na protivníkovi
- Alespoň jeden účastník je inteligentní – sleduje cíl

Matematický objekt:

- Model společenského problému
- Účastníci, strategie, výplatní funkce

4. Uveďte klasifikaci her včetně příkladů her, spadajících do jednotlivých kategorií.

- Kooperativní / nekooperativní
    - Hráči mohou / nemohou uzavírat vynutitelné dohody

    - Rozdělení zisku mezi kartel / vězňovo dilema
- Jednokolové / více kolové
    - Při více kolové může hráč měnit strategie
    - Kámen-nůžky-papír / opakované vězňovo dilema
- Symetrické / asymetrické
    - Všichni mají/nemají stejné možnosti a výplaty
    - Kámen-nůžky-papír / hra zaměstnavatel vs. Uchazeč – jiný cíl a strategie
- S nulovým / nenulovým součtem
    - Součet výplat hráčů je / není roven nule
    - Šachy / vězňovo dilema – když spolupracují, vyhrávají oba
- S úplnou / částečnou informací
    - Hráči mohou / nemohou znát všechny možné průběhy hry
    - Šachy – vidíš celý stav hry / poker – nevidíš soupeřovi karty
- Nekonečně dlouhé
    - Mají nekonečný počet kol – teoretický koncept
    - Modelování ekologické rovnováhy
- Konečné / diskrétní / spojité
    - Množina strategií je konečná / spočetná / nespočetná
    - Kámen-nůžky-papír / sázení na různé částky / aukce – nabídka různé ceny
- Simultánní / metahry
    - Všichni hrají / nehrají současně a neznají / znají chování soupeře
    - Vězňovo dilema / šachy

5. Vysvětlete pojem užitek z pohledu teorie her. Uveďte příklady situací, kdy lze a kdy nelze užitek číselně vyjádřit. Vysvětlete pojmy kardinální a ordinální užitek, uveďte jejich příklady.

Užitek:

- Základní jednotka výplaty, lze obtížně matematicky definovat
- Ve finanční ekonomii se měří penězi
    - Vše nelze penězi vyjádřit
- Příklady: penězi – výhra v loterii, nelze penězi – emoční spokojenost z výběru

Kardinální užitek

- Vyčíslitelný, hodnoty lze dobře zpracovat
- Hráč má zisk 10Kč → užitek 10Kč

Ordinální

- Lze porovnat, ne vyčíslit
- Chuť zmrzliny → lze porovnat, ale nelze říct přesně o kolik je co lepší

6. Vysvětlete rozdíl mezi inteligentním, neinteligentním a p-inteligentním hráčem.

- Inteligentní
    - Analyzuje situaci a volí racionální strategii pro maximalizování výplaty

- Neinteligentní
    - Chová se náhodně
- P-inteligentní
    - S pravděpodobností p se chovají jako inteligentní
    - S pravděpodobností p-1 se chovají náhodně

7. Vysvětlete rozdíl mezi rozhodováním za jistoty, za nejistoty a při riziku.

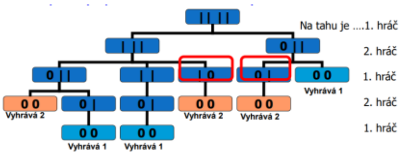
Pokud hraje inteligentní hráč s neinteligentním hráčem:

- Zná možnosti i důsledky → rozhodování za jistoty
- Zná výsledky a pravděpodobnosti, s jakými nastanou → rozhoduje se při riziku
- Nezná pravděpodobnosti ani výsledky → rozhoduje se při nejistotě

8. Vysvětlete pojmy strategie, dominující strategie, dominovaná strategie, čistá strategie, smíšená strategie, uveďte příklady.

- Strategie – souhrn chování hráče
- Dominující – jestli držení této strategie přinese agentu větší užitek než jiná
    - Vězňovo dilema – zradit je dominující
- Dominovaná – vede k horšímu výsledku než jiná
- Čistá – vede k výhře v každé partii, vymezuje optimální chování hráče
    - Kámen-nůžky-papír → vždy hraješ kámen
- Smíšená – jedna strategie nestačí, hráč strategie střídá s vhodným rozdělením
    - Kámen-nůžky-papír → s 33% šancí měna strategie

9. Popište reprezentaci hry v explicitním tvaru a normálním tvaru, uveďte vhodné příklady.

- Explicitní stav
    - Model her, kde se hráči střídají v tazích
    - Strom hry – souvislý graf bez cyklů
        - Každé fázi odpovídá uzel
        - Z uzlu vychází tolik hran, kolik je akcí
        - Kořen – začátek, konec – výsledky partií
    - Nim – 2 hromádky po 2 fazolích
    - 

- Normální stav
    - Matice zachycuje možné tahy a výplaty hráčů
        - Pro dva hráče a konečné prostory strategií je matice dvourozměrná
        - Matice hry s nulovým součtem obsahuje jen výplaty 1. hráče
    - Rodinný spor
        - Ona chce nakupovat, on chce hokej, oba raději spolu než zvlášť

10. Popište vězňovo dilema a jeho řešení za použití reprezentace hry v normálním tvaru.

Byli zadrženi podezřelí A, B. Důkazy k usvědčení nestačí, proto vypovídají proti sobě. Sami za sebe se rozhodují, jestli budou mlčet, nebo udají komplice. Oba vědí, že:

- Když oba zradí, budou odsouzeni na 3 roky
- Pokud jeden zradí a druhý mlčí, udavač bude volný, druhý dostane 5 let
- Pokud budou oba mlčet, oba dostanou 1 rok

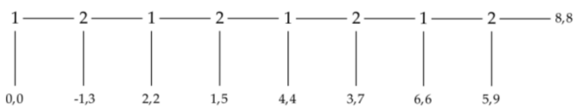
délka trestu A /délka trestu B	B mlčí	B zradí
A mlčí	1 / 1	5 / 0
A zradí	0 / 5	3 / 3

Řešení:

- Pro hráče A
    - Zjistíme minimum v každém řádku, a vybereme ten, kde je minimum největší
uA/uB	B mlčí	B zradí
A mlčí	4 / 4	0 / 5
A zradí	5 / 0	2 / 2
- Pro hráče B to samé
uA/uB	B mlčí	B zradí
A mlčí	4 / 4	0 / 5
A zradí	5 / 0	2 / 2
- Rovnovážnou strategií je oboustranná zrada, výhodnější je však kooperace

11. Popište hru Stonožka a její řešení za použití reprezentace hry stromem.

Na stole leží možné výplaty prvního a druhého hráče. Je stanoven počet kol hry. Hráč volí možnosti:

- Ukončit hru – oba získají aktuální výplaty
- Pokračovat – hráčova výplata se sníží o 1, soupeřova se zvýší o 3
- Po 8 kolech vypadá hra:
- 

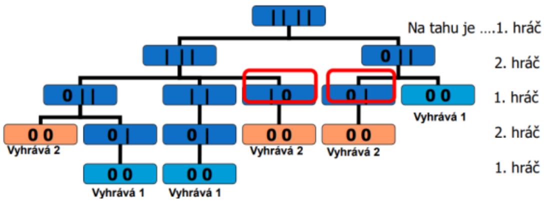
    - Kdyby 2. hráč volil např. 5,9 – tak mu 1. hráč zabrání tím, že vybere 6,6 = pro něj výhodnější. Hra tedy vůbec nezačne, protože pro prvního hráče je výhodnější 0,0 než -1,3

Řešení:

- Hra vůbec nezačne, viz. Popis výše

12. Popište hru Nim a její řešení za použití reprezentace hry stromem.

2 hromádky po 2 fazolích. Hráč při tahu z některé hromádky odebere 1 nebo 2 fazole. Kdo odebere poslední fazoli vyhrál.



- Obecně platí, že je lepší být první hráč, neboť za využití ideální strategie vždy vyhraje
- Obecný popis hry:
  - 2 či více hráčů, n kamenů, rozdělených na m hromádek, hráč odebírá 1 či více kamenů

13. Vysvětlete význam her šachy a go pro rozvoj umělé inteligence jako vědní disciplíny.

Šachy:

- Program nesestavuje celý strom, ale použije standardní zahájení, pak sestaví část stromu, aplikuje ohodnocující funkci (materiál + pozice) a volí ze standardních zakončení
- Program ví přesně, zda je daná pozice výhra nebo prohra
- Ukázka síly klasického výpočtu – symbolická AI

Go:

- V go AI nehledá celý strom, ale místo toho učí neuronovou síť, jaké pozice a tahy jsou výhodné
- Pak pomocí Monte Carlo simulací odhaduje, jaká strategie vede k výhře. Jde o moderní aplikaci teorie her s využitím strojového učení.

14. Na vhodném příkladu vysvětlete postupnou eliminaci dominovaných strategií.

Příklad stonožky, kde kvůli eliminaci a zpětné indukci hra vůbec nezačne. Viz. Popište hru Stonožka a její řešení za použití reprezentace hry stromem. Zpětnou indukcí zjistíme, co by udělal racionální hráč. Např. může ukončit v 3,5, nebo nechat 4,4. Pro něj je ale lepší ukončit v 3,5, protože 5 > 4. To samé ale platí pro prvního hráče v předchozím tahu. Oba hráči tedy ukončí hru co nejdříve → v nultém tahu → hra nezačne.

15. Vysvětlete, v čem spočívá převod hry s konstantním součtem na hru s nulovým součtem.

Hra s konstantním součtem je taková, že vždy je stejný výsledek, např. 10. Pokud hráč A dostane 7, hráč B musí dostat 3. V takové hře se těžce hledá jednoznačná strategie.

Postup:

- Od každé výplaty odečteme polovinu konstanty
- Tím se součet z 10 změní na 0, ale relativní výhody zůstanou stejné

Strategie	A	B
X	2,-2	-1,1

Y	0,0	-3,3

Nyní každá dvojice součet 0 → hra s nulovým součtem. Můžeme aplikovat lineární programování, minimaxové strategie a teorii nulového součtu.

16. Definujte pojem Nashova rovnováha a vysvětlete jej na příkladu.

- Koncept řešení nekooperativních her více hráčů
  - Žádný z hráčů nemůže vylepšit svoji situaci jednostrannou změnou strategie
  - Žádný hráč nemá důvod měnit svoji strategii, pokud ji ostatní hráči nemění
- Příklad:
  - Vězňovo dilema
    - Pokud B mlčí → A vypoví
    - Pokud A vypoví → A také vypoví
  - I když by si polepšili spoluprací, v Nashově rovnováze nikdo nechce sám změnit

17. Vysvětlete princip minimaxu ve hře s nulovým součtem.

- Každá matice může být popisem hry
- 1. hráč maximalizuje výhru (minimální výplatu)
- 2. hráč minimalizuje prohru (maximální výplatu)
- Hledáme prvek, který je současně nejmenší v řádku a největší ve sloupci = sedlový bod matice
- Výplata v sedlovém bodě = cena hry

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & \color{red}{3} & 5 \\ 42 & 10 & 2 & -1 \\ -12 & 56 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

18. Vysvětlete pojem sedlový bod ve vztahu k herní matici, uveďte příklad.

Vybírám minima z řádků a vyberu si největší minimum, poté ve sloupcích vybírám maxima a vyberu si nejmenší maximum. Pokud se tyto hodnoty rovnají → sedlový bod

	červený		
modrý	6	5	Min = **5***
	5	4	Min = 4
	Max = 6	Max = **5***	

19. Popište hru Morra a její řešení za použití reprezentace hry v normálním tvaru.

Ve stejný okamžik každý z hráčů ukáže jeden nebo dva prsty. Pokud oba ukázali stejný počet, platí druhý hráč prvnímu tolik, kolik je součet prstů – 2 nebo 4. Pokud ukázali různé počty prstů, platí první hráč druhému tolik, kolik je součet – 3.

	1	2	
1	2	-3	q
2	-3	4	1-q
	p	1-p	

Hra nemá sedlový bod. Žádná strategie není dominující. Hráči musí používat smíšené strategie.

20. Vysvětlete využití střední hodnoty při rozhodování za rizika.

- Inteligentní hráč analyzuje situaci pomocí matice a chce maximalizovat výhru
- Řádky – možné strategie 1. hráče
- Sloupce – možné stavy hráče 2, jejichž pravděpodobnosti jsou známy
- Prvky matice a_{ij} = výplaty 1. hráče
- Racionální je maximalizovat střední hodnotu výhry, tj. počítají se střední hodnoty jednotlivých řádků s použitím známého rozložení pravděpodobnosti, které na sloupcích matice používá 2. hráč

21. Popište použití principu minimaxu, principu minimaxu ztráty, principu optimismu racionálního hráče a Laplaceova principu při rozhodování za neurčitosti.

Princip minimaxu:

- Hráč 1 z toho, že se může stát něco nepříznivého, vyvozuje, že se to stane. Proto se rozhodne přehnaně opatrně: zvolí strategii, která je optimální v případě, že protivník použije tu sloupcovou strategii, která je nejméně výhodná pro hráče 1

Princip minimaxu ztráty:

- Pojistí hráče proti velkým ztrátám
- Sestavení přidružené matice ztrát, které hráč utrpí v porovnání s rozhodnutím optimálním případě, tj. kdyby strategii protivníka znal předem
- Postup: odečíst od matice sloupcová maxima

4	**7**	**10**	-3
8	5	9	**8**
9	-3	-2	6
-6	4	8	2
6	**7**	-1	4

→

-5	0	0	-11
-1	-2	-1	0
0	-10	-12	-14
-15	-3	-2	-15
-3	0	-11	-4

Princip optimismu racionálního hráče:

- Pro každou strategii se vezme její nejlepší výsledek
- Vybere se strategie s nejvyšším z těchto nejlepších výsledků
- „Doufáme“ v nejlepší možný scénář

Laplaceův princip:

- Pokud neznáme pravděpodobnosti, předpokládáme, že jsou všechny stavy stejně pravděpodobné
- Vypočítáme průměrný výsledek každé strategie

- Vybereme strategii s nejvyšší průměrnou hodnotou

22. Popište hru s úplnou a s neúplnou informací, dokonalou a nedokonalou informací, soukromoou a společnou informací, uvádějte příklady.

Hra s úplnou informací:

- Hra v normálním stavu
- Všechny informace o hře jsou známé všem hráčům
- Šachy – deska je odkrytá, znám všechny možné pohyby

Hra s neúplnou informací:

- Některé informace nejsou známy všem hráčům, například skrytá karta nebo neznámý tah protivníka
- Poker – nevidím karty ostatních

Dokonalá informace:

- Týká se průběhu hry
- Znám předchozí tahy i aktuální pozice ve stromu
- Šachy – vidím, jak táhl protihráč, i kde momentálně je

Nedokonalá informace:

- Hráč nevidí do karet soupeře, a proto nezná přesnou pozici ve stromu
- Poker, nevidím mu od karet, nevím, jak dobře na tom je

Soukromá informace:

- Informace jsou známé jenom jednomu hráči
- Poker – znám svoje karty, ostatní ne

Společné informace:

- Dostupné všem
- Šachy – všichni vidí plochu a postavení

23. Popište statickou a dynamickou Bayesovskou hru, uveďte příklady odpovídajících her či situací.

Statická:

- Každý typ hráče považujeme za samostatného hráče
    - Každá kombinace 8 karet představuje hráče
    - „příroda“ určí, kteří z nich budou hrát na základě rozdělení pravděpodobností, které znají všichni
    - Každý hráč vybere strategii předtím, než „příroda“ rozhodne, kdo bude aktuálně hrát → původní hru H s neúplnou informací změníme na hru H* s nedokonalou informací
- Aukce – každý ví, jakou hodnotu má objekt pouze s určitou pravděpodobností

Dynamická:

- V reálném životě jsou informace často asymetrické, rozhodování je někdy i více kolové
- Existují proměnné, které ovlivní oba hráče, ale zná je pouze jeden
    - Prodejce ví více než kupující
    - Uchazeč má lepší přehled o svých schopnostech než zaměstnavatel
- Informovaná strana může signalizovat informace
    - Diplom z VŠ
    - Limitovaná záruka
- To umožňuje aktualizovat pravděpodobnosti

24. Vysvětlete, v čem spočívá šerifovo dilema a jak se hra řeší.

Vězňovo dilema, viz. Popište vězňovo dilema a jeho řešení za použití reprezentace hry v normálním tvaru.

25. Vysvětlete pojem signální hra.

- Dynamická verze Bayesovské hry s neúplnou informací
- Odesílatel S – má informace
- Příjemce R – nemá informace
    - Příroda určí typ odesílatele s určitým pravděpodobnostním rozdělením
    - Odesílatel na základě svého typu provede tah – signál
    - Příjemce na základě tahu odesílatele provede tah
    - Výplatní funkce závisí na typu odesílatele a tazích obou hráčů
- Příklad:
    - Spencův signální model trhu práce
        - Odesílatel – uchazeč o zaměstnání
        - Příjemce – zaměstnavatel
        - Uchazeč = chytrý nebo hloupý
            - Volí si možnost studovat nebo nestudovat
            - Námaha pro studium je pro chytřejšího nižší než pro hloupého
    - Zaměstnavatel nezná skutečné schopnosti uchazečů, jen jejich vzdělání = absolvování školy funguje jako pozitivní signál o schopnostech
    - Závěr: hloupému se nevyplatí napodobovat strategii schopného → znalosti získané na univerzitě nejsou až tolik podstatné, důležitější je signál

26. Vysvětlete pojem reverzní teorie her, jmenujete příklady mechanismů, které do ní spadají.

Teorie her:

- Analýza hry, hledání rovnovážného řešení

Reverzní teorie her:

- Návrhy mechanismů pro situace, v nichž si racionální účastníci volí strategie
- Cílem je odvození takové hry, aby její určitá rovnovážná situace odpovídala dosažení požadovaného společenského chování

27. Vysvětlete pojem aukce a účel použití aukcí.

- Forma obchodování
- Mechanismus alokace omezených zdrojů na základě ohodnocení nabídkou a poptávkou
- Cílem je nalézt rovnovážnou cenu
  - Utváření ceny je explicitní
  - Pružnější prodej než s pevnou cenou
  - Rychlejší než cenové vyjednávání
- Základní prvky:
  - Nabídka, poptávka, aukcionář, pravidla, strategie
- Aplikace
  - Licence k těžbě surovin
  - Prodej nemovitostní
  - Veřejné zakázky

28. Uveďte klasifikaci aukcí.

Podle:

- Způsobu podávání nabídek – otevřené nebo uzavřené
- Způsobu změny ceny – rostoucí nebo klesající
- Počtu položek – jedna, více, kombinatorická
- Typu hodnoty položek – soukromá, obecná, korelovaná hodnota
- Kritéria držitele – efektivnost, objem obchodů, maximální zisk
- Standardní (prodejní) nebo reverzní (nákupní) aukce

29. Popište alespoň tři typy aukcí.

- Anglická aukce
  - Účastníci mohou nasadit libovolnou cenu
  - Účastníci znají nabídky ostatních
  - Vyhrává hráč s nejvyšší nabídkou
- Holandská aukce
  - Aukcionář uměle stanoví vysokou cenu a postupně ji snižuje, dokud některý z hráčů neodpoví nabídkou
- All-pay aukce
  - Jsou zpoplatněny všechny nabídky včetně nevyhrávajících
- Obálková metoda
  - Hráči mohou udělat nabídku pouze jednou, neznají nabídky ostatních – vyhrává nejvyšší
  - Strategie hráče se řídí podle jho schopnosti investovat, případně odhadem možností ostatních
- Vickreyova aukce
  - Účelem je přimět hráče poznat ohodnocení položky, tj. nepodcenit ani nepřecenit
  - Hráči mohou udělat nabídku pouze jednou, neznají nabídky ostatních
  - Vyhrává nejvyšší nabídka, ale platí se druhá nejvyšší
    - Pokud A nabídne 100 a B 90, A vyhraje, ale zaplatí 90

30. Vysvětlete pojem dolarová akce a související pradox.

- Potenciálně nekonečná hra s nenulovým součtem
- Pravidla:
    - Dva hráči přihazují na položku – dolarová bankovka
    - Bankovku dostane vítěz, ale oba zaplatí za příhozy
    - Minimální příhoz je 1 cent, horní hranice není
    - Komunikace je zakázaná
- Paradox:
    - Racionálně nechceme dát více než dolar za dolar
    - Ale po přihození se snažíme minimalizovat ztrátu, i když to znamená zaplatit více, než získat
    - Ztráty rostou, přesto však strany nekončí, protože „už do toho investovali tolik, tak nechtějí prohrát“

31. Vysvětlete rozdíl mezi soukromým, sdíleným a korelovaným ohodnocením statku, uveďte příklady.

Soukromé:

- Každý hráč zná hodnotu svého statku
- Ostatní nemají vliv na to, jak moc si statku váží
- Např. prodej obrazu – každému se líbí jinak, pro každého má jinou hodnotu

Sdílené:

- Hodnota statku je stejná pro všechny hráče, ale nikdo ji nezná přesně – každý má pouze odhad
- Vítěz může litovat výhry, pokud přestřelil
- Např. ropné pole – skutečná hodnota závisí na množství ropy, tu ale předem nelze znát, lze ji ale odhadnout

Korelované:

- Kombinují se oba přístupy
- Hodnota závisí na informaci od ostatních hráčů, ale částečně si každý hráč myslí, že má privátní informaci
- Odhady hráčů se můžou ovlivňovat
- Např. dražba starožitnosti – každý má vlastní odhad, ale když vidí, že ostatní přihazují hodně, může si začít myslet, že má vyšší cenu
- Informace nejsou zcela soukromé ani zcela společné

32. Vysvětlete pojem kombinatorická aukce.

- Současně se prodává více položek, každý dražitel nabízí cenu za „balíček“
- Stanovení vítěze je problém
    - Aukce se 4 položkami W, X, Y a Z
    - Dražitel A nabízí 1000 Kč za W+Y
    - Dražitel B nabízí 600 Kč za W+X
    - Dražitel C nabízí 100 Kč za X+Z

    - Dražitel D nabízí 600 Kč za položky Y+Z
    - Vítězí B a D, neboť kombinovaná nabídka B a D je 1200 Kč oproti 1100 Kč od A a C (tj. A a C nezískají nic)

33. Vysvětlete, proč je hledání vítěze kombinatorické aukce výpočetně náročné a jak lze výpočetní náročnost řešit.

- Musíme najít takové přiřazení balíků položek zájemcům, které:
    - Maximalizuje celkový zisk
    - Žádné položky se nepřekrývají – každá může být prodána jednou
- Počet kombinací balíků roste exponenciálně
- Pokud přihazující nabídnou různé kombinace, musíme prohledat všechny možné konflikty
- To znamená NP-těžký problém
- Možnosti zjednodušení:
    - Omezení pravidel pro podávání nabídek
    - Ukončení výpočtu při nalezení první takové kombinace, která přinese zisk větší než určitá mez
    - Převod na jinou optimalizační úlohu
    - Zrychlení výpočtu a omezení role jediného aukcionáře

34. Vysvětlete, v čem spočívá problém stabilního párování, uveďte příklady situací nebo aplikací.

Stabilní párování se snaží najít takové přiřazení dvojic, kdy neexistuje žádná dvojice, která by si dávala přednost před svými aktuálními partnery.

Problém:

- Stable Marriage problém:
    - Máme n mužů a m žen
    - Každý má žebříček preferencí
    - Hledáme párování kdy:
        - Neexistuje dvojice, kteří nejsou spolu, ale navzájem by se preferovali před svými partnery
            - „Mají nejlepší, co chtějí“

Příklad:

- Donátor a příjemce orgánů
- Rozřazení do škol
- Seznamka

35. Popište problém svatebního trhu a možnosti řešení.

- Popsán výše jako „stable marriage problém“
- Gale-Shapleyho algoritmus
    - Je konečný – žádný muž nežádá žádnou ženu více než jednou, počet mužů je konečný

    - Výsledkem je přiřazení – každý muž oslovuje každou ženu, každá je tedy oslovena a nabídku si podrží
    - Pokud je výsledkem přiřazení, je stabilní – pokud je oslovili všichni a nepreferují nikoho jiného, tak už pro ně nikdo lepší není

36. Popište algoritmus odloženého přijetí (Gale-Shapleyův algoritmus).

- Každý navrhovatel (např. muž) osloví svou nejvyšší volbu, kterou dosud neoslovil.
- Každý příjemce (např. žena):
    - Pokud není zadaná, přijme nabídku.
    - Pokud je zadaná, porovná současného partnera s novým nápadníkem:
        - Pokud nový je lepší, vymění partnery.
        - Pokud ne, nového odmítne.
- Odmítnutí navrhovatelé přejdou k další volbě ze svého seznamu.
- Proces pokračuje, dokud každý navrhovatel není přiřazen a žádný další návrh už není možný.

37. Vysvětlete pojmy stabilita přiřazení a strategická odolnost ve vztahu k problému párování.

Stabilita:

- Znamená, že jsou splněny 2 podmínky
    - Agenti jsou individuálně racionální
    - Pokud už je agent spárován, toto spárování nemůže být zablokováno žádnou koalicí

Strategická odolnost:

- Pravdomluvnost je dominantní strategií pro každého agenta
    - Neboli pravdivá deklarace preferencí

38. Popište problém výměny domů a Top Trading Cycle algoritmus.

Výměna domů:

- Konečný počet hráčů
- Každý vlastní jeden dům
- Každý má striktní preferenci na množině všech domů
- Problém:
    - Provést všechny možné výměny domů, které povedou k tomu, že si hráči polepší. Hledá se jádro takové, aby neexistovala žádná koalice, jejíž členové by si striktně polepšili, pokud by si vyměnili své původní domy
- Obecně směnná ekonomika

Trading cycle:

- Každý agent označí svůj preferovaný dům
- Každý dům označí svého majitele
- Tím vznikne orientovaný graf s alespoň jedním cyklem

    - Proces je konečný → cykly budou nalezeny
    - Preference jsou striktní → každý agent je součástí nejvýše jednoho cyklu
- Odstranění cyklů a přiřazení domů agentem
- Opakování za použití nových seznamů preferencí, z nichž byly odebrány již přiřazené domy

39. Vysvětlete pojmy kooperativní hra a společná strategie dvou hráčů, uveďte příklad.

- I když hráči preferují své individuální zájmy, mohou před hrou uzavřít závazné dohody
    - Dva hráči: spolupracovat, nebo si konkurovat
        - Kooperují oba a jen tehdy, když to oběma přinese větší zisk
    - N > hráčů
        - S kým / proti komu spolupracovat – nemusí se zapojit všichni
- Společná strategie:
    - Matice pravděpodobností P typu m x n, přiřazených každé dvojici čistých strategií
    - Hráči plánují vždy společně, usilují o společné maximum, ne o individuální
    - Po dosažení výsledku si výhru rozděli
- Příklad:
    - Upravené vězňovo dilema, kde se vězni domluví, že budou spolupracovat

40. Popište možnosti dělení výhry v kooperativní hře.

- Nepřenosná výhra:
    - Hráči se mohou dohodnout na koordinaci volby strategií, ale zisk se dělí v poměru, který udává výplatní matice
    - Může být pro jednoho nevýhodná a do kooperace proto nakonec nevstoupí
- Přenosná výhra:
    - Je možná dohoda o rozdělení výher
    - Možnost obětovat se ve prospěch koalice
    - Možnosti:
        - Každý dostane polovinu z výhry:
        - Každý dostane zaručenou výhru + polovinu z toho, co bylo kooperací získáno
        - Rozdělení celkové výhry je dáno určitým poměrem

41. Vysvětlete pojem koalice ve vztahu ke kooperativní hře N hráčů.

- Skupina hráčů, která se dohodne na volbě strategie s cílem zlepšit své výsledky
    - Prázdná
    - Jednočlenná
    - Velká

42. Vysvětlete pojmy hlasovací hra, hlasovací pravidlo, většinová koalice, menšinová koalice.

Hlasovací hra:

- Má 2 možné výsledky
    - 1 – ano
    - 0 – ne

Hlasovací pravidlo:

- Číslo, určující minimální počet hlasů pro přijetí výsledků

Většinová koalice:

- Má více hráčů – hlasů, než požaduje hlasovací pravidlo

Menšinová koalice:

- Má méně hráčů – hlasů, než požaduje hlasovací pravidlo

43. Vysvětlete pojem charakteristická funkce (ve spojitosti s kooperativní hrou).

- Definuje výhru pro každou možnou koalici S
- Dvojice (N,v) je kooperativní hra N hráčů ve tvaru charakteristické funkce
    - Nahrazuje maticový tvar
- Hodnota v závisí na strategii hráčů, kteří jsou mimo koalici
    - Kompetitivní strategie:
        - Nečlenové maximalizují svůj zisk, jako by šlo o nekooperativní hru
    - Minimaxová strategie:
        - Nečlenové trestají koalici za to, že nejsou její součástí, volí nejméně výhodnou strategii z pohledu koalice

44. Vysvětlete pojem jádro hry ve vztahu ke kooperativní hře.

- Dělení výhry mezi členy koalice udává vektor $(a_1, a_2, ..., a_n)$
- Výhra člena koalice se odvíjí od dvou principů
    - Kolektivní racionality:
        - Sestaví se koalice s nejvyšší možnou celkovou výhrou – ze zbývajících členů se sestaví další koalice s nejvyšší možnou výhrou – atd… dokud jsou hráči
    - Skupinové stability:
        - Požaduje se, aby byla rozdělena celá výhra koalice + aby každá pod koalice získala nejméně tolik, co si může zajistit sama
- Když některá koalice není skupinově stabilní, je třeba najít jinou koaliční strukturu
- Jádro hry je množina všech přijatelných dělení výher $(a_1, a_2, ..., a_n)$ která splňují podmínku skupinové stability
    - Jádro hry může obsahovat více rozdělení

45. Vysvětlete pojem Shapleyova hodnota ve vztahu ke kooperativní hře.

- Hodnota odhaduje mezní přínos hráče ke všem koalicím, jichž může být členem
- Je to jeden ze způsobů spravedlivého dělení výhry

46. Vysvětlete, v čem se liší politické a nepolitické teorie formování koalic.

Politické:

- Minimální souvislá většinová koalice:
  - Předpokládá, že strany lze uspořádat od levicových po pravicové, a že členové budou ideologicky sousední
  - Je minimální – odejde-li jeden člen, nebude většinová nebo nebude souvislá
  - Koalice s nejmenším vnitřním konfliktem se snadno zformuje, bude stabilní, a proto je preferována
- Souvislá koalice s minimálním rozpětím:
  - Předpokládá se minimalizace ideologických rozdílů

Nepolitické:

- Koalice se mohou vytvářet jakkoliv, bez ohledu na politické pozice účastníků
- Koalici tvoří jen bezpodmínečně nutný počet členů
- Minimální většinová koalice:
  - Stane se menšinovou, když ji jeden člen opustí
- Nejmenší minimální většinová koalice:
  - Redukuje se množina minimálních většinových koalic na koalice s nejmenší celkovou vahou
- Teorie vyjednávacího návrhu:
  - Vybírá z množiny minimálních většinových koalic koalice s nejmenším počtem členů – předpoklad, že méně stran se lépe dohodne

47. Vysvětlete pojmy volební systém a hlasování.

- Volební systém:
  - Konkrétní způsob realizace voleb, který mj. definuje způsob hlasování a způsob sčítání
- Hlasování:
  - Proces, při kterém voliči vybírají mezi možnostmi

48. Popište strategické a nestrategické metody hlasování.

Strategické:

- Hráč může deklarovat své preference jinak, než jaké jsou ve skutečnosti, a může spekulovat ohledně výsledku
- Preference A > B > C
  - Jestliže hráč odhaduje, že A nemůže vyhrát, bude volit B, aby C nevyhrálo

Nestrategické:

- Většinová metoda
  - Vítězí možnost, která dostane nejvíce hlasů
  - Hráč má omezený prostor vyjádřit své preference
- Kumulativní hlasování

    - Hráč rozděluje více hlasů mezi několik možností – může přidělit více hlasů jedné možnosti → hlasy se sčítají
- Schvalování
    - Hráč může přidělit jeden hlas libovolnému počtu možností
- S pořadím
    - Většinová metoda s eliminací:
        - Každý hráč si vybere jednu možnost
        - Vyřadí se ta možnost, která získala nejméně
        - Kdo hlasoval pro vyřazenou možnost, hlasuje znovu
        - Postup se opakuje do určení vítěze
    - Bordova metoda:
        - Každý hráč oboduje všechny možnosti podle svých preferencí
        - Vítězí možnost s nejvyšším bodovým součtem
    - Párová eliminace:
        - Stanoví se schéma rozdělení všech možností do dvojic
        - Každý hráč si z každé dvojice vybere jednu možnost
        - Po vyřazení nepreferovaných možností probíhají další kola stejným způsobem až do určení vítěze

49. Vysvětlete Condorcetův paradox.

- I když jsou individuální preference všech hráčů tranzitivní, společenská preference vzešlá z voleb tranzitivní být nemusí

50. Vysvětlete pojem citlivost volební metody na odstranění kandidáta a citlivost volební metody na volbu párů.

- Změní se výsledek voleb, pokud odebereme kandidáta, který nevyhrál?
    - Ideálně, by měl výsledek zůstat stejný – výhra by neměla záviset na kandidátech
    - Pokud, ale volič C odstoupí a voliči přejdou k jinému, mohou tak výsledek ovlivnit
    - Tato metoda je citlivá na odstranění C, i když C nevyhrál – porušení principu Independence of Irrelevant Alternatives
- Hodnotíme, zda volební metoda správně vybere kandidáta, který by porazil každého jiného v přímém boji
    - Volební metoda ignoruje výsledky mezi dvojicemi kandidátů
    - Tedy je citlivá na volbu párů a není Condorcet-kompatibilní

51. Vysvětlete, v čem spočívá problém spravedlivého dělení, uveďte příklady situací nebo aplikací.

Problém:

- Jak rozdělit S zdrojů mezi N hráčů, tak, aby každý dostal náležitý podíl a aby bylo dělení spravedlivé, podle určitých kritérií
- Každý účastník může mít jinou představu o hodnotě a o tom, co je spravedlivé
- Dědictví, rozvod, využívání zdrojů, přidělování frekvencí…

52. Vysvětlete rozdíl mezi subjektivním a objektivním pohledem na spravedlivé dělení a rozdíl mezi proporcionálním dělením a dělením bez závisti.

Subjektivní:

- Jaké jsou preference hráčů?

Objektivní:

- Naplnit potřeby hráčů? Držet rovnostářský přístup?

Proporcionální:

- Každý hráč získá alespoň 1/n celku

Bez závisti:

- Každý hráč mírně preferuje svůj díl, před jinými díly, protože věří, že získal alespoň takovou hodnotu, jakou má nejhodnotnější díl

53. Vysvětlete metodu "cut and choose".

- Jeden hráč rozkrojí dort na dva díly, a druhý hráč vybírá
- Problém efektivní alokace
    - Příklad různě ochuceného dortu na 2 půlkách. Hráč A může nakrojit 50/50 aby na každé půlce byla jedna příchuť, nebo tak, že na každé půlce bude ½ příchutě. Pokud hráč B nemá rád druhou příchuť, bude pro něj druhá možnost neefektivní

54. Vysvětlete algoritmus Moving Knife.

- Nůž se pohybuje nad objektem dělení
- Hráči sledují pohyb a zastaví nůž, když si myslí, že vzniklý kus má pro ně spravedlivou hodnotu

55. Vysvětlete problém obecní pastviny.

- V 16. století existovaly v Anglii volné plochý obecní půdy, kde mohli pást svůj dobytek. S rostoucí velikostí stád docházelo k vyčerpání ploch obecní půdy.
- Každý kus dobytka představuje pro pastevce výnos → racionální pastevec zvětšuje stádo
- Dostatečný kus dobytka zvýší výnos majitele, ale ztráty nesou všichni → nedostatek volných ploch

56. Popište úvahu a závěry G.Hardina o problému obecní pastviny.

- Problémy se dělí na technické a netechnické
- Příčinou netechnických problémů je růst lidské populace a rostoucí potřeba zdrojů – ubývání zdrojů se promítá do nižší kvality života
- Rozdělení nákladů a výnosů je nerovné → užitek z přidání dalšího kusu dobytka je pozitivní pro pastevce ale negativní pro skupinu

- Jako možné řešení je navržena privatizace, pokuta, či regulace → tedy ohrazené pastviny s dalšími omezeními
- Hardin nesouhlasí s tvrzením, že lidské svědomí postačuje jakožto prostředek ochrany pastvin → sobečtí jednotlivci vydělávají nad nesobeckými

57. Vysvětlete rozdíly mezi klasickou, evoluční a behaviorální teorieí her.

Klasická:

- Hráči jsou plně racionální
- Mají dokonalé informace
- Cílem je maximalizovat užitek
- Strategii volí logicky

Evoluční:

- Hráči nejsou nutně racionální
- Strategie se nevybírají vědomě, ale vyvíjejí se v čase podle úspěšnosti
- Často používaná v biologii, sociologii a ekonomii

Behaviorální:

- Reálné chování lidí často neodpovídá plné racionalitě
- Zohledňuje psychologii, kognitivní omezení, emoce, nesobeckost
- Lidé dělají chyby, používají zjednodušení, mají averzi k nespravedlnosti

58. Vysvětlete princip evoluční teorie her, uveďte hlavní pojmy.

- Přístup, který nepředpokládá racionální hráče
- Modeluje chování populací hráčů, kteří mají různé strategie
- Strategie se vyvíjejí v čase – podobně jako u biologické evoluce
- Pojmy:
  - Populace strategií
    - Nepracujeme s jednotlivci ale s podíly strategií v populaci
  - Fitness – vhodnost
    - Míra úspěšnosti strategie
  - Replikátorová dynamika
    - Mode, který popisuje, jak se mění podíl jednotlivých strategií podle výplat
  - Evolučně stabilní strategie
    - Strategie, která nemůže být poražena malou skupinou mutantů s jinou strategií
    - Pokud je většina populace ESS, žádná jiná strategie nemůže dlouhodobě převládnout

59. Vysvětlete pojem evolučně stabilní strategie, uveďte příklad.

- Strategie, kterou používá většina populace – je tak imunitní vůči mutantovi
- Jedná se o obecný strategický profil jedince, který má určité charakteristiky
- ESS má podobu ryzí nebo smíšené strategie

60. Popište hru jestřáb a hrdlička.

- Boj o teritorium, dva fenotypy:
    - Jestřáb je dravec – vždy útočí
    - Hrdlička – symbolicky hrozí, při útoku utíká
    - Pokud jestřáb hrdličku nezabije prvním útokem, hrdlička uteče
- Jestřáb vítězí s pravděpodobností 1/2 , se stejnou pravděpodobností je zraněn nebo zabit
- Při střetu hrdliček se teritorium dělí na půl
- Strategie hrdliček není ESS → populace může být napadena jestřábem – mutantem, kterému se v populaci hrdliček daří lépe, než hrdličkám samotným

61. Popište roli teorie her ve výzkumu dopravních problémů.

- Analýza dopravních toků a chování účastníků na křižovatkách, plánování a řízení dopravy, směrování provozu, navigační systémy, komunikace…
- Metody:
    - Statické modely dopravních sítí → aplikace teorie grafů
    - Dynamické modely interakcí, chování strategií účastníků dopravy, poptávka po dopravě → aplikace teorie her a evoluční teorie her
- Kategorie:
    - Dopravní zácpy, přiřazování dopravních cest
        - Cílem je najít rovnovážný stav, kdy žádný řidič nemůže zkrátit svou cestovní dobu změnou trasy
    - Návrh sítě a rozšiřování kapacity
        - Modely pomáhají při plánování a navrhování dopravní sítě
    - Dynamické řízení dopravy
        - Řízení v reálném čase, adaptivní řízení signalizace, dynamické směrování
    - Behaviorální modely
        - Modely zkoumají každodenní volbu trasy řidiči, přičemž zohledňují faktory, jako cestovní čas, náklady, preference → cílem je pochopit a předvídat chování řidičů za různých podmínek

62. Popište rozdíl mezi Nashovým řešením a sociálním optimem (ve vztahu k dopravě).

Nashova rovnováha:

- Každý jednotlivec volí svou strategii sobecky, aby pro sebe maximalizoval výhodu
- Nikdo nemá motivaci změnit stávající chování, protože by si pohoršil
- Výsledkem ale nemusí být nejlepší možný výsledek pro společnost jako celek

Sociální optimum:

- Hledáme rozdělení strategií, které minimalizuje celkové náklady všech hráčů dohromady
- Nezáleží, jestli si jednotlivci mírně pohorší – důležitý je celkový prospěch

Příklad:

- Trasa A trvá vždy hodinu
- Trasa B trvá x hodin, kde x je podíl aut na trase

- V Nashově rovnováze:
    - Všichni na trasu B, protože je při nízkém provozu rychlejší
    - Po zaplnění trvá ale stejně nebo více jako trasa A
- V sociálním optimu:
    - Polovina jede po A
    - Polovina jede po B
    - Celkové zpoždění je nižší

63. Vysvětlete Downs-Thomsonův paradox (ve vztahu k dopravě).

- Teorie, která říká, že rychlost individuální a veřejné dopravy ve městě je v dlouhodobém horizontu stejná
    - Řidiči a cestující volí nejrychlejší způsob dopravy
    - Pokud se zvýší rychlost veřejné dopravy, klesne počet aut a rychlost aut se také zvýší
    - Pokud se sníží rychlost veřejné dopravy, tak se zvýší počet aut a rychlost aut se sníží
- Paradox:
    - Zvýšení kapacity silniční sítě nemusí zmenšit dopravní zácpy
    - Omezování automobilového provozu na některých silnicích naopak zvýší rychlost cestování autem, ale jen pro menší skupinu uživatelů aut

64. Vysvětlete Braessův paradox (ve vztahu k silniční síti).

- Přidávání zdrojů do dopravní sítě poškozuje výkon v rovnovážném stavu
    - Obecně: technologický upgrade může situaci zhoršit
    - Model je zjednodušený
- Paradox se pravděpodobně stále vyskytuje v dopravních sítích, v nichž řidiči volí své trasy inteligentně na základě informací, které jsou dostupné v moderních dopravních sítích v reálném světě

65. Vysvětlete vztah mezi teorií her a umělou inteligencí.

- Rozhodování více agentů
    - Často modelujeme prostředí, kde více agentů soutěží nebo spolupracuje
    - Teorie her poskytuje nástroje a modely, jak se v takových situacích rozhodovat optimálně
- Strategické chování
    - Teorie her učí, jak předvídat chování protivníků – důležité pro AI v hrách, nebo vyjednávání
- Učení v multiagentním prostředí
    - V AI používáme posilované učení – blížíme se evolučním nebo opakovaným hrám
- Vyjednávání a aukce
    - AI systémy vyhledávají, přidělují zdroje, rozhodují o cenách – to jsou klasické problémy teorie her
- Zajištění spolupráce
    - AI může využít kooperativní hry k tomu, aby více agentů spolupracovalo na společném cíli

66. Vysvětlete pojem agent, systém agentů (v umělé inteligenci).

Agent:

- Autonomní jednotka, která je schopná vnímat své prostředí
- Na základě těchto vjemů rozhodovat o svém chování a následně jednat
- Agent je samostatná entita, která se rozhoduje a jedná a snaží se dosáhnout cíle
- Vlastnosti:
  - Percepce
  - Akce
  - Autonomie
  - Interakce
  - Učení a adaptace

Systém agentů:

- Skupina agentů, kteří interagují a spolupracují s cílem dosáhnout svých cílů, které jsou společné, nebo konfliktní
- Systém je často decentralizovaný, což znamená, že jednotliví agenti nemusejí mít úplné informace o celém systému, ale vzájemně si vyměňují informace nebo kooperují
- Vlastnosti:
  - Kooperace
  - Konkurenční chování
  - Distribuovanost
  - Dynamika interakcí
  - Komunikace a koordinace

67. Popište, jak se teorie her uplatňuje v umělých neuronových sítích

- Soupeření dvou neuronových sítí
  - Generátor – předvádí vstupní šumový vektor na vzorek dat
  - Diskriminátor – snaží se rozlišit skutečné a generované
- Proces probíhá, dokud generátor nevytváří data téměř nerozeznatelná od skutečných
- Generátor a diskriminátor hrají min-max hru pro dva hráče a optimalizují svou činnost, aby bylo dosaženo Nashovy rovnováhy
- Diskriminátor se snaží maximalizovat svou schopnost správně klasifikovat
- Generátor se snaží generováním realistických dat minimalizovat schopnost diskriminátoru

68. Vysvětlete hru na konsenzus a její možné aplikace v oblasti umělé inteligence.

- Model, ve kterém se skupina agentů snaží dosáhnout shody na určitém rozhodnutí nebo hodnotě
- Cílem je dosáhnout konsenzu rychle, efektivně, či splnit určité podmínky
- Hráči – agenti schopní komunikovat
- Předmět konsenzu – volba ano/ne, výběr z možností
- Komunikace – centralizovaná, decentralizovaná, synchronní, asynchronní

- Pravidla aktualizace názorů – každý hráč upravuje svůj názor na základě informací od ostatních
- Strategie:
    - Průměrování
        - Hráč posune svůj názor k průměrné hodnotě názorů sousedů
    - Hlasování
        - Hráči hlasují a vítězí názor s největším počtem hlasů
    - Informační kaskády
        - Hráči sledují akce ostatních a přebírají jejich rozhodnutí, i když jejich vlastní počáteční informace byly odlišné
    - Bayesovská inference
        - Hráči aktualizují své přesvědčení racionálně na základě nových důkazů

1. Reprezentace slovně zadané hry stromem či maticí.

- Pokud je hra sekvenční – strom rozhodnutí
- Pokud je hra simultánní – výplatní matice
- Příklad matice:

	Útočí	**Brání**
Útočí	(2,2)	(4,1)
Brání	(1,4)	(3,3)

2. Převod hry s konstantním součtem na hru s nulovým součtem.

- Pokud má každá výplata součet C, odečti C/2 od každé hodnoty
- Výsledná hra bude nula-součtová – co jeden získá, druhý ztratí

	A	**B**
X	(6,4)	(8,2)
Y	(5,5)	(3,7)

- Výplatní matice má vždy součet 10
  - 6 + 4, 5 + 5, 8 + 2, 3 + 7
- Odečteme 5 od každého → 10 / 2 = 5

	A	**B**
X	(1,-1)	(3,-3)
Y	(0,0)	(-2,2)

3. Hledání sedlových bodů ve hře zadané maticí.

- Najdi minimum každého řádku
- Najdi maximum každého sloupce
- Pokud některý prvek je současně minimum řádku a maximum sloupce, je to sedlový bod

	A	**B**	**C**
X	4	5	6
Y	3	5	2
Z	6	1	3

- Minima řádků
  - X → 4, Y → 2, Z → 1
- Maxima sloupců
  - A → 6, B → 5, C → 6
- Žádné číslo není zároveň minimem a maximem → není sedlový bod

4. Hledání rovnovážného řešení ve hře 2 hráčů při nekonstantním součtu.

- Zjisti nejlepší odpovědi pro každého hráče
- Najdi bod, kde se obě reakce protínají – Nahova rovnováha
- V matici – hledej strategie, které jsou nejlepší pro oba a zároveň se protínají

	A	**B**
X	(2,3)	(0,1)
Y	(1,2)	(3,0)

- Pro hráče 1
  - A: max mezi X a Y → 2 (X)
  - B: max -> 3
- Pro hráče 2
  - X: max mezi A a B → 3 (A)
  - Y: max → 2 (A)
- Průnik nejlepších výběrů nastává v bodě XA → nejlepší Nashova rovnováha v (2,3)

5. Výpočet smíšených strategií ve hře 2 hráčů bez sedlového bodu.

- Hráči nemají výhodu v žádné čisté strategii → použijí smíšené strategie
- Cílem je najít pravděpodobnosti, se kterými hráči volí jednotlivé strategie, aby minimalizovali maximální ztrátu → minimax
- Řeší se buď:
  - Algebraicky
  - Pomocí lineárního programování

	A	**B**
X	2	4
Y	3	1

- Neexistuje sledový bod
- Hráč 1 (řádky) bude míchat X a Y s pravděpodobnostmi:
  - p a 1–p aby měl stejnou očekávanou výhru z hraní proti A i B
- Proti A:
  - 2p + 3(1–p) ➔ 3–p
- Proti B:
  - 4p + 1(1–p) ➔ 1 + 3p
- Nutné najít p, kde se rovná
  - 3−p=1+3p → 2=4p → p=0.5
- Takže hráč 1 hraje X a Y s pravděpodobností 0,5
- Stejně se pak řeší pro hráče 2 (sloupce)

6. Řešení kooperativní hry 2 hráčů.

- Hráči spolupracují, aby maximalizovali celkový užitek
- Vypočti součet možných výher v koalici
- Urči spravedlivé rozdělení
- Např:
  - Hráč 1 sám vydělá 20
  - Hráč 2 sám vydělá 30
  - Dohromady vydělají 70
- Možnosti rozdělení:
  - Kooperace → zisk 70
  - 20 + 30 = 50, 70–50 = 20
    - Každý dostane +10
    - Nebo proporcionálně – 20 + 20/50 * 20 = 28, 30 + 30/50 * 20 = 42
    - Atd…

7. Dělení výhry v kooperativní hře 2 hráčů (přenosná, nepřenosná výhra).

- Přenosná
  - Lže libovolně dělit
  - 100 → 70/30, 50/50, 20/80
- Nepřenosná
  - Nelze rozdělit přesně
  - Hráč 1 chce čas, hráč 2 místo → musí se domluvit tak, aby oba byli maximálně spokojeni

8. Hledání rovnováhy ve hře s neúplnou informací.

- Jeden nebo oba hráči neví vše
- Hráč sestaví očekávání na základě pravděpodobností
- Používá se Bayesovská Nashova rovnováha – strategie berou v úvahu neznámé informace
- Příklad:
  - Hráč 2 je buď agresivní – pravděpodobnost 0,6, nebo klidný 0,4
  - Hráč 1 se rozhoduje, jestli útočit A, nebo ne N

Hráč 2 typ / Hráč 1	A	N
Agresivní	-2	0
Klidný	3	1

- Výplata z A
  - 0.6 * (−2) + 0.4 * 3 = −1.2 + 1.2 =0
- Z N
  - 0.6 * 0 + 0.4 * 1 = 0.4
- Hráč 1 si zvolí neútočit, protože očekává vyšší zisk

9. Určení očekávané výhry při rozhodování za rizika.

- Máš varianty rozhodnutí a pravděpodobnosti stavů světa
- Pro každou variantu spočítej
  - E=∑(pravděpodobnost × výplata)
- Vyber variantu s nejvyšším očekávaným výnosem

Varianta	Stav A – 0,4	Stav B – 0,6
X	100	60
Y	80	90

- X: 0,4 * 100 + 0,6 * 60 = 76
- Y: 0,4 * 80 + 0,6 * 90 = 86
- Optimální je Y

10. Určení optimální strategie při rozhodování za rizika.

- Jde o situaci s pravděpodobnostmi stavů
- Pro každou strategii spočítej očekávanou hodnotu
- Vyber nejlepší strategii – nejvyšší zisk, nejmenší ztráta

Strategie	Stav 1 – 0,5	Stav 2 – 0,5
A	40	80
B	60	50

- A: 0,5 * 40 + 0,5 * 80 = 60
- B: 0,5 * 60 + 0,5 * 50 = 55
- Optimální je strategie A

11. Použití principu minimaxu při rozhodování za neurčitosti.

- Neznáš pravděpodobnosti stavů – neurčitost
- Pro každou strategii zjisti nejhorší možný výsledek
- Z nich vyber nejlepší z nejhorších → minimax

Strategie	Stav 1	Stav 2	Stav 3
A	40	30	20
B	50	25	10
C	35	35	35

- Nejhorší výsledek:
  - A: 20
  - B: 10
  - C: 35
- Vyber C → nejlepší z nejhorších

12. Použití principu minimaxu ztráty při rozhodování za neurčitosti.

- Nejprve urči optimální hodnoty pro každý stav – maximum ve sloupci
- Vypočítej ztrátu každé strategie oproti optimu
- Vyber strategii s nejnižší maximální ztrátou

Strategie	Stav 1	Stav 2
A	30	50
B	40	30
C	35	35

- Maxima ve stavech:
  - Stav 1: 40–B
  - Stav 2: 50–A
- Ztráty

Strategie	Stav 1	Stav 2	Max. ztráta
A	10	0	10
B	0	20	20
C	5	15	15

- Vyhrává A – nejnižší maximální ztráta – 10

13. Použití principu optimismu racionálního hráče při rozhodování za neurčitosti.

- Racionální hráč věří, že nastane nejlepší možný stav
- Pro každou strategii vezmeš nejvyšší možný výsledek

- Vyber strategii s nejvyšším maximem

Strategie	Stav 1	Stav 2	Stav 3
A	20	40	60
B	30	30	30
C	10	80	20

- Maxima:
  - A: 60
  - B: 30
  - C: 80
- Vyhrává C → nejvyšší možný optimistický zisk

14. Použití Laplaceova principu při rozhodování za neurčitosti.

- Předpokládá, že všechny stavy jsou stejně pravděpodobné
- Vypočti průměrnou hodnotu pro každou strategii
- Vyber strategii s nejvyšším průměrem

Strategie	Stav 1	Stav 2	Stav 3
A	10	20	30
B	15	15	15
C	0	30	60

- Průměry:
  - A: (10 + 20 + 30) / 3 = 20
  - B: (15 + 15 + 15) / 3 = 15
  - C: (0 + 30 + 60) / 3 = 30
- Vyhrává C

15. Určení vítěze hlasování zadanou metodou (většinová, Condorcetova, Bordova).

- Většinová metoda
  - Každý volič 1 hlas → vyhrává ten s nejvíce hlasy
- Condorcetova metoda
  - Kandidát, který porazí každého jiného kandidáta v párovém souboji
- Bordova metoda
  - Kandidáti dostávají body podle pořadí – 1. místo = 2 body, 2. místo = 1 bod

Volič	1. Místo	2. Místo	3. Místo
V1	A	B	C
V2	B	C	A
V3	C	A	B

- Většinová
  - Každý kandidát na 1. místě → remíza
- Condorcetova
  - A vs B: A (V1, V3) > B (V2) → A vítězí
  - A vs C: C (V2, V3) > A (V1) → C vítězí
  - B vs C: B (V1, V2) > C (V3) → B vítězí
  - Žádný kandidát neporazí všechny, Condorcet neexistuje

- Bordova
  - A: 2 (V1) + 0 (V2) + 1 (V3) = 3
  - B: 1 (V1) + 2 (V2) + 0 (V3) = 3
  - C: 0 (V1) + 1 (V2) + 2 (V3) = 3
  - Remíza všech