1. Lógica binaria (Verdadero o Falso)

Ejercicio 1. ★ Sean p y q variables proposicionales. Siguiendo las reglas de formación de fórmulas, ¿cuáles de las siguientes expresiones son *fórmulas bien formadas*?

a) $(p\neg q)$
b) $p \vee q \wedge True$
c) $(p \to \neg p \to q)$
d) $\neg(p)$
e) $(p \vee \neg p \wedge q)$
f) $(True \wedge True \wedge True)$
g) $(\neg p)$
h) $(p \vee False)$
i) $(p = q)$

Ejercicio 2. ★ Determinar el valor de verdad de las siguientes fórmulas:

a) $(\neg a \vee b)$
b) $(c \vee (y \wedge x) \vee b)$
c) $\neg(c \vee y)$
d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$
e) $((c \vee y) \wedge (x \vee b))$
f) $(((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge x) \vee b))$
g) $(\neg c \wedge \neg y)$

1 Cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero*, mientras que el de x e y es *falso*.

2 Cuando el valor de verdad de a, b y c es *falso*, mientras que el de x e y es *verdadero*.

Ejercicio 3. Determinar, utilizando tablas de verdad, si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$
b) $(p \wedge \neg p)$
c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q))$
d) $((p \vee q) \to p)$
e) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
f) $((\neg p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
g) $(p \to p)$
h) $((p \wedge q) \to p)$
i) $\big((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))\big)$
j) $\big((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big)$

Ejercicio 4. ★ Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y sólo si $\alpha \to \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

a) $True$, $False$
b) $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$
c) $True$, $True$
d) p, $(p \wedge q)$
e) $False$, $False$
f) p, $(p \vee q)$
g) p, q
h) p, $(p \to q)$

Ejercicio 5. ¿Cuál es la fórmula proposicional más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en el ejercicio anterior?

Ejercicio 6. ★ Demostrar, utilizando tablas de verdad, las siguientes reglas de equivalencia de la Lógica Proposicional:

a) $(False \wedge p) \equiv False$ (Dominación de la conjunción)

b) $(True \vee p) \equiv True$ (Dominación de la disyunción)

c) $(True \wedge p) \equiv p$ (Neutro de la conjunción)

d) $(False \vee p) \equiv p$ (Neutro de la disyunción)

e) $(p \wedge p) \equiv p$ (Idempotencia de la conjunción)

f) $(p \vee p) \equiv p$ (Idempotencia de la disyunción)

g) $(p \vee \neg p) \equiv True$ (Inversa de la disyunción)

h) $(p \wedge \neg p) \equiv False$ (Inversa de conjunción)

i) $\neg\neg p \equiv p$ (Doble negación)

j) $(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ (Absorción de la conjunción)

k) $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$ (Absorción de la disyunción)

l) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ (Ley de Morgan para la conjunción)

m) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de Morgan para la disyunción)

n) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (Conmutabilidad para la conjunción)

ñ) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (Conmutabilidad para la disyunción)

o) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ (Asociatividad de la conjunción)

p) $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$ (Asociatividad de la disyunción)

q) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributividad de la conjunción)

r) $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Distributividad de la disyunción)

s) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ (Contraposición lógica)

t) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ (Implicación Material)

u) $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ (Equivalencia material)

Ejercicio 7. Usando las reglas de equivalencia del ejercicio anterior, simplificar las siguientes fórmulas. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a) $((p \wedge p) \vee p)$

b) $\neg(\neg p \vee \neg q)$

c) $(((p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q) \vee (p \wedge (p \vee q)))$

d) $(\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$

e) $(((p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)) \rightarrow q)$

f) $\neg((\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)) \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg p))$

Ejercicio 8. ★ Usando las reglas de equivalencia determinar si los siguientes pares de fórmulas son equivalentes. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a)
- $((p \wedge p) \wedge p) \rightarrow p$
- $True$

b)
- $((\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q)) \rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \wedge q)$

c)
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $(\neg p \rightarrow (q \wedge r))$

d)
- $\neg(\neg p) \rightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q))$
- q

e)
- $((True \wedge p) \wedge (\neg p \vee False)) \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$
- $(p \wedge \neg q)$

f)
- $(p \vee (\neg p \wedge q))$
- $(\neg p \rightarrow q)$

g)
- $\neg(p \wedge (q \wedge s))$
- $(s \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$

h)
- $(p \rightarrow (q \wedge \neg(q \rightarrow r)))$
- $((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r)))$

Ejercicio 9. Decimos que un conectivo es *expresable* mediante otros si es posible escribir una fórmula utilizando exclusivamente estos últimos y que tenga la misma tabla de verdad que el primero (es decir, son equivalentes). Por ejemplo, la disyunción es expresable mediante la conjunción más la negación, ya que $(p \vee q)$ tiene la misma tabla de verdad que $\neg(\neg p \wedge \neg q)$. Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (implicación), $\leftrightarrow$ (equivalencia) puede reescribirse utilizando sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Ejercicio 10. ★ Sean las variables proposicionales f, e y m con los siguientes significados:

$f \equiv$"es fin de semana" $e \equiv$"Juan estudia" $m \equiv$"Juan escucha música"

a) Escribir usando lógica proposicional las siguientes oraciones:
- "Si es fin de semana, Juan estudia o escucha música, pero no ambas cosas"
- "Si no es fin de semana entonces Juan no estudia"
- "Cuando Juan estudia los fines de semana, lo hace escuchando música"

b) Asumiendo que valen las tres proposiciones anteriores, ¿se puede deducir que Juan no estudia? Justificar usando Lógica Proposicional.

Ejercicio 11. En la salita verde de un jardín se sabe que las siguientes circunstancias son ciertas:

a) Si todos conocen a Juan entonces todos conocen a Camila (podemos suponer debido a que siempre caminan juntos).

b) Si todos conocen a Juan, entonces que todos conozcan a Camila implica que todos conocen a Gonzalo.

La pregunta que queremos responder entonces es: ¿es cierto que si todos conocen a Juan entonces todos conocen a Gonzalo? Resolver utilizando Lógica Proposicional.

Ejercicio 12. Siempre que Laly y Leo duermen en lo de su abuela, vuelven a su casa con un paquete de galletitas. Si un día los viéramos llegar con el paquete de galletitas, podríamos sentirnos inclinados a concluir que han dormido en lo de su abuela. ¿Puede identificar el error en el razonamiento anterior? *Pista:* Es conocido como *falacia de afirmar el consecuente*.

2. Lógica ternaria o trivalente (Verdadero, Falso o Indefinido)

Ejercicio 13. ★ Asignar un *valor de verdad* (*verdadero*, *falso* o *indefinido*) a cada una de las siguientes *expresiones aritméticas* en $\mathbb{R}$.

a) $5 > 0$

b) $1 \leq 1$

c) $(5+3-8)^{-1} \neq 2$

d) $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$

e) $0 \cdot \sqrt{-1} = 0$

f) $\sqrt{-1} \cdot 0 = 0$

Ejercicio 14. ★ ¿Cuál es la diferencia entre el operador $\rightarrow$ y el operador $\longrightarrow_L$? Describir la tabla de verdad de ambos operadores.

Ejercicio 15. ★ ¿Cuál es la diferencia entre el operador $\wedge$ y el operador $\wedge_L$? Describir la tabla de verdad de ambos operadores.

Ejercicio 16. ★ ¿Cuál es la diferencia entre el operador $\vee$ y el operador $\vee_L$? Describir la tabla de verdad de ambos operadores.

Ejercicio 17. ★ Determinar los valores de verdad de las siguientes fórmulas en Lógica Ternaria cuando el valor de verdad de b y c es *verdadero*, el de a es *falso* y el de x e y es *indefinido*:

a) $(\neg x \vee_L b)$

b) $((c \vee_L (y \wedge_L a)) \vee_L b)$

c) $\neg(c \vee_L y)$

d) $(\neg(c \vee_L y) \leftrightarrow (\neg c \wedge_L \neg y))$

e) $((c \vee_L y) \wedge_L (a \vee_L b))$

f) $(((c \vee_L y) \wedge_L (a \vee_L b)) \leftrightarrow (c \vee_L (y \wedge_L a) \vee_L b))$

g) $(\neg c \wedge_L \neg y)$

Ejercicio 18. Determinar los valores de las siguientes fórmulas de Lógica Ternaria cuando el valor de verdad de p es *verdadero*, el de q es *falso* y el de r es *indefinido*:

a) $((9 \leq 9) \wedge_L p)$

b) $((3 \leq 2) \longrightarrow_L (p \wedge_L q))$

c) $((3 < 4) \longrightarrow_L ((3 \leq 4) \vee_L r))$

d) $((3 > 9) \vee_L (r \wedge_L (q \wedge_L p)))$

e) $((p \wedge_L q) \wedge_L r)$

f) $((p \vee_L q) \vee_L r)$

g) $((p \wedge_L r) \wedge_L ((q \longrightarrow_L q) \vee_L (p \longrightarrow_L (q \wedge_L r))))$

h) $((p \wedge_L \neg q) \longrightarrow_L (1 = 0))$

i) $(p \wedge_L ((5 - 7 + 3 = 0) \leftrightarrow (2^2 - 1 > 3)))$

j) $(\neg(p \vee_L r) \longrightarrow_L r)$

k) $((p \longrightarrow_L (1 > log\ 0)) \leftrightarrow (2^2 = 4 \wedge_L (p \wedge_L \neg q)))$

l) $((p \longrightarrow_L (q \longrightarrow_L r)) \longrightarrow_L ((p \longrightarrow_L q) \longrightarrow_L (p \longrightarrow_L r)))$

Ejercicio 19. Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca están indefinidas,
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer, para cada ítem, una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables. Cada fórmula debe ser verdadera si y solo sí se cumple que:

a) Al menos una es verdadera.

b) Ninguna es verdadera.

c) Exactamente una de las tres es verdadera.

d) Sólo p y q son verdaderas.

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas.

f) r es verdadera.

3. Fórmulas del lenguaje de especificación

Ejercicio 20. ★ Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ y z una variable proposicional, indique cuáles de las siguientes expresiones, en nuestro lenguaje de especificación, están bien formadas.

a) $((1 = 0) \vee (x = y))$

b) $(x + 10) = y$

c) $(x \vee y)$

d) $(z \leftrightarrow True) \leftrightarrow (y = x)$

e) $(z = 0) \vee (z = 1)$

f) $y + (y < 0)$

Ejercicio 21. La fórmula $((3 + 7 = \pi - 8) \wedge True)$ es una fórmula bien formada. ¿Por qué? Justifique su respuesta.