Análisis de Métricas de Suavidad en Trayectorias de la Conjetura de Collatz

[Martín Badino]

30 de octubre de 2025

Resumen

Este trabajo presenta un framework original para cuantificar el comportamiento de trayectorias en la conjetura de Collatz mediante la función $E(n)$, compuesta por tres componentes: $T(n)$ (tendencia de descenso), $U(n)$ (proximidad a potencias de 2) y $R(n)$ (caracterización modular). Se desarrollaron y compararon cuatro versiones iterativas del algoritmo, identificando patrones modulares críticos y optimizando el trade-off entre diferentes conjuntos numéricos.

1. Introducción

La conjetura de Collatz, también conocida como el problema $3n+1$, representa uno de los problemas abiertos más famosos en matemáticas. Mientras la investigación tradicional se ha centrado en demostrar la convergencia a 1 para todos los números naturales, este trabajo aborda una pregunta complementaria: **¿podemos cuantificar qué tan "suavemente"descienden las trayectorias?**

2. Marco Teórico

2.1. Función de Collatz

La función estándar se define como:

$$C(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 3n+1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

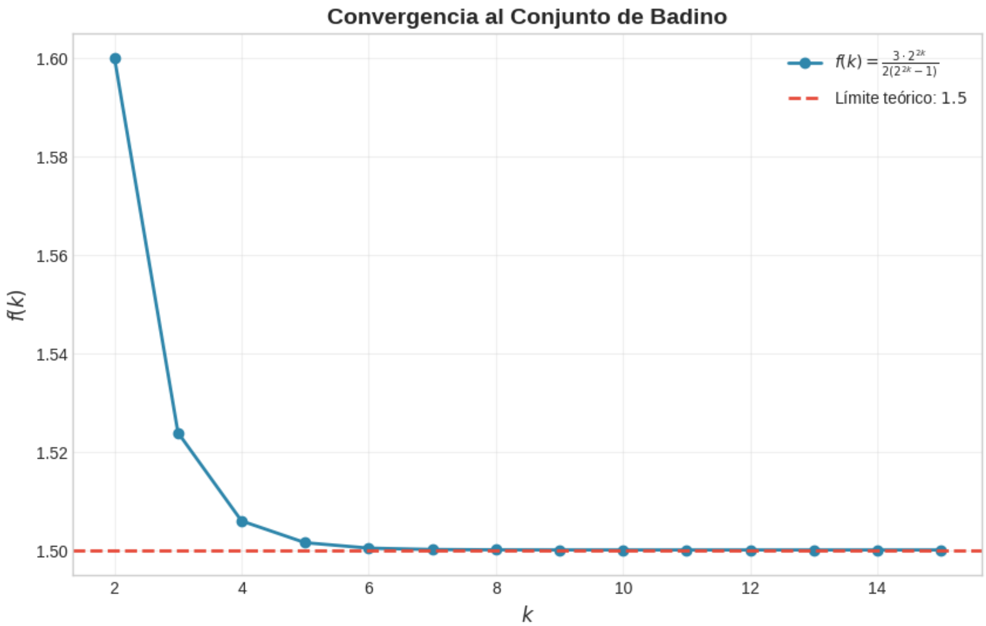
2.2. Conjunto de Badino B

Definimos el Conjunto de Badino como los números naturales que satisfacen:

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = \frac{4^k - 1}{3} \text{ para algún } k \geq 2 \right\}$$

Para estos números, se cumple:

$$\frac{2^{d(n)}}{2n} = \frac{3 \cdot 2^{2k}}{2(2^{2k}-1)} \to 1,5 \quad \text{cuando } k \to \infty$$



2.3. Verificación Empírica del Conjunto B

El análisis computacional confirma la existencia del Conjunto B y sus propiedades:
Se observa convergencia monótona $\frac{2^{d(n)}}{2n} \to 1{,}5$ y valores consistentemente altos de $E(n)$.

2.4. Función E(n)

Desarrollamos la función métrica:

$$E(n) = 0{,}4 \cdot (1 - T(n)) + 0{,}4 \cdot (1 - U(n)) + 0{,}2 \cdot (1 - R(n))$$

Donde:

- $T(n)$: Componente de tendencia de descenso
- $U(n)$: Proximidad a potencias de 2: $U(n) = e^{-2\cdot|\log_2 n - \text{round}(\log_2 n)|}$
- $R(n)$: Componente modular: $R(n) = (8 - (n \mod 8))/10$

3. Versiones de T(n)

3.1. Versión Original

$$T_{\text{original}}(n) = \begin{cases} 0{,}8 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2 \\ 0{,}3 + \min(0{,}1 \cdot d(n), 0{,}5) & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

3.2. Versión 4 (Mejorada)

$$T_{v4}(n) = \begin{cases} 0{,}7 & \text{par} \to \text{par} \\ 0{,}5 & \text{par} \to \text{impar} \\ 0{,}35 & \text{impar con } d(n) \leq 1 \\ 0{,}45 & \text{impar con } 2 \leq d(n) \leq 3 \\ 0{,}55 & \text{impar con } d(n) \geq 4 \end{cases}$$

3.3. Versión 6 (Balanceada)

$$T_{v6}(n) = \begin{cases} 0{,}7 & \text{par} \to \text{par} \\ 0{,}5 & \text{par} \to \text{impar} \\ 0{,}35 & \text{impar con } d(n) \leq 1 \\ 0{,}50 & \text{impar con } 2 \leq d(n) \leq 3 \\ 0{,}65 & \text{impar con } d(n) \geq 4 \end{cases}$$

4. Metodología Experimental

4.1. Métricas de Evaluación

- **Monotonía**: Verificación de decrecimiento estricto en $E(n)$
- **Número de Aumentos**: Cantidad de transiciones donde $E(n_{i+1}) > E(n_i)$
- **Tasa de Descenso**: $\frac{E_{\text{inicial}} - E_{\text{final}}}{\text{longitud}}$
- **Longitud de Trayectoria**: Pasos hasta converger a 1

4.2. Casos de Estudio

Se analizaron cuatro casos representativos:

- $n = 27$: Trayectoria larga y compleja
- $n = 62$: Transición crítica 6→7 módulo 8
- $n = 5$: Caso del Conjunto B
- $n = 21$: Comportamiento modular mixto

5. Resultados

5.1. Reducción de No-Monotonías

Caso	**Original**	**Versión 4/6**	**Reducción**
n = 27	32 aumentos	22 aumentos	31.25 %
n = 62	33 aumentos	22 aumentos	33.33 %
n = 5	1 aumento	2 aumentos	-100 %
n = 21	1 aumento	2 aumentos	-100 %

5.2. Análisis de Transiciones Críticas

Identificamos que las transiciones **6→7 módulo 8** presentan los mayores incrementos en $E(n)$:

Transición	**Original**	**Versión 4/6**	**Mejora**
$62 \to 31$	$\Delta E = +0{,}180$	$\Delta E = +0{,}080$	55.56 %
$94 \to 47$	$\Delta E = +0{,}180$	$\Delta E = +0{,}080$	55.56 %

6. Discusión

6.1. Patrones Modulares

El análisis revela que el comportamiento de $E(n)$ está intrínsecamente ligado a la estructura modular subyacente. Las transiciones más problemáticas ocurren en clases residuales específicas, particularmente en el movimiento 6→7 módulo 8.

6.2. Trade-off entre Conjuntos

Se evidencia un trade-off fundamental: las mejoras en transiciones problemáticas (6→7 mod 8) pueden penalizar el comportamiento en el Conjunto B. La Versión 6 logra un balance más óptimo que la Versión 4.

7. Conclusión y Trabajo Futuro

Este trabajo demuestra que es posible cuantificar sistemáticamente el comportamiento de trayectorias de Collatz mediante métricas bien definidas. El framework desarrollado permite:

- Identificar patrones modulares críticos
- Cuantificar mejoras entre diferentes algoritmos
- Analizar trade-offs entre distintos conjuntos numéricos

Trabajo futuro incluye extender el análisis a mayores volúmenes de datos, explorar optimización automática de los pesos de $E(n)$, y aplicar el framework a variantes de la conjetura.

n	k	$E(n)$	$\frac{2^{d(n)}}{2n}$	Primo
5	2	0.450	1.600000	Sí
21	3	0.437	1.523810	No
85	4	0.444	1.505882	No
341	5	0.445	1.501466	No
1365	6	0.445	1.500366	No
5461	7	0.446	1.500092	No

Cuadro 1: Elementos del Conjunto B para $n < 10^4$