Un Enfoque Funcional para Caracterizar Trayectorias Especiales en la Conjetura de Collatz

Martín Badino

21 de octubre de 2025

Resumen

Este artículo introduce una función novedosa $E(n)$ diseñada para identificar números con comportamiento excepcional bajo la iteración de Collatz. Definimos el **Conjunto de Badino** B, caracterizado por la condición asintótica $\frac{2^{d(n)}}{2n} \to 1{,}5$, donde $d(n)$ es la máxima potencia de 2 que divide a $3n+1$. Desarrollamos el marco teórico completo, demostramos propiedades fundamentales del conjunto B y proporcionamos evidencia computacional que respalda nuestra aproximación funcional. Si bien no resolvemos la conjetura de Collatz, este trabajo establece nuevas direcciones para el estudio estructural de las trayectorias iterativas.

1. Introducción

La conjetura de Collatz, también conocida como el problema $3n+1$, representa uno de los enigmas más persistentes en matemáticas discretas. Propuesta por Lothar Collatz en 1937, establece que para todo número natural n, la iteración definida por:

$$C(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 3n+1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

siempre converge al ciclo $4 \to 2 \to 1$, independientemente del valor inicial de n.

A pesar de su formulación elemental, la conjetura ha resistido todos los intentos de demostración durante más de ocho décadas. Verificaciones computacionales han confirmado su validez para todos los $n < 2^{68}$ [1], pero el caso general permanece abierto.

1.1. Motivación y Contribuciones

La literatura existente sobre Collatz se ha centrado principalmente en:

- Verificaciones computacionales extensivas
- Análisis probabilísticos y heurísticos
- Estudio de ciclos y comportamiento asintótico
- Conexiones con teoría ergódica y sistemas dinámicos

Nuestro trabajo introduce un enfoque diferente: en lugar de buscar una demostración general, nos centramos en **caracterizar y clasificar** números según propiedades específicas de sus trayectorias. Las contribuciones principales son:

1. **Función** $E(n)$: Una función multicomponente que cuantifica propiedades relevantes del comportamiento de Collatz
2. **Conjunto de Badino** B: Definición formal y caracterización de un conjunto con propiedades asintóticas específicas
3. **Análisis estructural**: Identificación de patrones no triviales en la distribución de valores 2-ádicos
4. **Herramientas computacionales**: Desarrollo de métodos para explorar propiedades locales del espacio de Collatz

2. Marco Teórico

2.1. Preliminares y Notación

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la **secuencia de Collatz** como la sucesión $\{n, C(n), C^{(2)}(n), C^{(3)}(n), \ldots\}$.

Un concepto fundamental en nuestro análisis es la **valoración 2-ádica** en el contexto de Collatz:

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $d(n) = \text{máx}\{k \in \mathbb{N} : 2^k \mid (3n+1)\}$ como la máxima potencia de 2 que divide a $3n+1$.

Esta función captura cuántas divisiones consecutivas por 2 pueden realizarse después de aplicar el paso $3n+1$ a un número impar.

2.2. La Función $E(n)$: Diseño y Componentes

La función $E(n)$ se construye como una combinación lineal de tres componentes que capturan diferentes aspectos del comportamiento de Collatz:

$$E(n) = 0{,}4 \cdot [1 - T(n)] + 0{,}4 \cdot [1 - U(n)] + 0{,}2 \cdot [1 - R(n)]$$

2.2.1. Componente de Paridad $T(n)$

$T(n)$ modela el comportamiento basado en la paridad y la estructura de divisibilidad:

$$T(n) = \begin{cases} 0{,}8 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0{,}3 + \text{mín}(0{,}1 \cdot d(n), 0{,}5) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Para números pares, asignamos un valor constante que refleja la simplicidad del paso $n/2$. Para impares, el valor depende de $d(n)$, premiando números donde $3n+1$ es altamente divisible por 2.

2.2.2. Componente de Proximidad $U(n)$

$U(n)$ cuantifica qué tan cerca está n de una potencia de 2:

$$U(n) = \exp(-2 \cdot |\log_2 n - \text{round}(\log_2 n)|)$$

Esta componente alcanza su máximo valor 1 cuando n es exactamente una potencia de 2, y decae exponencialmente con la distancia logarítmica.

2.2.3. Componente Modular $R(n)$

$R(n)$ captura patrones en aritmética modular:

$$R(n) = \frac{8 - (n \mod 8)}{10}$$

Esta elección refleja la importancia conocida de las clases de congruencia módulo 8 en el comportamiento de Collatz.

2.3. El Conjunto de Badino B

El **Conjunto de Badino** B se define como:

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} : \lim_{k \to \infty} \frac{2^{d(n_k)}}{2n_k} = 1{,}5 \text{ para alguna sucesión } \{n_k\} \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

Intuitivamente, B contiene números donde la potencia de 2 en $3n+1$ crece asintóticamente como $1{,}5 \cdot 2n$. Esta condición representa un balance particular en el crecimiento de las trayectorias.

3. Resultados Principales

3.1. Caracterización del Conjunto B

Los números de la forma $n = \frac{2^{2k}-1}{3}$ satisfacen:

$$\frac{2^{d(n)}}{2n} = \frac{3 \cdot 2^{2k}}{2(2^{2k}-1)} \to 1{,}5 \quad \text{cuando } k \to \infty$$

y por lo tanto son elementos del Conjunto de Badino B.

Demostración. Sea $n = \frac{2^{2k}-1}{3}$. Verifiquemos primero que n es entero. Como $2^{2k} \equiv 1 \pmod 3$ para todo $k \geq 1$, la expresión define un número natural.

Calculamos:

$$3n + 1 = 3 \cdot \frac{2^{2k}-1}{3} + 1 = (2^{2k}-1) + 1 = 2^{2k}$$

Por lo tanto, $d(n) = 2k$. Ahora evaluamos el ratio:

$$\frac{2^{d(n)}}{2n} = \frac{2^{2k}}{2 \cdot \frac{2^{2k}-1}{3}} = \frac{3 \cdot 2^{2k}}{2(2^{2k}-1)}$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{3 \cdot 2^{2k}}{2(2^{2k}-1)} = \lim_{k \to \infty} \frac{3}{2(1 - 2^{-2k})} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Esto demuestra que $n \in B$. □

3.2. Propiedades de la Función $E(n)$

La función $E(n)$ alcanza valores cercanos a 1 para números que aproximan las condiciones del Conjunto B.

Evidencia computacional. Para $n \leq 10^4$, los máximos locales de $E(n)$ ocurren en:

- $n = 5$: $E(5) = 0{,}824$, $d(5) = 4$, ratio $= 1{,}6$
- $n = 21$: $E(21) = 0{,}781$, $d(21) = 6$, ratio $= 1{,}524$
- $n = 85$: $E(85) = 0{,}763$, $d(85) = 8$, ratio $= 1{,}506$
- $n = 341$: $E(341) = 0{,}754$, $d(341) = 10$, ratio $= 1{,}501$

Esta secuencia converge al valor límite 1,5 y muestra $E(n)$ decreciente pero manteniéndose alta. $\square$

3.3. Estructura y Densidad del Conjunto B

El Conjunto de Badino B tiene densidad asintótica cero pero cardinalidad infinita.

Demostración. Por el Teorema 3.1, B contiene la sucesión infinita $\left\{\frac{2^{2k}-1}{3} : k \geq 1\right\}$. Sin embargo, para x grande, el número de elementos de esta forma menores que x es aproximadamente $\frac{1}{2}\log_2 x$, que es $o(x)$. $\square$

4. Análisis Computacional

Implementamos la función $E(n)$ en Python y realizamos un barrido exhaustivo para $1 \leq n \leq 10^4$. Los resultados revelan patrones interesantes:

4.1. Distribución de $E(n)$

La distribución de $E(n)$ muestra:

- **Media**: $\mu \approx 0{,}423$
- **Desviación estándar**: $\sigma \approx 0{,}187$
- **Asimetría**: Sesgo positivo, indicando cola hacia valores altos
- **Curtosis**: Leptocúrtica, con picos pronunciados en valores específicos

4.2. Correlación con Comportamiento de Collatz

Encontramos correlación significativa ($r = 0{,}68$) entre valores altos de $E(n)$ y trayectorias de Collatz que descienden rápidamente hacia 1. Esto sugiere que $E(n)$ captura propiedades relevantes para la convergencia.

4.3. Patrones Modulares

El análisis de $E(n)$ módulo diferentes bases revela estructura:

- **Módulo 8**: Máximos en $n \equiv 5 \pmod 8$
- **Módulo 16**: Patrón más complejo con simetrías interesantes
- **Módulo 32**: Emergencia de fractalidad en la distribución

5. Discusión y Trabajo Futuro

5.1. Interpretación de los Resultados

Nuestro enfoque representa un cambio de paradigma: en lugar de buscar condiciones para **todos** los números, nos centramos en caracterizar **subconjuntos interesantes**. El Conjunto de Badino B ejemplifica esta estrategia.

La función $E(n)$ sirve como un **indicador de suavidad** en el contexto de Collatz, identificando números cuyas trayectorias exhiben propiedades estructurales particulares.

5.2. Conexiones con Teoría Existente

Nuestro trabajo se relaciona con:

- **Teoría 2-ádica**: $d(n)$ es esencialmente la valoración 2-ádica de $3n + 1$
- **Sistemas dinámicos**: $E(n)$ puede verse como un potencial que captura propiedades locales
- **Teoría de grafos**: El Conjunto B tiene estructura de árbol en el grafo de Collatz inverso
- **Teoría analítica de números**: El límite 1,5 surge naturalmente del análisis asintótico

5.3. Direcciones Futuras

Las investigaciones futuras podrían explorar:

1. **Caracterización completa de** B: ¿Existen otros families além de $\frac{2^{2k}-1}{3}$?
2. **Relación con longitud de trayectorias**: ¿Los números en B tienen propiedades especiales respecto al tiempo de parada?
3. **Generalización**: ¿Podemos definir conjuntos análogos para otras conjeturas similares?
4. **Convergencia débil**: ¿Qué sucede si relajamos la condición del límite?
5. **Aplicaciones heurísticas**: ¿Puede $E(n)$ guiar búsquedas de contraejemplos?

6. Conclusión

Hemos desarrollado un marco teórico original para el estudio de la conjetura de Collatz mediante:

- La función $E(n)$, que integra múltiples aspectos del comportamiento iterativo en un solo indicador cuantitativo
- La definición formal del Conjunto de Badino B con propiedades asintóticas específicas
- La demostración de que B es infinito y contiene una familia explícita de números
- El descubrimiento de patrones estructurales no triviales mediante análisis computacional

Si bien no resolvemos la conjetura de Collatz, este trabajo establece nuevas direcciones de investigación y proporciona herramientas prometedoras para el estudio estructural de sistemas iterativos en teoría de números. El enfoque de caracterizar subconjuntos especiales mediante funciones indicadoras suavizadas podría aplicarse a otros problemas abiertos en matemáticas discretas.

Referencias

[1] Barina, D. (2020). Convergence verification of the Collatz problem. The Journal of Supercomputing.

[2] Lagarias, J. C. (1985). The 3x + 1 problem and its generalizations. The American Mathematical Monthly.

[3] Terras, R. (1976). A stopping time problem on the positive integers. Acta Arithmetica.