

# Funciones por Tramos - Ejercicio Resuelto

Para la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+2} - 2 & \text{si } x \leq 0 \quad \bullet \text{ A} \\ \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 7x + 12} & \text{si } x > 0 \quad \bullet \text{ B} \end{cases}$$

## 1 Dominio

• A

$$\text{Dom}_A = \mathbb{R}$$

• B

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 7x + 12} = \frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)}{(x - 3) \cdot (x - 4)}$$

$$\text{Dom}_B = \mathbb{R} - \{3; 4\}$$

$$\boxed{\text{Dom}_f = \mathbb{R} - \{3; 4\}}$$

Simplificando la ecuación del tramo B:

• B

$$\frac{x \cdot (x - 1) \cdot \cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)} \cdot (x - 4)} = \frac{x \cdot (x - 1)}{x - 4}$$

## 2 Intersecciones con los ejes

### 2.1 Ordenada al Origen

• A

$$\boxed{f(0) = 2^{0+2} - 2 = 2}$$

## 2.2 Raíces

• A

$$\begin{aligned}0 &= 2^{x+2} - 2 \\2 &= 2^{x+2} \\2^1 &= 2^{x+2} \\1 &= x + 2 \\x &= -1\end{aligned}$$

$$C_A^0 = \{-1\}$$

• B

$$\frac{x \cdot (x - 1)}{x - 4}$$

$$C_B^0 = \{0; 1\}$$

Como  $x = 0$  no es parte de este tramo, no será raíz de la función.

$$C^0 = \{-1; 1\}$$

## 3 Conjuntos de Positividad y Negatividad

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; 1)$	$1$	$(1; 3)$	$3$	$(3; 4)$	$4$	$(4; +\infty)$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$2$	$+$	$0$	$-$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

$$C^+ = (-1; 1) \cup (4; +\infty)$$

$$C^- = (-\infty; -1) \cup (1; 3) \cup (3; 4)$$

## 4 Límites y Asíntotas

• A

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{x+2} - 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+2} - 2 = -2$$

Asíntota Horizontal en  $y = -2$

• B

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot (x - 1)}{x - 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x \cdot (x - 1)}{x - 4} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x \cdot (x - 1)}{x - 4} = -6$$

Discontinuidad Evitable en  $x = 3$

• B

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x \cdot (x-1)}{x-4} = -\infty$$

$\nearrow^{12}$   
 $\searrow_{0^-}$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x \cdot (x-1)}{x-4} = +\infty$$

$\nearrow^{12}$   
 $\searrow_{0^+}$

Asíntota Vertical en  $x = 4$   
 Cómo el grado del polinomio  
 numerador es superior en 1 al del  
 polinomio denominador, buscaremos  
 una asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x-1)}{x-4} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x} =$$

$\nearrow^{\infty}$   
 $\uparrow$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}} = 1$$

$\nearrow^1$     $\nearrow^0$   
 $\searrow_1$     $\searrow_0$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x-1)}{x-4} - 1 \cdot x \cdot \frac{x-4}{x-4} =$$

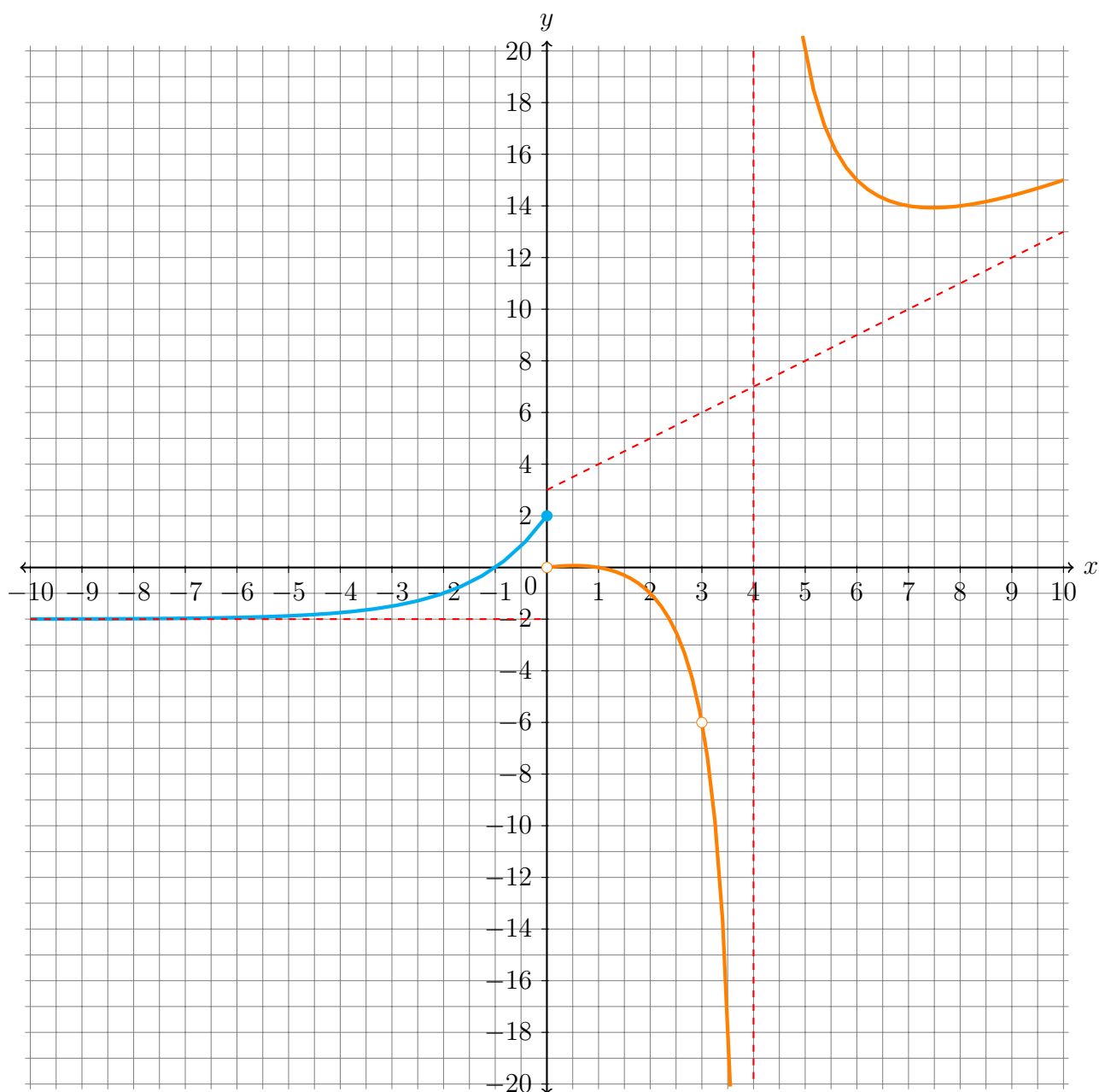
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - (x^2 - 4x)}{x-4} =$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} = 3$$

$\nearrow^3$   
 $\searrow_1$     $\searrow_0$

Asíntota Oblicua de ecuación  $y = x + 3$

## 5 Gráfico y clasificación de discontinuidades



Discontinuidad esencial con salto finito en  $x = 0$

Discontinuidad evitable en  $x = 3$

Discontinuidad esencial con salto infinito en  $x = 4$