Modelli e Stabilità Interna

Modello a Variabili di Stato (LTI)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

Algebra Matriciale Essenziale per l'Analisi

- **Autovalori** (λ_i): Radici di $\det(\lambda I - A) = 0$. Detti anche **modi**, determinano il comportamento naturale (risposta libera) del sistema.
  - Per matrici **triangolari/diagonali**, sono gli elementi sulla diagonale.
  - Per matrici a **blocchi diagonali**, l'insieme degli autovalori è l'unione di quelli dei blocchi. Questo permette di analizzare le proprietà del sistema **studiando ogni sottosistema in modo indipendente**.
- **Rango**: Numero di righe/colonne lin. indipendenti. Per matrici quadrate $n \times n$: $\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$.

La stabilità interna dipende **esclusivamente** dalla posizione degli autovalori di A nel piano complesso.

Stabilità (dagli autovalori $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ di A)

- **Asintotica**: Tutti $\sigma_i < 0$. I modi $e^{\sigma_i t}$ convergono a zero.
- **Semplice**: Tutti $\sigma_i \leq 0$. Per $\sigma_i = 0$, deve essere $m.a. = m.g.$ (molt. algebrica = geometrica). I modi sono costanti/oscillanti, ma limitati.
- **Instabile**: Almeno un $\sigma_i > 0$, oppure un $\sigma_i = 0$ con $m.a. > m.g.$ (blocco di Jordan che genera modi divergenti del tipo t^k).

Raggiungibilità e Osservabilità

- **Raggiungibilità**: Lo stato è "guidabile" dall'ingresso.
  - **Test di Kalman**: Si calcola la matrice di raggiungibilità M_R. Il sistema è raggiungibile se $\text{rank}(M_R) = n$.
  $$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
  - **Test PBH**: (Utile per testare un singolo modo). Raggiungibile se per ogni autovalore λ_i:
  $$\text{rank}\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \end{bmatrix} = n$$
- **Osservabilità**: Lo stato è "visibile" dall'uscita.
  - **Test di Kalman**: Si calcola la matrice di osservabilità $\mathcal{O}$. Il sistema è osservabile se $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.
  $$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$
  - **Test PBH**: Osservabile se per ogni autovalore λ_i:
  $$\text{rank}\begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

Funzione di Trasferimento e Laplace

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$. I **poli** di $G(s)$ sono le radici del denominatore. La **stabilità BIBO** richiede che tutti i poli abbiano $Re(s) < 0$.

Funzione $f(t)$	**Trasformata** $F(s)$
Impulso $\delta(t)$	1
Gradino $1(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa $t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^k}{k!} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^{k+1}}$
Esponenziale e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Derivazione: $\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
Integrazione: $\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Ritardo: $f(t - t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
Traslazione in s: $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
Valore Iniziale	$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
Valore Finale	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ (solo se il limite esiste finito)

Sistema del I Ordine: $G(s) = \frac{K}{1+s\tau}$

- **Risposta al gradino**: $y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$.
- **Costante di tempo** τ: tempo al 63% del valore finale.
- **Tempo di assestamento** T_s (al 95%): $T_s \approx 3\tau$.

Sistema del II Ordine: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ Poli: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$.

- **Sovraelongazione Massima** $S\%$:
$$S\% = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$
- **Tempo di Picco** T_p: $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$
- **Tempo di assestamento** T_s (al 95%): $T_s \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$

Criterio di Stabilità di Routh

Dato il polinomio caratteristico $a_n s^n + \cdots + a_0 = 0$.

1. **Cond. necessaria**: tutti i coefficienti a_i devono avere lo stesso segno.
2. **Tabella di Routh**:
$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \end{array} \qquad b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$
3. **Criterio**: Stabilità asintotica $\iff$ tutti gli elementi della prima colonna sono non nulli e hanno lo stesso segno.
4. **Instabilità**: Il numero di radici con $Re(s) > 0$ è uguale al numero di variazioni di segno nella prima colonna.

Casi speciali:

- **Zero in prima colonna**: sostituire lo zero con $\epsilon > 0$ e calcolare il limite per $\epsilon \to 0^+$.
- **Riga di zeri**: indica radici simmetriche (sistema non asintoticamente stabile). Si crea un polinomio ausiliario $q(s)$ dalla riga precedente, si deriva, e si usano i coefficienti di $\frac{dq}{ds}$ per sostituire la riga di zeri.

Luogo delle Radici

Traccia i poli in anello chiuso per l'eq. $1 + KG(s) = 0$. **Regole per** $K > 0$

- I rami partono dai poli e arrivano agli zeri (o all'infinito).
- **Asse reale**: un punto appartiene al luogo se ha un numero **dispari** di poli e zeri reali alla sua destra.
- **Asintoti** (se $n > m$):
  - Numero: $n - m$.
  - Angoli: $\phi_k = \frac{(2k+1)180°}{n-m}$.
  - Centroide: $\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$.
  - **Partenza** da polo p_k: $\theta_p = 180° + \sum \arg(p_k - z_i) - \sum_{j\neq k} \arg(p_k - p_j)$.
  - **Arrivo** a zero z_k: $\theta_z = 180° - \sum_{j\neq k} \arg(z_k - z_j) + \sum \arg(z_k - p_i)$.

Regole per $K < 0$ (Luogo Inverso)

- **Asse reale**: un punto appartiene al luogo se ha un numero **pari** di poli e zeri reali alla sua destra.
- **Angoli asintoti**: $\phi_k = \frac{2k\cdot 180°}{n-m}$.

Criterio di Stabilità di Nyquist

Determina la stabilità in anello chiuso dal diagramma di Nyquist della funzione d'anello aperto $L(s)$.

- **Formula**: $N = R^+ - P^+$. Per stabilità, si vuole $R^+ = 0$, quindi la condizione diventa $N = -P^+$.
  - N: numero di giri in senso **orario** attorno al punto $(-1, 0)$.
  - P^+: numero di poli instabili ($Re(s) > 0$) di $L(s)$.
- **Caso $L(s)$ stabile** ($P^+ = 0$): stabilità in anello chiuso $\iff N = 0$ (il diagramma non accerchia il punto -1).
- **Chiusura all'infinito**: per h poli nell'origine, il diagramma si chiude con h semicerchi di 180° in senso **orario**.

Diagrammi di Bode

Termine	Modulo (dB)	Fase (gradi)
K_B	Retta orizz. a $20\log_{10}(\lvert K_B\rvert)$	$0°$ se $K_B > 0$, $-180°$ se $K_B < 0$
$1/s^h$	Pendenza **-20h dB/dec**	Costante a **-90h°**
$\frac{1}{1+s\tau}$	0 dB fino a $\omega_c = 1/\tau$, poi pendenza **-20 dB/dec**	Da $0°$ a **-90°**
$1 + s\tau$	0 dB fino a $\omega_c = 1/\tau$, poi pendenza **+20 dB/dec**	Da $0°$ a **+90°**
$\frac{1}{1+\dots}$	0 dB fino a ω_n, poi pendenza **-40 dB/dec**	Da $0°$ a **-180°**
$1 + \dots$	0 dB fino a ω_n, poi pendenza **+40 dB/dec**	Da $0°$ a **+180°**
e^{-sT}	**0 dB**	$-\omega T \frac{180}{\pi}°$

Termini a fase non minima (es. polo $1/(1 - s\tau)$): il modulo è identico al caso stabile, ma la fase è ribaltata (es. da $0°$ a $+90°$).

Da Variabili di Stato a Funzione di Trasferimento (SS → FdT)

1. **Formula Generale**: Dato un modello (A, B, C, D), la sua funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola con la formula:
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
Il calcolo pratico prevede di calcolare l'inversa della matrice $(sI - A)$ e poi eseguire le moltiplicazioni matriciali.
2. **Ruolo di Raggiungibilità e Osservabilità**: La funzione di trasferimento descrive **esclusivamente la parte del sistema che è sia raggiungibile sia osservabile**.
   - Il denominatore di $G(s)$ è dato da $\det(sI - A)$, le cui radici sono tutti gli autovalori (modi) del sistema.

Da FdT a Variabili di Stato (FdT → SS)

1. **Preparazione della FdT**: Si scrive la FdT in modo che il denominatore sia un polinomio monico (coefficiente di s^n uguale a 1):
$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$
2. **Costruzione delle Matrici**: Le matrici si scrivono direttamente dai coefficienti a_i e b_i:
   - **Matrice A (Forma Compagna)**:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$
   - **Matrice B**:
$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$
   - **Matrice C**:
$$C = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$
   - **Matrice D**:
$$D = [b_0]$$

Risposta Forzata (C.I. $= 0$, $u(t) \neq 0$)

1. **Trova** $G(s)$: Se non data, ricavala dall'EDO con C.I. nulle.
2. **Trasforma l'ingresso** $U(s)$: Calcola $\mathcal{L}\{u(t)\}$. Es: per gradino, $U(s) = 1/s$.
3. **Calcola l'uscita** $Y(s)$: Moltiplica $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$.
4. **Scomponi in fratti semplici**: Decomponi $Y(s)$.
5. **Antitrasforma**: Trova $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Progettazione del Controllore (Loop Shaping)

Margini di Stabilità (da Bode di $L(j\omega)$)

- **Margine di Fase** M_ϕ: $M_\phi = 180° + \angle L(j\omega_c)$, dove ω_c è la pulsazione di taglio ($|L(j\omega_c)| = 0$ dB).
- **Margine di Guadagno** M_g: $M_g = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$, dove ω_π è la pulsazione a cui $\angle L(j\omega_\pi) = -180°$.

Requisiti tipici: $M_\phi > 35°$, $M_g > 6$ dB.

Specifica	Vincolo Pratico sulla Funzione d'Anello $L(s)$
Errore a Regime (Statiche)	**Errore a gradino nullo**: $L(s)$ deve essere di **Tipo** ≥ 1 (il controllore deve avere un polo in $s = 0$, es. PI). **Errore a rampa** $\leq \epsilon$: $L(s)$ deve essere di **Tipo** ≥ 1 e la costante di velocità $K_v = \lim_{s\to 0} sL(s)$ deve essere $\geq 1/\epsilon$.
Disturbi e Rumore	**Reiezione disturbi** ($\omega \leq \omega_d$): Si traduce in un **limite inferiore** per il modulo. $|L(j\omega)|$ deve essere "grande", es. $|L(j\omega)| \geq 20$ dB. **Reiezione rumore** ($\omega \geq \omega_n$): Si traduce in un **limite superiore** per il modulo. $|L(j\omega)|$ deve essere "piccolo", es. $|L(j\omega)| \leq -20$ dB.
Prestazioni Dinamiche	**Tempo di assest.** T_s: Fissa la **pulsazione di taglio** target. $\omega_c \approx 3/T_s$. **Sovraelong.** $S\%$: Fissa lo smorzamento ξ, che a sua volta definisce il **margine di fase** minimo richiesto. Regola pratica: $M_\phi[\text{gradi}] \approx 100 \cdot \xi$.

1. **1° Tentativo: Controllore Statico (P o PI)**
   - Scegli la struttura base del controllore per soddisfare le sole **specifiche statiche** (errore a regime).
   - Calcola il guadagno K necessario per rispettare i vincoli su $L(0)$ o K_v.
   - Traccia i diagrammi di Bode di $L(s)$ con questo primo controllore e analizza i margini e la ω_c.
2. **2° Diagnosi: Quale Specifica è Violata?**
   - **CASO A**: La pulsazione di taglio ω_c è circa nella posizione corretta (o troppo bassa), ma il **margine di fase è insufficiente** ($M_\phi < M_{\phi,\text{req}}$).
   - **CASO B**: Il **margine di fase è insufficiente** perché la **pulsazione di taglio ω_c è troppo alta** e cade in una zona dove la fase del processo è già troppo degradata.
3. **3° Scelta della Rete Correttrice**
   - **SOLUZIONE per il CASO A → USARE RETE ANTICIPATRICE (LEAD)**
     - **Scopo**: Aumentare il margine di fase senza spostare troppo ω_c.
     - **Come funziona**: Introduce un "boost" di fase positivo intorno a ω_c. Rende il sistema più veloce.
     - **Forma**: $C_{lead}(s) = \frac{1+s\tau_z}{1+s\tau_p}$ con $\tau_z > \tau_p$.
   - **SOLUZIONE per il CASO B → USARE RETE RITARDATRICE (LAG)**
     - **Scopo**: Mantenere il guadagno statico alto, ma ridurre la ω_c per migliorare il margine di fase.
     - **Come funziona**: Attenua il guadagno alle frequenze medio-alte, "abbassando" la curva del modulo e spostando ω_c a sinistra, in una regione dove la fase del processo è migliore (meno negativa).
     - **Forma**: $C_{lag}(s) = \frac{1+s\tau_z}{1+s\tau_p}$ con $\tau_p > \tau_z$.

Risposta Libera ($u(t) = 0$, C.I. $\neq 0$)

ingresso nullo.

1. **Ricava EDO omogenea**: Da $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, l'eq. omogenea è $D(s)Y(s) = 0$. Antitrasformala.
2. **Trasforma con Laplace**: Applica $\mathcal{L}$ all'EDO, includendo le C.I. date $(y(0), \dot{y}(0), \dots)$.
3. **Isola** $Y_l(s)$: Risolvi algebricamente per $Y_l(s)$. Il numeratore dipenderà dalle C.I.
4. **Scomponi in fratti semplici**: Decomponi $Y_l(s)$ per isolare i termini base.
5. **Antitrasforma**: Usa le tabelle per trovare $y_l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_l(s)\}$.