POLITECHNIKA GDAŃSKA

„Co wpływa na bogactwo społeczeństwa?”

Gabriela Kuczyńska, Martyna Stalmach Analityka gospodarcza online-75 II stopnia semestr I

Styczeń 2025

Spis treści

1. Wstęp do analizy 3
2. Metody badawcze: 3
3. Wyniki 4
3.1. Analiza nierówności dochodowej 4
3.2. Analiza rozkładu badanych zmiennych 5
3.3. Analiza PCA 10
3.3.1. Test sferyczności Bartletta 10
3.3.2. Kryterium KMO (Kaiser-Meyer-Olkin factor adequacy) 10
3.3.3. Wizualizacje analizy 11
3.3.4. Odpowiedź na pytanie badawcze „Czy i jak można zredukować wymiary badanych danych?”**:** 13
3.4. Analiza skupień (grupowanie) 14
3.4.1. Wyświetlenie Dendrogramu 14
3.4.2. Metoda WSS 15
3.4.3. Metoda Silhouette 15
3.4.4. Metoda gap_stat 16
3.4.5. Graficzne przedstawienie grup 17
3.4.6. Odpowiedź na pytanie badawcze „Ile i jakie grupy utworzą badane dane?”: 17
3.5. Sprawdzenie korelacji – które zmienne są istotnie skorelowane ze zmienną PKB na osobę 18
3.5.1. Macierz korelacji 18
3.5.2. Sprawdzenie istotności współczynników korelacji 19
3.5.3. Budowa modelu regresji 20
3.5.4. Weryfikacja modelu 22
3.5.5. **Odpowiedź na pytanie badawcze** „Jak wygląda model regresji badanych danych?”: 22
3.6. Przygotowanie danych do analizy wymiarów PCA jako predyktorów 23
3.6.1. Jeden wymiar jako predyktor 24
3.6.2. Dwa wymiary jako predyktory 24
3.6.3. Dwa wymiary jako predyktory 25
3.6.4. Odpowiedź na pytanie badawcze „Czy wymiary utworzone na etapie analizy PCA są dobrymi predyktorami zmiennej PKB?”**:** 25
4. Podsumowanie 25

1. Wstęp do analizy

W projekcie dokonano analizy wpływu zmiennych na PKB per capita. PKB per capita to jeden z najważniejszych wskaźników gospodarczych, który odzwierciedla wartość produkcji krajowej brutto podzielonej przez liczbę mieszkańców kraju. Jest to wskaźnik, który pokazuje poziom życia i potencjał konsumpcyjny mieszkańców kraju. Celem projektu było przeprowadzenie analizy wpływu różnych zmiennych na poziom PKB per capita, takich jak produkcja energii, wydajność pracowników, zarobki roczne, czy np. wskaźnik konsumpcji. Niektóre wyniki były szczególnie zaskakujące. Na pierwszy rzut oka nie wydawałoby się, że dany czynnik mógłby mieć istotny wpływ na zmienną zależną. W ramach projektu przeprowadzono analizy statystyczne, które umożliwiły zidentyfikowanie zmiennych, które najbardziej wpływają na poziom PKB per capita oraz pomogły określić relacje między nimi. Analiza została przeprowadzana przy użyciu różnych narzędzi i metod statystycznych, takich jak analiza korelacji, PCA, grupowanie, regresja. W projekcie odpowiedziano na pytania badawcze takie jak:

1. „Jak wygląda nierówność dochodów w krajach europejskich, a także w jakim stopniu ich rozkład odbiega od rozkładu egalitarnego?"
2. „Czy i jak można zredukować wymiary badanych danych?"
3. „Ile i jakie grupy utworzą badane dane?"
4. „Jak wygląda model regresji badanych danych?"
5. „Czy wymiary utworzone na etapie analizy PCA są dobrymi predyktorami zmiennej PKB?"

2. Metody badawcze:

Na pierwsze pytanie badawcze odpowiedziano korzystając z krzywej Lorenza porównując ją do rozkładu egalitarnego na wykresie oraz przedstawiając mediany dochodów dla poszczególnych państw poprzez wizualizacje w RStudio. Aby odpowiedzieć na pytanie badawcze czy i jak zredukować wymiary badanych danych użyto metody analizy głównych składowych. Zbadano korelację, wykonano test sferyczności Barletta oraz test KMO, aby upewnić się, że analiza jest możliwa i jej wyniki są miarodajne. Wynikiem analizy były dwa wymiary, wyjaśniające ponad 80% zmienności.

Na początku przeprowadzono analizę , w której przedstawiono Krzywą Lorenza i rozkład egalitarny na podstawie dochodu brutto. Następnie przeprowadzono analizę skupień w celu odpowiedzi na pytanie dotyczące liczby i rodzaju grup w badanych danych. Do tego celu wykorzystano funkcję Clusterboot. Na podstawie wyników tej analizy ustalono optymalną liczbę grup oraz metodę. Następnie, w celu potwierdzenia wyników, sporządzono wykresy metodą WSS (Within-Cluster Sum of Squares), Silhouette oraz Gap_stat. Po przeprowadzeniu tych analiz, podjęto decyzję o wyborze dwóch grup jako optymalnej liczby. Algorytm Clara pomógł zwizualizować grupy w sposób bardziej czytelny. Ostatecznie, wybrano metodę Warda i wykonano dendrogram, który wyraźnie przedstawiał zróżnicowanie między grupami.

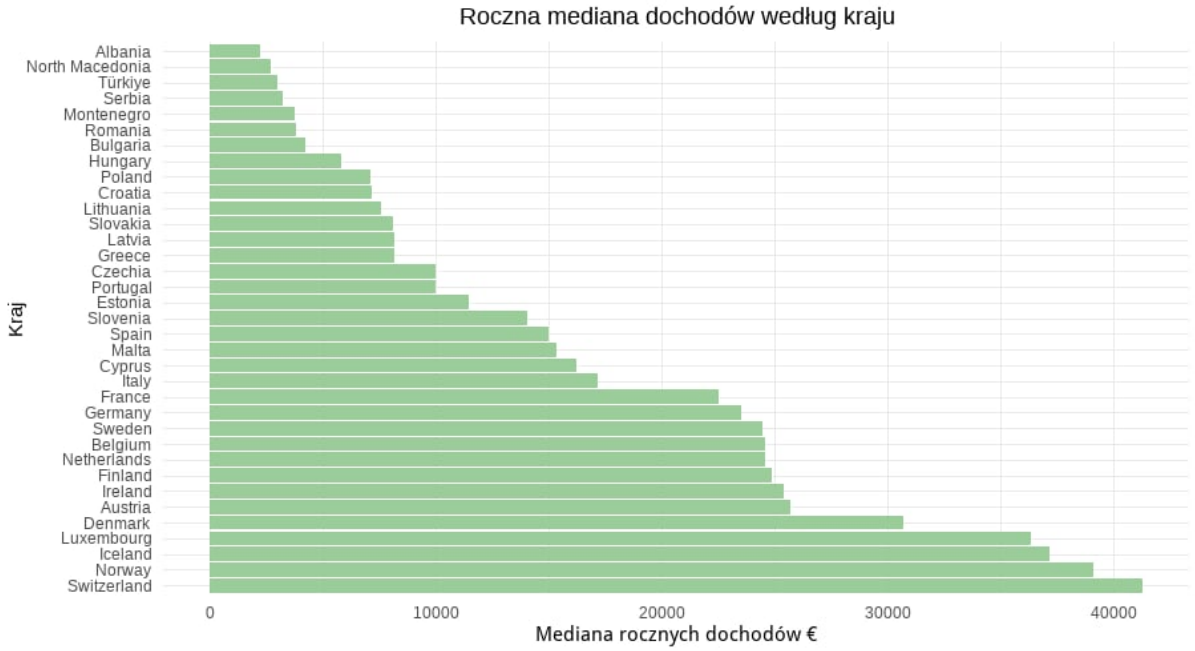
Odpowiadając na pytanie jak wygląda model regresji najpierw zbadano korelacje, następnie sprawdzono istotność współczynników korelacji. Kolejnym krokiem było zbudowanie i weryfikacja modelu regresji. W tym celu posłużono się funkcją regresji liniowej oraz wykresem na bazie współczynnika determinacji, aby wybrać najbardziej dopasowany model.

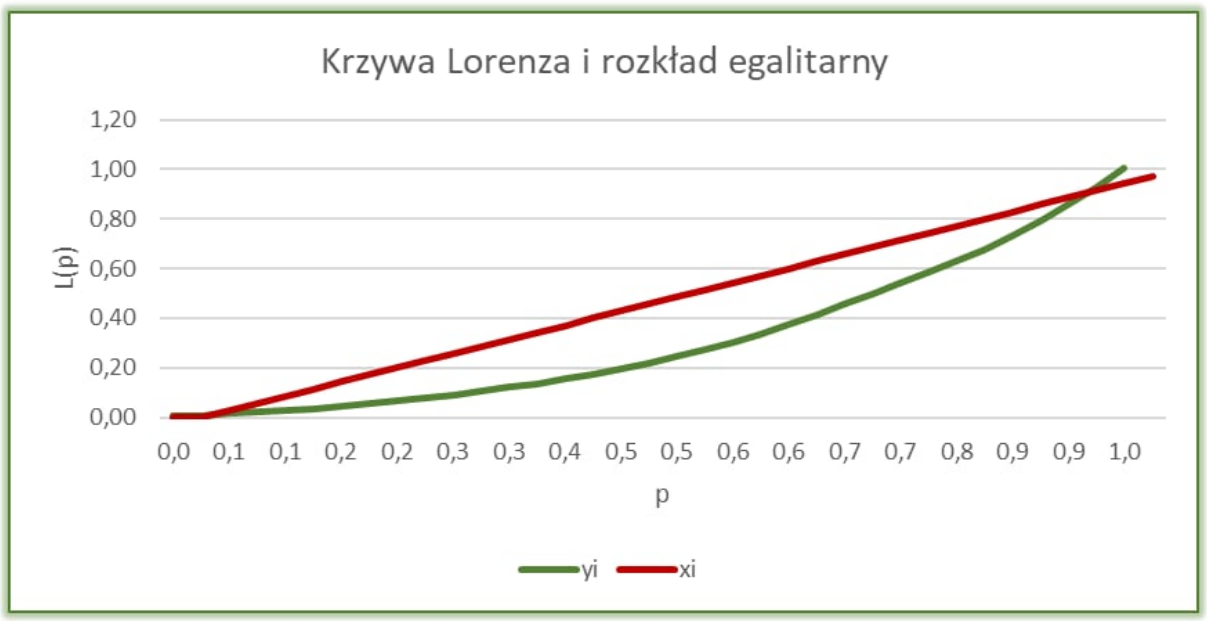
Na pytanie czy wymiary utworzone na etapie analizy PCA są dobrymi predyktorami zmiennej PKB znaleziono odpowiedź posługując się połączeniem analizy PCA i regresji. Metoda polega na użyciu wymiarów z PCA jako predyktorów i porównaniu czy lepiej wyjaśniają model razem czy może pierwszy wymiar sam wyjaśnia więcej zmienności. Badane zjawisko badano za pomocą polecenia Anovy.

3. Wyniki

3.1. Analiza nierówności dochodowej

Wykres 1 Wiuzalizacja mediany rocznych dochodów brutto rosnąco





Rysunek 1 Krzywa Lorenza i rozkład egalitarny.

3.1.1. Odpowiedź na pytanie badawcze „ Jak wygląda nierówność dochodów w krajach europejskich, a także w jakim stopniu ich rozkład odbiega od rozkładu egalitarnego?”:

Analiza median rocznych dochodów w krajach Europy ujawnia umiarkowane nierówności dochodowe, z współczynnikiem Giniego wynoszącym 0,363. Kraje takie jak Norwegia i Luksemburg wyróżniają się wysokimi dochodami, podczas gdy regiony takie jak Albania czy Bułgaria pozostają na końcu stawki. Krzywa Lorenza wskazuje, że wyższe grupy dochodowe posiadają znaczną część zasobów, co sugeruje potrzebę polityk redystrybucyjnych. Wdrożenie progresywnych podatków, wsparcia edukacji i programów socjalnych mogłoby pomóc w zmniejszeniu nierówności i poprawie równowagi społecznej w Europie.

3.2. Analiza rozkładu badanych zmiennych badających pozostałe dane na temat bogactwa

Tabela 1. Podstawowe statystyki przedstawia podstawowe statystyki, takie jak średnia, odchylenie standardowe, rozstęp, skośność, kurtozę, oraz wszystkie kwartyle.

Tabela 1. Podstawowe statystyki

	mean	**sd**	**IQR**	**cv**	**skewness**	**kurtosis**	**0%**	**25%**	**50%**	**75%**	**100%**
PKB na osobę	30717,10	18938,84	22820,00	0,62	1,10	0,87	6630,00	15685	25500	38505	83590
Budżet na badania i rozwój	1,31	0,54	0,67	0,42	0,76	0,98	0,53	0,92	1,33	1,59	32905
Zużycie Internetu	87,23	8,42	14,42	0,10	-0,43	-0,69	67,95	81,01	87,75	95,43	99,03
Produkcja energii	7,66	3,78	4,39	0,49	1,23	2,07	32,00	32599,00	7,31	9,28	19,40
Wskaźnik konsumpcji	105,65	40,30	47,50	0,38	1,82	4,77	53,00	76,00	97,00	123,50	251
Wydajność pracowników	98,60	28,52	36,45	0,29	1,13	2,16	49,00	77,10	98,50	113,55	188,20
Zarobki roczne	21547,36	7797,94	12166,97	0,36	0,36	-0,54	10640,64	15051,68	21985,37	27218,65	40872,86
Zwolnienia ze szpitala	2291,16	984,10	1322,74	0,43	0,42	-0,44	691,83	1627,95	2061,64	2950,69	4509,10

Poniższa *Tabela 2. Korelacje między zmiennymi* przedstawia korelacje między predyktorami oraz zmienną zależną. Korelacja między nimi jest mierzona za pomocą współczynnika korelacji Pearsona, który przyjmuje wartości między -1 a 1. Współczynnik korelacji Pearsona 0 oznacza brak korelacji, a wartość -1 lub 1 oznacza idealną korelację negatywną lub pozytywną odpowiednio. Można zauważyć, że korelacje zmiennej zależnej z predyktorami są silne. Osiągają wartości ponad 0,50, co daje nam duże prawdopodobieństwo, że predyktory mają znaczący wpływ na zmienną zależną. Korelacje między predyktorami również są wysokie, jedynie zwolnienia ze szpitala korelują negatywnie z pozostałymi predyktorami, zostały one przedstawione w *Tabela 2. Korelacje między zmiennymi*.

Tabela 2. Korelacje między zmiennymi

	Budżet na badania i rozwój	Internet use	PKB na osobę	Produkcja energii	Wskaźnik konsumpcji	Wydajność pracowników	Zarobki roczne	Zwolnienia ze szpitala
PKB na osobę	0,581	0,751	1,000	0,673	0,943	0,882	0,872	-0,472
Budżet na badania i rozwój	1,000	0,659	0,581	0,220	0,437	0,378	0,734	-0,179
Internet use	0,659	1,000	0,751	0,402	0,671	0,651	0,796	-0,397
Produkcja energii	0,220	0,402	0,673	1,000	0,623	0,748	0,521	-0,432
Wskaźnik konsumpcji	0,437	0,671	0,943	0,623	1,000	0,907	0,784	-0,387
Wydajność pracowników	0,378	0,651	0,882	0,748	0,907	1,000	0,759	-0,474
Zarobki roczne	0,734	0,796	0,872	0,521	0,784	0,759	1,000	-0,442
Zwolnienia ze szpitala	-0,179	-0,397	-0,472	-0,432	-0,387	-0,474	-0,442	1,000

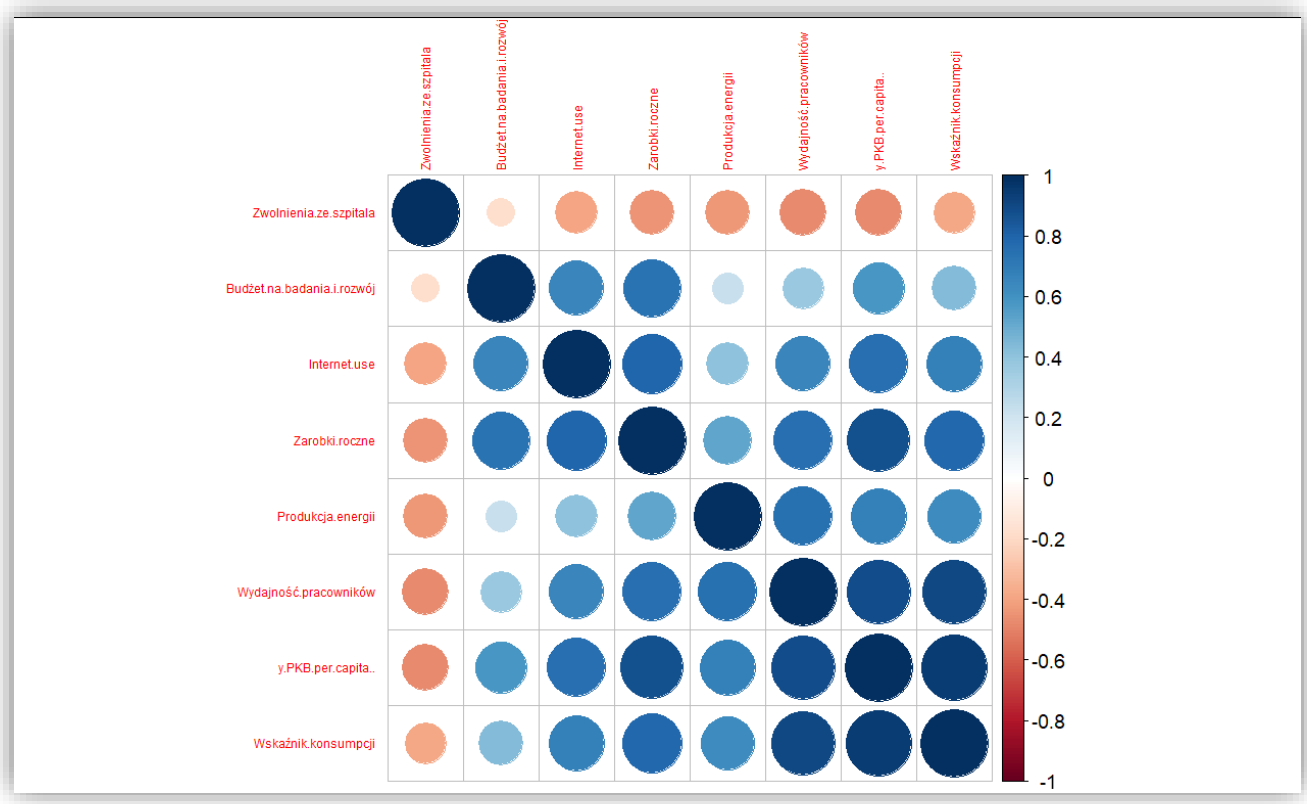
Two-sided p-value to wartość prawdopodobieństwa, która mówi o tym, jakie jest prawdopodobieństwo, że różnice między dwiema grupami lub zmiennymi jest wynikiem przypadku, a nie rzeczywistej różnicy między nimi. Wynik ten wyraża się w skali od 0 do 1, gdzie wartość p-value bliska 0 oznacza, że istnieje małe prawdopodobieństwo, że różnica między zmiennymi jest wynikiem przypadku, a wartość p-value bliska 1 sugeruje, że nie ma statystycznie istotnej różnicy między zmiennymi. Poziom istotności jaki zakładamy to 0,05, więc bierzemy pod uwagę tylko p-value mniejsze od 0,05.

Tabela 3. Dwustronne p-value

	Budżet na badania i rozwój	Internet use	PKB na osobę	Produkcja energii	Wskaźnik konsumpcji	Wydajność pracowników	Zarobki roczne	Zwolnienia ze szpitala
Budżet na badania i rozwój		<.0001	0.0006	0.2336	0.0141	0.0363	<.0001	0.3348
Internet use	<.0001		<.0001	0.0251	<.0001	<.0001	<.0001	0.0272
PKB na osobę	0.0006	<.0001		<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	0.0073
Produkcja energii	0.2336	0.0251	<.0001		0.0002	<.0001	0.0027	0.0151
Wskaźnik konsumpcji	0.0141	<.0001	<.0001	0.0002		<.0001	<.0001	0.0315
Wydajność pracowników	0.0363	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001		<.0001	0.0071
Zarobki roczne	<.0001	<.0001	<.0001	0.0027	<.0001	<.0001		0.0128
Zwolnienia ze szpitala	0.3348	0.0272	0.0073	0.0151	0.0315	0.0071	0.0128	

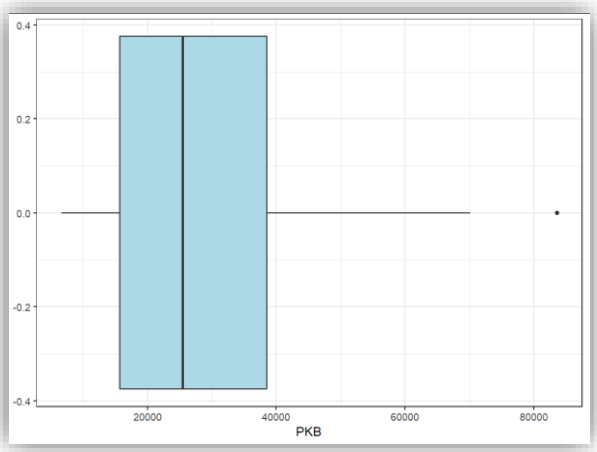
Jak można zauważyć dla powyższej tabeli przedstawiającej wartości p-value – *Tabela 3. Dwustronne p-value*, w większości przypadków p-value jest < 0,05.

Poniższy wykres przedstawia korelacje w postaci graficznej (). Najbardziej skorelowane predyktory ze zmienną zależną to: wskaźnik konsumpcji, wydajność pracowników, zarobki roczne.

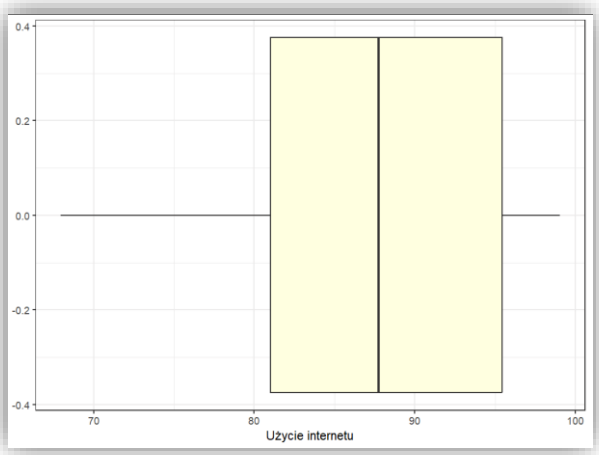


Rysunek 2 Wykres przedstawiający podstawowe korelacje między predyktorami z naszego zbioru

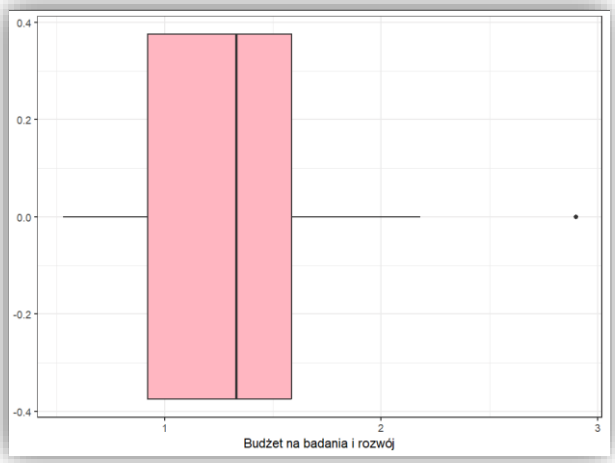
Z poniższych boxplotów można odczytać informacje na temat zmiennych, które pozwolą na szybką analizę rozkładu wartości próbki, wykrycie wartości skrajnych i skośności rozkładu.



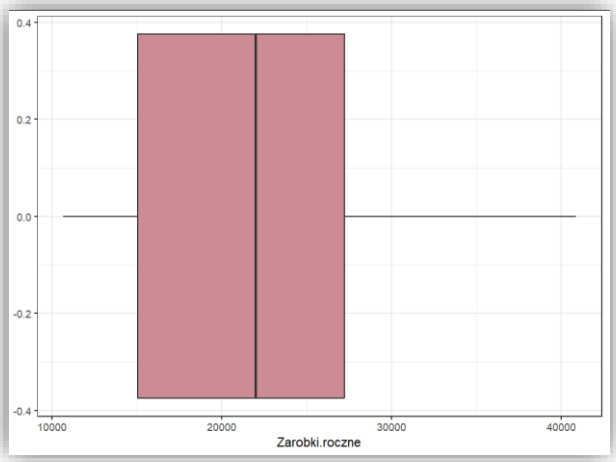
Mediana w powyższym rozkładzie wynosi delikatnie ponad 2 000 euro. Rozkład jest prawostronnie skośny. Wartość odstająca – ponad 80 000 euro rocznie.



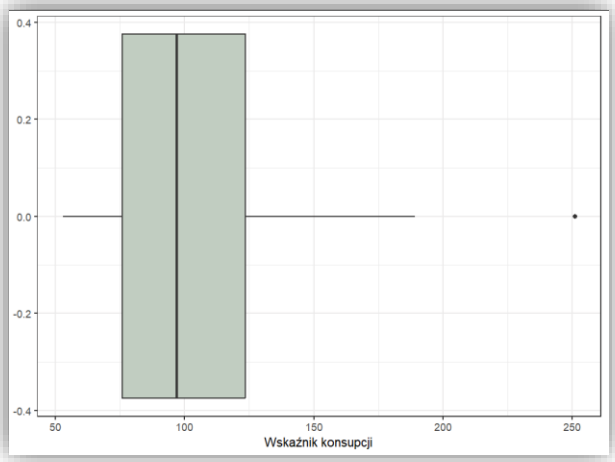
Mediana w powyższym rozkładzie wynosi ok. 88%.



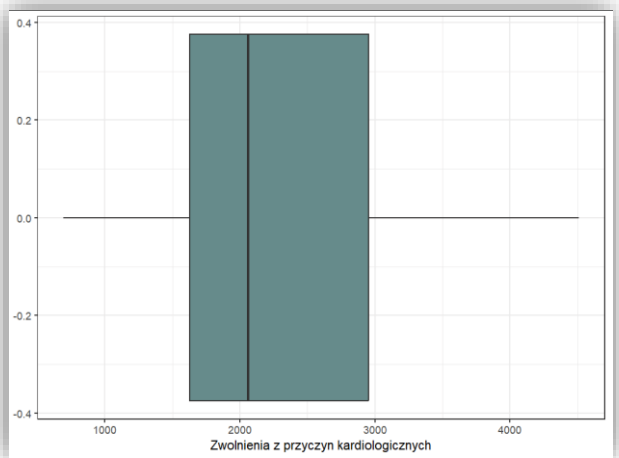
Mediana w powyższym rozkładzie wynosi ok.1,3%. Rozkład jest prawostronnie skośny. Wartość odstająca – delikatnie mniej niż 3%.



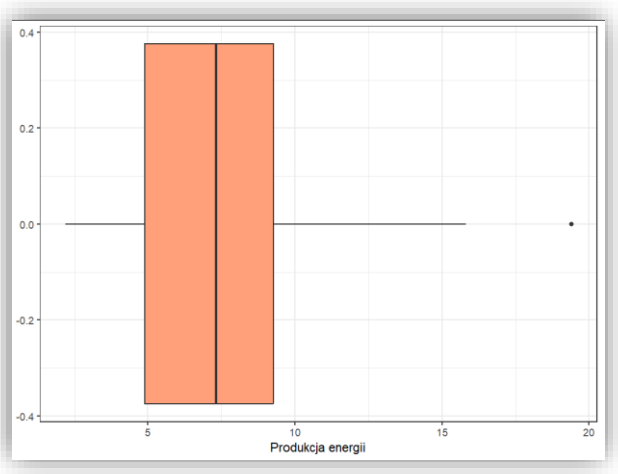
Mediana w powyższym rozkładzie wynosi delikatnie ponad 2 000 euro.



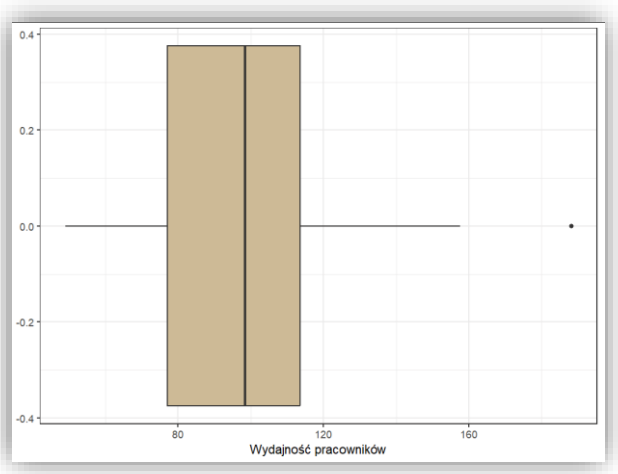
Mediana w powyższym rozkładzie wynosi delikatnie mniej niż 100 euro. Rozkład jest prawostronnie skośny. Wartość odstająca – ok. 250 euro.



Mediana w powyższym rozkładzie wynosi delikatnie ponad 2 000/ 100 000 osób.



Mediana w powyższym rozkładzie wynosi ok. 7 euro/kg. Wartość odstająca – delikatnie mniej niż 20 euro/kg. Rozkład jest prawostronnie skośny.



Mediana w powyższym rozkładzie wynosi ok. 100% UE-27. Wartość odstająca – ok. 185% UE-27. Rozkład jest prawostronnie skośny.

Rysunek 3 Wykresy pudełkowe wybranych zmiennych

3.3. Analiza PCA

PCA wykonuje się tylko wtedy, gdy miedzy zmiennymi występują korelacje. Korelacje są wyraźne, wiec PCA jest możliwa do wykonania.

3.3.1. Test sferyczności Bartletta

chisq	p-value	df
161.1922	1.279058e-23	21

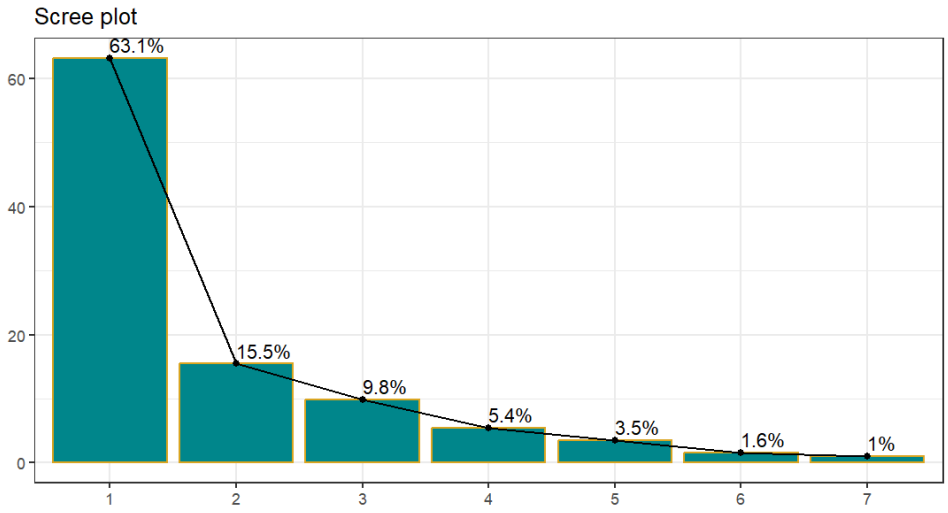
P-value bardzo małe równe 1.279058e-23 mniejsze niż 0.05, czyli zakładany poziom istotności.

3.3.2. Kryterium KMO (Kaiser-Meyer-Olkin factor adequacy)

Overall MSA = 0.82		
MSA for each item		
Zwolnienia ze szpitala	Użycie internetu	Budżet na rozwój
0.83	0.92	0.73
Produkcja energii	Wydajność pracowników	Zarobki roczne
0.83	0.76	0.83
Wskaźnik		
0.81		

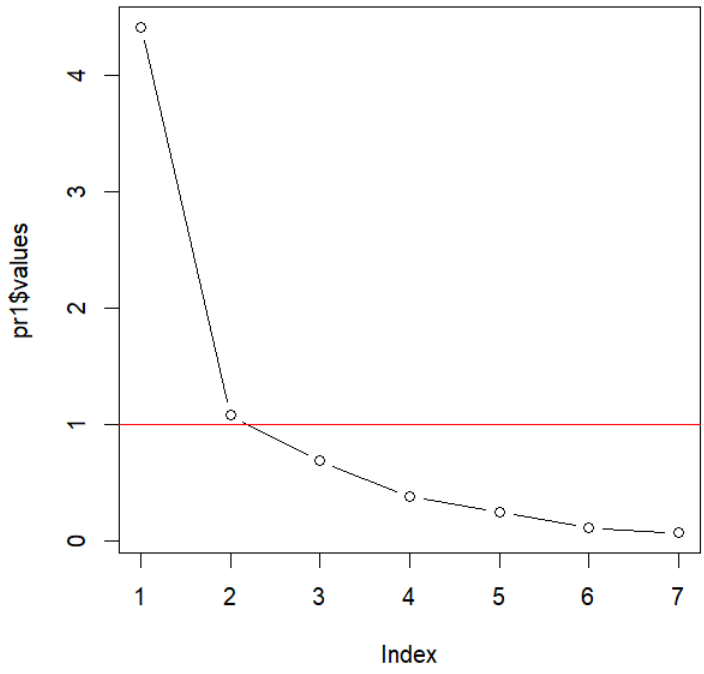
Powyższe mocne korelacje oznaczają dużą szansę na powodzenie PCA. KMO > 0.5, więc PCA jest jak najbardziej dopuszczalna.

3.3.3. Wizualizacje analizy



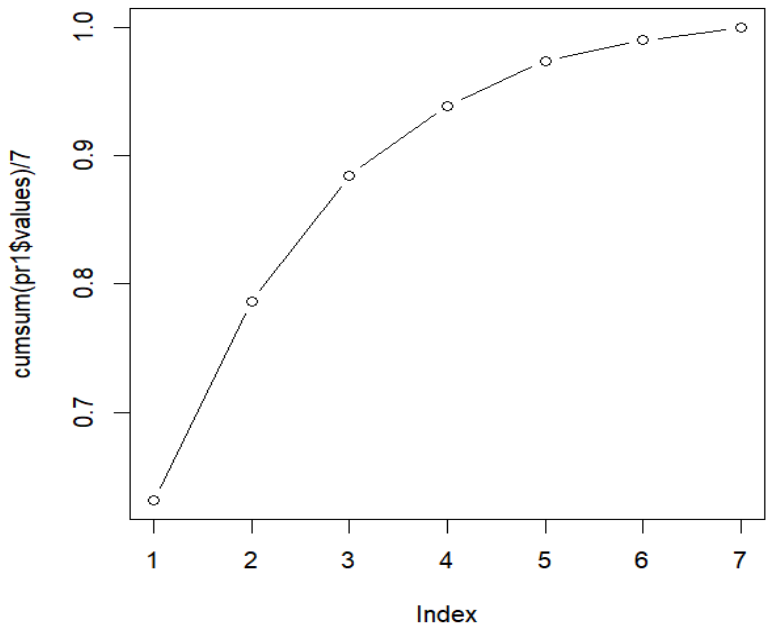
Wykres 1 Zawartości informacji w składowych.

Wybrano 2 składowe, ponieważ łącznie wyjaśniają ponad 78% zmienności – można to łatwo odczytać z **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** – dwie pierwsze składowe wyjaśniają ponad 78 % (63,1% + 15,5% = 78,6%).



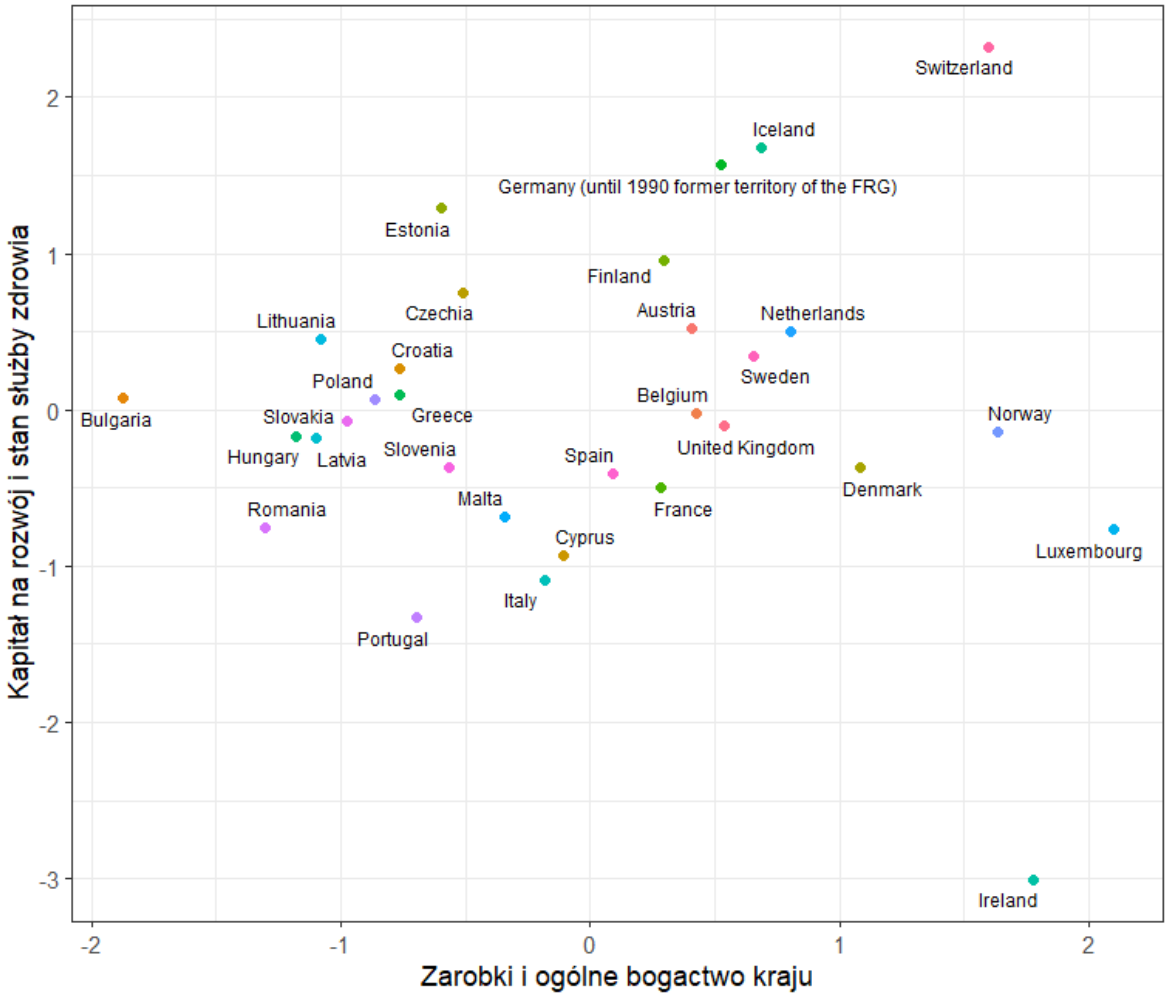
Wykres 2 Wykres osypiska

Widać, iż tylko dwie składowe spełniają kryterium Keisera.



Wykres 3. Wizualizacja procentu wyjaśnianej wariancji dla różnej liczby składowych.

Dwie składowe wyjaśniają około 78% wariancji.
PC1 = zarobki i ogólne bogactwo kraju.
PC2 = kapitał na rozwój i stan służby zdrowia



Wykres 4 Wykres krajów według składowych PCA

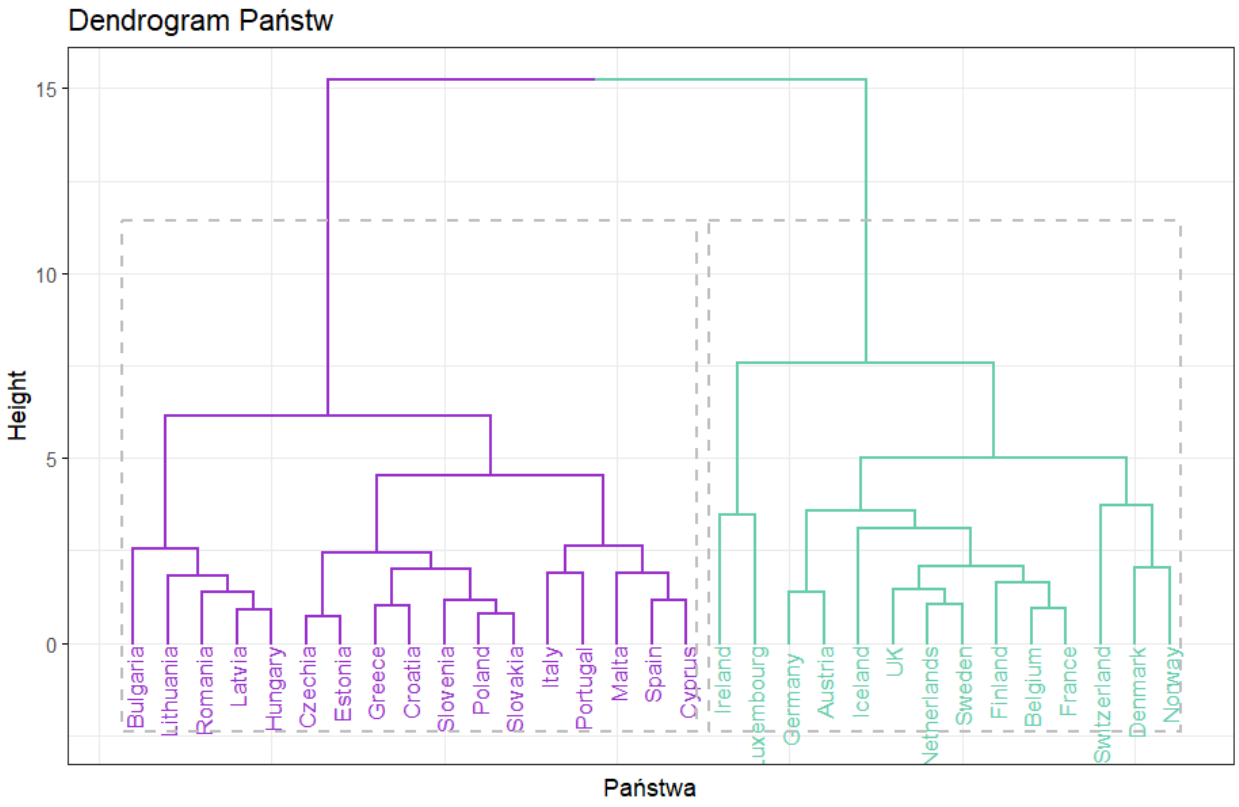
3.3.4. Odpowiedź na pytanie badawcze „Czy i jak można zredukować wymiary badanych danych?”:

Badane dane spełniły warunki do wykonania PCA. Wynikiem tej analizy uzyskano dwa wymiary. Pierwszy wymiar wyjaśniający 63% zmienności i drugi wymiar wyjaśniający 15,5%. Kraje biedniejsze, mniej rozwinięte usytuowały się po lewej stronie wykresu. Kraje bogatsze, lepiej rozwinięte znajdują się po prawej. Zwolnienia ze szpitala wliczają w sobie również śmierci, dlatego odwrotnie korelują z PKB.

3.4. Analiza skupień (grupowanie)

3.4.1. Wyświetlenie Dendrogramu

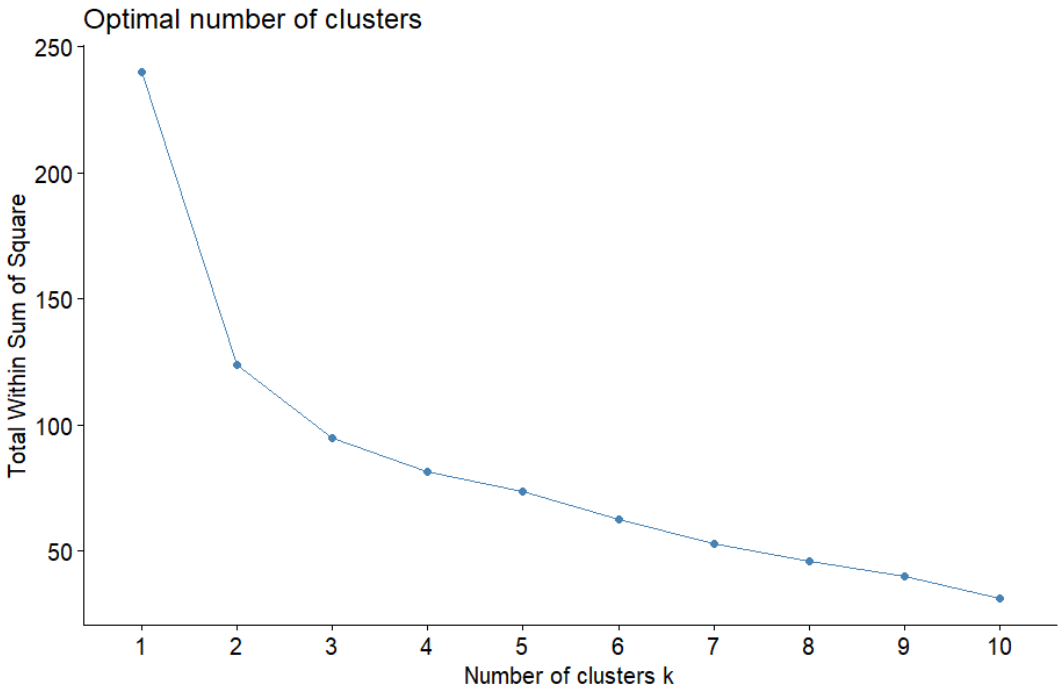
Wybrano grupowanie hierarchiczne po przeprowadzeniu badania funkcją clusterboot. Stabilność tej metody oscyluje między 92-94%. Badany zbiór danych jest dość mały, więc ta metoda wydaje się najbardziej odpowiednia.



Wykres 5 Dendrogram Państw – dodatkowa analiza

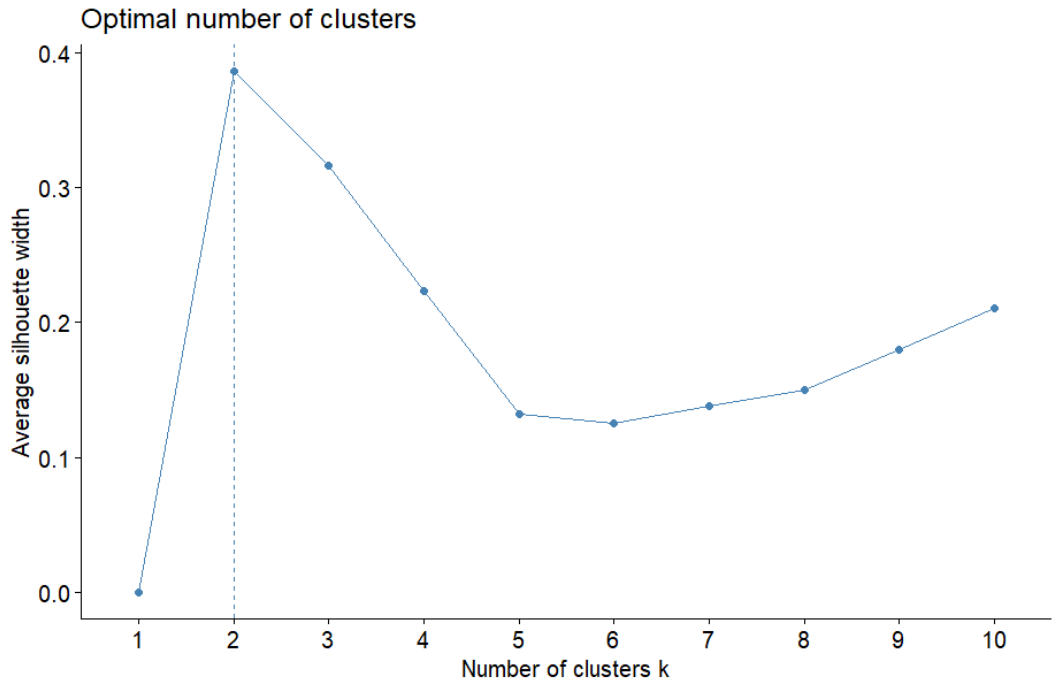
Najbliżej siebie są Czechy i Estonia. Odległość na wykresie tych dwóch zmiennych od siebie jest najmniejsza. Odczytuje się to na podstawie dendrogramu i najniżej położonej kreski łączącej pary. Dendrogram wyraźnie wyznacza dwie grupy. Odczytuje się go metodą "bottom up", czyli od dołu. Dzieli się zbiór na dwie grupy i odczytuje, która grupa ma przewagę dla poszczególnych zmiennych.

3.4.2. Metoda WSS



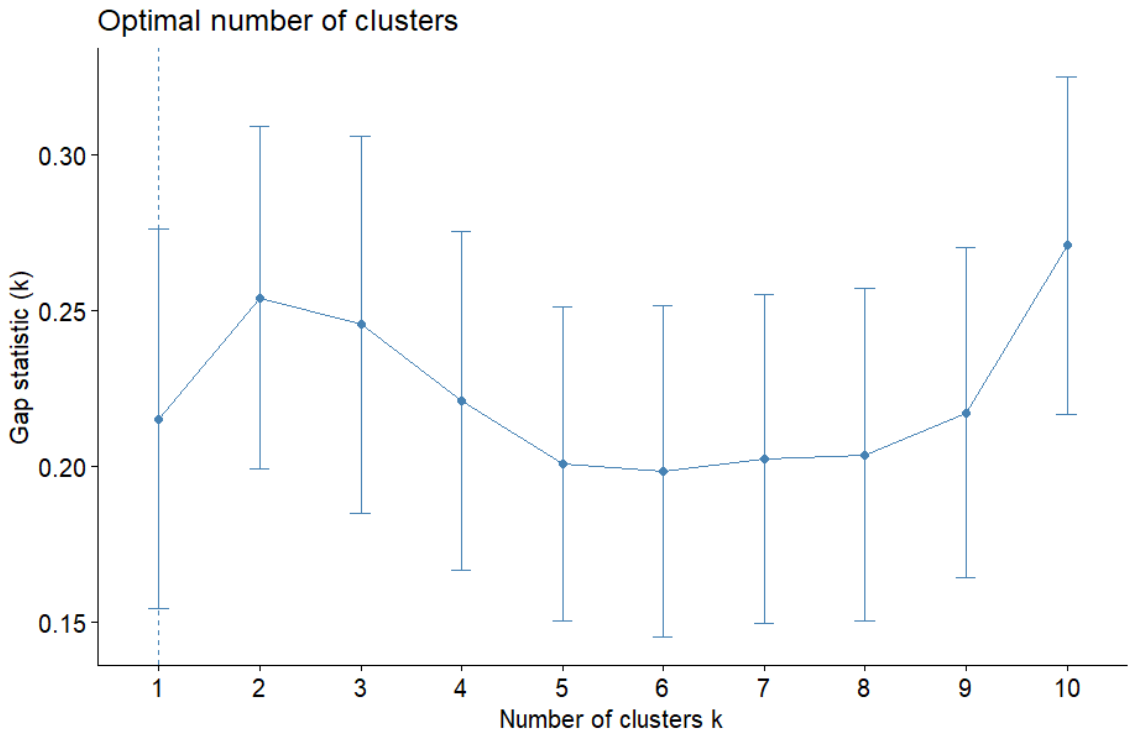
Wykres 6 Dendrogram Państw – dodatkowa analiza

3.4.3. Metoda Silhouette



Wykres 7 Silhouette (dodatkowa analiza)

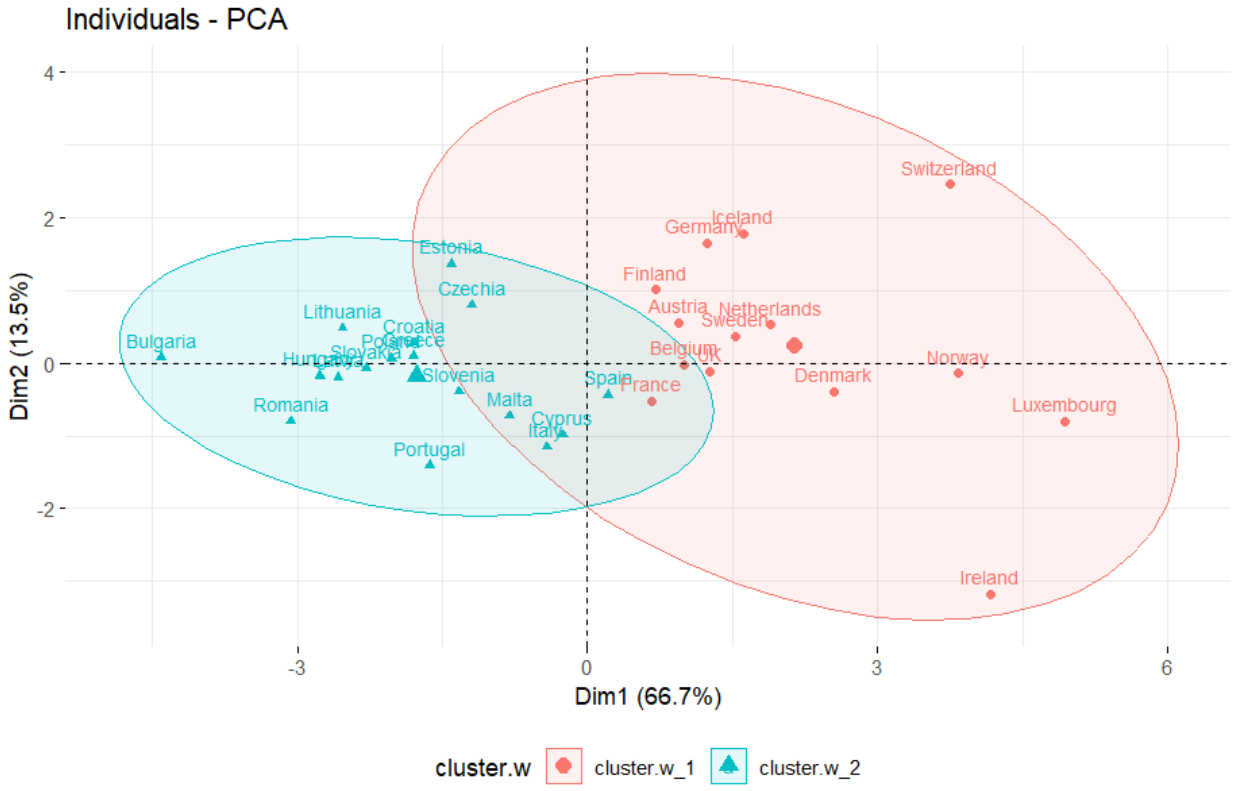
3.4.4. Metoda gap_stat



Wykres 8 Gap_stat (dodatkowa analiza)

Dla dwóch pierwszych wykresów najbardziej odpowiedni wydaje się podział na dwie grupy. Dla wykresu nr 4, jednej grupy. Biorąc pod uwagę przedstawione wizualizacje dokonuje się podziału na dwie grupy.

3.4.5. Graficzne przedstawienie grup



Wykres 9 Wykres według grupowania (dodatkowy)

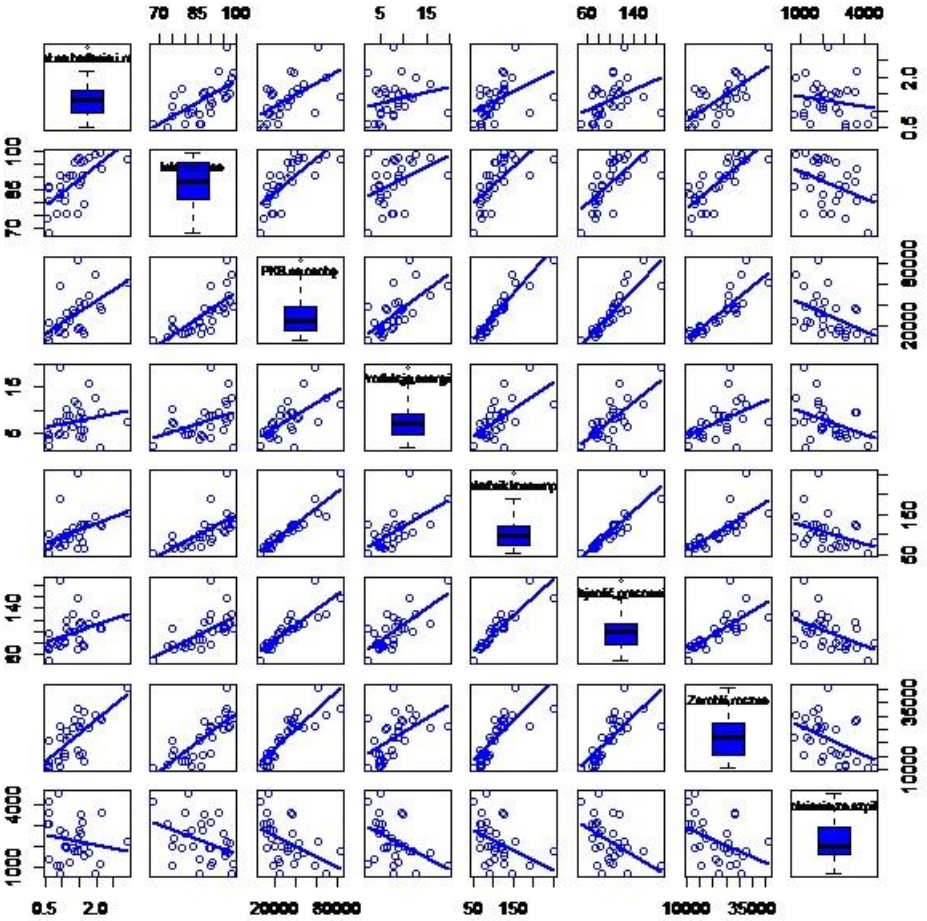
3.4.6. Odpowiedź na pytanie badawcze „Ile i jakie grupy utworzą badane dane?”:
Optymalne badania ilości grup oraz dendrogram pomogły podjąć decyzję o wyborze 2 grup. Badane grupy można scharakteryzować następująco:

- W 1 grupie przeważają państwa wysoko rozwinięte, z dużą ilością użytkowników internetowych, dużym budżetem na rozwój.
- W 2 grupie znajdują się kraje, które cechuje duża liczba zwolnień ze szpitala pacjentów z oddziałów kardiologicznych (w tym śmierci), z niskim wskaźnikiem konsumpcji i mało wydajnymi pracownikami.

Odstające wartości przyjęły Irlandia, Luxemburg, Szwajcaria i Bułgaria. Zauważalne skupiska można dostrzec wokół punktów (-1,5; 0) i (1,5; 1). Ewidentnym wnioskiem z przeprowadzonej analizy jest bliskość siebie krajów byłego bloku radzieckiego i ich opóźnienie względem krajów zachodnich i Skandynawii.

3.5. Sprawdzenie korelacji – które zmienne są istotnie skorelowane ze zmienną PKB na osobę

3.5.1. Macierz korelacji



Wykres 10. Wykres rozrzutu

Poniższa *Tabela 4. Korelacje między zmiennymi* przedstawia korelacje między predyktorami oraz zmienną zależną. Korelacja między nimi jest mierzona za pomocą współczynnika korelacji Pearsona, który przyjmuje wartości między -1 a 1. Współczynnik korelacji Pearsona 0 oznacza brak korelacji, a wartość -1 lub 1 oznacza idealną korelację negatywną lub pozytywną odpowiednio. Można zauważyć, że korelacje zmiennej zależnej z predyktorami są silne. Osiągają wartości ponad 0,50, co daje duże prawdopodobieństwo, że predyktory mają znaczący wpływ na zmienną zależną. Korelacje między predyktorami również są wysokie, jedynie zwolnienia ze szpitala korelują negatywnie z pozostałymi predyktorami, zostały one przedstawione w *Tabela 4. Korelacje między zmiennymi*.

Tabela 4. Korelacje między zmiennymi

	Budżet na badania i rozwój	Internet use	PKB na osobę	Produkcja energii	Wskaźnik konsumpcji	Wydajność pracowników	Zarobki roczne	Zwolnienia ze szpitala
PKB na osobę	0,581	0,751	1,000	0,673	0,943	0,882	0,872	-0,472
Budżet na badania i rozwój	1,000	0,659	0,581	0,220	0,437	0,378	0,734	-0,179
Zużycie Internetu	0,659	1,000	0,751	0,402	0,671	0,651	0,796	-0,397
Produkcja energii	0,220	0,402	0,673	1,000	0,623	0,748	0,521	-0,432
Wskaźnik konsumpcji	0,437	0,671	0,943	0,623	1,000	0,907	0,784	-0,387
Wydajność pracowników	0,378	0,651	0,882	0,748	0,907	1,000	0,759	-0,474
Zarobki roczne	0,734	0,796	0,872	0,521	0,784	0,759	1,000	-0,442
Zwolnienia ze szpitala	-0,179	-0,397	-0,472	-0,432	-0,387	-0,474	-0,442	1,000

3.5.2. Sprawdzenie istotności współczynników korelacji

Two-sided p-value to wartość prawdopodobieństwa, która mówi o tym, jakie jest prawdopodobieństwo, że różnice między dwiema grupami lub zmiennymi jest wynikiem przypadku, a nie rzeczywistej różnicy między nimi. Wynik ten wyraża się w skali od 0 do 1, gdzie wartość p-value bliska 0 oznacza, że istnieje małe prawdopodobieństwo, że różnica między zmiennymi jest wynikiem przypadku, a wartość p-value bliska 1 sugeruje, że nie ma statystycznie istotnej różnicy między zmiennymi. Poziom istotności jaki zakładamy to 0,05, więc bierze się pod uwagę tylko p-value mniejsze od 0,05.

Tabela 5. Dwustronne p-value

	Budżet na badania i rozwój	Internet use	PKB na osobę	Produkcja energii	Wskaźnik konsumpcji	Wydajność pracowników	Zarobki roczne	Zwolnienia ze szpitala
Budżet na badania i rozwój		<.0001	0.0006	0.2336	0.0141	0.0363	<.0001	0.3348
Zużcyie Internetu	<.0001		<.0001	0.0251	<.0001	<.0001	<.0001	0.0272
PKB na osobę	0.0006	<.0001		<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	0.0073
Produkcja energii	0.2336	0.0251	<.0001		0.0002	<.0001	0.0027	0.0151
Wskaźnik konsumpcji	0.0141	<.0001	<.0001	0.0002		<.0001	<.0001	0.0315
Wydajność pracowników	0.0363	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001		<.0001	0.0071
Zarobki roczne	<.0001	<.0001	<.0001	0.0027	<.0001	<.0001		0.0128
Zwolnienia ze szpitala	0.3348	0.0272	0.0073	0.0151	0.0315	0.0071	0.0128	

Jak można zauważyć na powyższej tabeli *Tabela 5. Dwustronne p-value*. - Wszystkie zmienne są istotnie (p<0,05) skorelowane ze zmienną objaśniającą. A co za tym idzie: do modelu jako wstępne zmienne objaśniające bierzemy zmienne: Budżet na badania i rozwój, Internet use, Produkcja energii, Wskaźnik konsumpcji, Wydajność pracowników, Zarobki roczne, Zwolnienia ze szpitala.

3.5.3. Budowa modelu regresji

Tabela 6. Model regresji 1

	Estimate	Std. Error	T value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-24789.2162	13098.2674	-1.893	0.0711
Budżet na badania i rozwój	3754.6242	2640.4132	1.422	0.1685
Zużycie internetu	125.1901	175.5932	0.713	0.4830
Produkcja energii	743.1344	349.3446	2.127	0.0443*
Wskaźnik konsumpcji	326.8950	54.7137	5.975	0.00000431 ***
Wydajność pracowników	-64.7916	89.1568	-0.727	0.4747
Zarobki roczne	0.4109	0.2761	-1.488	0.1503
Zwolnienia ze szpitala	-1.3204	1.0312	-1.281	0.2131

Residual standard error: 4625 on 23 degrees of freedom
Multipe R-squared: 0.9543, Adjusted R-squaredL 0.9404
F-statistic: 68.58 on 7 and 23 DF, p-value: 6.714e-14

Wartość współczynnika determinacji R^2 0.9543 oznacza, że 95.43% zmienności w zmiennej zależnej jest wyjaśniane przez zastosowany model regresji. Wysoka wartość R^2 sugeruje, że model bardzo dobrze dopasowuje się do danych. Wartość p-value na poziomie 0.00 sugeruje, że model regresji jest statystycznie istotny. Nie wszystkie zmienne są jednak istotne. Zmiennymi istotnymi są: Produkcja energii, Wskaźnik konsumpcji więc te zmienne bierzemy. Poza tym bierzemy jeszcze zmienną – Zarobki roczne, gdyż jego p-value jest stosunkowo nie duże na tle pozostałych zmiennych.

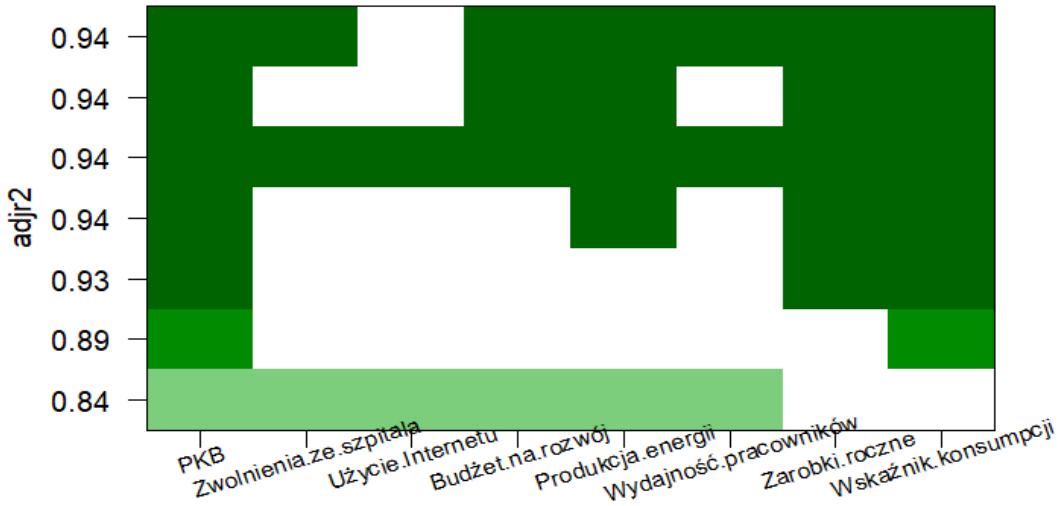


Tabela 7. Model regresji 2

	Estimate	Std. Error	T value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-21473.4797	2631.4551	-8.160	0.00000000916***
Produkcja energii	608.4336	291.8271	2.085	0.046664*
Wskaźnik konsumpcji	285.0313	37.7064	7.559	0.00000003937***
Zarobki roczne	0.8084	0.1785	4.528	0.000108***

Residual standard error: 4721 on 27 degrees of freedom
Multipe R-squared: 0.9441, Adjusted R-squaredL 0.9379
F-statistic: 151.9 on 3 and 27 DF, p-value: 2.2e-16

W tym przypadku wartość współczynnika determinacji R^2 0.9441 oznacza, że 94.41% zmienności w zmiennej zależnej jest wyjaśniane przez zastosowany model regresji. Wysoka wartość R^2 sugeruje, że model bardzo dobrze dopasowuje się do danych. Wartość p-value na poziomie 0.00 sugeruje, że model regresji jest statystycznie istotny. Zmiennymi objaśniającymi pozostają zatem: Produkcja energii, Wskaźnik konsumpcji oraz Zarobki roczne.

Przyjmuje się postać modelu:

$$\boldsymbol{PKB\ na\ osob}\text{ę} = \mathbf{608.4336}_{\boldsymbol{Produkcja\ energii}} + \mathbf{285.0313}_{\boldsymbol{Wska\acute{z}nik\ konsumpcji}} + \mathbf{0.8084}_{\boldsymbol{Zarobki\ roczne}} - \mathbf{21473.4797}$$

3.5.4. Weryfikacja modelu

Shapiro-Wilk normality test	Data: residuals.RegModel.2	W = 0.85403	P-value = 0.000618
Pearson chi-square normality test	Data: residuals.RegModel.2	P = 6.4194	P-value = 0.2675

Wniosek: Test Shapiro-Wilka wykazał, iż należy odrzucić hipotezę o normalności reszt. Z kolei test Pearsona pozwolił przyjąć hipotezę o normalności reszt.

3.5.5. **Odpowiedź na pytanie badawcze** ,,Jak wygląda model regresji badanych danych?'':

Tak kształtuje się ostateczny model:

$$\boldsymbol{PKB\ na\ osob}\text{ę} = \mathbf{608.4336}_{\boldsymbol{Produkcja\ energii}} + \mathbf{285.0313}_{\boldsymbol{Wska\acute{z}nik\ konsumpcji}} + \mathbf{0.8084}_{\boldsymbol{Zarobki\ roczne}} - \mathbf{21473.4797}$$

Wszystkie zmienne składające się na model są wskaźnikami; jedynie zarobki roczne są zmienną numeryczną (PPS).

Na PKB na osobę ma wpływ: Produkcja energii, Wskaźnik konsumpcji oraz zarobki roczne – zmienne te wyjaśniają zmienną PKB na osobę w 95,4%. W pozostałych 4,6% wpływają na nią inne czynniki (100%-R^2). Wzrost produkcji energii o 1 jednostkę zwiększa PKB na osobę 608.4336 jednostek. Wzrost Wskaźnika konsumpcji o 1 jednostkę powoduje wzrost PKB na osobę o 285.0313 jednostek. Wzrost Zarobków rocznych o 1 jednostkę PPS powoduje wzrost PKB na osobę o 0.8084 jednostek. Weryfikacja założeń modelu wykazała, że rozkład normalny reszt modelu jest wątpliwy, co stanowi ograniczenie zbudowanego modelu.

3.6. Przygotowanie danych do analizy wymiarów PCA jako predyktorów

PC1	PC2	PKB
0.45087740	-0.02533994	36110
-1.99773379	0.10484738	6630
-0.47542992	0.75198449	18460
1.10227925	-0.37684856	48970
0.57488351	1.56116149	35950
-0.54451790	1.28975462	15410
1.80526374	-3.01578544	59560
-0.77346761	0.09911590	17780
0.17963923	-0.42684440	25180
0.31555281	-0.50479459	33250
-0.71345657	0.25572405	12710
-0.17823568	-1.08661419	27230
-0.06439735	-0.94399050	25500
-1.11656382	-0.17465838	12540
-1.11924365	0.47494161	14060
1.91724832	-0.74613572	83590
-1.22862795	-0.15115828	13310
-0.32548584	-0.68661401	22890
0.84673078	0.48683559	41980
0.39782325	0.52494130	38090
-0.83845955	0.06585457	13070
-0.69747467	-1.33127543	18670
-1.33501849	-0.74040608	9300
-0.56813363	-0.36734830	20770
-1.00578037	-0.05868041	15960
0.28742950	0.95201911	37150

0.63735994	0.34429875	44180
0.74242906	1.66702859	38920
1.52460131	-0.13848490	70150
1.57291755	2.31949999	61950
0.62699114	-0.12302831	32910

3.6.1. Jeden wymiar jako predyktor

Współczynniki	P- value
Wyraz wolny	2e-16
PC1	3,532e-16

Współczynnik R^2	0,9022	Dopasowany wsp. R^2	0,8988
Statystyka F	267,5	P-value	3,3532e-16

Wymiar 1 PC1 wyjaśnia 90% zmiennej celu PKB.
Parametry modelu są istotne obie wartości p -value są mniejsze od 0,05.

3.6.2. Dwa wymiary jako predyktory

Współczynniki	P- value
Wyraz wolny	2e-16
PC1	1,06e-15
PC2	0,683

Współczynnik R^2	0,9028	Dopasowany wsp. R^2	0,8958
Statystyka F	130	P-value	6,73e-15

Uzyskano istotny model F- statistic, wyjaśnia on 90% zmienności zmiennej PKB. PC2 za to okazało się nieistotne.

3.6.3. Dwa wymiary jako predyktory

```
Analysis of Variance Table

Model 1: df$y1 ~ df$PC1
Model 2: df$y1 ~ df$PC1 + df$PC2
  Res.Df        RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
1     29 1052401340
2     28 1046026088  1   6375252 0.1707 0.6827
```

Po porównaniu modeli stosując polecenie Anovy statystyka F Pr(>F) wynosi 0.6827 i jest większa od przyjętego poziomu istotności alfa=0.05. Można zatem przyjąć hipotezę H0. Oznacza to, że oba modele są równie dobre do przewidywania wyniku. Należy jednak wybrać model mniejszy

3.6.4. Odpowiedź na pytanie badawcze „Czy wymiary utworzone na etapie analizy PCA są dobrymi predyktorami zmiennej PKB?”**:**

Tak, wymiary utworzone na etapie analizy PCA są dobrymi predyktorami zmiennej PKB. Należy jednak wybrać tylko jeden z nich PC1.

4. Podsumowanie

W projekcie dokonano dochodów oraz analizy wpływu różnych zmiennych na poziom PKB per capita w krajach europejskich, co stanowi ważny wskaźnik gospodarczy. Celem było sprawdzenie nierówności dochodowej w krajach europejskich oraz zrozumienie, które czynniki mają największy wpływ na PKB na osobę. Zastosowane metody analityczne obejmowały m.in. nakreślenie krzywej Lorenza, analizę korelacji, analizę głównych składowych (PCA), analizę skupień oraz regresję. Pierwszym badanym zagadnieniem była nierówność dochodowa w krajach europejskich, oceniana za pomocą krzywej Lorenza i współczynnika Giniego. Zidentyfikowano umiarkowane nierówności dochodowe, z wyraźnym podziałem na bogate i biedne państwa. Zastosowanie progresywnych polityk fiskalnych mogłoby pomóc w zmniejszeniu tych nierówności. W dalszej części projektu przeprowadzono analizę rozkładu zmiennych oraz ich korelacji. Wykazano silne powiązanie pomiędzy PKB na osobę a zmiennymi takimi jak wskaźnik konsumpcji, wydajność pracowników i zarobki roczne, co wskazuje na ich istotny wpływ na gospodarki krajów. Ponadto przeanalizowano dane przy użyciu PCA, gdzie uzyskano dwa główne wymiary, które wyjaśniały ponad 78% zmienności. Pierwszy wymiar odnosił się do zarobków i ogólnego bogactwa, a drugi do kapitału na rozwój i służby zdrowia. Analiza skupień wykazała istnienie dwóch głównych grup krajów – rozwiniętych z wysokimi zarobkami i rozwojem, oraz biedniejszych z niższymi wskaźnikami konsumpcji i niższą wydajnością. Optymalność podziału na te grupy została potwierdzona metodami wizualizacyjnymi (dendrogram, metoda WSS, Silhouette). Na koniec, regresja liniowa pokazała, że wybrane predyktory mają silny wpływ na PKB na osobę, co zostało potwierdzone przez istotne p-value w analizach statystycznych. Odpowiadając na pytanie, czy wymiary z PCA mogą być dobrymi predyktorami PKB, wyniki sugerują, że oba

wymiary uzyskane z PCA wyjaśniają dużą część zmienności i mogą być użyteczne w modelowaniu ekonomicznym. Projekt pozwolił na identyfikację kluczowych zmiennych wpływających na PKB per capita oraz umożliwił klasyfikację krajów do różnych grup na podstawie tych zmiennych. Wnioski te mają potencjał do zastosowania w politykach gospodarczych mających na celu wyrównanie nierówności dochodowych oraz poprawę jakości życia obywateli.