

# CALCULO DE UN OSCILADOR DE TIPO VAN DER POL

PROFESOR: RAÚL ISEA

ESTUDIANTE: ARQUIMEDES CHAURAN

CARNET: 1910061

## 1. Ecuación de Van der Pol

Es una ecuación que surge de analizar ciertos circuitos electrónicos. Aplicada para estudiar las oscilaciones en sistemas mecánicos y eléctricos, como en también en la determinación de ritmos cardíacos (Goldstein, Safko y Poole 2014), (Ku y Sun s.f.).

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - e(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0$$

También se encuentra con un término oscilatorio (Goldstein, Safko y Poole 2014).

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - e(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F \cos \omega_D t$$

En el desarrollo de los cálculos se escogió trabajar con la primera de estas ecuaciones.

## 2. Lagrangiano para la ecuación de Van der Pol

Como es una ecuación de segundo orden lineal en la velocidad, podemos en principio hacer usar una función de disipación para tomar en cuenta el término no lineal. Entonces, se puede escribir la ecuación de Lagrange como sigue (Greiner 2010)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

Donde, para el caso la ecuación del oscilador de Van der Pol, obtenemos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad y \quad D = e(1 - x^2) \dot{x}^2$$

Se planteó encontrar una función hamiltoniana que describiera la dinámica del oscilador de Van der Pol. Sin embargo, debido a la particularidad de ser

una ecuación diferencial no lineal. En concreto, contiene un producto cruzado de la posición al cuadrado con la velocidad. Por tanto, no se encontró una forma de incluirlo en la obtención de las ecuaciones canónicas. En las referencias consultadas, únicamente se consideraban términos disipativos con coeficientes constantes en la velocidad y se encontraba el hamiltoniano vía la ecuación de Hamilton-Jacobi (Jarab'ah, Nawafleh y Ghassib 2013).

### 3. Órbita

La órbita de un sistema particular es su trayectoria en el espacio de las fases.

Para la órbita en el espacio de las fases de la ecuación de Van der Pol, existe una variación apreciable en su forma que depende del parámetro  $e$ .

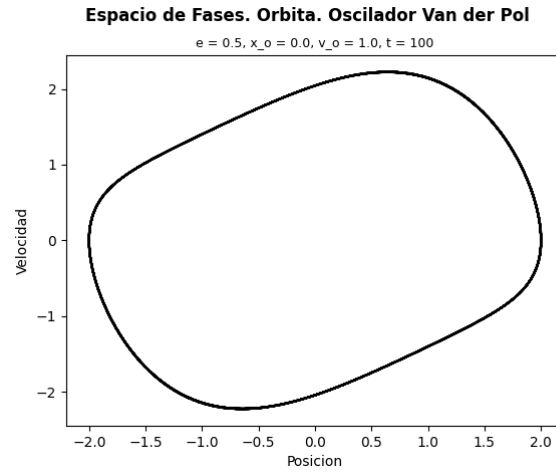


Figura 1a: Gráfico de la órbita del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=0.5$ ,  $x_0 = 0.0$  y  $v_0 = 1.0$ .

El aumento del parámetro  $e$  achata o modifica la órbita. Por otro lado, se observa que mientras más pequeño se vuelve el parámetro  $e$ , la órbita tiende a la curva que describe un oscilador armónico. Un resultado coherente con la forma de la ecuación de Van der Pol.

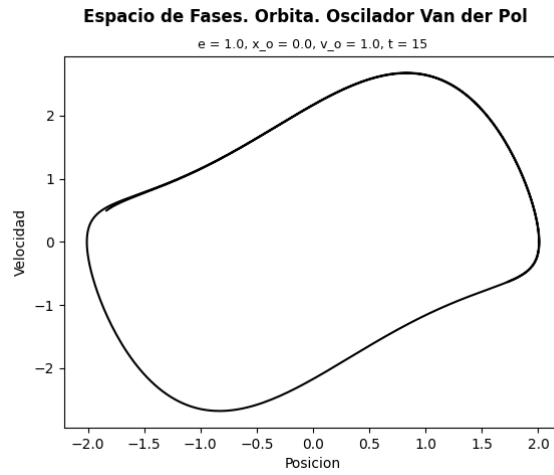


Figura 1b: Gráfico de la orbita del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=1.0$ ,  $x_0 = 0,0$  y  $v_0 = 1,0$ .

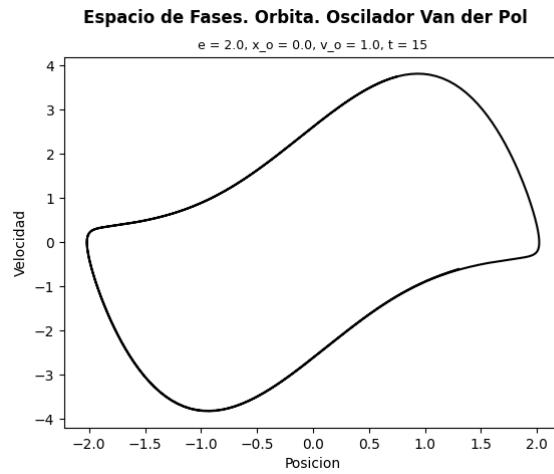


Figura 1c: Gráfico de la orbita del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=2.0$ ,  $x_0 = 0,0$  y  $v_0 = 1,0$ .

## 4. Diagrama de Poincare

Para los diagramas de Poincare se tomaron puntos del espacio fase cada 10 segundos en un primer caso y en un segundo caso se tomaron puntos cada 20 segundos. Estos están marcados por un punto rojo en las figuras siguientes. Podemos notar una cierta tendencia propia del carácter oscilatorio de la ecuación; es decir, vemos como los puntos se agrupan en sitios particulares de la orbita.

Es de notar como la distribución de puntos de los diagramas de Poincare se juntan en zonas particulares para el tiempo en el que se toman. En principio, podríamos determinar por tanteo el periodo de oscilación acercando estos puntos. En otras palabras, se busca un valor del tiempo para el cual se toman los puntos de tal manera que estos se acerquen lo suficiente.

Es apreciable como los puntos en la figura 3a se distancian. Lo cual, claramente indica que tomar intervalos de 20s no produce una aproximación buena del periodo del oscilador.

#### Espacio de Fases. Diagrama de Poincare. Oscilador Van der Pol

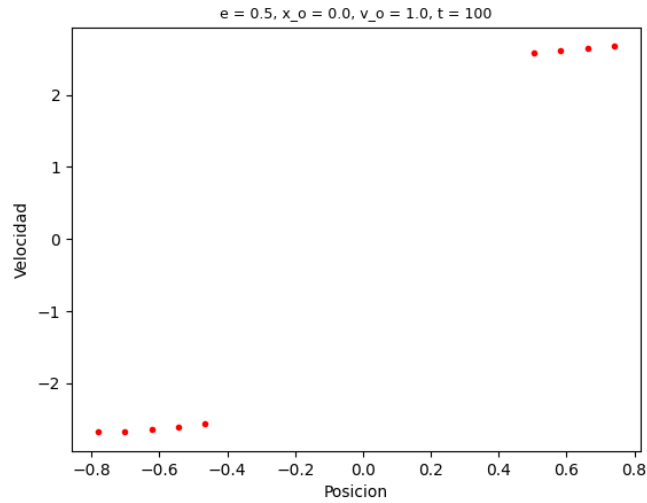


Figura 2a: Gráfico del diagrama de Poincare para puntos cada 10s de la oscilación del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=1.0$ ,  $x_0 = 0,0$  y  $v_0 = 1,0$ . Se marcan en rojos los puntos.

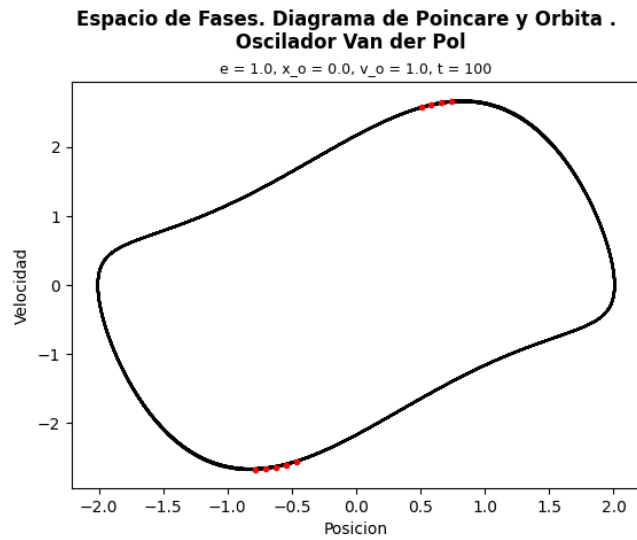


Figura 2b: Gráfico del diagrama de Poincare con la orbita respectiva para puntos cada 10s de la oscilación del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=1.0$ ,  $x_0 = 0,0$  y  $v_0 = 1,0$ . Se marcan en rojo los puntos.

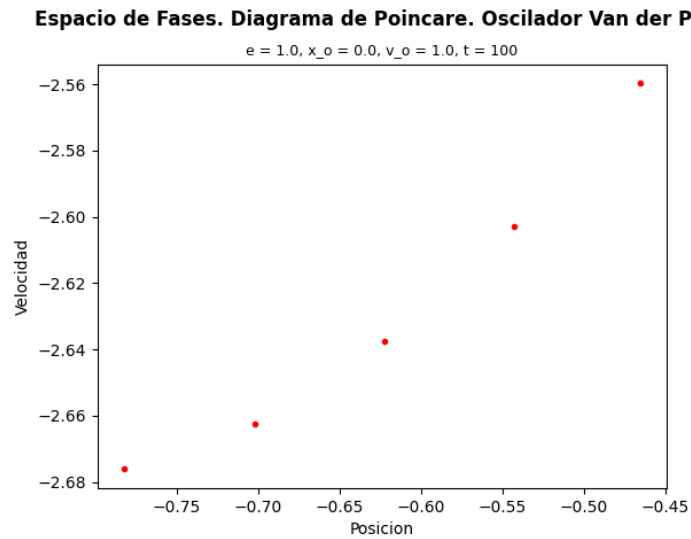


Figura 3a: Gráfico del diagrama de Poincare para puntos cada 20s de la oscilación del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=1.0$ ,  $x_0 = 0,0$  y  $v_0 = 1,0$ . Se marcan en rojo los puntos.

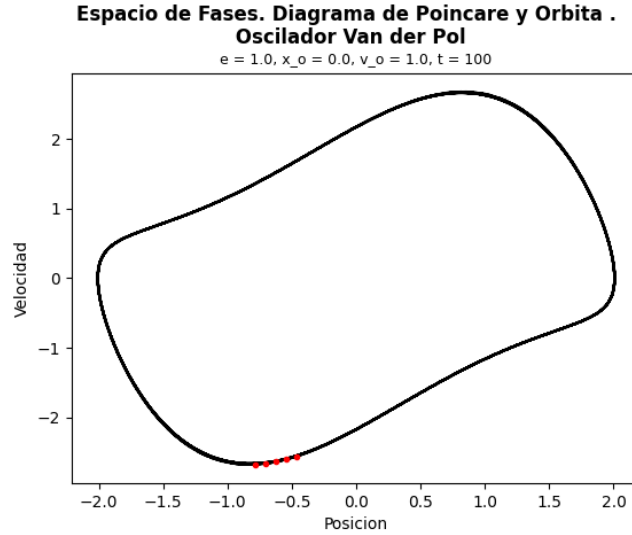


Figura 3b: Gráfico del diagrama de Poincare con la orbita respectiva para puntos cada 20s de la oscilación del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=1.0$ ,  $x_0 = 0,0$  y  $v_0 = 1,0$ . Se marcan en rojo los puntos.

## 5. Gráfica de velocidad cero

Considerare como gráfica de velocidad cero a la gráfica con condiciones iniciales  $x_0 \neq 0$ ,  $v_0 = 0$ . En este sentido, tenemos tanto la representación en el espacio de fases como  $v$  vs.  $t$ .

En este caso, lo mas apreciable es que aunque el sistema comienza en con velocidad cero, se recupera el carácter oscilatorio de los soluciones ya vista anteriormente. También cabe destacar que se comienza fuera del equilibrio. Si se iniciara en el equilibrio ( $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ) no ocurre ningún movimiento puesto que las condiciones iniciales se comportan como un punto de equilibrio estable.

La figura 4a muestra en principio como a pesar de las condiciones iniciales particulares elegidas, el sistema descrito por la ecuación de Van der Pol tiende a la forma que se muestra. Este tipo de comportamientos podrian ser útil estudiarlos si se requiere que un sistema particular tienda siempre a un modo de funcionamiento indistintamente de donde inicie.

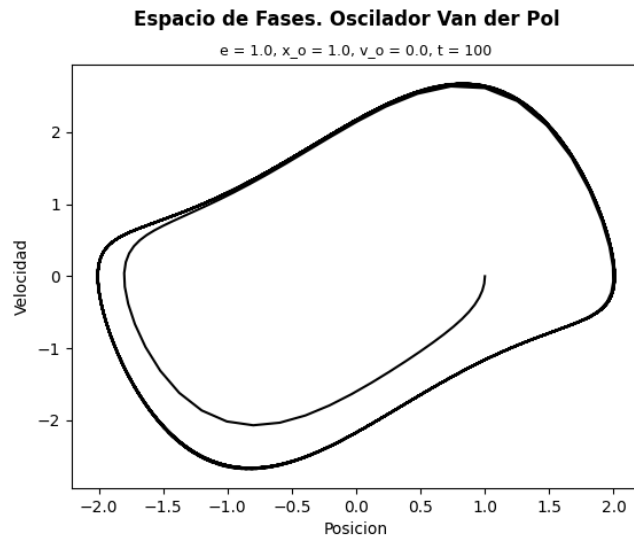


Figura 4a: Gráfico de velocidad cero en el espacio de las fases del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=1.0$ ,  $x_0 = 1.0$  y  $v_0 = 0.0$ .

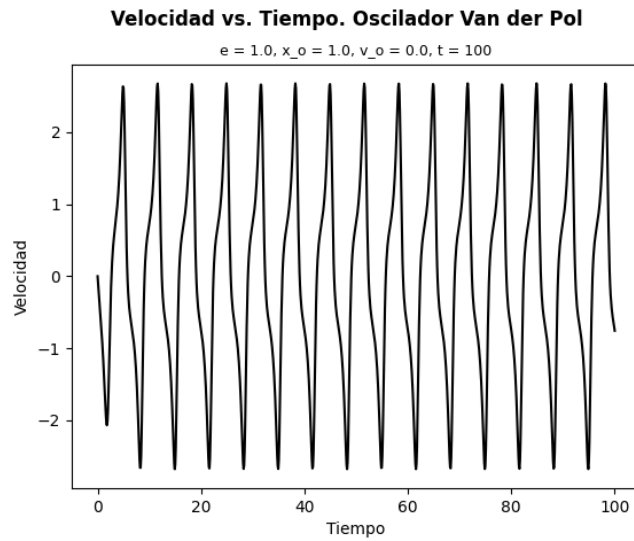


Figura 4b: Gráfico de velocidad vs. tiempo de las fases del oscilador de Van der Pol para los parámetros  $e=1.0$ ,  $x_0 = 1.0$  y  $v_0 = 0.0$ .

## Referencias

- Goldstein, Safko y Poole (2014). *Classical Mechanics*.
- Greiner, W (2010). *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*.
- Jarab'ah, O, K Nawafleh y H Ghassib (2013). "A Hamilton-Jacobi Treatment of Dissipative Systems". En: *European Scientific Journal*.
- Ku, Y. H. y X Sun (s.f.). "CHAOS in Van der Pol's Equation". En: *Journal of the Franklin Institute* ().