

# MAC0122 PRINCÍPIOS DE DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMOS

## FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Henrique Maruiti \_\_\_\_\_ NUSP: 12610243 \_\_\_\_\_

Assinatura

*Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.*

Exercício: T03 Hanoi4 \_\_\_\_\_ Data: 02/09/23 \_\_\_\_\_

### SOLUÇÃO

**Tabela de testes com 3 torres:**

número de discos(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
número de movimentos	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095

**Tabela de testes com 4 torres:**

número de discos(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
número de movimentos	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65	81	97	113	129

1) Nas tabelas acima, foram considerados os mínimos de movimentos possíveis para a resolução do problema. No caso de Hanoi com 3 torres, é possível ver um padrão simples de  $2^n - 1$  mínimo de movimentos para resolver cada caso de n discos. Levando em consideração que é possível fazer uma analogia entre o problema de 4 torres com o de 3 torres, já que não necessariamente é preciso usar as 4 torres para resolver os problemas, o que permite a possibilidade de travar uma torre com certa quantidades de discos enquanto manipula as outras sem o uso da mesma. Dessa forma, pode-se considerar separar a quantidade de discos em 2 blocos para trabalhar como 2 casos de hanoi de 4 torres e 1 caso de hanoi com 3 torres. Logo, pode-se deduzir que uma estimativa para quantidade de movimentos é  $U_n = \min(2 * U_x + T_{n-x}) \rightarrow U_n \leq 2 * U_x + T_{n-x}$ , onde x é qualquer valor natural menor ou igual a n. Por exemplo, supondo uma situação com 8 discos de hanoi:

- Bloco 1 = 1 e Bloco 2 = 7  $\rightarrow 2 * 1 + 127 = 129 \rightarrow U_8 = 33 \leq 129 \checkmark$
- Bloco 1 = 2 e Bloco 2 = 6  $\rightarrow 2 * 3 + 63 = 69 \rightarrow U_8 = 33 \leq 69 \checkmark$
- Bloco 1 = 3 e Bloco 2 = 5  $\rightarrow 2 * 5 + 31 = 41 \rightarrow U_8 = 33 \leq 41 \checkmark$
- Bloco 1 = 4 e Bloco 2 = 4  $\rightarrow 2 * 9 + 15 = 33 \rightarrow U_8 = 33 \leq 33 \checkmark$
- Bloco 1 = 5 e Bloco 2 = 3  $\rightarrow 2 * 13 + 7 = 33 \rightarrow U_8 = 33 \leq 33 \checkmark$
- Bloco 1 = 6 e Bloco 2 = 2  $\rightarrow 2 * 17 + 3 = 37 \rightarrow U_8 = 33 \leq 37 \checkmark$
- Bloco 1 = 7 e Bloco 2 = 1  $\rightarrow 2 * 25 + 1 = 51 \rightarrow U_8 = 33 \leq 51 \checkmark$

2) Por meio da análise da quantidade de discos com números triangulares das tabelas, aqueles que podem ser descritos da forma  $a_n = \frac{n*(n-1)}{2}$ , e da equação anterior encontra-se um padrão:

no hanoi de 4 torres, o número mínimo de movimentos do próximo número triangular de discos pode ser igual ao dobro do número triangular anterior somado ao numero de movimentos do hanoi de 3 torres com a quantidade de discos da diferença entre os números triangulares. De modo algébrico tem-se:

$$U_{\frac{n*(n+1)}{2}} \leq (2 * U_{\frac{n*(n-1)}{2}} + T_n) \rightarrow U_{\binom{n+1}{2}} \leq 2 * U_{\binom{n}{2}} + T_n$$

Para exemplificar isso:

- $n = 1 \rightarrow U_1 \leq 2 * U_0 + T_1 \rightarrow U_1 \leq 2 * 0 + 1 \rightarrow U_1 \leq 1 \checkmark$
- $n = 2 \rightarrow U_3 \leq 2 * U_1 + T_2 \rightarrow U_3 \leq 2 * 1 + 3 \rightarrow U_3 \leq 5 \checkmark$
- $n = 3 \rightarrow U_6 \leq 2 * U_3 + T_3 \rightarrow U_6 \leq 2 * 5 + 7 \rightarrow U_6 \leq 17 \checkmark$
- $n = 4 \rightarrow U_{10} \leq 2 * U_6 + T_4 \rightarrow U_{10} \leq 2 * 17 + 15 \rightarrow U_{10} \leq 49 \checkmark$
- $n = 5 \rightarrow U_{15} \leq 2 * U_{10} + T_5 \rightarrow U_{15} \leq 2 * 49 + 31 \rightarrow U_{15} \leq 129 \checkmark$

Logo,  $U_{\binom{n+1}{2}} \leq 2 * U_{\binom{n}{2}} + T_n$  é verdadeiro.

3) Analisando os dados da tabela de Hanoi com 4 torres, é nítido que o número de movimentos mínimos cresce de modo diferente quando passa por um número triangular. A guisa de exemplo, de  $1 \leq n < 3$  a quantidade de movimento aumenta linearmente em 2, de  $3 \leq n < 6$  aumenta linearmente em 4, de  $6 \leq n < 10$  aumenta linearmente 8, e de  $10 \leq n < 15$  aumenta linearmente 16. Com esses dados, pode-se montar a seguinte função:

$$U_n = \min \begin{cases} 2(n-1) + 1, & \text{se } 1 \leq n \leq 3 \\ 4(n-2) + 1, & \text{se } 3 \leq n \leq 6 \\ 8(n-4) + 1, & \text{se } 6 \leq n \leq 10 \\ 16(n-8) + 1, & \text{se } 10 \leq n \leq 15 \end{cases} \rightarrow U_n \leq 2^n(n - 2^{n-1}) + 1$$

Outra equação que pode ser feita vendo a equação formada anteriormente e a sequência formada pelos números triangulares (1,5,17,49,129) é:

$$U_{\binom{n+1}{2}} = \min \begin{cases} 2(n-1) + 1, & \text{se } n = 1 \\ 4(n-1) + 1, & \text{se } n = 2 \\ 8(n-1) + 1, & \text{se } n = 3 \\ 16(n-1) + 1, & \text{se } n = 4 \end{cases} \rightarrow U_{\binom{n+1}{2}} \leq 2^n(n-1) + 1$$

4) Testando a equação desenvolvida em 3) com as informações da tabela de teste:

$$U_{\binom{n+1}{2}} \leq (n-1)2^n + 1$$

- $n = 1 \rightarrow U_1 \leq (1-1)2^1 + 1 \rightarrow U_1 \leq 0 * 2 + 1 \rightarrow U_1 \leq 1 \checkmark$
- $n = 2 \rightarrow U_3 \leq (2-1)2^2 + 1 \rightarrow U_3 \leq 1 * 4 + 1 \rightarrow U_3 \leq 5 \checkmark$
- $n = 3 \rightarrow U_6 \leq (3-1)2^3 + 1 \rightarrow U_6 \leq 2 * 8 + 1 \rightarrow U_6 \leq 17 \checkmark$
- $n = 4 \rightarrow U_{10} \leq (4-1)2^4 + 1 \rightarrow U_{10} \leq 3 * 16 + 1 \rightarrow U_{10} \leq 49 \checkmark$
- $n = 5 \rightarrow U_{15} \leq (5-1)2^5 + 1 \rightarrow U_{15} \leq 4 * 32 + 1 \rightarrow U_{15} \leq 129 \checkmark$

5) No caso de 55 discos e apenas 3 torres pode-se encontrar o número T de movimentos pela fórmula  $T_n = 2^n - 1$ , onde n representa a quantidade de discos.

$$T_{55} = 2^{55} - 1 \approx 2^{55} \rightarrow \log 2^{55} \approx 16,55 \rightarrow T \text{ possui 17 dígitos}$$

Usando a equação dada no item (ii):

$$\begin{cases} U_{\binom{n+1}{2}} \leq (n-1)2^n + 1 \\ \binom{n+1}{2} = 55 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_{\binom{n+1}{2}} \leq (n-1)2^n + 1 \\ n = 10 \end{cases} \rightarrow U_{\binom{11}{2}} \leq (10-1)2^{10} + 1 \rightarrow U_{55} \leq 9215$$