Graph Throey (Reinhard Diestel) exercises

2020 年 6 月 17 日

1　グラフ

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

2 ラベル付き木と数え上げ

A

B

C

D

E

F

G

H

3　グラフの彩色と Ramsey 理論

A

B

C

D

E

(i) 不等式は $2^k \leq n$ と書き換えられる．

k についての帰納法で示す．$k=0$ はよい．$k \geq 1$ として $k-1$ での成立を仮定．$v_0 \in K_n$ を任意にとる．

$$V_1 = \{w \mid v \text{ から } w \text{ へ向き付けられている }\},$$
$$V_2 = \{w \mid w \text{ から } v \text{ へ向き付けられている }\}$$

とすると，$|V_1|+|V_2| = n-1 \geq 2^k - 1$ であるから，V_1 または V_2 のどちらかは 2^{k-1} 個以上の頂点を含む．その部分集合に帰納法の仮定を用いて $k-1$ 個の頂点からなる推移的トーナメントをとり，v を合わせれば k 個の頂点からなる推移的トーナメントが得られる．

(ii) 不等式は $n^k < 2^{{}_k\mathrm{C}_2}$ と言い換えられる．$n^k \geq {}_n\mathrm{C}_k \cdot k!$ であるから，${}_n\mathrm{C}_k \cdot \frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}} < 1$ が成り立つ．

K_n の各辺を，乱択で向き付けることを考える．k 個の頂点集合に対して，それが推移的トーナメントになる確率は，$\frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}}$ である（強い順に並べる方法が $k!$ 通りあり，向き付けの方法が $2^{{}_k\mathrm{C}_2}$ 通りある）．したがって，${}_n\mathrm{C}_k \cdot \frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}}$ は，k 個の頂点からなる推移的トーナメントの個数の期待値に等しい．この値が 1 未満であることから，ある向き付けに対して k 個の頂点からなる推移的トーナメントの非存在が従う．

F

G

H

I

J

K

4 Turán の定理と極値グラフ

A

B

C

D

E

F

G

H

5　個別代表系

A

B

C

D

E

F

G

6 Dilworthの定理と極値集合論

A

B

C

D

E