組合せ論（ヴァン・リント＆ウィルソン）
問題

2020 年 6 月 21 日

1　グラフ

A

B

連結成分 C をとり，頂点数を a とする．C の頂点と C' の頂点は辺で結ばれていないので，辺の個数は ${}_{10}\mathrm{C}_2 - a(10-a)$ 以下である．$1 \leq a \leq 9$ よりこの値は 36 以下であることが分かる．

ちょうど 36 本を実現することは可能である．K_9 にひとつの孤立点を加えたものが条件を満たす．

C

D

E

F

G

H

$A = (a_{ij})_{i,j}$ とするとき，A^2 の (i,j) 成分は $\sum_k a_{ik}a_{kj}$ である．これは，i から j への長さ 2 の歩道の個数と等しい．

I

J

2 ラベル付き木と数え上げ

A

B

C

D

E

$n = 9$ ならば，$1, 9, 2, 8, 3, 6, 4, 5$ のように値を定める．$n = 10$ ならば，$1, 10, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 5, 6$ のように値を定める．という要領で値を定めると，graceful labeling になることは容易に分かる．

F

頂点数を n とする．葉は $n - m + 1$ 個である．辺の個数は $n - 1$ 個であるから，$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2n - 2$ である．$\sum_{v \in G} \bigl(\deg(v) - 1\bigr) = n - 2$ である．左辺は葉の情報がなくても計算できて，$1 + 2 + \cdots + (m - 1) = \frac{1}{2}m(m-1)$ である．よって $n = \frac{1}{2}m(m-1) + 2 = \frac{1}{2}(m^2 - m + 4)$．

G

H

3　グラフの彩色と Ramsey 理論

A

(1) 背理法による。H が可分であると仮定し、関節点 x を 1 つとる。$H\setminus\{x\}$ は 2 つ以上の連結成分に分かれるので、$H\setminus\{x\}$ の頂点集合の非空な分割 A,B であって、AB 間に辺がないようなものが取れる。最小性の仮定から、A,B それぞれからなる H の誘導部分グラフは d 彩色可能である。そのような彩色を 1 つとり、必要なら B の彩色を permutate することで、$\Gamma_H(x)$ を d 色未満にできるので、H を d 彩色でき矛盾。

(2) 背理法による。頂点集合のある分割 $X,Y(|Y|\geq 3)$ であって、$\Gamma(y)\cap X\neq\emptyset$ を満たすような $y\in Y$ が高々2 点しかないものが存在する。(1) よりちょうど 2 点であるとしてよい。その 2 点を a,b とする。頂点集合を $X\cup\{a,b\},Y$ とする誘導部分グラフに、それぞれ (a,b) を辺として加えたグラフを考える。このグラフは命題の仮定を満たす（a,b の次数が d 以下であることが確かめられる）。また、頂点数が H より真に小さいので d 彩色可能である。そのような彩色を 1 つとり、a,b の彩色が整合するように Y の彩色を permutate してから合体させることで、H を d 彩色でき矛盾。

B

下界は定理 3.2 の系より直ちに明らか。そのような彩色の例として、$V(G)=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ に対し、

$$(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,0),(1,4),(2,5),(3,6)$$

を赤く、残りを青くするものが存在する。

C

$a=N(p-1,q,2), b=N(p,q-1;2)$ とする．$n=a+b-1$ として，K_n の辺を赤または青で塗る．赤の K_p または青の K_q がとれることを示せばよい．

赤い辺からなる部分グラフを R とする．n は奇数であり，奇点は偶数個であるから，$\deg_R(v)$ が偶数であるような v が存在する．$\deg_R(v)\geq a$ であるとき，その a 個から赤い K_{p-1} または青い K_q がとれる．前者の場合 v と合わせて赤い K_p が得られ，後者の場合そのまま青い K_q が得られているので，この場合には示された．$\deg_R(v)<a$ であるとする．a と $\deg_R(v)$ はともに偶数なので，$\deg_R(v)\leq a-2$ が成り立つ．

青い辺からなる部分グラフを B とすると，$\deg_B(v)=n-1-\deg_R(v)\geq b$ が成り立つ．よってこの場合も $\deg_R(v)\geq a$ の場合と同様である．

D

(1) $N(4,4;2) \leq N(3,4;2)+N(4,3;2)=18$ であるので、K_{17} での反例を具体的に構築すれば良い。$V(G)=\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ として、

$$\text{辺}\ (i,j)\ \text{が赤} \iff i-j=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$$

とすればよい。

(2) $N(3,5;2) \leq N(2,5;2)+N(3,4;2)=14$ であるので、K_{13} での反例を具体的に構築すれば良い。$V(G)=\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ として、

$$\text{辺}\ (i,j)\ \text{が赤} \iff i-j=\pm1,\pm5$$

とすればよい。

E

(i) 不等式は $2^k \leq n$ と書き換えられる．

k についての帰納法で示す．$k=0$ はよい．$k \geq 1$ として $k-1$ での成立を仮定．$v_0 \in K_n$ を任意にとる．

$$V_1 = \{w \mid v \text{ から } w \text{ へ向き付けられている }\},$$
$$V_2 = \{w \mid w \text{ から } v \text{ へ向き付けられている }\}$$

とすると，$|V_1|+|V_2| = n-1 \geq 2^k-1$ であるから，V_1 または V_2 のどちらかは 2^{k-1} 個以上の頂点を含む．その部分集合に帰納法の仮定を用いて $k-1$ 個の頂点からなる推移的トーナメントをとり，v を合わせれば k 個の頂点からなる推移的トーナメントが得られる．

(ii) 不等式は $n^k < 2^{{}_k\mathrm{C}_2}$ と言い換えられる．$n^k \geq {}_n\mathrm{C}_k \cdot k!$ であるから，${}_n\mathrm{C}_k \cdot \frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}} < 1$ が成り立つ．

K_n の各辺を，乱択で向き付けることを考える．k 個の頂点集合に対して，それが推移的トーナメントになる確率は，$\frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}}$ である（強い順に並べる方法が $k!$ 通りあり，向き付けの方法が $2^{{}_k\mathrm{C}_2}$ 通りある）．したがって，${}_n\mathrm{C}_k \cdot \frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}}$ は，k 個の頂点からなる推移的トーナメントの個数の期待値に等しい．この値が 1 未満であることから，ある向き付けに対して k 個の頂点からなる推移的トーナメントの非存在が従う．

F

(1)2 色を a,b とする。1 が a のとき、1+1=2 より 2 は b、2+2=4 より 4 は a、1+3=4 より 3 は b となるが、1+4=2+3=5 より、5 を a,b どちらで塗っても単色等式が成立する。

(2)3 色を a,b,c とする。全探索をするプログラムを書くと、1 から順に {a,b,b,a,c,c,a,c,c,a,b,b,a} と彩色することにより、13 以下の数からなる単色等式が存在しないようにできることが確かめられる。

G

頂点集合を $\{0,\ldots,n-1\}$ とするクリーク G の辺を、次のような $f : E(G) \to \{0,1\}^2$ により 4 色彩色する。

$$f(\{i,j\}) = (a_{xy}, a_{yx}) \quad (\text{ただし } x = \min(i,j), y = \max(i,j))$$

このとき、Ramsey の定理から、n 十分大なら、単色 K_m が必ず存在する。そのような K_m に属する頂点に対応する行および列からなる小行列が望むものである。

H

Ramsey の定理の証明中で示した不等式より

$$N(3,3,3;2) \le N(N(2,3,3;2), N(3,2,3;2), N(3,3,2;2);1) + 1$$

である。$N(2,3,3;2) = N(3,3;2) = 6$ であったことと $N(6,6,6;1) = 16$ より示せた。

I

$V(G) = \mathbb{F}_{16}$ とする。$\mathbb{F}_{16}^*$ の生成元 α を取る。G の辺の 3 色彩色 $f : E(G) \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を次で定める。

$$i - j = \alpha^n \text{ であるとき、 } f(\{i,j\}) = n \bmod 3$$

（これは well-defined であることに注意する）

この彩色が単色三角形を含まないことを背理法により示す。単色三角形ができたとし、その頂点を i,j,k とする。等式 $k - i = (j-i) + (k-j)$ を定数倍することで

$$\alpha^6 + \alpha^3 + 1 = 0 \text{ または } \alpha^9 + \alpha^3 + 1 = 0$$

が成り立つことがわかる。したがって $\mathbb{F}_2(\alpha^3)/\mathbb{F}_2$ の拡大次数は 1,2,3,6 のいずれかとなる。しかし、$\mathbb{F}_2(\alpha^3)$ は $\mathbb{F}_{16}$ の部分体であって、少なくとも 6 つの元 $\{0,1,\alpha^3,\alpha^6,\alpha^9,\alpha^{12}\}$ をもつことから、$\mathbb{F}_2(\alpha^3) = \mathbb{F}_{16}$ であり、 $\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2$ の拡大次数は 4 であるので矛盾。

J

K

4 Turán の定理と極値グラフ

A

問題 4D の不等式評価：$\Delta \geq \frac{1}{3}(\sum_x \deg(x)^2 - en)$ を用いる．$e=26, n=10$ である．また $\sum_x \deg(x) = 52$ のもとで，$\sum \deg(x)^2$ が最大になるのは

$$\sum \deg(x)^2 = 5^2+5^2+5^2+5^2+5^2+5^2+5^2+5^2+6^2+6^2 = 272$$

の場合に限られる．; まずここから $\Delta \geq \frac{1}{3}(272-260) = 4$ が分かる．

$\Delta = 4$ つまり上の不等式で等号が成り立つとする．このとき，不等式の導出過程におけるすべての評価は等号である．つまり G において

- 次数列は $(6,6,5,5,5,5,5,5,5,5)$ である．
- 次数 a,b の頂点を結ぶ辺に対し，それを含む三角形がちょうど $a+b-10$ 個存在する．

が成り立つ．特にこのとき，次数 5 の頂点間を結ぶ辺を含む三角形はしない．よって三角形の 3 頂点の次数は $(5,6,6)$ のものしかありえない．次数 6 の頂点は 2 つしかなくて，隣接していたとしてもその 2 点を含む三角形は 2 個である．よってこれらの制約のもと三角形は高々2 つしかできない．ちょうど三角形を 4 つ含むのは矛盾である．

よって不等式 $\Delta \geq 4$ において等号は成立せず，$\Delta \geq 5$ が分かる．

$\Delta = 5$ を満たす例として，$K_{5,5}$ に一辺追加したものがある．

B

帰納法．n について示されたとして，$n+2$ の場合に示す．G を $n+2$ 頂点かつ辺が $\lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \rfloor$ 本とする．隣接する 2 点 a,b をとり，$G_1 = G \setminus \{a,b\}$ とする．

G_1 は三角形を含まないので，$|E(G_1)| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$．また三角形の非存在より，各 $v \in V(G_1)$ は a,b のうち高々一方としか隣接していない．よって G_1 と $\{a,b\}$ の間にある辺の本数は $|V(G_1)| = n$ 本以下．したがって，$|E(G)| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + n + 1$ が成り立つ．

$|E(G)|$ に対する仮定よりこの不等式において等号が成り立つ．よって議論に用いた不等式評価は全て最善であるから，$|E(G_1)| = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ であり，各 $v \in V(G_1)$ は a,b のうちちょうど一方と隣接する．このことと帰納法の仮定より，まず G_1 が $K_{k,k}$ あるいは $K_{k,k+1}$ であることが分かり，三角形ができないという条件から v と a,b の結び方も決まって G に対する主張が従う．

C

まず辺 $a=\{x,y\}$ を含む三角形を下から評価する．$A=\Gamma(x)\setminus y$, $B=\Gamma(x)\setminus y$ とする．$|A|=\deg(x)-1, |B|=\deg(y)-1, A,B\subset G\setminus\{x,y\}$ である．よって $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|\geq(\deg(x)-1)+(\deg(y)-1)-(n-2)=\deg(x)+\deg(y)-n$ である．特に辺 a を含む三角形は $\deg(x)+\deg(y)-n$ 個以上存在する．

辺 e と三角形 T の組 (e,T) であって，$e\subset T$ となるものの個数を 2 通りに数える．まず T から e を数えることで，個数は 3Δ（ただし Δ は三角形の個数）．また上で示したことを使って e から T を数えることで，個数は $\sum_{a=xy}(\deg(x)+\deg(y)-n)$ 以上．したがって

$$\Delta\geq\frac{1}{3}\sum_{a=xy}(\deg(x)+\deg(y)-n)$$

が分かる．

この右辺は $\frac{1}{3}\sum_{a=xy}(\deg(x)+\deg(y)-n)=\frac{1}{3}\bigl(\sum_x\deg(x)^2-en\bigr)$ と評価できる．さらに握手補題とコーシー・シュワルツの不等式より $\sum_x\deg(x)^2\leq\frac{1}{n}(\sum_x\deg(x))^2=\frac{(2e)^2}{n}$ であり，これらを合わせて主張の不等式を得る．

D

E

F

G

Mantel の証明のほぼ単純な拡張である．各頂点 v に非負の重み z_v（全頂点の重みの和は 1）を与えて，$\sum_{e=ab}z_az_b$ の最大値が達成されている状況を考える．そのうち，正の重みの頂点数が最小のものをとると，正の重みの頂点数が $p-1$ 以下であることが分かる（p 個以上あれば，クリークの非存在より非隣接点に正の重みが乗っていて，それをまとめて頂点数が減らせる）．

$k=p-1$ とし，それらの重みを $z_1,\dots,z_k$ とする．$\sum_{i\neq j}z_iz_j=\frac{1}{2}((z_1+\cdots+z_k)^2-(z_1^2+\cdots+z_k)^2)$ であるが，コーシー・シュワルツの不等式などから $z_1^2+\cdots+z_k^2\geq\frac{1}{k}(z_1+\cdots+z_k)^2$ が分かるので，$z_1+\cdots+z_k=1$ と合わせて $\sum_{i\neq j}z_iz_j\leq\frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})$ である．

最大値を達成する割り当てでこの不等式が成り立つので，任意の割り当てでも成り立つ．特に全頂点に重み $\frac{1}{n}$ を割り当てたときのことを考えて $\frac{|E(G)|}{n^2}\leq\frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})$ が成り立つ．これに $k=p-1$ を代入して整理すればよい．

H

5 個別代表系

A

B

C

D

E

F

G

6 Dilworth の定理と極値集合論

A

B

C

D

E