

組合せ論（ヴァン・リント&ウィルソン） 問題

2020 年 6 月 21 日

1 グラフ

A

B

連結成分 C をとり、頂点数を a とする. C の頂点と C' の頂点は辺で結ばれていないので、辺の個数は ${}_{10}C_2 - a(10 - a)$ 以下である. $1 \leq a \leq 9$ よりこの値は 36 以下であることが分かる.

ちょうど 36 本を実現することは可能である. K_9 にひとつの孤立点を加えたものが条件を満たす.

C

D

E

F

G

H

$A = (a_{ij})_{i,j}$ とするとき, A^2 の (i,j) 成分は $\sum_k a_{ik}a_{kj}$ である. これは, i から j への長さ 2 の歩道の個数と等しい.

I

J

2 ラベル付き木と数え上げ

A

B

C

D

E

$n = 9$ ならば, $1, 9, 2, 8, 3, 6, 4, 5$ のように値を定める. $n = 10$ ならば, $1, 10, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 5, 6$ のように値を定める. という要領で値を定めると, graceful labeling になることは容易に分かる.

F

頂点数を n とする. 葉は $n - m + 1$ 個である. 辺の個数は $n - 1$ 個であるから, $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2n - 2$ である. $\sum_{v \in G} (\deg(v) - 1) = n - 2$ である. 左辺は葉の情報がなくても計算できて, $1 + 2 + \cdots + (m - 1) = \frac{1}{2}m(m - 1)$ である. よって $n = \frac{1}{2}m(m - 1) + 2 = \frac{1}{2}(m^2 - m + 4)$.

G

H

3 グラフの彩色と Ramsey 理論

A

B

C

$a = N(p-1, q, 2)$, $b = N(p, q-1; 2)$ とする. $n = a+b-1$ として, K_n の辺を赤または青で塗る. 赤の K_p または青の K_q がとれることを示せばよい.

赤い辺からなる部分グラフを R とする. n は奇数であり, 奇点は偶数個であるから, $\deg_R(v)$ が偶数であるような v が存在する. $\deg_R(v) \geq a$ であるとき, その a 個から赤い K_{p-1} または青い K_q がとれる. 前者の場合 v と合わせて赤い K_p が得られ, 後者の場合そのまま青い K_q が得られているので, この場合には示された. $\deg_R(v) < a$ であるとする. a と $\deg_R(v)$ はともに偶数なので, $\deg_R(v) \leq a-2$ が成り立つ.

青い辺からなる部分グラフを B とすると, $\deg_B(v) = n-1-\deg_R(v) \geq b$ が成り立つ. よってこの場合も $\deg_R(v) \geq a$ の場合と同様である.

D

E

(i) 不等式は $2^k \leq n$ と書き換えられる.

k についての帰納法で示す. $k=0$ はよい. $k \geq 1$ として $k-1$ での成立を仮定. $v_0 \in K_n$ を任意にとる.

$$V_1 = \{w \mid v \text{ から } w \text{ へ向き付けられている}\},$$

$$V_2 = \{w \mid w \text{ から } v \text{ へ向き付けられている}\}$$

とすると, $|V_1| + |V_2| = n-1 \geq 2^k - 1$ であるから, V_1 または V_2 のどちらかは 2^{k-1} 個以上の頂点を含む. その部分集合に帰納法の仮定を用いて $k-1$ 個の頂点からなる推移的トーナメントをとり, v を合わせれば k 個の頂点からなる推移的トーナメントが得られる.

(ii) 不等式は $n^k < 2^{kC_2}$ と言い換えられる. $n^k \geq {}_nC_k \cdot k!$ であるから, ${}_nC_k \cdot \frac{k!}{2^{kC_2}} < 1$ が成り立つ.

K_n の各辺を, 乱択で向き付けることを考える. k 個の頂点集合に対して, それが推移的トーナメントになる確率は, $\frac{k!}{2^{kC_2}}$ である (強い順に並べる方法が $k!$ 通りあり, 向き付けの方法が 2^{kC_2} 通りある). したがって, ${}_nC_k \cdot \frac{k!}{2^{kC_2}}$ は, k 個の頂点からなる推移的トーナメントの個数の期待値に等しい. この値が 1 未満であることから, ある向き付けに対して k 個の頂点からなる推移的トーナメントの非存在が従う.

F

G

H

I

J

K

4 Turán の定理と極値グラフ

A

B

帰納法. n について示されたとして, $n+2$ の場合に示す. G を $n+2$ 頂点かつ辺が $\lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \rfloor$ 本とする. 隣接する 2 点 a, b をとり, $G_1 = G \setminus \{a, b\}$ とする.

G_1 は三角形を含まないので, $|E(G_1)| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. また三角形の非存在より, 各 $v \in V(G_1)$ は a, b のうち高々一方としか隣接していない. よって G_1 と $\{a, b\}$ の間にある辺の本数は $|V(G_1)| = n$ 本以下. したがって, $|E(G)| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + n + 1$ が成り立つ.

$|E(G)|$ に対する仮定よりこの不等式において等号が成り立つ. よって議論に用いた不等式評価は全て最善であるから, $|E(G_1)| = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ であり, 各 $v \in V(G_1)$ は a, b のうちちょうど一方と隣接する. このことと帰納法の仮定より, まず G_1 が $K_{k,k}$ あるいは $K_{k,k+1}$ であることが分かり, 三角形ができないという条件から v と a, b の結び方も決まって G に対する主張が従う.

C

まず辺 $a = \{x, y\}$ を含む三角形を下から評価する. $A = \Gamma(x) \setminus y$, $B = \Gamma(y) \setminus x$ とする. $|A| = \deg(x) - 1$, $|B| = \deg(y) - 1$, $A, B \subset G \setminus \{x, y\}$ である. よって $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq (\deg(x) - 1) + (\deg(y) - 1) - (n - 2) = \deg(x) + \deg(y) - n$ である. 特に辺 a を含む三角形は $\deg(x) + \deg(y) - n$ 個以上存在する.

辺 e と三角形 T の組 (e, T) であって, $e \subset T$ となるものの個数を 2 通りに数える. まず T から e を数えることで, 個数は 3Δ (ただし Δ は三角形の個数). また上で示したことを使って e から T を数えることで, 個数は $\sum_{a=xy} (\deg(x) + \deg(y) - n)$ 以上. したがって

$$\Delta \geq \frac{1}{3} \sum_{a=xy} (\deg(x) + \deg(y) - n)$$

が分かる.

この右辺は $\frac{1}{3} \sum_{a=xy} (\deg(x) + \deg(y) - n) = \frac{1}{3} (\sum_x \deg(x)^2 - en)$ と評価できる. さらに握手補題とコーシー・シュワルツの不等式より $\sum_x \deg(x)^2 \leq \frac{1}{n} (\sum_x \deg(x))^2 = \frac{(2e)^2}{n}$ であり, これらを合わせて主張の不等式を得る.

D

E

F

G

Mantel の証明のほぼ単純な拡張である。各頂点 v に非負の重み z_v (全頂点の重みの和は 1) を与えて、 $\sum_{e=ab} z_a z_b$ の最大値が達成されている状況を考える。そのうち、正の重みの頂点数が最小のものをとると、正の重みの頂点数が $p-1$ 以下であることが分かる (p 個以上あれば、クリークの非存在より非隣接点に正の重みが乗っていて、それをまとめて頂点数が減らせる)。

$k = p-1$ とし、それらの重みを z_1, \dots, z_k とする。 $\sum_{i \neq j} z_i z_j = \frac{1}{2}((z_1 + \dots + z_k)^2 - (z_1^2 + \dots + z_k^2))$ であるが、コーシー・シュワルツの不等式などから $z_1^2 + \dots + z_k^2 \geq \frac{1}{k}(z_1 + \dots + z_k)^2$ が分かるので、 $z_1 + \dots + z_k = 1$ と合わせて $\sum_{i \neq j} z_i z_j \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})$ である。

最大値を達成する割り当てでこの不等式が成り立つので、任意の割り当てでも成り立つ。特に全頂点に重み $\frac{1}{n}$ を割り当てたときのことを考えて $\frac{|E(G)|}{n^2} \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})$ が成り立つ。これに $k = p-1$ を代入して整理すればよい。

H

5 個別代表系

A

B

C

D

E

F

G

6 Dilworth の定理と極値集合論

A

B

C

D

E