組合せ論（ヴァン・リント＆ウィルソン）問題

2020 年 6 月 21 日

1　グラフ

A

B

連結成分 C をとり，頂点数を a とする．C の頂点と C' の頂点は辺で結ばれていないので，辺の個数は ${}_{10}\mathrm{C}_2 - a(10-a)$ 以下である．$1 \leq a \leq 9$ よりこの値は 36 以下であることが分かる．

ちょうど 36 本を実現することは可能である．K_9 にひとつの孤立点を加えたものが条件を満たす．

C

D

E

F

G

H

$A = (a_{ij})_{i,j}$ とするとき，A^2 の (i,j) 成分は $\sum_k a_{ik}a_{kj}$ である．これは，i から j への長さ 2 の歩道の個数と等しい．

I

J

2　ラベル付き木と数え上げ

A

B

C

D

E

$n = 9$ ならば，$1, 9, 2, 8, 3, 6, 4, 5$ のように値を定める．$n = 10$ ならば，$1, 10, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 5, 6$ のように値を定める．という要領で値を定めると，graceful labeling になることは容易に分かる．

F

頂点数を n とする．葉は $n - m + 1$ 個である．辺の個数は $n - 1$ 個であるから，$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2n - 2$ である．$\sum_{v \in G} \bigl(\deg(v) - 1\bigr) = n - 2$ である．左辺は葉の情報がなくても計算できて，$1 + 2 + \cdots + (m - 1) = \frac{1}{2}m(m - 1)$ である．よって $n = \frac{1}{2}m(m - 1) + 2 = \frac{1}{2}(m^2 - m + 4)$．

G

H

3　グラフの彩色と Ramsey 理論

A

B

C

$a = N(p-1, q, 2), b = N(p, q-1; 2)$ とする．$n = a + b - 1$ として，K_n の辺を赤または青で塗る．赤の K_p または青の K_q がとれることを示せばよい．

赤い辺からなる部分グラフを R とする．n は奇数であり，奇点は偶数個であるから，$\deg_R(v)$ が偶数であるような v が存在する．$\deg_R(v) \geq a$ であるとき，その a 個から赤い K_{p-1} または青い K_q がとれる．前者の場合 v と合わせて赤い K_p が得られ，後者の場合そのまま青い K_q が得られているので，この場合には示された．$\deg_R(v) < a$ であるとする．a と $\deg_R(v)$ はともに偶数なので，$\deg_R(v) \leq a - 2$ が成り立つ．

青い辺からなる部分グラフを B とすると，$\deg_B(v) = n - 1 - \deg_R(v) \geq b$ が成り立つ．よってこの場合も $\deg_R(v) \geq a$ の場合と同様である．

D

E

(i) 不等式は $2^k \leq n$ と書き換えられる．

k についての帰納法で示す．$k = 0$ はよい．$k \geq 1$ として $k-1$ での成立を仮定．$v_0 \in K_n$ を任意にとる．

$$V_1 = \{w \mid v \text{ から } w \text{ へ向き付けられている }\},$$
$$V_2 = \{w \mid w \text{ から } v \text{ へ向き付けられている }\}$$

とすると，$|V_1| + |V_2| = n - 1 \geq 2^k - 1$ であるから，V_1 または V_2 のどちらかは 2^{k-1} 個以上の頂点を含む．その部分集合に帰納法の仮定を用いて $k-1$ 個の頂点からなる推移的トーナメントをとり，v を合わせれば k 個の頂点からなる推移的トーナメントが得られる．

(ii) 不等式は $n^k < 2^{{}_k\mathrm{C}_2}$ と言い換えられる．$n^k \geq {}_n\mathrm{C}_k \cdot k!$ であるから，${}_n\mathrm{C}_k \cdot \frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}} < 1$ が成り立つ．

K_n の各辺を，乱択で向き付けることを考える．k 個の頂点集合に対して，それが推移的トーナメントになる確率は，$\frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}}$ である（強い順に並べる方法が $k!$ 通りあり，向き付けの方法が $2^{{}_k\mathrm{C}_2}$ 通りある）．したがって，${}_n\mathrm{C}_k \cdot \frac{k!}{2^{{}_k\mathrm{C}_2}}$ は，k 個の頂点からなる推移的トーナメントの個数の期待値に等しい．この値が 1 未満であることから，ある向き付けに対して k 個の頂点からなる推移的トーナメントの非存在が従う．

F

G

H

I

J

K

4 Turánの定理と極値グラフ

A

B

帰納法．n について示されたとして，$n+2$ の場合に示す．G を $n+2$ 頂点かつ辺が $\lfloor\frac{(n+2)^2}{4}\rfloor$ 本とする．隣接する 2 点 a,b をとり，$G_1 = G \setminus \{a,b\}$ とする．

G_1 は三角形を含まないので，$|E(G_1)| \leq \lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor$．また三角形の非存在より，各 $v \in V(G_1)$ は a,b のうち高々一方としか隣接していない．よって G_1 と $\{a,b\}$ の間にある辺の本数は $|V(G_1)| = n$ 本以下．したがって，$|E(G)| \leq \lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor+n+1$ が成り立つ．

$|E(G)|$ に対する仮定よりこの不等式において等号が成り立つ．よって議論に用いた不等式評価は全て最善であるから，$|E(G_1)| = \lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor$ であり，各 $v \in V(G_1)$ は a,b のうちちょうど一方と隣接する．このことと帰納法の仮定より，まず G_1 が $K_{k,k}$ あるいは $K_{k,k+1}$ であることが分かり，三角形ができないという条件から v と a,b の結び方も決まって G に対する主張が従う．

C

まず辺 $a = \{x,y\}$ を含む三角形を下から評価する．$A = \Gamma(x) \setminus y$, $B = \Gamma(x) \setminus y$ とする．$|A| = \deg(x)-1$, $|B| = \deg(y)-1$, $A,B \subset G \setminus \{x,y\}$ である．よって $|A \cap B| = |A|+|B|-|A \cup B| \geq (\deg(x)-1)+(\deg(y)-1)-(n-2) = \deg(x)+\deg(y)-n$ である．特に辺 a を含む三角形は $\deg(x)+\deg(y)-n$ 個以上存在する．

辺 e と三角形 T の組 (e,T) であって，$e \subset T$ となるものの個数を 2 通りに数える．まず T から e を数えることで，個数は 3Δ（ただし Δ は三角形の個数）．また上で示したことを使って e から T を数えることで，個数は $\sum_{a=xy}(\deg(x)+\deg(y)-n)$ 以上．したがって

$$\Delta \geq \frac{1}{3}\sum_{a=xy}(\deg(x)+\deg(y)-n)$$

が分かる．

この右辺は $\frac{1}{3}\sum_{a=xy}(\deg(x)+\deg(y)-n) = \frac{1}{3}\left(\sum_x \deg(x)^2 - n^2\right)$ と評価できる．さらに握手補題とコーシー・シュワルツの不等式より $\sum_x \deg(x)^2 \leq \frac{1}{n}(\sum_x \deg(x))^2 = \frac{(2e)^2}{n}$ であり，これらを合わせて主張の不等式を得る．

D

E

F

G

Mantel の証明のほぼ単純な拡張である．各頂点 v に非負の重み z_v（全頂点の重みの和は 1）を与えて，$\sum_{e=ab} z_a z_b$ の最大値が達成されている状況を考える．そのうち，正の重みの頂点数が最小のものをとると，正の重みの頂点数が $p-1$ 以下であることが分かる（p 個以上あれば，クリークの非存在より非隣接点に正の重みが乗っていて，それをまとめて頂点数が減らせる）．

$k = p-1$ とし，それらの重みを $z_1, \dots, z_k$ とする．$\sum_{i \neq j} z_i z_j = \frac{1}{2}((z_1 + \cdots + z_k)^2 - (z_1^2 + \cdots + z_k)^2)$ であるが，コーシー・シュワルツの不等式などから $z_1^2 + \cdots + z_k^2 \geq \frac{1}{k}(z_1 + \cdots + z_k)^2$ が分かるので，$z_1 + \cdots + z_k = 1$ と合わせて $\sum_{i \neq j} z_i z_j \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})$ である．

最大値を達成する割り当てでこの不等式が成り立つので，任意の割り当てでも成り立つ．特に全頂点に重み $\frac{1}{n}$ を割り当てたときのことを考えて $\frac{|E(G)|}{n^2} \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})$ が成り立つ．これに $k = p-1$ を代入して整理すればよい．

H

5　個別代表系

A

B

C

D

E

F

G

6 Dilworth の定理と極値集合論

A

B

C

D

E