

# Graph Theory (Reinhard Diestel) exercises

2020 年 6 月 5 日

## 1 The Basics

### 1.1

$2|E| = \sum_v \deg(v)$  より  $|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$ .

### 1.2

以下, 内周と外周については  $d \geq 2$  とする.

このグラフを  $G$  として,  $d(G) = d$ ,  $\|G\| = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 2^d$ ,  $\text{diam}(G) = d$ ,  $g(G) = 4$ , 外周は  $2^d$ .

外周の計算は Hamilton サイクルの存在証明と同値. 「 $C^n \times \{0, 1\}$ 」が  $C^{2n}$  を含むことから ( $d = 2$  を base step として) 帰納法が使える.

### 1.3

$C$  の長さが  $\sqrt{k}$  以上であれば示すことはない.  $C$  の長さが  $\sqrt{k}$  未満であれば, 問題のパス  $P$  が  $C$  と交わる回数も  $\sqrt{k}$  以下である. 交点から交点までパスに分解すると, どれかのパスは  $\sqrt{k}$  以上の長さを持って,  $C$  と合わせて求めたいサイクルが得られる.

### 1.4

Yes.  $G = C^{2k+1}$  のときに  $g(G) = 2k+1$ ,  $\text{diam}(G) = k$  となって等号.

### 1.5

BFS 木の性質. 容易である.

## 1.6

任意のグラフとあるが、 $G \neq \emptyset$  が必要である。中心をとって ( $G \neq \emptyset$  よりとれる) 議論すれば容易。

## 1.7

$g = 2k + 1$  あるいは  $g = 2k + 2$  とおく。  $g$  が奇数ならば 1 点、偶数ならば隣接する 2 点を固定。これらの点から距離  $n$  の点集合を  $D_n$  とする。

$1 \leq n < k$  ならば  $v \in D_n$  の近傍  $N(v)$  は  $D_{n-1} \cup D_n \cup D_{n+1}$  に含まれる。 $D_{n-1}$  に少なくとも 1 点の近傍がある。 $D_{n-1} \cup D_n$  に 2 点あると  $g$  より小さな閉歩道ができて矛盾。 $N(v)$  の元は、唯一の  $D_{n-1}$  の点および  $D_{n+1}$  の点からなることが分かる。

特に、 $d - 1$  個以上の  $D_{n+1}$  の点と接続する。また再び内周の議論から  $u, v \in D_n$  に対して  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$  がいえるのでこれらの点は  $v$  ごとに disjoint.  $|D_{n+1}| \geq (d - 1)|D_n|$  がいえる。

あとは  $D_0$  が 1, 2 点であることを使って下から評価すればできる。

後半の主張 (平均次数の場合) は、1.2.2 を使って最小次数の大きな部分グラフに注目すればよい。

## 1.8

$d = \delta(G)$  とすると、1.3.4 より  $n \geq n_0(d, g) \geq n_0(d, 5) = d^2 + 1$  となる。よって  $d \leq \sqrt{n - 1}$ 。

## 1.9

Ore の定理の証明を少し改変すればよい。

$|G| = n$  とする。長さが最大のパス  $P = v_0 v_1 \dots v_m$  (長さ  $m$ ) をとる。 $m \geq 2\delta(G)$  であれば示すことはない。 $m < 2\delta(G)$  を仮定する。

まず、長さ  $m + 1$  のサイクルの存在を示す。 $A = \{1 \leq i \leq m \mid v_i \in N(v_0)\}$ ,  $B = \{0 \leq i < m \mid v_i \in N(v_m)\}$ ,  $B_+ = \{i + 1 \mid i \in B\}$  とおく。 $A, B_+ \subset \{1, \dots, m\}$  である。

$P$  の最大性の仮定より、 $v_0, v_m$  と隣接する頂点は  $v_i$  のいずれかであるから、 $|A| = \deg(v_0) \geq \delta(G)$  である。同様に  $|B_+| = |B| \geq \delta(G)$  である。 $|A| + |B_+| \geq 2\delta(G) > m \geq |A \cup B_+|$  であるから、 $A$  と  $B_+$  は交わる。

$i \in A \cap B_+$  とする。 $v_0 P v_{i-1} v_n P v_i v_1$  が長さ  $m + 1$  のサイクルとなる。以上で長さ  $m + 1$  のサイクルの存在が示された。

$m+1 = |G|$  であれば, このサイクルが求めるものである. そうでない場合,  $G$  の連結性よりサイクルと隣接する新たな頂点が存在し, 長さ  $m+1$  のパスが出来てしまう. 最大性の仮定に矛盾.

### 1.10

中心を根とする BFS 木を観察する. 深さ  $i$  の部分の頂点集合を  $D_i$  と書く.  $i \leq k$  とすると,  $v \in D_i$  が存在.  $N(v) \subset D_{i-1} \cup D_i \cup D_{i+1}$  から,  $|D_{i-1}| + D_i + D_{i+1} > 1 + d$  が分かる.

$|G| = (D_0 + D_1 + D_2) + (D_3 + D_4 + D_5) + \dots$  という要領で評価すれば,  $|G| > (1+d)\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  が得られる.

逆の評価:  $D_{3i+1}$  が  $d$  点集合で,  $D_{3i}, D_{3i+2}$  が 1 点集合となるように作れば最小次数の条件を満たす.

### 1.11

2 点間のパスの存在という関係が同値関係であることを確かめればよい. パスの存在と歩道の存在が同値であり, 歩道で考えれば推移律も自明である.

### 1.12

対偶. サイクルがなかったら木である. 頂点数 3 以上の木は葉でない頂点を持つ. その頂点を消すと連結性が失われることから, 1-連結であることが分かる.

頂点数 2 以下の場合も大丈夫.

### 1.13

- (i)  $G = P^m$  の場合:  $\kappa = \lambda = 1$  である. 容易.
- (ii)  $G = C^m$  の場合:  $\kappa = \lambda = 2$  である. 容易.
- (iii)  $G = K^n$  の場合:  $\kappa = \lambda = n-1$  である.  $\kappa$  については, いくつかの頂点を削除した部分グラフも完全グラフであることから分かる.  $\lambda$  については 1.4.2 を使えばよい.
- (iv)  $G = K_{m,n}$  の場合:  $\kappa = \lambda = \min m, n-1$  である. 完全グラフの場合と同様.

### 1.14

No. 1 点  $A$  と  $G_1 = G_2 = K^n$  を用意して,  $A$  と  $G_1 \cup G_2$  の間を全部辺でつなぐと, 最小次数が  $n$  でありながら点連結度が 1 になる.

### 1.15

次のように定式化できる.

$$(i) \exists f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \beta \leq f(\alpha).$$

$$(ii) \forall N, \exists M, \beta \geq M \implies \alpha \geq N.$$

$$(iii) \exists g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \alpha \leq g(\beta).$$

(i)  $\implies$  (ii) :  $M = \max_{1 \leq i \leq N} f(i)$  とすればよい. (ii)  $\implies$  (i) : (ii) の  $M$  を  $f_0(N)$  とするとき,  $f(N) = f_0(N+1)$  が条件を満たす ((ii) の対偶を見れば分かる).

(iii) が同値にならない例として, 例えば任意のグラフ  $G$  に対して  $\beta(G) = 0$  となる  $\beta$  は反例になる.

### 1.16

### 1.17

### 1.18

### 1.19

- (i)  $\implies$  (ii) : 一意性のみが問題. 相異なるパス  $P, Q$  があったとしてサイクルの存在を示す.

$|P|$  で帰納法をする.  $P = v_0 v_1 \dots v_n$  とするとき,  $v_i \in Q$  となる最小の  $i \geq 1$  をとる.  $i = n$  なら容易にサイクルが得られる.  $P_1 = v_0 P v_i$ ,  $P_2 = v_i P v_n$ ,  $Q_1 = v_0 Q v_i$ ,  $Q_2 = v_i Q v_n$  とすると,  $P_1 \neq Q_1$  または  $P_2 \neq Q_2$  であるから, どちらかに対して帰納法の仮定が使えてサイクルが得られる.

- (ii)  $\implies$  (iii) : 連結性はよい.  $T - e$  が連結でないことを示せばよい.  $e = xy$  に対して  $T - e$  が連結だとすると,  $x$  やら  $y$  へのパス  $P$  が存在し,  $T$  において  $P, e$  が相異なる  $xy$  間のパスとなって矛盾.
- (iii)  $\implies$  (iv) :  $T + xy$  がサイクルを含むことは,  $x$  から  $y$  へのパスと  $xy$  を合わせたものがサイクルなので.  $T$  がサイクルを含まないことは, サイクルを含むとするとサイクルの 1 辺を除いても連結なので.

- (iv)  $\implies$  (i): 連結性を示せばよい.  $x, y$  が隣接していないとき,  $T+xy$  のサイクル  $C$  に注目.  $T$  はサイクルを含まないので  $C$  は  $xy$  を含むので,  $x$  から  $y$  への  $T$  上のパスが得られる.

### 1.20

頂点数  $n$  の木グラフは  $\sum_v \deg(v) = 2n-2$  を満たすのであった.  $\sum_v (\deg(v)-2) = -2$  である. 葉の個数を  $k$  とすると, 左辺は  $-k + (\Delta(G) - 2)$  以上.  $-k + \Delta(G) - 2 \leq -2$  から  $k \leq \Delta(G)$  が分かる.

### 1.21

$\sum (\deg(v) - 2) = -2$  を使えばよい. 葉を  $x$  個, 次数 3 以上の頂点を  $y$  個とすると,  $y - x \leq -2$  が分かる.

### 1.22

一般に  $G$  の連結成分の個数を  $\text{comp}(G)$  と書くことにする.

$n = |F| = |F'|$  とする. 森なので  $\text{comp}(F) = n - \|F\|$ ,  $\text{comp}(F') = n - \|F'\|$  である.  $F' \setminus F = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  として,  $F_k = F + \{e_1, \dots, e_k\}$  とすると,  $\text{comp}(F_m) \leq \text{comp}(F') < \text{comp}(F) = \text{comp}(F_0)$  なので, ある  $k$  に対して  $\text{comp}(F_{k-1}) > \text{comp}(F_k)$  となる.  $e = e_k$  が条件を満たす.

### 1.23

根を  $r$  とする.

$x \leq x$  は明らか.

$x \leq y, y \leq x \implies x = y$  を示す.  $x \leq y$  とすると, して,  $y \leq x \iff x = y$  を示せばよい.  $r$  から  $y$  へのパス  $P$  をとる.  $x$  は  $P$  に含まれる. よって  $r$  から  $x$  への唯一のパスは,  $rPx$  に他ならない.  $y \leq x$  となるのはこれが  $y$  を含むときなので,  $x = y$  の場合に限られる.

$x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$  を示す.  $P$  を  $r$  から  $z$  への唯一のパスとする.  $y \leq z$  より  $y \in P$ . よって  $r$  から  $y$  への唯一のパスは  $rPy$  である. これと  $x \leq y$  より  $x \in rPy$ . よって  $x \in P$  なので  $x \leq z$  である.

### 1.24

まず、強連結な向き付けを持つならば 2 辺連結であることを示す。2 辺連結でないとして、強連結な向き付けがないことをいえばよい。辺  $e$  であって、 $G - e$  が不連結なものをとる。 $G - e$  の連結成分を  $V_1, V_2$  とすると、 $e$  の向きに応じて  $V_1$  から  $V_2$  または  $V_2$  から  $V_1$  への有向歩道が存在しないのでよい。

次に、2 辺連結ならば強連結な向き付けが存在することを示す。適当な根  $r$  および normal spanning tree  $T$  をひとつとり固定する。 $e = xy \in E(G)$  に対して、 $x, y$  は  $T$  の順序で比較可能である。 $x \leq y$  としたとき、 $e \in T$  ならば  $x$  から  $y$ 、 $e \notin T$  ならば  $y$  から  $x$  へ向きを付ける。

この向き付けが強連結性を満たすことを示そう。任意に頂点  $x \neq r$  をとる。 $r$  から  $x$  および  $x$  から  $r$  への有向歩道が存在することを示せばよい。 $r$  から  $x$  へは、 $rTx$  が条件を満たす。 $x$  から  $r$  への有向歩道が存在しないとする。 $x$  から有向歩道で到達可能な頂点のうち、木順序に関する極小元  $y$  をとる。 $y \neq r$  として矛盾を導く。

$y$  の親を  $z$  とする ( $y \neq r$  より一意存在) と、辺連結性の仮定より  $G - yz$  は連結。よって  $y$  の部分木から部分木の外への  $yz$  でない辺が存在する。 $a$  を部分木の点、 $b$  を部分木外の点とすると、DFS 木の性質より  $b$  は  $a$  の先祖なので  $b \leq z < y \leq a$ 。すると  $x$  から  $z$  への有向歩道ができる ( $x \rightarrow y \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow z$ ) ので  $y$  の極小性に矛盾する。

### 1.25

頂点数の少ないグラフと好き勝手な根に対して存在が示されたとする。 $G$  の  $r$  を根とする normal spanning tree を構成する。 $G \setminus \{r\}$  の連結成分を  $G_1, \dots, G_m$  とする。 $r$  と隣接する  $v_i \in G_i$  を適当にとる。 $(G_i, v_i)$  に対して帰納法の仮定で normal spanning tree を作ったあと、 $r$  と各  $v_i$  をつなげば、条件を満たすことは容易に分かる。

### 1.26

DFS 木のよく知られた性質である。探索順序を考えれば明らか。

### 1.27

木から葉を除いたものは再び木になることに注目すると帰納法ができる。全部  $T$  でつらいので、部分木は  $A$  と書いていく。

(i)  $|T|$  に関する帰納法。 $|T| = 1$  はよい。

葉  $v$  をとる. 任意の  $A \in \mathcal{T}$  が  $v$  を含むならよい. そうでないとする  
と,  $v$  を含まない  $A_0$  がとれて, 任意の  $A \in \mathcal{T}$  に対して  $A \cap A_0 \neq \emptyset$   
より  $A \neq \{v\}$  である. よって各  $A$  に対して  $A' = A \setminus v$  は木である.  
木  $T - v$  と  $\mathcal{T}' = \{A' \mid A \in \mathcal{T}\}$  に対して帰納法が使えばよい.

(ii)  $|T|$  に関する帰納法.  $|T| = 1$  はよい.

葉  $v$  をとる.  $A \in \mathcal{T}$  に対して  $A' = A \setminus v$  とする.

(a)  $\{v\} \in \mathcal{T}$  のとき.  $\mathcal{T}' = \{T \in \mathcal{T} \mid v \notin T\}$  とする.  $(T, \mathcal{T}, k) =$   
 $(T - v, \mathcal{T}', k - 1)$  に帰納法の仮定を使う.  $\mathcal{T}'$  から  $(k - 1)$  個の  
disjoint trees がとれるならば, それと  $\{v\}$  を合わせたものが  $k$   
個の  $\mathcal{T}$  の disjoint trees になるのでよい. そうでないなら高々  
 $(k - 2)$  元集合  $X'$  であって任意の  $\mathcal{T}'$  の元と交わるものが存在す  
る.  $X = X' \cup \{v\}$  が高々  $(k - 1)$  元かつ任意の  $\mathcal{T}$  の元と交わる  
ので示された.

(b)  $\{v\} \notin \mathcal{T}$  のとき.  $A \in \mathcal{T}$  に対して  $A'$  は木である.  $\mathcal{T}' = \{A' \mid A \in$   
 $\mathcal{T}\}$  とする.  $(T, \mathcal{T}, k) = (T - v, \mathcal{T}', k)$  に対して帰納法の仮定を用  
いる.  $k$  disjoint trees がとれるなら, それに対応する  $\mathcal{T}$  の trees  
が条件を満たす. そうでないなら高々  $(k - 1)$  元集合で任意の  $\mathcal{T}'$   
の元と交わるものが存在し, これが  $\mathcal{T}'$  に対しても条件を満たす.

## 1.28

木の中心は 1 点または隣接する 2 点である. 自己同型はこれらを保つので  
よい.

## 1.29

Yes. 握手補題の要領で二部グラフ  $G = (V_1 \amalg V_2, E)$  に対して,  $\sum_{v \in V_1} \deg(v) =$   
 $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$  が分かる.

## 1.30

$\Rightarrow$  は Prop1.6.1 より明らか.  $\Leftarrow$  を示す.

二部グラフではないとして, 奇誘導サイクルの存在を示す. Prop 1.6.1 より  
奇サイクルはある. 奇サイクルのうち長さが最小のものをとって, これが  
誘導サイクルであることを示す. そうでないとする弦がとれて, 小さなサ  
イクルが 2 つ見つかるが, このうちどちらかが奇サイクルになるので矛盾  
する.

### 1.31

Yes. 証明する.

$\Rightarrow$  : 隣接頂点  $x, y$  がある頂点  $z$  から等距離 (距離  $d$ ) だとすると, 長さ  $2d + 1$  の奇閉歩道ができて矛盾する.

$\Leftarrow$  : 二部でないとして, 距離  $1, d, d$  となる 3 点対の存在を確かめる. 二部グラフでないとすると, 奇サイクル  $C = C^{2d+1}$  が存在.  $x, y, z \in C$  をそれっぽくとして,  $C$  に沿った距離が  $d_C(x, y) = 1, d_C(x, z) = d_C(y, z) = d$  となるようにする. この距離が  $G$  においても最短距離であることを確認する.  $y$  から  $z$  に距離  $k < d$  のパスがあったとする. このとき,  $C$  の一部と合わせて長さ  $k + d, k + d + 1$  の閉歩道が見つかる. どちらかは長さが  $C$  より短い奇閉歩道になる. 奇閉歩道があれば奇サイクルがあるので  $C$  の最小性に矛盾.

### 1.32

$f(k) = 4k$  が条件を満たすことを示す.

$G$  が  $\frac{|E|}{|V|} \geq 4k$  を満たすとする. 各頂点を赤, 青で塗り分け  $V = R \amalg B$  に対して,  $E' = \{e = xy \mid x \in R, y \in B\}$  とすると,  $G' = (V, E')$  は二部グラフである. この二部グラフであって, 最も生き残る辺の数  $|E'|$  が多いものとする.

あらゆる塗り分けに対する生き残る辺の数の平均値は,  $\frac{1}{2}|E|$  である (辺ごとの生存確率を足す). よって  $|E'| \geq \frac{1}{2}|E|$  である.  $G'$  の平均次数は  $2k$  以上. よって Prop 1.2.2 より, その部分グラフであって最小次数が  $k$  以上のもの  $H$  が存在.  $H$  が条件を満たす.



**1.33**

**1.34**

**1.35**

**1.36**

**1.37**

**1.38**

**1.39**

**1.40**

**1.41**

**1.42**

**1.43**

**1.44**

**1.45**

**1.46**

**1.47**

**1.48**

**1.49**

## 2 Matching, Covering and Packing

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

2.6

2.7

2.8

2.9

2.10

2.11

2.12

2.13

2.14

2.15

2.16

2.17

2.18

2.19

2.20

2.21

2.22

2.23

2.24

2.25

2.26

2.27

2.28

2.29

## 3 Connectivity

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

3.6

3.7

3.8

3.9

3.10

3.11

3.12

3.13

3.14

3.15

3.16

3.17

3.18

3.19

3.20

3.21

3.22

3.23

3.24

3.25

11

3.26

3.27

3.28

3.29

## 4 Planar Graphs

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

4.13

4.14

4.15

4.16

4.17

4.18

4.19

4.20

4.21

4.22

4.23

4.24

4.25

12

4.26

4.27

4.28

4.29

## 5 Colouring

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

5.7

5.8

5.9

5.10

5.11

5.12

5.13

5.14

5.15

5.16

5.17

5.18

5.19

5.20

5.21

5.22

5.23

5.24

5.25

13

5.26

5.27

5.28

5.29

## 6 Flows

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.7

6.8

6.9

6.10

6.11

6.12

6.13

6.14

6.15

6.16

6.17

6.18

6.19

6.20

6.21

6.22

6.23

6.24

6.25

## 7 Extremal Graph Theory

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

7.13

7.14

7.15

7.16

7.17

7.18

7.19

7.20

7.21

7.22

7.23

7.24

7.25

7.26

7.27

7.28

7.29

## 8 Infinite Graphs

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

8.12

8.13

8.14

8.15

8.16

8.17

8.18

8.19

8.20

8.21

8.22

8.23

8.24

8.25

16

8.26

8.27

8.28

8.29



## 9 Ramsey Theory for Graphs

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

9.10

9.11

9.12

9.13

9.14

9.15

9.16

9.17

9.18

9.19

9.20

9.21

9.22

## **10   Hamilton Cycles**

**10.1**

**10.2**

**10.3**

**10.4**

**10.5**

**10.6**

**10.7**

**10.8**

**10.9**

**10.10**

**10.11**

**10.12**

**10.13**

**10.14**

**10.15**

**10.16**

## **11 Random Graphs**

**11.1**

**11.2**

**11.3**

**11.4**

**11.5**

**11.6**

**11.7**

**11.8**

**11.9**

**11.10**

**11.11**

**11.12**

**11.13**

**11.14**

**11.15**

**11.16**

**11.17**

**11.18**

**11.19**

**11.20**

## **12   Graphs Minors**

**12.1**

**12.2**

**12.3**

**12.4**

**12.5**

**12.6**

**12.7**

**12.8**

**12.9**

**12.10**

**12.11**

**12.12**

**12.13**

**12.14**

**12.15**

**12.16**

**12.17**

**12.18**

**12.19**

**12.20**

**12.21**

**12.22**

**12.23**

**12.24**

**12.25**

20

**12.26**

**12.27**

**12.28**

**12.29**