Graph Throey (Reinhard Diestel) exercises

2020 年 6 月 4 日

1 The Basics

1.1

$2|E| = \sum_v \deg(v)$ より $|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$.

1.2

以下，内周と外周については $d \geq 2$ とする．

このグラフを G として，$d(G) = d$, $\|G\| = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 2^d$, $\mathrm{diam}(G) = d$, $g(G) = 4$, 外周は 2^d.

外周の計算は Hamilton サイクルの存在証明と同値.「$C^n \times \{0, 1\}$」が C^{2n} を含むことから（$d = 2$ を base step として）帰納法が使える．

1.3

C の長さが $\sqrt{k}$ 以上であれば示すことはない．C の長さが $\sqrt{k}$ 未満であれば、問題のパス P が C と交わる回数も $\sqrt{k}$ 以下である．交点から交点までパスに分解すると，どれかのパスは $\sqrt{k}$ 以上の長さを持って，C と合わせて求めたいサイクルが得られる．

1.4

Yes．$G = C^{2k+1}$ のときに $g(G) = 2k + 1$, $\mathrm{diam}(G) = k$ となって等号．

1.5

BFS 木の性質．容易である．

1.6

任意のグラフとあるが，$G \neq \emptyset$ が必要である．中心をとって（$G \neq \emptyset$ よりとれる）議論すれば容易．

1.7

$g = 2k+1$ あるいは $g = 2k+2$ とおく．g が奇数ならば 1 点，偶数ならば隣接する 2 点を固定．これらの点から距離 n の点集合を D_n とする．

$1 \leq n < k$ ならば $v \in D_n$ の近傍 $N(v)$ は $D_{n-1} \cup D_n \cup D_{n+1}$ に含まれる．D_{n-1} に少なくとも 1 点の近傍がある．$D_{n-1} \cup D_n$ に 2 点あると g より小さな閉歩道ができて矛盾．$N(v)$ の元は，唯一の D_{n-1} の点および D_{n+1} の点からなることが分かる．

特に，$d-1$ 個以上の D_{n+1} の点と接続する．また再び内周の議論から $u, v \in D_n$ に対して $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ がいえるのでこれらの点は v ごとに disjoint．$|D_{n+1}| \geq (d-1)|D_n|$ がいえる．

あとは D_0 が 1, 2 点であることを使って下から評価すればできる．

後半の主張（平均次数の場合）は，1.2.2 を使って最小次数の大きな部分グラフに注目すればよい．

1.8

$d = \delta(G)$ とすると，1.3.4 より $n \geq n_0(d,g) \geq n_0(d,5) = d^2+1$ となる．よって $d \leq \sqrt{n-1}$.

1.9

1.10

中心を根とする BFS 木を観察する．深さ i の部分の頂点集合を D_i と書く．$i \leq k$ とすると，$v \in D_i$ が存在．$N(v) \subset D_{i-1} \cup D_i \cup D_{i+1}$ から，$|D_{i-1}| + D_i + D_{i+1} > 1 + d$ が分かる．

$|G| = (D_0 + D_1 + D_2) + (D_3 + D_4 + D_5) + \cdots$ という要領で評価すれば，$|G| > (1+d)\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ が得られる．

逆の評価：D_{3i+1} が d 点集合で，D_{3i}, D_{3i+2} が 1 点集合となるように作れば最小次数の条件を満たす．

1.11

2 点間のパスの存在という関係が同値関係であることを確かめればよい．パスの存在と歩道の存在が同値であり，歩道で考えれば推移律も自明である．

1.12

対偶．サイクルがなかったら木である．頂点数 3 以上の木は葉でない頂点を持つ．その頂点を消すと連結性が失われることから，1-連結であることが分かる．

頂点数 2 以下の場合も大丈夫．

1.13

1.14

No. 1 点 A と $G_1 = G_2 = K^n$ を用意して，A と $G_1 \cup G_2$ の間を全部辺でつなぐと，最小次数が n でありながら点連結度が 1 になる．

1.15

1.16

1.17

1.18

1.19

1.20

頂点数 n の木グラフは $\sum_v \deg(v) = 2n - 2$ を満たすのであった．$\sum_v (\deg(v) - 2) = -2$ である．葉の個数を k とすると，左辺は $-k + (\Delta(G) - 2)$ 以上．$-k + \Delta(G) - 2 \leq -2$ から $k \leq \Delta(G)$ が分かる．

1.21

1.22

1.23

1.24

1.25

頂点数の少ないグラフと好き勝手な根に対して存在が示されたとする．G の r を根とする normal spanning tree を構成する．$G \setminus \{r\}$ の連結成分を $G_1, \ldots, G_m$ とする．r と隣接する $v_i \in G_i$ を適当にとる．(G_i, v_i) に対して

帰納法の仮定で normal spanning tree を作ったあと，r と各 v_i をつなげば，条件を満たすことは容易に分かる．

1.26

1.27

1.28

木の中心は 1 点または隣接する 2 点である．自己同型はこれらを保つのでよい．

1.29

Yes. 握手補題の要領で二部グラフ $G = (V_1 \amalg V_2, E)$ に対して，$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = \sum_{v \in V_2} \deg(v)$ が分かる．

1.30

1.31

1.32

$f(k) = 4k$ が条件を満たすことを示す．

G が $\frac{|E|}{|V|} \geq 4k$ を満たすとする．各頂点を赤，青で塗り分け $V = R \amalg B$ に対して，$E' = \{e = xy \mid x \in R, y \in B\}$ とすると，$G' = (V, E')$ は二部グラフである．この二部グラフであって，最も生き残る辺の数 $|E'|$ が多いものをとる．

あらゆる塗り分けに対する生き残る辺の数の平均値は，$\frac{1}{2}|E|$ である（辺ごとの生存確率を足す）．よって $|E'| \geq \frac{1}{2}|E|$ である．G' の平均次数は $2k$ 以上．よって Prop 1.2.2 より，その部分グラフであって最小次数が k 以上のもの H が存在．H が条件を満たす．

確率論を使う．

1.33

1.34

1.35

1.36

1.37

1.38

1.39

1.40

1.41

1.42

1.43

1.44

1.45

1.46

1.47

1.48

1.49

2 Matching, Covering and Packing

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

2.6

2.7

2.8

2.9

2.10

2.11

2.12

2.13

2.14

2.15

2.16

2.17

2.18

2.19

2.20

2.21

2.22

2.23

2.24

2.25

2.26

2.27

2.28

2.29

3 Connectivity

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

3.6

3.7

3.8

3.9

3.10

3.11

3.12

3.13

3.14

3.15

3.16

3.17

3.18

3.19

3.20

3.21

3.22

3.23

3.24

3.25

3.26

3.27

3.28

3.29

4 Planar Graphs

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

4.13

4.14

4.15

4.16

4.17

4.18

4.19

4.20

4.21

4.22

4.23

4.24

4.25

4.26

4.27

4.28

4.29

5 Colouring

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

5.7

5.8

5.9

5.10

5.11

5.12

5.13

5.14

5.15

5.16

5.17

5.18

5.19

5.20

5.21

5.22

5.23

5.24

5.25

5.26

5.27

5.28

5.29

6 Flows

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.7

6.8

6.9

6.10

6.11

6.12

6.13

6.14

6.15

6.16

6.17

6.18

6.19

6.20

6.21

6.22

6.23

6.24

6.25

7 Extremal Graph Theory

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

7.13

7.14

7.15

7.16

7.17

7.18

7.19

7.20

7.21

7.22

7.23

7.24

7.25

7.26

7.27

7.28

7.29

8 Infinite Graphs

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

8.12

8.13

8.14

8.15

8.16

8.17

8.18

8.19

8.20

8.21

8.22

8.23

8.24

8.25

8.26

8.27

8.28

8.29

9 Ramsey Theory for Graphs

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

9.10

9.11

9.12

9.13

9.14

9.15

9.16

9.17

9.18

9.19

9.20

9.21

9.22

10 Hamilton Cycles

10.1

10.2

10.3

10.4

10.5

10.6

10.7

10.8

10.9

10.10

10.11

10.12

10.13

10.14

10.15

10.16

11 Random Graphs

11.1

11.2

11.3

11.4

11.5

11.6

11.7

11.8

11.9

11.10

11.11

11.12

11.13

11.14

11.15

11.16

11.17

11.18

11.19

11.20

12 Graphs Minors

12.1

12.2

12.3

12.4

12.5

12.6

12.7

12.8

12.9

12.10

12.11

12.12

12.13

12.14

12.15

12.16

12.17

12.18

12.19

12.20

12.21

12.22

12.23

12.24

12.25

12.26

12.27

12.28

12.29