Graph Throey (Reinhard Diestel) exercises

2020 年 6 月 3 日

1 The Basics

1.1

$2|E| = \sum_v \deg(v)$ より $|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$.

1.2

以下，内周と外周については $d \geq 2$ とする．

このグラフを G として，$d(G) = d$, $\|G\| = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 2^d$, $\mathrm{diam}(G) = d$, $g(G) = 4$, 外周は 2^d.

外周の計算は Hamilton サイクルの存在証明と同値.「$C^n \times \{0, 1\}$」が C^{2n} を含むことから（$d = 2$ を base step として）帰納法が使える．

1.3

C の長さが $\sqrt{k}$ 以上であれば示すことはない．C の長さが $\sqrt{k}$ 未満であれば、問題のパス P が C と交わる回数も $\sqrt{k}$ 以下である．交点から交点までパスに分解すると，どれかのパスは $\sqrt{k}$ 以上の長さを持って，C と合わせて求めたいサイクルが得られる．

1.4

Yes．$G = C^{2k+1}$ のときに $g(G) = 2k + 1$, $\mathrm{diam}(G) = k$ となって等号．

1.5

BFS 木の性質．容易である．

1.6

任意のグラフとあるが，$G \neq \emptyset$ が必要である．中心をとって（$G \neq \emptyset$ よりとれる）議論すれば容易．

1.7

$g = 2k+1$ あるいは $g = 2k+2$ とおく．g が奇数ならば 1 点，偶数ならば隣接する 2 点を固定．これらの点から距離 n の点集合を D_n とする．

$1 \leq n < k$ ならば $v \in D_n$ の近傍 $N(v)$ は $D_{n-1} \cup D_n \cup D_{n+1}$ に含まれる．D_{n-1} に少なくとも 1 点の近傍がある．$D_{n-1} \cup D_n$ に 2 点あると g より小さな閉歩道ができて矛盾．$N(v)$ の元は，唯一の D_{n-1} の点および D_{n+1} の点からなることが分かる．

特に，$d-1$ 個以上の D_{n+1} の点と接続する．また再び内周の議論から $u, v \in D_n$ に対して $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ がいえるのでこれらの点は v ごとに disjoint．$|D_{n+1}| \geq (d-1)|D_n|$ がいえる．

あとは D_0 が 1, 2 点であることを使って下から評価すればできる．

1.8

1.9

1.10

1.11

1.12

1.13

1.14

1.15

1.16

1.17

1.18

1.19

1.20

1.21

1.22

1.23

1.24

1.25

1.26

1.27

1.28

1.29

1.30

1.31

1.32

1.33

1.34

1.35

1.36

1.37

2 Matching, Covering and Packing

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

2.6

2.7

2.8

2.9

2.10

2.11

2.12

2.13

2.14

2.15

2.16

2.17

2.18

2.19

2.20

2.21

2.22

2.23

2.24

2.25

2.26

2.27

2.28

2.29

3 Connectivity

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

3.6

3.7

3.8

3.9

3.10

3.11

3.12

3.13

3.14

3.15

3.16

3.17

3.18

3.19

3.20

3.21

3.22

3.23

3.24

3.25

3.26

3.27

3.28

3.29

4 Planar Graphs

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

4.13

4.14

4.15

4.16

4.17

4.18

4.19

4.20

4.21

4.22

4.23

4.24

4.25

4.26

4.27

4.28

4.29

5 Colouring

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

5.7

5.8

5.9

5.10

5.11

5.12

5.13

5.14

5.15

5.16

5.17

5.18

5.19

5.20

5.21

5.22

5.23

5.24

5.25

5.26

5.27

5.28

5.29

6 Flows

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.7

6.8

6.9

6.10

6.11

6.12

6.13

6.14

6.15

6.16

6.17

6.18

6.19

6.20

6.21

6.22

6.23

6.24

6.25

7 Extremal Graph Theory

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

7.13

7.14

7.15

7.16

7.17

7.18

7.19

7.20

7.21

7.22

7.23

7.24

7.25

7.26

7.27

7.28

7.29

8 Infinite Graphs

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

8.12

8.13

8.14

8.15

8.16

8.17

8.18

8.19

8.20

8.21

8.22

8.23

8.24

8.25

8.26

8.27

8.28

8.29

9 Ramsey Theory for Graphs

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

9.10

9.11

9.12

9.13

9.14

9.15

9.16

9.17

9.18

9.19

9.20

9.21

9.22

10 Hamilton Cycles

10.1

10.2

10.3

10.4

10.5

10.6

10.7

10.8

10.9

10.10

10.11

10.12

10.13

10.14

10.15

10.16

11 Random Graphs

11.1

11.2

11.3

11.4

11.5

11.6

11.7

11.8

11.9

11.10

11.11

11.12

11.13

11.14

11.15

11.16

11.17

11.18

11.19

11.20

12 Graphs Minors

12.1

12.2

12.3

12.4

12.5

12.6

12.7

12.8

12.9

12.10

12.11

12.12

12.13

12.14

12.15

12.16

12.17

12.18

12.19

12.20

12.21

12.22

12.23

12.24

12.25

12.26

12.27

12.28

12.29