Graph Throey (Reinhard Diestel) exercises

2020 年 6 月 2 日

1 The Basics

1.1

$2|E| = \sum_v \deg(v)$ より $|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$.

1.2

以下，内周と外周については $d \geq 2$ とする．
このグラフを G として，$d(G) = d$, $\|G\| = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 2^d$, $\mathrm{diam}(G) = d$, $g(G) = 4$, 外周は 2^d.
外周の計算は Hamilton サイクルの存在証明と同値.「$C^n \times \{0, 1\}$」 が C^{2n} を含むことから（$d = 2$ を base step として）帰納法が使える．

1.3

C の長さが $\sqrt{k}$ 以上であれば示すことはない．C の長さが $\sqrt{k}$ 未満であれば、問題のパス P が C と交わる回数も $\sqrt{k}$ 以下である．交点から交点までパスに分解すると，どれかのパスは $\sqrt{k}$ 以上の長さを持って，C と合わせて求めたいサイクルが得られる．

1.4

Yes．$G = C^{2k+1}$ のときに $g(G) = 2k + 1$, $\mathrm{diam}(G) = k$ となって等号．

1.5

BFS 木の性質．容易である．

1.6

任意のグラフとあるが，$G \neq \emptyset$ が必要である．中心をとって（$G \neq \emptyset$ よりとれる）議論すれば容易．

1.7

$g = 2k + 1$ あるいは $g = 2k + 2$ とおく．g が奇数ならば 1 点，偶数ならば隣接する 2 点を固定．これらの点から距離 n の点集合を D_n とする．

$1 \leq n < k$ ならば $v \in D_n$ の近傍 $N(v)$ は $D_{n-1} \cup D_n \cup D_{n+1}$ に含まれる．D_{n-1} に少なくとも 1 点の近傍がある．$D_{n-1} \cup D_n$ に 2 点あると g より小さな閉歩道ができて矛盾．$N(v)$ の元は，唯一の D_{n-1} の点および D_{n+1} の点からなることが分かる．

特に，$d - 1$ 個以上の D_{n+1} の点と接続する．また再び内周の議論から $u, v \in D_n$ に対して $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ がいえるのでこれらの点は v ごとに disjoint．$|D_{n+1}| \geq (d-1)|D_n|$ がいえる．

あとは D_0 が 1, 2 点であることを使って下から評価すればできる．

1.8

1.9

1.10

1.11

1.12

1.13

1.14

1.15

1.16

1.17

1.18

1.19

1.20

1.21

1.22

1.23

1.24

1.25

1.26

1.27

1.28

1.29

1.30

1.31

1.32

1.33

1.34

1.35

1.36

1.37