みんなのデータ構造 (Pat Morin) exercises

37zigen

2020 年 9 月 4 日

1　スケープゴート木

1.1

size(u) $\leq$ (2/3)size(u.parent) (★) より, 根の高さ h と頂点数 n は $(3/2)^h \leq n$ の関係にあるから, $h \leq \log_{3/2} n$ となる. 木の高さが $O(\log n)$ だから add と remove は $O(\log n)$ で実行できる.

add または remove を実行後, ★が満たされていない頂点 v を根とする部分木を完全二分木に構成する計算量を解析する. size(v.left) $>$ (2/3)size(v) と仮定しても一般性を失わない.

$$\mathrm{size(v.left)} - \mathrm{size(v.right)} = 2\mathrm{size(v.left)} - \mathrm{size(v)} + 1 > (1/3)\mathrm{size(v)}$$

★の直後 $\mathrm{size(v.left)} - \mathrm{size(v.right)} \leq 1$ だからその後 (1/3)size(v) 回以上 add または remove が行われている. よって rebuild の計算量は均し $O(\log n)$.

2　整列アルゴリズム

2.1

要素 a と b $(a < b)$ が比較される確率は $2/(b-a+1)$. $d = b - a + 1$ 毎に和を取ると $\sum_{d=2}^{n}(2/d)(n-d+1) = 2(n+1)H_n - 4n$.

要素 a がピボット a と比較される確率は $a \in \{0, n-1\}$ のとき 1/2, そうでないとき 2/3. 和は $(2/3)n - 1/3$.

答えは $n > 2$ のとき $2(n+1)H_n - 4n + (2/3)n - 1/3 = 2(n+1)H_n - (10/3)n - 1/3$. $n = 1$ のとき 0.