

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Maruša Oražem

Konstrukcija gibanja kamere s pomočjo Pitagorejskih krivulj

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Marjetka Knez

Ljubljana, 2020

KAZALO

1. Uvod	4
2. Osnovni pojmi in definicije	4
3. Konstrukcija P-krivulje	5
3.1. Zapis krivulje v Bernsteinovi bazi	6
3.2. Določitev kontrolnih točk P-krivulj	10
4. Ogrodja	13
4.1. Usmerjena in prikrojena ogrodja	13
4.2. Rotacijsko minimizirajoča ogrodja	15
5. Interpolacijski problem	18
6. Numerični rezultati	19
6.1. Primer 1	19
6.2. Primer 2	19
Slovar strokovnih izrazov	19
Literatura	19

Konstrukcija gibanja kamere s pomočjo Pitagorejskih krivulj

POVZETEK

Construction of camera motion with help of Pitagorean curves

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2010):

Ključne besede:

Keywords:

1. UVOD

2. OSNOVNI POJMI IN DEFINICIJE

Za začetek se spoznajmo z osnovnimi pojmi in definicijami, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Definicija 2.1. Množica kvaternionov \mathbb{H} je 4-razsežen vektorski prostor z bazo $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Vsak kvaternion $\mathcal{A} \in \mathbb{H}$ lahko zapišemo kot $\mathcal{A} = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ oziroma $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, kjer so $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ali pa kot skalarni in vektorski del $\mathcal{A} = (a_0, \mathbf{a})$, kjer je $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$. Poglejmo si osnovne operacije v množici \mathbb{H} :

- Seštevanje:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} + \mathcal{B} &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}, \\ \mathcal{A} &= (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{H}, \quad \mathcal{B} = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{H}.\end{aligned}$$

- Skalarno množenje:

$$\lambda\mathcal{A} = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) = \lambda a_0 + \lambda a_1\mathbf{i} + \lambda a_2\mathbf{j} + \lambda a_3\mathbf{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{H}.$$

- Konjugacija:

$$\overline{\mathcal{A}} = (a_0, -a_1, -a_2, -a_3) = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{H}.$$

- Kvaternionsko množenje: Velja zveza: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$. Iz te zveze sledijo formule za posamezno množenje dveh baznih elementov. Od koder izpeljemo

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} &= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k} + a_1b_0\mathbf{i} + a_1b_1\mathbf{i}^2 + a_1b_2\mathbf{ij} + a_1b_3\mathbf{ik} + a_2b_0\mathbf{j} \\ &\quad + a_2b_1\mathbf{ji} + a_2b_2\mathbf{j}^2 + a_2b_3\mathbf{jk} + a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{ki} + a_3b_2\mathbf{kj} + a_3b_3\mathbf{k}^2 \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} \\ &\quad + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)\mathbf{j} + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)\mathbf{k}, \\ \mathcal{A} &= (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{H}, \quad \mathcal{B} = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{H}.\end{aligned}$$

Če kvaternione pišemo v obliki $\mathcal{A} = (a, \mathbf{a})$ in $\mathcal{B} = (b, \mathbf{b})$, se formula za množenje zapiše krajše kot

$$(1) \quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (ab - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, a\mathbf{b} - b\mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Zaradi lažjega razumevanja, bomo kvaternionsko množenje označevali z \cdot , skalarno množenje pa z $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Primer 2.2. Primer uporabe formule za kvaternionsko množenje. Izpeljali bomo formulo za množenje dveh kvaternionov, ki imata skalarni del enak 0. Naj bosta $\mathcal{A} = (0, \mathbf{a})$ in $(0, \mathbf{b})$. Po formuli 1 dobimo

$$(0, \mathbf{a}) \cdot (0, \mathbf{b}) = (-\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, -\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

od koder sledi, da je

$$(2) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\text{scal}((0, \mathbf{a}) \cdot (0, \mathbf{b})).$$

◇

Opomba 2.3. Oznaka $scal(\cdot)$ označuje skalarni del produkta.

Opomba 2.4. Kvaternionu, ki ima skalarni del enak 0, rečemo čisti kvaternion.

Normo kvaterniona \mathcal{A} izračunamo kot

$$||\mathcal{A}|| = \sqrt{\langle \mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}} \rangle}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{H}.$$

Definicija 2.5. Parametrično podana krivulja v \mathbb{R}^d je množica točk, podana s parametrizacijo

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto \mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_d(t))$$

Definicija 2.6. Krivulja \mathbf{r} je *racionalna*, če velja $\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}(t)}{\mathbf{q}(t)}$, kjer sta \mathbf{p} in \mathbf{q} polinoma.

V nadaljevanju se bomo omejili na prostorske krivulje. V tem primeru bodo parametrizacije oblike $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Definicija 2.7. Parametrično podana krivulja \mathbf{r} je *Pitagorejska krivulja* (*P-krivulja*), če je $\mathbf{o}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{||\mathbf{r}(t)||}$ racionalna, oziroma če je $||\mathbf{r}(t)|| = \sigma(t)$ za nek polinom σ .

Definicija 2.8. Z \mathbb{P}_n označimo prostor polinomov stopnje največ n .

3. KONSTRUKCIJA P-KRIVULJE

V tem razdelku bomo opisali postopek, s katerim bomo dobili krivuljo. Za začetek vzemimo poljubnen kvaternionski polinom $\mathcal{A}(t)$, ki naj bo stopnje n . Torej

$$\mathcal{A} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H},$$

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}, \quad t \in I, \quad u, v, p, q \in \mathbb{P}_n.$$

Iz kvaternionskega polinoma $\mathcal{A}(t)$ bomo konstruirali parametrično krivuljo $\mathbf{p}(t)$ in sicer naj bo

$$(3) \quad \mathbf{p}(t) = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\overline{\mathcal{A}}(t).$$

Pokažimo, da je tako dobljena krivulja res parametrična polinomska P-krivulja. Izkaže se, da je stopnje $2n$. Zaradi boljše preglednosti bomo izpustili argument, vendar se zavedamo, da so predpisi odvisni od parametra t . Dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{i}\overline{\mathcal{A}} &= (u\mathbf{i} - v - p\mathbf{k} + q\mathbf{j})(u - v\mathbf{i} - p\mathbf{j} - q\mathbf{k}) \\ &= u^2\mathbf{i} - uv\mathbf{i}^2 - pui\mathbf{j} - uq\mathbf{i}\mathbf{k} - vu + v^2\mathbf{i} + vp\mathbf{j} \\ &\quad + vq\mathbf{k} - p\mathbf{u}\mathbf{k} + p\mathbf{v}\mathbf{k}\mathbf{i} + p^2\mathbf{k}\mathbf{j} + p\mathbf{q}\mathbf{k}^2 + qu\mathbf{j} - qv\mathbf{j}\mathbf{i} - qp\mathbf{j}^2 - q^2\mathbf{j}\mathbf{k} \\ &= u^2\mathbf{i} + uv - p\mathbf{u}\mathbf{k} + uq\mathbf{j} - vu + v^2\mathbf{i} + vp\mathbf{j} + vq\mathbf{k} \\ &\quad - p\mathbf{u}\mathbf{k} + p\mathbf{v}\mathbf{j} - p^2\mathbf{i} - pq + qu\mathbf{j} + qv\mathbf{k} + qp - q^2\mathbf{i} \\ &= (u^2 + v^2 - p^2 - q^2)\mathbf{i} + 2(uq - vp)\mathbf{j} + 2(vq - pu)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Opazimo, da je skalarni del enak 0, zato lahko $\mathbf{p} = \mathcal{A}\mathbf{i}\overline{\mathcal{A}}$ identificiramo s krivuljo v \mathbb{R}^3 . Torej dobimo

$$\mathbf{p} = (u^2 + v^2 - p^2 - q^2, 2(uq + vp), 2(vq - pu)).$$

Ker smo predpostavili, da so v kvaternionskem polinomu $\mathcal{A} = u + v\mathbf{i} + p\mathbf{j} + q\mathbf{k}$ funkcije u, v, p, q polinomi stopnje n , in ker v \mathbf{p} nastopajo le zmnožki dveh od teh

polinomov, vsote in razlike, je dobljena krivulja \mathbf{p} polinom stopnje $2n$. Pokažimo sedaj, da je krivulja \mathbf{p} , dobljena po zgornjem predpisu res P-krivulja. Dokazati moramo, da je $\mathbf{o} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ racionalna krivulja. Vemo že, da je \mathbf{p} polinom. Preverimo, da je tudi $\|\mathbf{p}\|$ polinom. Dobimo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}\|^2 &= \langle \mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}} \rangle = (\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}})(\overline{\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}}) \\ &= \mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}} \\ &= \|\mathcal{A}\|^2 \mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}} \\ &= \|\mathcal{A}\|^2 \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} \\ &= \|\mathcal{A}\|^4.\end{aligned}$$

Torej je $\|\mathbf{p}\| = \|\mathcal{A}\|^2$. Ker je \mathcal{A} sestavljen iz polinomov, je $\|\mathbf{p}\|$ res polinom.

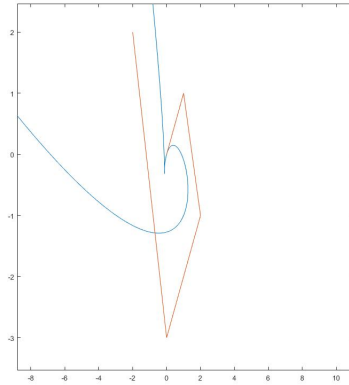
Lema 3.1. *Iz kvaternionskega polinoma $\mathcal{A}(t)$, stopnje n , smo po predpisu $\mathbf{p}(t) = \mathcal{A}(t)i\bar{\mathcal{A}}(t)$ konstruirali P-krivuljo stopnje $2n$.*

3.1. Zapis krivulje v Bernsteinovi bazi. Naš cilj je opisati gibanje kamere okoli nekega fiksnega objekta. Gibanje kamere bo določeno s prostorsko krivuljo, opremljeno z ortonormiranim ogrođjem. Ker želimo, da bo gibanje opisano z racionalnimi funkcijami, moramo za krivuljo izbrati polinomsko/racionalno krivuljo, ki se jo da opremiti z racionalnim ortonormiranim ogrođjem. Želimo si nadzorovati to gibanje in vsaj približno napovedati, kje se bo krivulja gibala. Videli bomo, da tega ne moremo doseči, če polinomsko krivuljo zapišemo v standardni bazi. To bomo dosegli s pomočjo Bernsteinove baze vektorskega prostora \mathbb{P}_n .

Poglejmo si najprej zapis krivulje v standardni bazi. Poljuben polinom \mathbf{p} stopnje n , se v standardni bazi zapiše kot

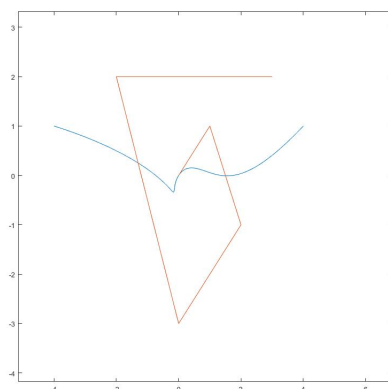
$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i t^i \quad \text{kjer so } \mathbf{p}_i \text{ točke v } \mathbb{R}^3.$$

Poglejmo si nekaj preprostih primerov, kjer primerjamo izbrane točke \mathbf{p}_i in obliko dobljene krivulje $\mathbf{p}(t)$.



a

Na slikah ?? in ?? so z oranžno barvo narisane in povezane izbrane točke \mathbf{p}_i , z modro pa je prikazana dobljena krivulja $\mathbf{p}(t)$, zapisana v standardni bazi. Vidimo,



SLIKA 1. desna slika

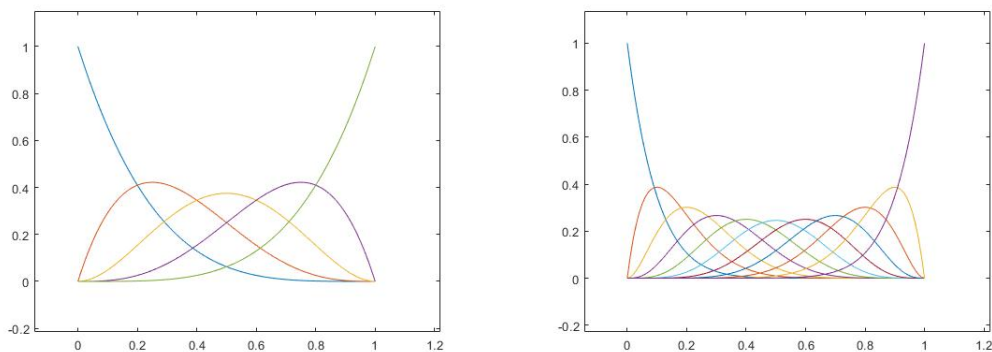
da med izbranimi točkami in obliko krivulje ni vidne povezave.

Poglejmo si, kako je definirana Bernsteinova baza in kakšno povezavo imajo točke z obliko krivulje.

Definicija 3.2. Bernsteinovi bazni polinomi, stopnje n , so

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

kjer je $t \in [0, 1]$.



Sliki ?? in ?? prikazujeta Bernsteinove bazne polinome za $n = 4$ in $n = 10$.

Trditev 3.3. *Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n , tvorijo bazo za \mathbb{P}_n .*

Predno se lotimo dokaza, zapišimo še lemi, ki ju bomo potrebovali v dokazu.

Lema 3.4. *Velja naslednja enakost:*

$$(4) \quad \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} = \binom{n}{j} \binom{j}{i}.$$

Dokaz. Razpišemo vsako stran posebej in ju primerjamo. Leva stran nam da

$$\frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(j-i)!(n-i-j+i)!} = \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!}.$$

Desna stran nam da

$$\frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{j!}{i!(j-i)!} = \frac{n!}{(n-j)!i!(j-i)!}.$$

Vidimo, da enačba drži. □

Lema 3.5. *Bernsteinovi bazni polinomi B_i^n se v potenčni bazi izražajo kot*

$$(5) \quad B_i^n(t) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} t^j.$$

Dokaz. Za dokaz uporabimo binomski izrek, ki pove razvoj potence binoma in sicer

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

Zapišimo Bernsteinov bazni polinom po definiciji in upoštevajmo razvoj potence binoma. Torej

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} 1^{n-i-j} (-t)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} (-1)^j t^{i+j}. \end{aligned}$$

Zamaknemo indeks v vsoti in dobimo

$$B_i^n(t) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} (-1)^{j-i} t^j.$$

Upoštevamo enačbo 4 in dobimo

$$B_i^n(t) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} t^j,$$

kar zaključuje dokaz. □

Dokaz. Ker je število Bernsteinovih baznih polinomov enako dimenziji prostora \mathbb{P}_n , je potreba dokazati le, da so med sabo linearno neodvisni. Torej pokazati moramo, da je

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_i = 0, \quad \forall i.$$

Linearno neodvisnost bomo pokazali tako, da bomo zapisali preslikavo, ki bo preslikala standardno bazo za \mathbb{P}_n v Bernsteinovo bazo. Ker vemo da je standardna baza linearno neodvisna, bo sledilo da so neodvisni tudi Bernsteinovi bazni polinomi. Uporabimo lemo 3.5 in zapišemo

$$\begin{bmatrix} B_0^n(t) \\ B_1^n(t) \\ \vdots \\ B_n^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} & -\binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & (-1)^n \binom{n}{n} \\ 0 & \binom{n}{1} \binom{1}{1} & -\binom{n}{2} \binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \binom{n}{1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}.$$

Pokazati moramo, da je prehodna matrika obrljiva. Označimo jo z A . Ker je A zgornjetrikotna, moramo pokazati le, da so diagonalni elementi neničelni, kar pa očitno drži. Torej obstaja inverzna matrika A^{-1} , za katero velja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} B_0^n(t) \\ B_1^n(t) \\ \vdots \\ B_n^n(t) \end{bmatrix}.$$

Torej so Bernsteinovi bazni polinomi res linearno neodvisni in tvorijo bazo za \mathbb{P}_n . \square

Poglejmo si nekaj lastnosti Bernsteinovih polinomov.

- Bernsteinovi bazni polinomi so nenegativni na intervalu $[0, 1]$.
- Velja:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Bernsteinovi bazni polinomi so simetrični. Torej velja

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

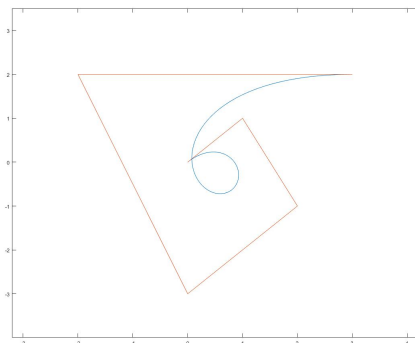
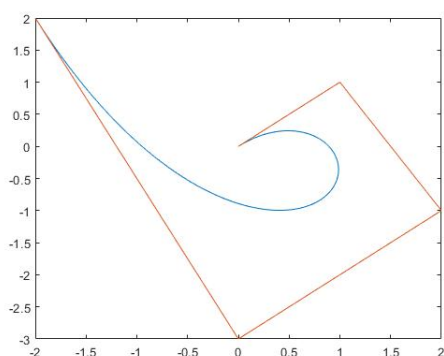
- Prva in zadnja točka določata začetek in konec krivulje, medtem ko umesne točke določajo obliko krivulje.

Ker si želimo nadzorovati obliko krivulje, bo za nas najpomembnejša zadnja lastnost. Le to prikazujeta sliki ?? in ??. SLIKE

Zapišimo sedaj kvaternionski polinom $\mathcal{A}(t)$ v Bernsteinovi bazi. Dobimo

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{i=0}^n \mathcal{A}_i B_i^n(t),$$

kjer so $\mathcal{A}_i \in \mathbb{H}$ in B_i^n Bernsteinovi bazni polinomi. Točkam \mathcal{A}_i rečemo kontrolne točke, te pa tvorijo tako imenovani kontrolni poligon, ki določa obliko krivulje.



Sliki ?? in ?? nam prikazujeta krivuljo, dobljeno iz kontrolnih točk in zapisano v Bernsteinovi bazi. Vidimo, da če si narišemo kontrolni poligon (oranžna barva), se krivulja (modra barva) začne v prvi kontrolni točki in konča v zadnji. Pot krivulje med tema dvema točkama, pa poteka po notranjosti mnogokotnika, ki ga določa kontrolni poligon.

Primer 3.6. Za $n = 2$ dobimo

$$B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Če razpišemo za vsak i dobimo

$$B_0^2(t) = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = (1-t)^2,$$

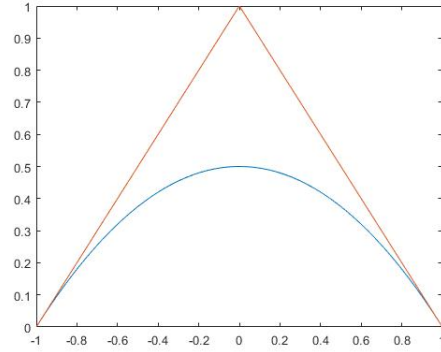
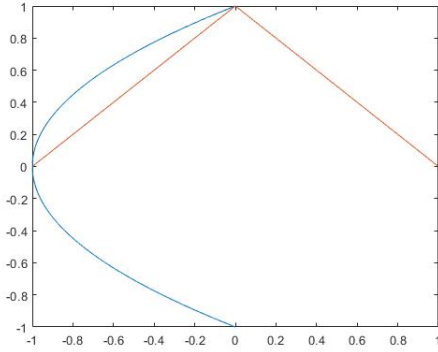
$$B_1^2(t) = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = 2t(1-t),$$

$$B_2^2(t) = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = t^2.$$

Torej lahko kvaternionski polinom \mathcal{A} stopnje 2 zapišemo kot

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_1 2t(1-t) + \mathcal{A}_2 t^2,$$

kjer so $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathbb{H}$.



Na zgornjih dveh slikah sta prikazani krivulji, ki jih dobimo, če vzamemo enake kontrolne točke in določimo krivuljo v standardni bazi (leva slika) in v Bernsteinovi bazi (desna slika). Kot smo že ugotovili zgoraj, je dobljena oblika lepša, če je krivulja zapisana v Bernsteinovi bazi. Nadzorujemo lahko začetno in končno točko, ter obliko krivulje. \diamond

3.2. Določitev kontrolnih točk P-krivulj. V tem razdelku si bomo pogledali, kako določiti kontrolne točke za krivuljo, zapisano v Bernsteinovi bazi. Vprašanje je, kakšni naj bodo začetni koeficienti polinoma $\mathcal{A}(t)$, če določimo koeficiente krivulji $\mathbf{p}(t)$. Torej, izbrane imamo točke, ki nam določajo obliko poti krivulje. Kakšni naj bodo potem koeficienti začetnega polinoma $\mathcal{A}(t)$?

Primer 3.7. Poračunajmo Bernsteinove bazne polinome za $n = 1$. Dobimo

$$B_i^1(t) = \binom{1}{i} t^i (1-t)^{1-i}, \quad i = 0, 1.$$

Iz česar sledi

$$B_0^1(t) = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} = 1-t,$$

$$B_1^1(t) = \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} = t.$$

Torej se kvaternionski polinom $\mathcal{A}(t)$ prve stopnje zapiše kot

$$\mathcal{A}(t) = \mathbf{A}_0(1-t) + \mathbf{A}_1 t.$$

Rekli smo, da je $\mathbf{p}(t) = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\overline{\mathcal{A}(t)}$. Vemo, da se splošni polinom stopnje n , v Bernsteinovi bazi, zapiše kot:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{p}_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k.$$

Pokazali smo, da če je \mathcal{A} stopnje n , bo $\mathbf{p} = \mathcal{A}\mathbf{i}\overline{\mathcal{A}}$ stopnje $2n$. Bernsteinovi bazni polinomi za $n = 2$ so

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)^2 \\ B_1^2(t) &= 2t(1-t) \\ B_2^2(t) &= t^2. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da se $\mathbf{p}(t)$ zapiše kot

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{p}_i B_i^2 = \mathbf{p}_0(1-t)^2 + \mathbf{p}_1 2t(1-t) + \mathbf{p}_2 t^2,$$

kjer so $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{H}$. Razpišemo krivuljo $\mathbf{p}(t)$ po definiciji in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\overline{\mathcal{A}(t)} \\ &= (\mathbf{A}_0(1-t) + \mathbf{A}_1 t)\mathbf{i}(\overline{\mathbf{A}_0}(1-t) + \overline{\mathbf{A}_1} t) \\ &= (\mathbf{A}_0(1-t) + \mathbf{A}_1 t)(\mathbf{i}\overline{\mathbf{A}_0}(1-t) + \mathbf{i}\overline{\mathbf{A}_1} t) \\ &= \mathcal{A}_0 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_0}(1-t)^2 + \mathcal{A}_0 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_1}(1-t)t + \mathcal{A}_1 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_0}t(1-t) + \mathcal{A}_1 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_1}t^2 \\ &= \mathcal{A}_0 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_0}(1-t)^2 + \left(\frac{1}{2}\mathcal{A}_0 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_1} + \frac{1}{2}\mathcal{A}_1 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_0} \right) 2t(1-t) + \mathcal{A}_1 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_1}t^2. \end{aligned}$$

Primerjamo istoležne koeficiente in dobimo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathcal{A}_0 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_0}, \\ \mathbf{p}_1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_1} + \mathcal{A}_1 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_0}), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathcal{A}_1 \mathbf{i}\overline{\mathcal{A}_1}. \end{aligned}$$

◇

Z podobnim računanjem pridemo do kontrolnih točk P-krivulj višjih stopenj.

Primer 3.8. Poglejmo si primer za $n = 2$. Vemo, da bo krivulja \mathbf{p} stopnje 4. Imamo kvaternionski polinom

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_1 2t(1-t) + \mathcal{A}_2(1-t)^2.$$

Želimo izračunati kontrolne točke za krivuljo

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^4 \mathbf{p}_k B_k^4(t).$$

Kontrolne točke izračunamo po enakem postopku kot v primeru 3.7 . Dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_0}, \\ \mathbf{p}_1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_1} + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_0}), \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{1}{6} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_2} + 4\mathcal{A}_1 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_1} + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_0}), \\ \mathbf{p}_3 &= \frac{1}{2} (\mathcal{A}_1 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_2} + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_1}), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_2}. \end{aligned}$$

◇

Sedaj, ko imamo izračunane kontrolne točke, lahko iz njih izračunamo začetne koeficiente polinoma \mathcal{A} . Na primer, lahko si izberemo začetno in končno točko krivulje $\mathbf{p}(0)$ in $\mathbf{p}(1)$, od koder določimo kvaterniona \mathcal{A}_0 in \mathcal{A}_n , kot je razloženo v nadaljevanju.

Primer 3.9. Poglejmo si primer za $n = 1$. Nastavimo začetno in končno točko in dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_0} &= \mathbf{p}(0), \\ \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_1} &= \mathbf{p}(1). \end{aligned}$$

Iz teh dveh enačb lahko izrazimo \mathcal{A}_0 in \mathcal{A}_1 in dobimo začetni kvaternionski polinom \mathcal{A} . Podobno za polinome višjih stopenj, kjer si lahko izberemo začetno in končno točko ter še dodatno točko. ◇

Trditev 3.10. *Naj bo $\mathcal{A} \in \mathbb{H}$, \mathcal{C} čisti ne ničelni kvaternion. Rešitev enačbe*

$$(6) \quad \mathcal{A} \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}$$

je

$$(7) \quad \mathcal{A}(\phi) = \sqrt{\|\mathcal{C}\|} \frac{\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + \mathbf{i}}{\|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + \mathbf{i}\|} \mathcal{U}(\phi),$$

kjer je $\mathcal{U}(\phi) = (\cos \phi + \mathbf{i} \sin \phi)$ in ϕ poljuben kot.

Dokaz. Dokažimo najprej za poseben primer, ko je $\mathcal{U} = 1$. Poračunajmo levo stran enačbe 6 in pokažimo da je enaka desni. Torej

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}i\overline{\mathcal{A}} &= \left(\sqrt{\|\mathcal{C}\|} \frac{\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i}{\|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|} \right) i \left(\sqrt{\|\mathcal{C}\|} \frac{\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i}{\|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|} \right) \\
&= \frac{\|\mathcal{C}\|}{\|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|^2} \left(\frac{c_1 i + c_2 j + c_3 k + i\|\mathcal{C}\|}{\|\mathcal{C}\|} \right) i \left(\frac{-c_1 i - c_2 j - c_3 k - i\|\mathcal{C}\|}{\|\mathcal{C}\|} \right) \\
&= \frac{1}{\|\mathcal{C}\| \|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|^2} (-c_1 - c_2 k + c_3 j - \|\mathcal{C}\|) (-c_1 i - c_2 j - c_3 k - i\|\mathcal{C}\|) \\
&= \frac{1}{\|\mathcal{C}\| \|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|^2} (c_1 i + c_2 j + c_3 k + c_1 \|\mathcal{C}\| i + c_1 c_2 j - c_2^2 i - c_2 c_3 + c_2 \|\mathcal{C}\| j + \\
&\quad + c_1 c_3 k + c_2 c_3 - c_3^2 i + c_3 \|\mathcal{C}\| k + c_1 \|\mathcal{C}\| i + c_2 \|\mathcal{C}\| j + c_3 \|\mathcal{C}\| k + \|\mathcal{C}\|^2 i) \\
&= \frac{1}{\|\mathcal{C}\| \|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|^2} ((c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + \|\mathcal{C}\|^2) i + 2c_1 c_3 k + 2c_1 c_2 j + \|\mathcal{C}\| (2c_1 i + 2c_2 j + 2c_3 k)) \\
&= \frac{1}{\|\mathcal{C}\| \|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|^2} (2c_1 (c_1 i + c_2 j + c_3 k) + 2\|\mathcal{C}\| (c_1 i + c_2 j + c_3 k)) \\
&= \frac{1}{\|\mathcal{C}\| \|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|^2} 2(c_1 + \|\mathcal{C}\|) \mathcal{C} \\
&= \frac{\|\mathcal{C}\|}{\|\mathcal{C} + \|\mathcal{C}\| i\|^2} 2(c_1 + \|\mathcal{C}\|) \mathcal{C} \\
&= \frac{\|\mathcal{C}\|}{\|(c_1 + \|\mathcal{C}\|) i + c_2 j + c_3 k\|^2} 2(c_1 + \|\mathcal{C}\|) \mathcal{C} \\
&= \frac{2\|\mathcal{C}\| c_1 + 2\|\mathcal{C}\|^2}{(c_1 + \|\mathcal{C}\|)^2 + c_2^2 + c_3^2} \mathcal{C} \\
&= \frac{2\|\mathcal{C}\| c_1 + 2\|\mathcal{C}\|^2}{c_1^2 + 2c_1 \|\mathcal{C}\| + \|\mathcal{C}\|^2 + c_2^2 + c_3^2} \mathcal{C} \\
&= \mathcal{C}
\end{aligned}$$

Sedaj pa preverimo, da je rešitev tudi $\mathcal{A} = \sqrt{\|\mathcal{C}\|} \frac{\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i}{\|\frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}\|} + i\|} (\cos \phi + i \sin \phi)$ za vsak ϕ .

Če za poljuben kvaternionski polinom velja $\mathcal{U}i\overline{\mathcal{U}} = i$ in je \mathcal{A} rešitev 6, potem tudi $\mathcal{A}\mathcal{U}$ reši 6. Preverimo, da je $\mathcal{U}(\phi)$ res take oblike. Dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}i\overline{\mathcal{U}} &= (\cos \phi + i \sin \phi) i (\cos \phi - i \sin \phi) \\
&= (\cos \phi i - \sin \phi) (\cos \phi - i \sin \phi) \\
&= \cos^2 \phi i + \cos \phi \sin \phi - \cos \phi \sin \phi + i \sin^2 \phi \\
&= i
\end{aligned}$$

in zato trditev velja. □

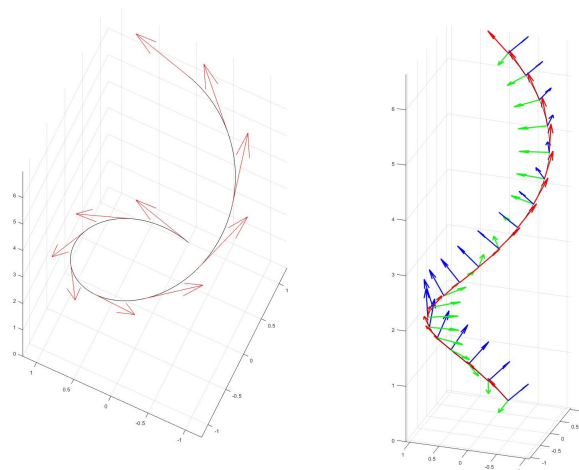
4. OGRODJA

4.1. Usmerjena in prikrojena ogrodja. Pogledali si bomo, kakšna je razlika med usmerjenimi in prikrojenimi ogrodji.

Definicija 4.1. Ogrodje $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je prikrojeno, če se \mathbf{e}_1 v vsaki točki krivulje ujema z enotsko tangento, \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 pa v vsaki točki napenjata normalno ravnino.

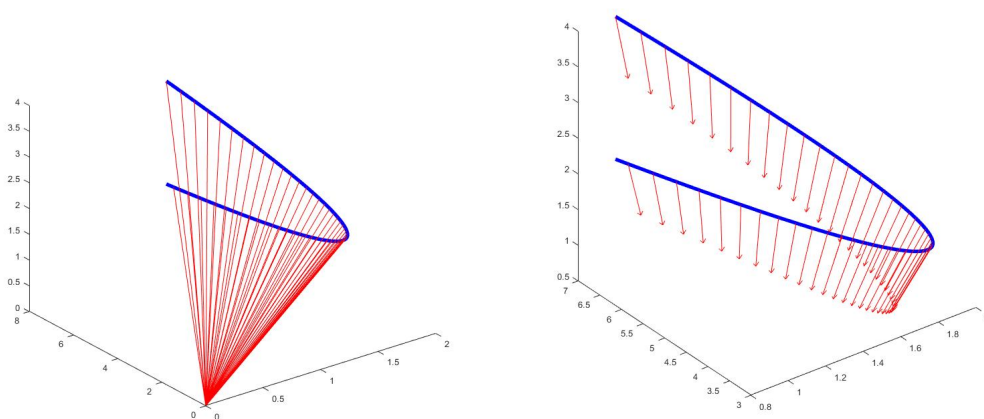
Primer 4.2. Nam najbolj znan primer prikrojenega ogrodja je Frenetovo ogrodje. To ogrodje, ki pripada parametrični krivulji $\mathbf{r}(t)$, označimo z $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ in ga izračunamo po sledečih formulah:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}$$



Na sliki ?? je prikazan tangentni vektor, na sliki ?? pa krivulja z Frenetovim ogrodjem. \diamond

Definicija 4.3. Ogrodje $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je usmerjeno, če \mathbf{e}_1 v vsaki točki krivulje kaže proti izhodišču koordinatnega sistema.



Na zgornjih slikah vidimo krivuljo in vektor \mathbf{e}_1 , ki vedno kaže proti izhodišču.

Opomba 4.4. Vektor \mathbf{e}_1 imenujemo polarni indikator.

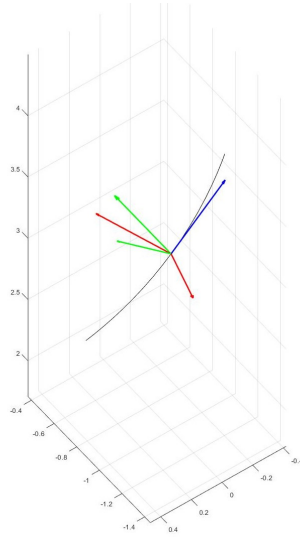
Sedaj, ko smo si pogledali obe vrsti ogrodij, je seveda jasno, katero ogrodje si bomo izbrali pri naši konstrukciji. Ker si želimo opisati gibanje kamere, ki bo ves čas

potovanja po krivulji snemala nek fiksni objekt v izhodišču, si izberemo usmerjeno ogrodje in položaj kamere orientiramo skladno z danim ogrođjem.

4.2. Rotacijsko minimizirajoča ogrodja. Pojem se povezuje z dejstvom, da si želimo čim manj nepotrebnih rotacij samega ogrodja okoli izbrane osi. Bolj natančno, vektorja \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 , ki razpenjata normalno ravnino, naj nimata nobene nenadne rotacije okoli vektorja \mathbf{e}_1 . Poglejmo si primer na Frenetovem ogrođju.

Primer 4.5. Če določimo krivuljo, je s tem določem tudi njen tangentni vektor. Kaj pa druga dva vektorja, ki določata ogrodje? Prikrojeno ogrodje je definirano tako, da vektorja v normalni ravnini nista fiksirana. Problem je v tem, da ju lahko zarotiramo za poljuben kot, tako dobljeni vektorji, pa še vedno tvorijo ogrodje. Torej vektorja \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 lahko izberemo kot poljubni rotaciji vektorjev \mathbf{N} in \mathbf{B} , za poljuben kot ϕ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$



Na sliki ?? vidimo tak primer. Modri tangentni vektor \mathbf{T} , in zelena \mathbf{N} in \mathbf{B} tvorijo prikrojeno ogrodje. Vendar prav tako tvorijo prikrojeno ogrodje moder vektor \mathbf{T} in rdeča \mathbf{N} in \mathbf{B} . \diamond

Torej, izmed vseh možnih ortonormiranih ogrođij, ki jih lahko konstruiramo na krivulji, nas bodo zanimala le taka, ki nam zagotovijo čim manj rotacij v ravnini, ki je pravokotna na \mathbf{e}_1 .

Vsako ogrodje ima neko kotno hitrost ω , ki nam pove, kako se ogrodje spreminja, oziroma kako se spreminjata vektorja \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 .

Definicija 4.6. Naj bo $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ogrodje in ω pripadajoča kotna hitrost. Potem je ω definirana z naslednjimi diferencialnimi enačbami:

$$(8) \quad \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}(t) = \omega(t) \times \mathbf{e}_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ker se bomo v nadaljevanju ukvarjali samo z usmerjenimi ogrođji, si pogledjmo povezavo med le temi.

Definicija 4.7. Usmerjeno ogrodje $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je rotacijsko minimizirajoče, če velja $\langle \omega, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$.

Trditev 4.8. Ogrodje $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, definirano kot

$$(9) \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathcal{A}j\bar{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}},$$

je ortonormirana baza prostora \mathbb{R}^3 .

Opomba 4.9. Ogrodje 9 imenujemo Euler-Rodriguesovo ogrodje.

Dokaz. Pokazati moramo, da so skalarni produkti $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ enaki 0, za $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$. Vemo, da so skalarni deli $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ enaki 0, zato lahko uporabimo formulo 2 za skalarni produkt dveh čistih kvaternionov. Dobimo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle &= -\text{scal}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= -\text{scal}(\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}\mathcal{A}j\bar{\mathcal{A}}) \\ &= -\|\mathcal{A}\|^2 \text{scal}(\mathcal{A}ij\bar{\mathcal{A}}) \\ &= -\|\mathcal{A}\|^2 \text{scal}(\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogno pokažemo, da je $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$. Izračunajmo še dolžie vektorjev $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Za \mathbf{e}_1 velja

$$\begin{aligned} \mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}} &= \|\mathcal{A}\|^2 \mathcal{A}i^2\bar{\mathcal{A}} \\ &= -\|\mathcal{A}\|^4. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle &= -\text{scal}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \\ &= -\text{scal}\left(-\frac{1}{\|\mathcal{A}\|^4} \|\mathcal{A}\|^4\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Na isti način pokažemo, da velja $\|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = 1$, od koder sledi, da je res ortonormirana baza v \mathbb{R}^3 . \square

Trditev 4.10. Recimo, da imamo ogrodje definirano kot zgoraj. Usmerjeno ogrodje je rotacijsko minimizirajoče natanko tedaj, ko je $\text{scal}(\mathcal{A}'i\bar{\mathcal{A}}) \equiv 0$.

Dokaz. Želimo pokazati, da velja

$$(10) \quad \langle \omega, \mathbf{e}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \text{scal}(\mathcal{A}'i\bar{\mathcal{A}}) = 0.$$

Razvijemo ω po bazi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$: $\omega = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$. Torej velja

$$\langle \omega, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \omega_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \omega_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \omega_3 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle = \omega_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \omega_2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + \omega_3 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle$$

Ker so $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortogonalni, je $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$ in $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$. Ostane nam

$$\langle \omega, \mathbf{e}_1 \rangle = \omega_1 \|\mathbf{e}_1\|^2 = \omega_1,$$

od koder vidimo, da je $\langle \omega, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $\omega_1 = 0$. Po definiciji velja

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}(t) = \omega(t) \times \mathbf{e}_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Razpišimo enačbe posebej. Za $i = 1$ dobimo

$$\mathbf{e}'_1 = \omega \times \mathbf{e}_1 = (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1 = \omega_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\omega_2 \mathbf{e}_3 + \omega_3 \mathbf{e}_2.$$

Celotno enačbo skalarno pomnožimo najprej z \mathbf{e}_2 , nato z \mathbf{e}_3 in upoštevamo da so $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortogonalni. Dobimo:

$$\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \omega_3, \quad \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_3 \rangle = -\omega_2.$$

Za $i = 2$ velja

$$\mathbf{e}'_2 = \omega \times \mathbf{e}_2 = (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_2 = \omega_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \omega_1 \mathbf{e}_3 - \omega_3 \mathbf{e}_1.$$

Podobno kot prej enačbo skalarno pomnožimo z \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_3 . Dobimo

$$\langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_1 \rangle = -\omega_3, \quad \langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \omega_1.$$

Za $i = 3$ velja

$$\mathbf{e}'_3 = \omega \times \mathbf{e}_3 = (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_3 = \omega_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \omega_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\omega_1 \mathbf{e}_2 + \omega_2 \mathbf{e}_1$$

Ponovno enačbo skalarno pomnožimo, tokrat z \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 . Dobimo

$$\langle \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}_1 \rangle = \omega_2, \quad \langle \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}_2 \rangle = -\omega_1$$

Dobljene rezultate združimo in dobimo zveze

$$(11) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3 \rangle = -\langle \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}_2 \rangle, \\ \omega_2 &= \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_3 \rangle = -\langle \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}_1 \rangle, \\ \omega_3 &= \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2 \rangle = -\langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Na tej točki določimo naše ogrodje.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathcal{A}j\bar{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}$$

Vemo, da tvorijo ortonormirano bazo. Vemo tudi, da ima produkt $\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}$ skalarni del enak 0. Enako poračunamo za $\mathcal{A}j\bar{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}}$. Od tu sledi:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3 \rangle = -skal \left((\mathcal{A}j\bar{\mathcal{A}})' \cdot (\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}}) \right) \\ &= -skal \left(\left(\mathcal{A}'j\bar{\mathcal{A}} + \mathcal{A}j\bar{\mathcal{A}}' \right)' \cdot (\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}}) \right) \\ &= -skal \left(\left(\mathcal{A}'j\bar{\mathcal{A}}\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}} + \mathcal{A}j\bar{\mathcal{A}}'\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}} \right) \right) \\ &= -skal \left(\|\mathcal{A}\|^2 \mathcal{A}'i\bar{\mathcal{A}} + \overline{(\mathcal{A}'j\bar{\mathcal{A}})(\mathcal{A}k\bar{\mathcal{A}})} \right) \\ &= -skal \left(\|\mathcal{A}\|^2 \mathcal{A}'i\bar{\mathcal{A}} + \overline{(\|\mathcal{A}\|^2 \mathcal{A}'i\bar{\mathcal{A}})} \right) \\ &= -skal \left(\|\mathcal{A}\|^2 \mathcal{A}'i\bar{\mathcal{A}} \right) - skal \left(\left(\|\mathcal{A}\|^2 \mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}' \right) \right) \\ &= -2\|\mathcal{A}\|^2 skal \left(\mathcal{A}'i\bar{\mathcal{A}} \right). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\omega_1 = 0 \Leftrightarrow skal \left(\mathcal{A}'i\bar{\mathcal{A}} \right) = 0,$$

kar zaključuje dokaz. \square

Opomba 4.11. V splošnem to ogrodje ne bo rotacijsko minimizirajoče, če poljubeno izberemo kvaternionski polinom \mathcal{A} . Iz \mathcal{A} lahko izpeljemo novo ogrodje, ki bo tudi usmerjen in bo rotacijsko minimizirajoče. Definiramo nov kvaternionski polinom \mathcal{B} s predpisom: $\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{Q}(t)$, kjer je \mathcal{Q} tak kvaternionski polinom, da velja $\mathcal{Q}(t)i\overline{\mathcal{Q}(t)} = \left(\mathcal{Q}(t)\overline{\mathcal{Q}(t)} \right) i$. Tako dobimo:

$$\mathcal{B}i\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{A}\mathcal{Q}i\overline{\mathcal{Q}\mathcal{A}} = \mathcal{A}\mathcal{Q}\overline{\mathcal{Q}}i\bar{\mathcal{A}} = \|\mathcal{Q}\|^2 \mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}.$$

Torej bo smer vektorja $\frac{\mathcal{B}i\bar{\mathcal{B}}}{\|\mathcal{B}\|}$ enaka smeri vektorja $\frac{\mathcal{A}i\bar{\mathcal{A}}}{\|\mathcal{A}\|}$, kar pomeni, da bo ogrodje res usmerjeno ogrodje. Torej \mathcal{Q} določimo tako, da bo $\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{Q}$ določalo rotacijsko minimizirajoče ogrodje. S pomočjo kvaternionskega polinoma \mathcal{Q} , lahko dobimo več prostih parametrov pri konstrukciji krivulje. Višja kot bo stopnja \mathcal{Q} , več le teh dobimo. V nadaljevanju bomo zaradi lažje analize predpostavili, da je $\mathcal{Q} = 1$.

5. INTERPOLACIJSKI PROBLEM

V tem razdelku bomo opisali interpolacijski problem, ki ga želimo interpolirati. Opisali bomo konkreten postopek, kako dobiti P-krivuljo iz začetnih podatkov. Poiškati želimo P-krivuljo, $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, po predpisu $\mathbf{p}(t) = \mathcal{A}(t)i\bar{\mathcal{A}}(t)$, kjer je \mathcal{A} nek kvaternionski polinom. Za krivuljo \mathbf{p} naj velja, da je začetna točka enaka $\mathbf{p}(0) = P_0$ in končna $\mathbf{p}(1) = P_1$ in bo njeno rotacijsko minimizirajoče usmerjeno ogrodje pri $t = 0$ enako (e_1^z, e_2^z, e_3^z) , pri $t = 1$ pa (e_1^k, e_2^k, e_3^k) , pri čemer velja $e_1^z = \frac{\mathbf{p}(0)}{\|\mathbf{p}(0)\|}$ in $e_1^k = \frac{\mathbf{p}(1)}{\|\mathbf{p}(1)\|}$. Izkaže se, da če vzamemo linearni kvaternionski polinom $\mathcal{A}(t)$, potem ne moremo konstruirati rotacijsko minimizirajočega usmerjenega ogrodja ???. Zato bomo vzeli kvadraten kvaternionski polinom $\mathcal{A}(t)$.

Najprej moramo rešiti enačbi, ki nam ju določata robna položaja. Prvi robni pogoj $\mathbf{p}(0) = P_0$ nam da enačbo $\mathcal{A}_1 i \bar{\mathcal{A}}_1 = P_0$, katere rešitev je po 7 enaka

$$(12) \quad \mathcal{A}_1(\phi_0) = \sqrt{\|P_0\|} \frac{\frac{P_0}{\|P_0\|} + i}{\|\frac{P_0}{\|P_0\|} + i\|} (\cos \phi_0 + i \sin \phi_0),$$

kjer je ϕ_0 poljuben kot. Drugi robni pogoj $\mathbf{p}(1) = P_1$ nam da enačbo $\mathcal{A}_2 i \bar{\mathcal{A}}_2 = P_1$, katere rešitev je po 7 enaka

$$(13) \quad \mathcal{A}_2(\phi_2) = \sqrt{\|P_1\|} \frac{\frac{P_1}{\|P_1\|} + i}{\|\frac{P_1}{\|P_1\|} + i\|} (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2),$$

kjer je ϕ_2 poljuben kot.

Zadostiti moramo pogoj za rotacijsko minimizirajoče ogrodje 4.10.

Trditev 5.1. *Naj bo $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_1 2(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2$. Za krivuljo, definirano kot*

$$\mathbf{p}(t) = \mathcal{A}(t)i\bar{\mathcal{A}}(t)$$

obstaja rotacijsko minimizirajoče usmerjeno ogrodje natanko tedaj, ko bo

$$(14) \quad \mathcal{A}_1 i \bar{\mathcal{A}}_1 = \text{vect}(\mathcal{A}_2 i \bar{\mathcal{A}}_0).$$

Dokaz. Dokaz trditve je zelo zahteven in obsežen, zato ga izpustimo. Najdemo ga lahko v ???. Oglejmo si le, kako pridemo do iskanega rotacijsko minimizirajočega ogrodja. Kot smo že omenili v opombi 4.11, za dan kvaternionski polinom \mathcal{A} , obstaja ER ogrodje, definiramo kot

$$e_1 = \frac{\mathcal{B}i\bar{\mathcal{B}}}{\|\mathcal{B}\|}, \quad e_2 = \frac{\mathcal{B}j\bar{\mathcal{B}}}{\|\mathcal{B}\|}, \quad e_3 = \frac{\mathcal{B}k\bar{\mathcal{B}}}{\|\mathcal{B}\|},$$

kjer je $\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{Q}$ in za \mathcal{Q} velja $\mathcal{Q}i\bar{\mathcal{Q}} = \|\mathcal{Q}\|i$. V ?? izvemo, da je \mathcal{Q} definiran kot $\mathcal{Q}(t) = q_0 - iq_1$, kjer sta q_0 in q_1 definirana kot

$$(15) \quad \begin{aligned} q_0(t) &= \|\mathcal{A}_0\|^2(1-t)^2 + \text{scal}(\bar{\mathcal{A}}_0\mathcal{A}_1)2t(1-t) + \|\mathcal{A}_1\|^2t^2, \\ q_1(t) &= \langle \bar{\mathcal{A}}_0(\mathcal{A}_1 2t(1-t) + \mathcal{A}_2 t^2), (0, 1, 0, 0) \rangle. \end{aligned}$$

□

Iz enačbe 14 poračunamo še koeficient \mathcal{A}_1 . Po 7 je ta enaka

$$(16) \quad \mathcal{A}_1(\phi_2) = \sqrt{||b||} \frac{\frac{b}{||b||} + \mathbf{i}}{||\frac{b}{||b||} + \mathbf{i}||} (\cos \phi_1 + \sin \phi_1),$$

kjer je ϕ_1 poljuben kot in $b = \text{vect}(\mathcal{A}_2 \mathbf{i} \overline{\mathcal{A}_0})$.

6. NUMERIČNI REZULTATI

V tem poglavju si bomo ogledali nekaj numeričnih rezultatov, ki jih bomo dobili tako, da predpišemo začetni in končni položaj kamere in sledimo postopku opisanem v poglavju 5. Če interpoliramo podatke, opisane v poglavju ??, potem dobimo tri proste parametre ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 , ki nam bodo določali končno krivuljo.

6.1. Primer 1.

6.2. Primer 2.

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

LITERATURA