UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Maruša Oražem

Konstrukcija gibanja kamere s pomočjo Pitagorejskih krivulj

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Marjetka Knez

Ljubljana, 2020

Kazalo

Konstrukcija gibanja kamere s pomočjo Pitagorejskih krivulj

Povzetek

Construction of camera motion with help of Pitagorean curves

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

2. Pojmi

Definicija 2.1. Množica kvaternioniv $\mathbb{H}$ je 4-razsežen vektorski prostor z bazo $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Za $h \in \mathbb{H}$ pišemo: $h = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ oziroma $h = (a, b, c, d)$, kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Poglejmo si osnovne operacije v množici $\mathbb{H}$:
Seštevanje:

$$\begin{array}{lcl} h_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathbb{H} & \rightarrow & h_1 + h_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) = \\ h_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{H} & & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k} \end{array}$$

Skalarno množenje:

$$\lambda \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \lambda h = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = \lambda a + \lambda b\mathbf{i} + \lambda c\mathbf{j} + \lambda d\mathbf{k}$$

Konjugacija:

$$h \in \mathbb{H} \quad \rightarrow \quad \overline{h} = (a, -b, -c, -d) = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

Kvaternionsko množenje:
Velja zveza: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$. Iz te zveze sledijo formule za posamezno množenje dveh baznih elementov. Kvaternion lahko zapišemo kot skalarni in vektorski del. Tako dobimo formulo za množenje dveh kvaternionov:

$$\begin{aligned} &A, B \in \mathbb{H} \\ &A = (a, \boldsymbol{a}), \quad a, b \in \mathbb{R} \\ &B = (b, \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3 \\ A \cdot B = &(ab - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle, a\boldsymbol{b} - b\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

Zaradi lažjega razumevanja, bom kvaternionsko množenje označevala z $\cdot$, skalarno množenje pa $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Primer 2.2. Primer uporabe formule za kvaternionsko množenje. Izpeljali bomo formulo za skalarno množenje dveh kvaternionov, ki imata skalarni del enak 0. Vemo:

$$A \cdot B = (ab - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle, a\boldsymbol{b} - b\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

Naj bosta sedaj $A = (0, \boldsymbol{a})$ in $(0, \boldsymbol{b})$. Dobimo:

$$(0, \boldsymbol{a}) \cdot (0, \boldsymbol{b}) = (-\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle, -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

Iz česar sledi:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = -scal\left((0, \boldsymbol{a}) \cdot (0, \boldsymbol{b})\right)$$

$\diamondsuit$

Norma kvaterniona:

$$h \in \mathbb{H} \quad \rightarrow ||h|| = \sqrt{\langle h, \overline{h} \rangle}$$

Definicija 2.3. Krivulja $\boldsymbol{r}$ je *racionalna*, če velja $\boldsymbol{r}(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, kjer sta p in q polinoma.

Definicija 2.4. *Parametrično podana krivulja* v $\mathbb{R}^n$ je množica točk, podana s parametrizacijo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \boldsymbol{r}(t) \end{aligned}$$

Primer 2.5. n = 3:

$$\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$\diamondsuit$

Definicija 2.6. Parametrično podana krivulja $\boldsymbol{r}$ je *Pitagorejska krivulja (P-krivulja)*, če je $\boldsymbol{o}(t) = \frac{\boldsymbol{r}(t)}{||\boldsymbol{r}(t)||}$.

Opomba 2.7. Definicija pove (za n = 3), da je $||\boldsymbol{r}(t)|| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$ polinom, oziroma $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = \sigma^2$ za nek σ.

3. NEVEM

3.1. **Konstrukcija P-krivulje.**

V tem razdelku bom opisala postopek, s katerim bomo dobili našo krivuljo.
Za začetek vzemimo poljubni kvaternionski polinom $\mathcal{A}(t)$, ki naj bo stopnje n. Torej:

$$\mathcal{A} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}$$

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}, \quad t \in I, \quad u, v, p, q \in \mathbb{R}[t].$$

Iz kvaternionskega polinoma $\mathcal{A}(t)$, bomo konstruirali parametrično krivuljo $\mathbf{p}(t)$. In sicer:

$$\boldsymbol{p}(t) := \mathcal{A}(t)\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}(t) \tag{1}$$

. Pokažimo, da je krivulja dobljena bo zgornjem predpisu, res parametrična krivulja. Izkaže se, da je tudi P-krivulja in sicer stopnje 2n. Zaradi boljše preglednosti, bomo izpustili argument, vendar se zavedamo, da so prepisi odvisni od parametra t.

$$\mathcal{A} = u + v\boldsymbol{i} + p\boldsymbol{j} + q\boldsymbol{k}$$
$$\overline{\mathcal{A}} = u - v\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j} - q\boldsymbol{k}$$
$$\mathcal{A}\boldsymbol{i} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{i}^2 + p\boldsymbol{j}\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{k}\boldsymbol{i} = u\boldsymbol{i} - v - p\boldsymbol{k} + q\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}} &= (u\boldsymbol{i} - v - p\boldsymbol{k} + q\boldsymbol{j})(u - v\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j} - q\boldsymbol{k}) \\
&= u^2\boldsymbol{i} - uv\boldsymbol{i}^2 - pu\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} - uq\boldsymbol{i}\boldsymbol{k} - vu + v^2\boldsymbol{i} + vp\boldsymbol{j} \\
&\quad + vq\boldsymbol{k} - pu\boldsymbol{k} + pv\boldsymbol{k}\boldsymbol{i} + p^2\boldsymbol{k}\boldsymbol{j} + pq\boldsymbol{k}^2 + qu\boldsymbol{j} - qv\boldsymbol{j}\boldsymbol{i} - qp\boldsymbol{j}^2 - q^2\boldsymbol{j}\boldsymbol{k} \\
&= u^2\boldsymbol{i} + uv - pu\boldsymbol{k} + uq\boldsymbol{j} - vu + v^2\boldsymbol{i} + vp\boldsymbol{j} + vq\boldsymbol{k} \\
&\quad - pu\boldsymbol{k} + pv\boldsymbol{j} - p^2\boldsymbol{i} - pq + qu\boldsymbol{j} + qv\boldsymbol{k} + qp - q^2\boldsymbol{i} \\
&= (u^2 + v^2 - p^2 - q^2)\boldsymbol{i} + 2(uq - vp)\boldsymbol{j} + 2(vq - pu)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

Opazimo, da imao samo 3 bazne elemente, saj je skalarni del enak 0. Zato lahko $\boldsymbol{p} = \mathcal{A}\boldsymbol{i}\mathcal{A}$ identificiramo z točko v $\mathbb{R}^3$. Torej dobimo:

$$\boldsymbol{p} = (u^2 + v^2 - p^2 - q^2, 2(uq + vp), 2(vq - pu)).$$

Na začetku smo vzeli kvaternionski polinom $\mathcal{A} = u + v\boldsymbol{i} + p\boldsymbol{j} + q\boldsymbol{k}$, kjer so u, v, p, q polinomi stopnje n. Ker v $\boldsymbol{p}$ nastopajo le zmnožki dveh teh polinom, vsote in razlike, je dobljeni $\boldsymbol{p}$ stopnje 2n.
Pokažimo sedaj, da je krivulja $\boldsymbol{p}$ dobljena po zgornjem predpisu, P-krivulja. Da bo

krivulja P-krivulja, mora veljati, da je $\boldsymbol{o} = \frac{\boldsymbol{p}}{||\boldsymbol{p}||}$ racionalna krivulja. Vemo že, da je $\boldsymbol{p}$ polinom. Preverimo, da je tudi $||\boldsymbol{p}||$ polinom.

$$
\begin{aligned}
& & ||\boldsymbol{p}||^2 &= \langle \boldsymbol{p}, \overline{\boldsymbol{p}} \rangle = (\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}})\overline{(\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}})} \\
& & &= \mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}\mathcal{A}\overline{\boldsymbol{i}}\overline{\mathcal{A}} \\
\langle \overline{\mathcal{A}}, \mathcal{A} \rangle = ||\mathcal{A}||^2 & \longrightarrow & &= ||\mathcal{A}||^2 \mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{i}}\overline{\mathcal{A}} \\
\boldsymbol{i}(-\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{i}^2 = 1 & \longrightarrow & &= ||\mathcal{A}||^2 \mathcal{A}\overline{\mathcal{A}} \\
& & &= ||\mathcal{A}||^4 \\
& \Longrightarrow & ||\boldsymbol{p}|| &= ||\mathcal{A}||^2
\end{aligned}
$$

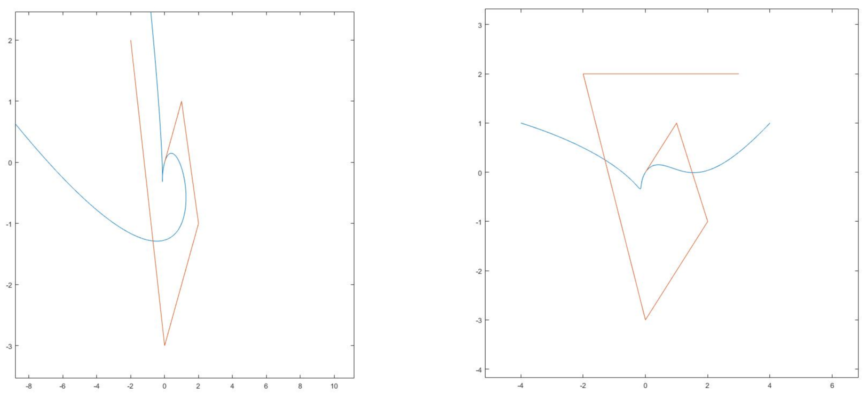
Pokazali smo, da je $||\boldsymbol{p}|| = ||\mathcal{A}||^2$, vemo pa, da je $\mathcal{A}$ sestavljen iz polinomov. Torej je $||\boldsymbol{p}||$ res polinom.

Sklep: Iz kvaternionskega polinoma $\mathcal{A}(t)$, stopnje n, smo po predpisu $\boldsymbol{p}(t) = \mathcal{A}(t)\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}(t)}$ konstruirali P-krivuljo stopnje 2n.
PRIMERI MATHEMATICA, slikice

3.2. **Zapis krivulje v Bernsteinovi bazi.** Naš cilj je opisati gibanje kamere okoli nekega fiksnega objekta. Želimo si nadzorovati to gibanje in vsaj približno napovedati, kje se bo krivulja gibala. Videli bomo, da tega ne moremo doseči, če krivuljo zapišemo v standardni bazi. To bomo dosegli s pomočjo Bernsteinove baze.
Poglejmo si najprej zapis krivulje v standardni bazi. Poljuben polinom $\boldsymbol{p}$ stopnje n, se v standardni bazi zapiše kot:

$$\boldsymbol{p}(t) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} p_i t^i \quad \text{kjer so } p_i \text{ točke v } \mathbb{R}^3.$$

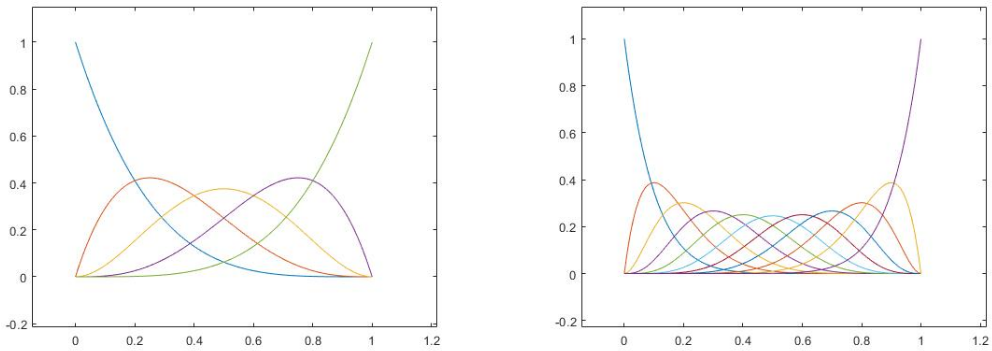
Poglejmo si nekaj preprostih primerov, primerjamo izbrane točke p_i in obliko dobljene krivulje $\boldsymbol{p}(t)$.



Vidimo, da med izbranimi točkami in obliko krivulje, ni vidne povezave.
Poglejmo si, kaj je to Bernsteinova baza.

Definicija 3.1. Bernsteinovi bazni polinomi, ki tvorijo bazo polinomov stopnje n, so:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t(1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

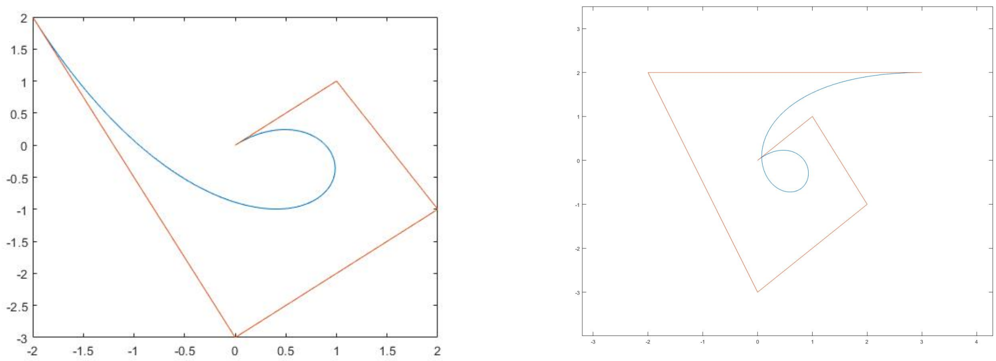


Grafični prikaz bernsteinovih baznih polinomov za n = 4 in n= 10.

Torej se kvaternionski polinom $\mathcal{A}(t)$ zapiše kot:

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{A}_i B_i^n(t),$$

kjer so $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{H}$ in B_i^n Bernsteinovi bazni polinomi. Točkam A_i rečemo kontrolne točke, te pa tvorijo tako imenovani kontrolni poligon, ki določa obliko krivulje.



Primer prileganja krivulje kontrolnemu poligoni na točkah (0,0), (1,1), (2,-1), (0,-3), (-2,2) in če dodamo še (3,2).

Primer 3.2. n = 2

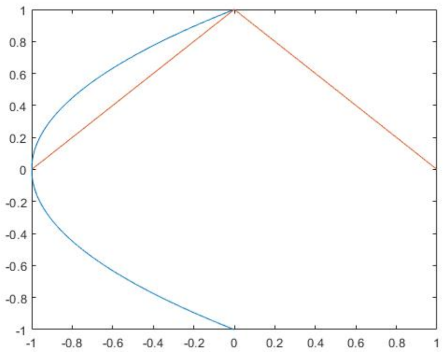
$$B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}, \quad i = 0, 1, 2$$

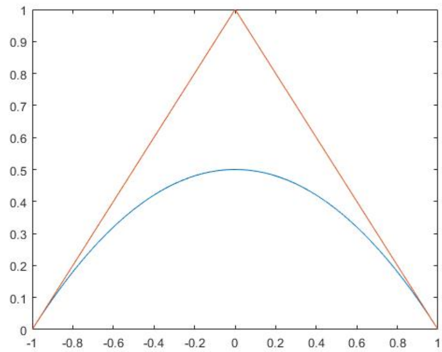
$$B_0^2(t) = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = (1-t)^2$$

$$B_1^2(t) = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = 2t(1-t)$$

$$B_2^2(t) = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = t^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}(t) = \boldsymbol{A}_0(1-t)^2 + \boldsymbol{A}_1 2t(1-t) + \boldsymbol{A}_2 t^2$$





primer polinoma zapisanega v standardni bazi in bernsteinovi bazi, z istimi kontrolnimi točkami (-1,0), (0,1), (1,0). ♢

3.3. **Določitev kontrolnih točk.** V tem razdelku, si bomo pogledali, kako določiti kontrolne točke za krivuljo, zapisano v Bernsteinovi bazi. Vprašanje je, kakšni naj bodo začetni koeficienti polinoma $\mathcal{A}(t)$, če določimo koeficiente krivulji $\boldsymbol{p}(t)$.

Primer 3.3. n=1

$$\text{Bernsteinova baza}: \ B_i^1(t) = \binom{1}{i} t^i (1-t)^{1-i}, \quad i = 0, 1$$

$$B_0^1(t) = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} = 1 - t$$

$$B_1^1(t) = \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} = t$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}(t) = \boldsymbol{A}_0(1-t) + \boldsymbol{A}_1 t$$

Rekli smo, da je $\boldsymbol{p}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}$. Vemo, da se splošni polinom stopnje n, v Bernsteinovi bazi, zapiše kot:

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k.$$

V razdelku (?) smo pokazali, da če je $\mathcal{A}$ stopnje n, bo $\boldsymbol{p} = \mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}$ stopnje 2n.Torej

$$B_0^2(t) = (1-t)^2$$
$$B_1^2(t) = 2t(1-t)$$
$$B_2^2(t) = t^2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{2} \boldsymbol{p}_i B_i^2 = \boldsymbol{p}_0(1-t)^2 + \boldsymbol{p}_1 2t(1-t) + \boldsymbol{p}_2 t^2$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(t) &= \mathcal{A}(t)\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}(t)} \\
&= (\boldsymbol{A}_0(1-t) + \boldsymbol{A}_1 t)\boldsymbol{i}(\overline{\boldsymbol{A}_0}(1-t) + \overline{\boldsymbol{A}_1} t) \\
&= (\boldsymbol{A}_0(1-t) + \boldsymbol{A}_1 t)(\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_0}(1-t) + \boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_1} t) \\
&= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_0}(1-t)^2 + \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_1}(1-t)t + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_0}t(1-t) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_1}t^2 \\
&= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_0}(1-t)^2 + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_0}\right) 2t(1-t) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\boldsymbol{A}_1}t^2
\end{aligned}$$

Primerjamo istoležne koeficiente in dobimo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_0 &= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}\\
\boldsymbol{p}_1 &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\boldsymbol{A}_1\overline{\mathcal{A}_1} + \mathcal{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}\right)\\
\boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Z analognim računom pridemo do točk za polinome višjih stopenj.

Primer 3.4. n=2 ($\boldsymbol{p}$ bo stopnje 4).

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(t) &= \boldsymbol{A}_0(1-t)^2 + \boldsymbol{A}_1 2t(1-t) + \boldsymbol{A}_2(1-t)^2\\
\boldsymbol{p}(t) &= \sum_{k=0}^{4} \boldsymbol{p}_i B_i^4(t)\\
\implies \quad \boldsymbol{p}_0 &= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}\\
\boldsymbol{p}_1 &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}\right)\\
\boldsymbol{p}_2 &= \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_2} + 4\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}\right)\\
\boldsymbol{p}_3 &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_2} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1}\right)\\
\boldsymbol{p}_4 &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_2}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Z višanjem stopnje začetnega polinoma, dobimo več prostih parametrov, kar lahko izkoristimo pri konstrukciji krivulje. Več o tem kasneje.
Sedaj, ko imamo poračunane kontrolne točke, lahko iz njih poračunamo začetne koeficiente polinoma $\mathcal{A}$. Na primer, lahko si izberemo začetno in končno točko krivulje $\boldsymbol{p}(0)$ in $\boldsymbol{p}(1)$. n=1

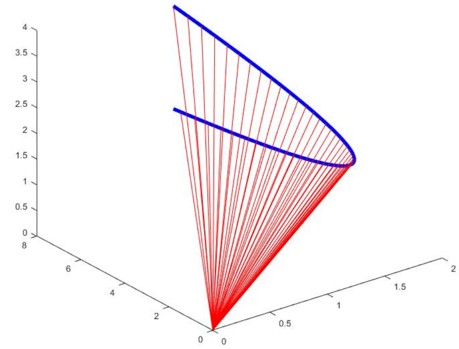
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0} &= \boldsymbol{p}(0)\\
\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} &= \boldsymbol{p}(1)
\end{aligned}$$

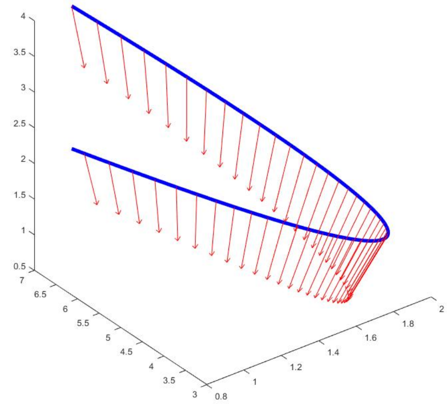
Iz teh dveh enačb, lahko izrazimo $\boldsymbol{A}_0$ in $\boldsymbol{A}_1$ in dobimo začetni kvaternionski polinom $\mathcal{A}$. Podobno za polinome višjih stopenj, kjer si lahko izberemo začetno in končno točko, ter še dodatno točko.

4. Ogrodja

4.1. Usmerjena in prikrojena ogrodja.

Definicija 4.1. Ogrodje $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ je usmerjeno, če $\boldsymbol{e}_1$ v vsaki točki krivulje kaže proti izhodišču.





Vsako ogrodje ima neko kotno hitrost ω, ki nam pove, kako se ogrodje spreminja, oziroma kako se spreminjata vektorja $\boldsymbol{e}_2$ in $\boldsymbol{e}_3$.

Definicija 4.2. Naj bo $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ ogrodje in ω pripadajoča kotna hitrost. Potem je ω definirana z naslednjimi diferencialnimi enačbami:

$$\frac{de_i}{dt}(t) = \omega(t) \times e_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Definicija 4.3. Usmerjeno ogrodje $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ je rotacijsko minimizirajoče, če velja $\langle \omega, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0$.

Trditev 4.4. *Ogrodje* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, *definirano kot:*

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\mathcal{A}\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}}}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}}}$$

je ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$.

Dokaz. Pokazati moramo, da so skalarni produkti $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle$ enaki 0, za $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$. Vemo, da so skalarni deli $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ enaki 0, zato lahko uporabimo formulo za skalarni produkt dveh "čistih"kvaternionov.

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle &= -scal\,(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2) \\
&= -scal\left(\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}\mathcal{A}\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}}\right) \\
&= -||\mathcal{A}||^2 scal\left(\mathcal{A}\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}}\right) \\
&= -||\mathcal{A}||^2 scal\left(\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Analogno poračunamo $\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 \rangle$. Izračunajmo še njihove dolžine.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}} &= ||A||^2 \mathcal{A}\boldsymbol{i}^2\overline{\mathcal{A}} \\
&= -||A||^4 \\
\Longrightarrow \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle &= -scal\,(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) \\
&= -scal(-\frac{1}{||\mathcal{A}||^4}||A||^4) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Analogno poračunamo dolžine vektorjev $\boldsymbol{e}_2$ in $\boldsymbol{e}_3$. Torej je to res ortonormirana baza $\mathbb{R}^3$. $\square$

Trditev 4.5. *Usmerjeno ogrodje je rotacijsko minimizirajoče* $\Leftrightarrow$ *ko je* $scal(\mathcal{A}' i\overline{\mathcal{A}}) \equiv 0$.

Opomba 4.6. Oznaka $scal(\cdot)$ označuje skalarni del produkta.

Dokaz. Želimo pokazati, da velja:

$$\langle \omega, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow scal(\mathcal{A}' i\overline{\mathcal{A}}) = 0. \tag{3}$$

Razvijemo ω po bazi: $\omega = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + \omega_3 \boldsymbol{e}_3$.
Računamo:

$$\begin{aligned} 0 = \langle \omega, \boldsymbol{e}_1 \rangle &= \langle \omega_1 \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle + \langle \omega_2 \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle + \langle \omega_3 \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 \rangle \\ &= \omega_1 \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle + \omega_2 \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle + \omega_3 \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 \rangle \end{aligned}$$

Ker so $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ortogonalni, je $\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0$. Ostane nam:

$$\begin{aligned} \langle \omega, \boldsymbol{e}_1 \rangle &= \omega_1 ||\boldsymbol{e}_1||^2 = 0 \\ \Rightarrow \ \omega_1 &= 0. \end{aligned}$$

Vemo:

$$\frac{de_i}{dt}(t) = \omega(t) \times e_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Razpišimo enačbe za vsak i.
i=1

$$\boldsymbol{e}_1' = \omega \times \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, \omega_3, -\omega_2) = \omega_3 \boldsymbol{e}_2 - \omega_2 \boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e}_1' = \omega_3 \boldsymbol{e}_2 - \omega_2 \boldsymbol{e}_3$$

Celotno enačbo skalarno pomnožimo najprej z $\boldsymbol{e}_2$, nato z $\boldsymbol{e}_3$ in upoštevamo da so $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ortogonalni. Dobimo:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2 \rangle &= \omega_3 \\ \langle \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_3 \rangle &= -\omega_2 \end{aligned}$$

i=2

$$\boldsymbol{e}_2' = \omega \times \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-\omega_3, 0, \omega_1) = -\omega_3 \boldsymbol{e}_1 - \omega_1 \boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e}_2' = -\omega_3 \boldsymbol{e}_1 - \omega_1 \boldsymbol{e}_3$$

Podobno kot prej, enačbo skalarno pomnožimo z $\boldsymbol{e}_1$ in $\boldsymbol{e}_3$. Dobimo:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_1 \rangle &= -\omega_3 \\ \langle \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3 \rangle &= \omega_1 \end{aligned}$$

i=3

$$\boldsymbol{e}_3' = \omega \times \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\omega_2, -\omega_1, 0) = \omega_2 \boldsymbol{e}_1 - \omega_1 \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_3' = \omega_2 \boldsymbol{e}_1 - \omega_1 \boldsymbol{e}_2$$

Ponovno enačbo skalarno pomnožimo, tokrat z $\boldsymbol{e}_1$ in $\boldsymbol{e}_2$. Dobimo:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_1 \rangle &= \omega_2 \\ \langle \boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_2 \rangle &= -\omega_1 \end{aligned}$$

Dobljene rezultate združimo. Dobimo:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \langle \boldsymbol{e}_2^{'}, \boldsymbol{e}_3 \rangle = -\langle \boldsymbol{e}_3^{'}, \boldsymbol{e}_2 \rangle \\
\omega_2 &= \langle \boldsymbol{e}_1^{'}, \boldsymbol{e}_3 \rangle = -\langle \boldsymbol{e}_3^{'}, \boldsymbol{e}_1 \rangle \\
\omega_3 &= \langle \boldsymbol{e}_1^{'}, \boldsymbol{e}_2 \rangle = -\langle \boldsymbol{e}_2^{'}, \boldsymbol{e}_1 \rangle
\end{aligned} \tag{4}$$

Na tej točki določimo naše ogrodje.

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}}} \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\mathcal{A}\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}}} \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}}}$$

Vemo, da tvorijo ortonormirano bazo. Vemo tudi, da ima produkt $\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}$ skalarni del enak 0. Enako poračunamo za $\mathcal{A}\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}}$. Od tu sledi:

$$\begin{aligned}
\omega_1 = \langle \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3 \rangle &= -skal\left((\mathcal{A}\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}})' \cdot (\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}}) \right) \\
&= -skal\left(\left(\mathcal{A}'\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}} + \mathcal{A}\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}}' \right)' \cdot (\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}}) \right) \\
&= -skal\left(\left(\mathcal{A}'\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}}\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}} + \mathcal{A}\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}}'\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}} \right) \right) \\
&= -skal\left(||\mathcal{A}||^2 \mathcal{A}'\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}} + \overline{(\mathcal{A}'\boldsymbol{j}\overline{\mathcal{A}})(\mathcal{A}\boldsymbol{k}\overline{\mathcal{A}})} \right) \\
&= -skal\left(||\mathcal{A}||^2 \mathcal{A}'\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}} + \overline{(||\mathcal{A}||^2 \mathcal{A}'\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}})} \right) \\
&= -skal\left(||\mathcal{A}||^2 \mathcal{A}'\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}} \right) - skal\left(\left(||\mathcal{A}||^2 \mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}' \right) \right) \\
&= -2||\mathcal{A}||^2 skal\left(\mathcal{A}'\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}} \right)
\end{aligned}$$

Od tod sledi:

$$\Longrightarrow \omega_1 = 0 \Leftrightarrow skal\left(\mathcal{A}'\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}} \right) = 0$$

□

Opomba 4.7. V splošnem to ogrodje ne bo rotacijsko minimizirajoče, za poljuben kvaternionski polinom $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ je treba "popraviti"tako, da bo zgornji predpis tvoril rotacijsko minimizirajoče ogrodje. Definiramo nov kvaternionski polinom $\mathcal{B}$ z naslednjim predpisom: $\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{Q}(t)$, kjer je $\mathcal{Q}$ tak kvaternionski polinom, da velja: $\mathcal{Q}(t)\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{Q}(t)} = \left(\mathcal{Q}(t)\overline{\mathcal{Q}(t)} \right) \boldsymbol{i}$. Torej dobimo:

$$\mathcal{B}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{A}\mathcal{Q}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{Q}\mathcal{A}} = \mathcal{A}\mathcal{Q}\overline{\mathcal{Q}}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}} = ||\mathcal{Q}||^2 \mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}$$

Torej bo smer vektorja $\frac{\mathcal{B}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{B}}}{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}$ enaka smeri vektorja $\frac{\mathcal{A}\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}}}$. Torej $\mathcal{Q}$ doličimo tako, da bo $\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{Q}$ določalo rotacijsko minimizirajoče ogrodje. S pomočjo kvaternionskega polinoma $\mathcal{Q}$, lahko dobimo več prostih parametrov pri konstrukciji krivulje. Višja kot bo stopnja $\mathcal{Q}$, več le teh dobimo. V dokazu smo zaradi lažje analize predpostavili, da je $\mathcal{Q} = 1$.

5. Izpeljava algoritma

Izrek 5.1. *Naj bo e enotski vektor, d neničelni vektor. Rešitev enačbe $\mathcal{A}e\overline{\mathcal{A}} = b$, kjer je $\mathcal{A}$ kvaternionski polinom, je:*

$$\mathcal{A} = \sqrt{|b|}\frac{e + \frac{b}{|b|}}{|e + \frac{b}{|b|}|}\left(cos\phi + esin\phi \right),$$

kjer je ϕ prost kotni parameter.

Dokaz. TODO □

Konstruirali bomo P-krivuljo $\boldsymbol{r}(t)$ stopnje 4, ki bo interpolirala naslednje podatke: Začetni položaj:

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{o}_z, \qquad \boldsymbol{r}(1) = \lambda \boldsymbol{o}_k \tag{5}$$

Začetno ogrodje:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{o}(0), \boldsymbol{u}(0), \boldsymbol{v}(0)) &= (\boldsymbol{o}_z, \boldsymbol{u}_z, \boldsymbol{v}_z) \\ (\boldsymbol{o}(1), \boldsymbol{u}(1), \boldsymbol{v}(1)) &= (\boldsymbol{o}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k) \end{aligned} \tag{6}$$

Začetna tangenta, smer

$$\boldsymbol{r}'(0) = \mu \boldsymbol{f}_z \tag{7}$$

Prav tako, mora za krivuljo $\boldsymbol{r}(t)$ obstajati rotacijsko minimizirajoče ogrodje.
Brez škode za splošnost, postavimo za začetno ogrodje $(\boldsymbol{o}_z, \boldsymbol{u}_z, \boldsymbol{v}_z) = (\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{j}, -\boldsymbol{k})$ in nastavimo $\boldsymbol{g}_z = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{f}_z$. Vemo, da bo naša krivulja oblike $\boldsymbol{r}(t) = \mathcal{A}(t)\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}(t)}$. Izrazimo začetne podatke z komponentami kvaternionskega polinoma $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_0 2(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2$.Iz primera (?) vemo, da se začetna in končna točka izražata kot:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(0) &= \mathcal{A}_0 \boldsymbol{i} \overline{\mathcal{A}_0} = \boldsymbol{o}_z = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{r}(1) &= \mathcal{A}_2 \boldsymbol{i} \overline{\mathcal{A}_2} = \lambda \boldsymbol{o}_k \end{aligned} \tag{8}$$

Poračunajmo še tretji pogoj:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'(t) &= \mathcal{A}(t)'\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}(t)} + \mathcal{A}(t)\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}(t)}' \\ \mathcal{A}(t)' &= \mathcal{A}_0 2(1-t)(-1) + \mathcal{A}_1 2(1-t) - \mathcal{A}_1 2t + \mathcal{A}_2 2t \\ \mathcal{A}(0)' &= -\mathcal{A}_0 + 2\mathcal{A}_1 \\ \to \boldsymbol{r}(0)' &= 2(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0)\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0} + \mathcal{A}_0 \boldsymbol{i} 2(\overline{\mathcal{A}_1} - \overline{\mathcal{A}_0}) \\ &= 2\mathcal{A}_1 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0} - 2\mathcal{A}_0 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0} + 2\mathcal{A}_0 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} - 2\mathcal{A}_0 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0} \\ &= 2(\mathcal{A}_0 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} + \mathcal{A}_1 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}) - 4\mathcal{A}_0 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0} \\ &= 2(\mathcal{A}_0 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} + \mathcal{A}_1 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}) - 4\boldsymbol{i} \\ &= \mu \boldsymbol{f}_z \end{aligned}$$

Torej:

$$\mu \boldsymbol{f}_z + 4\boldsymbol{i} = 2(\mathcal{A}_0 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} + \mathcal{A}_1 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}) \tag{9}$$

Po izreku (?) je rešitev zgornjih dveh enačb (?) enaka:

$$\mathcal{A}_0 = \boldsymbol{i}(cos\phi_0 + \boldsymbol{i}sin\phi_0), \tag{10}$$

ker imamo vzporedne vektorje, in

$$\mathcal{A}_2 = \sqrt{|\lambda|}\tfrac{\boldsymbol{i}+\lambda}{|\boldsymbol{i}+\lambda|}(cos\phi_2 + \boldsymbol{i}sin\phi_2), \tag{11}$$

če je $\boldsymbol{o}_k! = -1$, in

$$\mathcal{A}_2 = \sqrt{|\lambda|}\boldsymbol{j}(cos\phi_2 + \boldsymbol{i}sin\phi_2) \tag{12}$$

sicer. Brez škode za splošnost nastavimo $\phi_0 = 0$. Iz tega sledi, da je $\mathcal{A}_0 = \boldsymbol{i}$.

Izrek 5.2. *Za P-krivuljo, ki jo določa kvaternionski polinom $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_0 2(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2$, obstaja rotacijsko minimizirajoče ogrodje, če velja:*

$$\mathcal{A}_1 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} = vect(\mathcal{A}_2 \boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}). \tag{13}$$

Dokaz. TODO ☐

Zaradi bolše preglednosti, vpeljimo nove oznake.

(14) $$\mathcal{A}_2 = \sqrt{|\lambda|}n_2(cos\phi_2 + \boldsymbol{i}sin\phi_2) \quad , n_2 = \frac{\boldsymbol{i}+\lambda}{|\boldsymbol{i}+\lambda|}$$

Torej se pogoj (?) pretvori v

(15) $$\begin{aligned} \mathcal{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} &= vect(\mathcal{A}_2\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}) \\ &= vect(\mathcal{A}_2) \\ &= vect\left(\sqrt{|\lambda|}n_2(cos\phi_2 + \boldsymbol{i}sin\phi_2)\right) \\ &= \sqrt{\lambda}\left(n_2cos\phi_2 + n_2 \times \boldsymbol{i}sin\phi_2\right) \end{aligned}$$

Ponovno uporabimo izrek (?) in dobimo rešitev za $\mathcal{A}_1$:

(16)
$$\mathcal{A}_1 = \sqrt{|w|}n_1(cos\phi_1 + \boldsymbol{i}sin\phi_1), \quad w = \sqrt{\lambda}\left(n_2cos\phi_2 + n_2 \times \boldsymbol{i}sin\phi_2\right), \quad n_1 = \frac{w+|w|\boldsymbol{i}}{|w+|w|\boldsymbol{i}|}$$

Torej:

(17) $$\begin{aligned} vect(\mathcal{A}_1) &= vec\left(\sqrt{|w|}n_1(cos\phi_1 + \boldsymbol{i}sin\phi_1)\right) \\ &= cos\phi_1 w_1 + sin\phi_1 w_2, \end{aligned}$$

kjer je

(18) $$w_1 = \sqrt{|w|}n_1, \quad w_2 = \sqrt{|w|}n_1 \times \boldsymbol{i}$$

Trditev 5.3. *Če je $\boldsymbol{o}_z ! = \boldsymbol{i}$, so vektorji w, $w \times \boldsymbol{i}$, w_1, w_2, $\boldsymbol{g}_z \times (w_1 \times w_2)$ neničelni.*

Opomba 5.4. Trditev nam pove, da če je $\boldsymbol{o}_z ! = \boldsymbol{i}$, sta vektorja $w ! = 0$ in $w \times \boldsymbol{i} ! = 0$ iz česar sledi, da sta n_1 in $\mathcal{A}_1$ dobro definirana.

Dokaz. TODO ☐

Poračunajmo še eno enačbo. Iz (?) sledi:

(19) $$\begin{aligned} \mu\boldsymbol{f}_z + 4\boldsymbol{i} &= 2(\mathcal{A}_0\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_1} + \mathcal{A}_1\boldsymbol{i}\overline{\mathcal{A}_0}) \\ &= 2(-\overline{\mathcal{A}_1} + A_1) \\ &= 4vect(\mathcal{A}_1) \\ \implies vect(\mathcal{A}_1) &= \frac{\mu\boldsymbol{f}_z}{4} + \boldsymbol{i} \end{aligned}$$

Ker je $\boldsymbol{g}_z = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{f}_z$ sledi:

(20) $$\langle vect(\mathcal{A}_1), \boldsymbol{g}_z \rangle = \langle \frac{\mu\boldsymbol{f}_z}{4} + \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{f}_z \rangle = \langle \frac{\mu\boldsymbol{f}_z}{4}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{f}_z \rangle + \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{f}_z \rangle = 0$$

(21) $$\langle vect(\mathcal{A}_1), \boldsymbol{f}_z \rangle = \langle \frac{\mu\boldsymbol{f}_z}{4} + \boldsymbol{i}, \boldsymbol{f}_z \rangle = \frac{\mu}{4} > 0$$

5.1. **Algoritem.** Ko sestavimo vse stvari skupaj, opišemo naš postopek z naslednjim algoritmom.

Vhodni podatki: začetna točka $\boldsymbol{p}_z = d_z\boldsymbol{o}_z$, končna točka $\boldsymbol{p}_k = d_k\boldsymbol{o}_k$, usmerjenost končnih točk $(\boldsymbol{o}_z, \boldsymbol{u}_z, \boldsymbol{v}_z)$, $(\boldsymbol{o}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k)$, $\boldsymbol{o}_z ! = \boldsymbol{o}_k$.

(1) a
(2) b

6. Numerični rezultati

Slovar strokovnih izrazov

Literatura