Introducción

Renato Descartes en su obra *La Geometrie* establece los cimientos de lo que actualmente conocemos como geometría analítica o geometría cartesiana.

Su propuesta es hacer la fusión entre la geometría y el álgebra estableciendo un método que lleva a traducir las propiedades geométricas de las figuras a un lenguaje algebraico, para poder operar aplicando sus leyes, y una vez obtenido un resultado, interpretarlo geométricamente.

Es decir, que la geometría analítica es la parte de la matemática que estudia problemas que, partiendo de conceptos y propiedades puramente geométricos, llegan a resultados puramente analíticos mediante desarrollos de tipo algebraico, teniendo sentido, por ejemplo, hablar de la ecuación de la recta o de la circunferencia.

Como ha sucedido en numerosas ocasiones, importantes creaciones en matemáticas no tuvieron un origen que pronosticara su relevancia posterior. Uno de estos casos es el de las conocidas cónicas, que en un principio fueron estudiadas casi por simple diversión, pero de tan variadas aplicaciones en muchas ramas de la ciencia.

Fue Apollonius de Perga, en el siglo III a.C. el primero que las introdujo públicamente, escribiendo el más importante tratado antiguo sobre las secciones cónicas. Lo que no es tan conocido es que el motivo que originó esta creación no fue precisamente el de explicar las orbitas de los planetas ni construir aparatos de radar, sino el de buscar soluciones solo con regla y compás de los tres famosos problemas griegos irresolubles, como son el de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

Durante muchos siglos, las cónicas fueron descartadas en los trabajos de los matemáticos hasta que volvieron súbitamente a la vida, al comprobarse que el mundo que nos rodea está lleno de secciones cónicas. Por ejemplo, en la elipse Kepler encontró la respuesta al enigma del movimiento planetario, descubriendo que el planeta Marte tiene órbitas elípticas y el que el Sol está situado en uno de sus focos.

Con base a este descubrimiento, Newton enunció la famosa ley de la gravitación universal, la cual se refiere a que también los satélites y los cometas tienen orbitas elípticas, de mayor o menor excentricidad, lo que es en cierto modo providencial, pues si se tratara de hipérbolas o parábolas, no volverían a repetir su ciclo. Asimismo, Galileo demostró que las trayectorias de los proyectiles son parabólicas.

El contenido de esta unidad está integrado con temas referentes a las cónicas.

¿Qué vamos a aprender?

Competencias	Objetivos	Contenido
1. Identifican las propiedades de la parábola para encontrar su ecuación. 2. Aplican la parábola en la resolución de problemas de la vida real.	1. Encontrar la ecuación de la parábola haciendo uso de sus propiedades. 2. Resolver problemas de la vida diaria aplicando la parábola.	La parábola
3. Identifican las características de la elipse para encontrar su ecuación. 4. Aplican la elipse en la resolución de problemas de la vida real.	3. Encontrar la ecuación de la elipse haciendo uso de sus características. 4. Resolver problemas de la vida diaria aplicando la elipse.	La elipse
5. Identifican las características de la hipérbola para encontrar su ecuación. 6. Aplican la hipérbola en la resolución de problemas de la vida real.	5. Señalar las características de la hipérbola para encontrar su ecuación. 6. Usar la hipérbola en la resolución de problemas de la vida real.	La hipérbola
7. Identifican las características de la circunferencia para encontrar su ecuación. 8. Aplican la circunferencia en la resolución de problemas de la vida real.	7. Encontrar la ecuación de la circunferencia haciendo uso de sus características. 8. Resolver problemas de la vida diaria haciendo uso de la circunferencia.	La circunferencia

Mis conocimientos previos

Antes de empezar la tercera unidad se presentan algunos ejercicios que le servirán para recordar conocimientos fundamentales que en algún momento de su vida escolar aprendió. Esto le servirá para comprender con facilidad las cónicas.

A continuación se le presentan varios pasos para encontrar las soluciones a ecuaciones cuadráticas utilizando la completación de cuadrados, escriba en los rectangulos de la derecha el paso que señale el orden en el que se debe resolver cada ecuación cuadrática.

1. Hallar el conjunto solución de: $x^2+ 4x+3=0$

$x^2+ 4x+(\frac{4}{2})^2 = (\frac{4}{2})^2-3$	
$x+2= \pm\sqrt{1}$	
$x^2+ 4x+4=1$	
$x^2+ 4x+3+(\frac{4}{2})^2= (\frac{4}{2})^2$	
$x_1= -1,\ x_2= -3$	
$x_1= +1-2,\ x_2= -1-2$	
$(x+2)^2 = 1$	

$x+2= \pm 1$

C.S. = {-1,-3}

$x= \pm 1-2$

2. Hallar el conjunto solución de: $x^2- 6x= 0$

$x_1= 0,\ x_2= -6$

$x^2- 6x+ \left(\frac{6}{2}\right)^2= \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$x+3= \pm 3$

$x^2- 6x+9=9$

$(x+3)^2 = 9$

C.S. = {0, -6}

$x_1= +3-3\ ,x_2= -3-3$

$x+3= \pm\sqrt{9}$

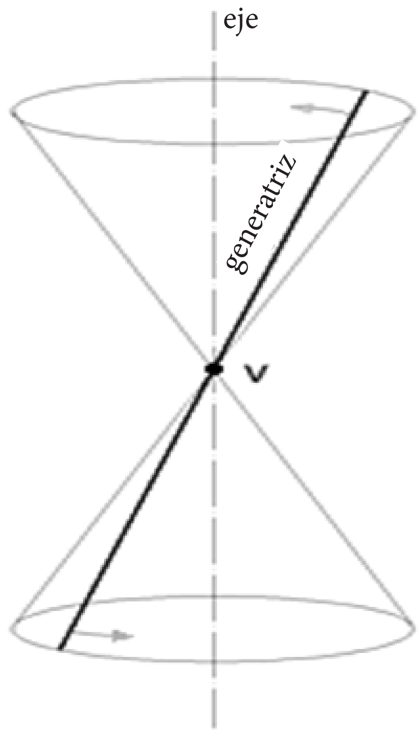
$x= \pm 3-3$

Las secciones cónicas

Una sección cónica es la curva de intersección de un plano con un cono de dos mantos (o dos hojas). El nombre de cónicas con que se designa a circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas se debe a estas intersecciones.

Superficie cónica

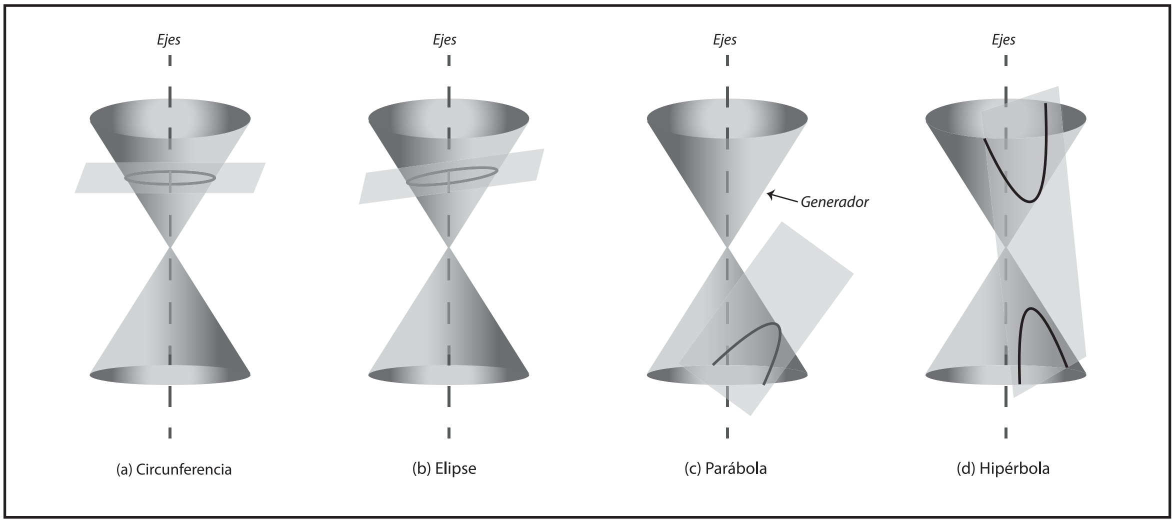
Una superficie cónica está generada por una recta (llamada generatriz) que pasa por un punto fijo (llamado vértice) no contenido en el plano de esa curva.



Obtención de las cónicas como secciones planas

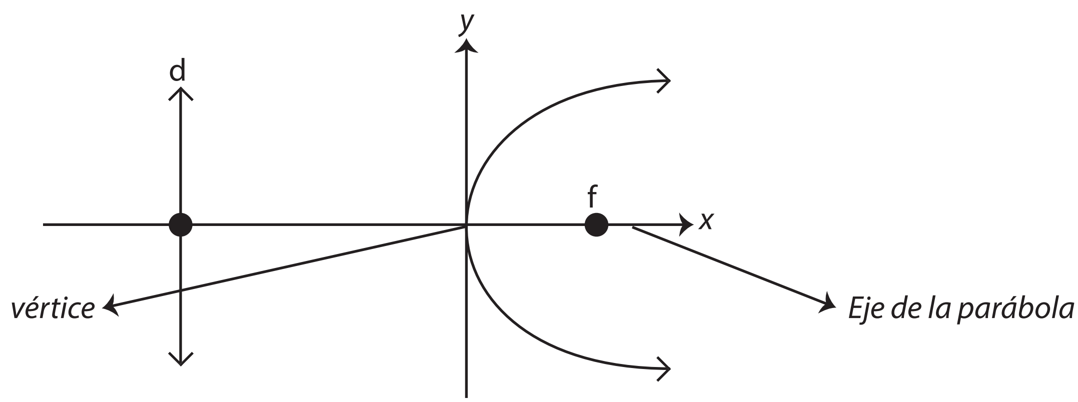
Las secciones cónicas son curvas que pueden obtenerse como la intersección de un cono circular con un plano que no contenga al vértice del cono. Las distintas cónicas aparecen dependiendo de la inclinación del plano respecto del eje del cono.

Si el plano es perpendicular a dicho eje produce una circunferencia; si se lo inclina ligeramente, se obtiene una elipse; cuando es paralelo a una generatriz del cono se tiene una parábola y si corta a ambas ramas del cono la curva es una hipérbola.



La parábola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco (F) y de una recta fija llamada directriz (d).



Parábola de V(0,0) y eje de simetría el eje x.

El vértice de la parábola es el punto medio entre la directriz y el foco. El vértice y el foco determinan una línea perpendicular a la directriz, a esta línea se le conoce como el eje de la parábola.

Para una parábola que tiene el vértice en el origen, la ecuación es $y^2= 2px$, donde p es la distancia entre la directriz y el foco.

Ecuación de la parábola

Sea P=(x,y) un punto de la parábola cuyo foco es (c,0) y cuya directriz es $x=-c$; entonces su ecuación es $y^2=4cx$, donde $c>0$.

Como P=(x,y) equidista de los focos y de la directriz, se puede escribir

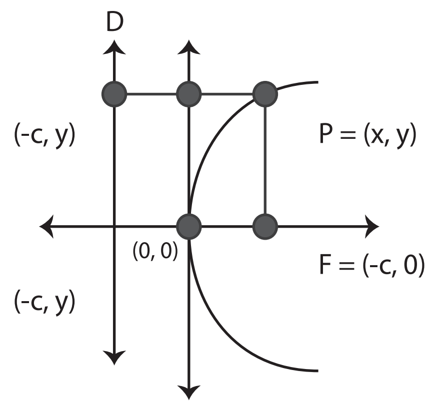
$\overline{PF} = \overline{PD}$, de modo que: $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = |x+c|$

Se eleva al cuadrado ambos miembros: $(x-c)^2+y^2=(x+c)^2$

Luego se desarrollan los cuadrados: $x^2-2cx+c^2+y^2 = x^2+2cx+c^2$

Simplificando:

$y^2=4cx$ ecuación de la parábola con v(0, 0) y eje de simetría el eje x

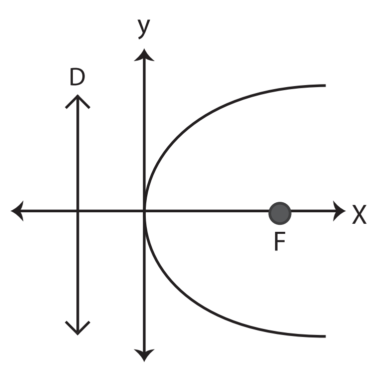


Parábola de v(0, 0)y eje de simetría en x.

Componentes de la parábola

- Foco: es el punto fijo que está en el interior de la parábola.
- Directriz: es la recta $\overline{D}$ en el exterior de la parábola.
- Eje de simetría: es el eje x pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
- Vértice: es el punto v entre el foco y la directriz.

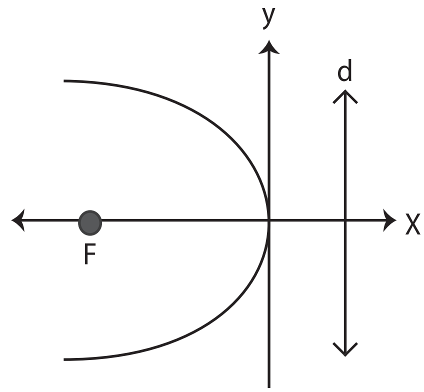
En la ecuación $y^2=4cx$, el foco está a la derecha de la directriz en el eje x, la directriz es paralela al eje x, la parábola se abre hacia la derecha.



Parábola con foco a la derecha de la directriz.

Si la parábola se abre hacia la izquierda la ecuación es: $y^2=-4cx$.

En esta ecuación el foco está a la izquierda de la directriz en el eje x, la directriz es paralela al eje y, la parábola se abre hacia la izquierda.

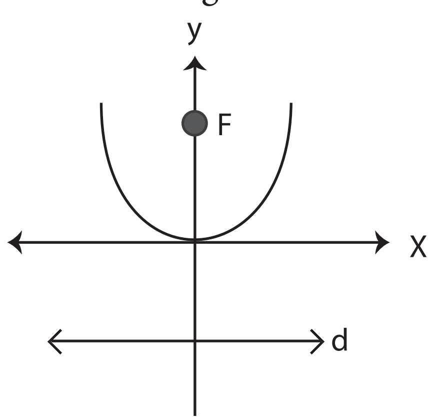


Parábola con foco a la izquierda de la directriz.

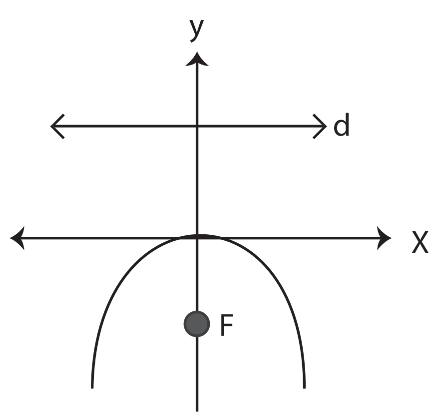
Si el eje de simetría es el eje y, el foco es F (0, c) y la directriz es y= -D, donde c es un número real y es distinto de cero, entonces la ecuación de la parábola es: $x^2=4cy$, ecuación de la parábola con v(0 , 0) y eje de simetría el eje y.

Observación

Si $x^2= - 4cy$, la parábola se abre hacia abajo.
Se presentan los siguientes casos:



Parábola con C(0 , 0) eje focal el eje y.



Parábola con C(0 , 0) eje focal el eje y.

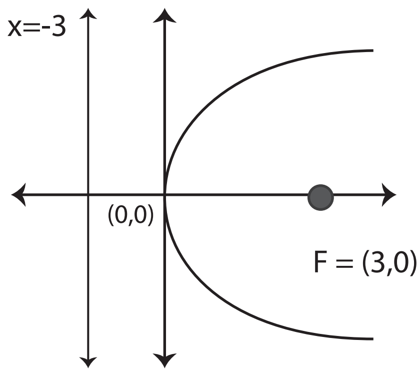
Ejemplos

1. Hallar el foco y la directriz de $y^2=12x$ y dibujar su gráfica:

Solución

La gráfica es simétrica con respecto al eje x, el foco está en el eje x y la directriz es paralela al eje y, el vértice es (0,0).

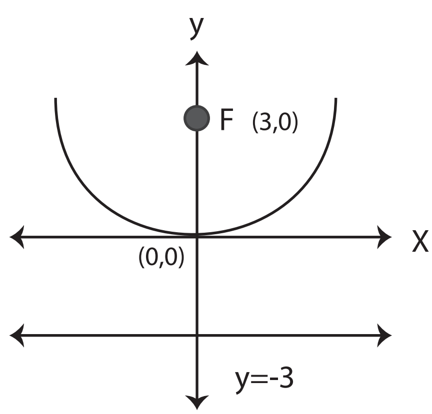
Como 4c = 12, entonces C=3, por lo tanto, el foco es (3,0) y la ecuación de la directriz es x= -3.



2. Hallar el foco y la directriz de $x^2=12y$ y dibujar su gráfica:

   Solución

   La gráfica es simétrica con respecto al eje y, el foco está en el eje y, la directriz es paralela al eje x y el vértice es (0,0).
   Como x^2 en $x^2=12y$ es siempre positivo, entonces la parábola es abierta hacia arriba. Como 4c= 12, entonces c=3, por lo tanto, el foco es (0,3) y la ecuación de la directriz es y= -3.

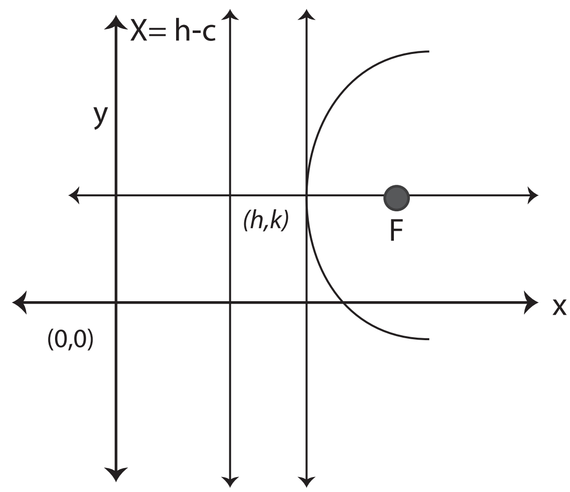


Si la parábola no tiene su vértice en v(0,0), sino en un punto (h, k), entonces la ecuaciones serán:

1. $(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$

   Ecuación canónica de la parábola con v(h , k) y eje focal paralelo al eje x.

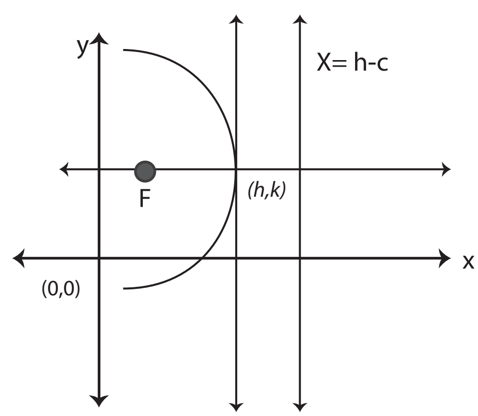
   El vértice de la parábola es el punto (h,k) y la directriz es la recta x= h-c.
   La parábola abre hacia la derecha.



2. $(y- k)^2 = - 4c\ (x - h)$

   Ecuación canónica de la parábola con v(h , k) y eje focal paralelo al eje x.

   El vértice de la parábola es el punto (h,k) y la directriz es la recta x= h+c. La parábola abre hacia la izquierda. El foco es (h+c,k).



Desarrollando la ecuación se tiene: $y^2 - 2\ y\ k - 2\ p\ x + k^2 + 2\ p\ h = 0$

Si $E = -2\ k$; $D = -2\ p$; $F = k^2 + 2\ p\ h$

Se obtiene:

$y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ecuación general de la parábola con v(h , k) y eje focal o de simetría paralelo al eje x.

Ejemplo

Hallar el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y dibujar la gráfica de: $y^2+2y-8x-3=0$

Solución

Como la ecuación está escrita en su forma general $y^2+2y-8x-3=0$ se escribe en su forma canónica, así:

$y^2+2y-3=8x$

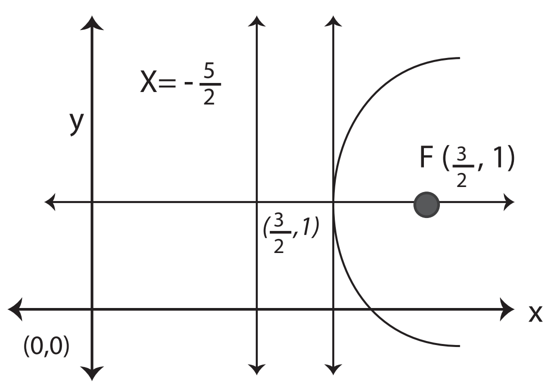
Luego se completa el cuadrado:

$y^2+2y+1=8x+3+1$
$(y+1)^2=8x+4$
$(y+1)^2=2(4x+2)$
$(y+1)^2=8(x+\frac{1}{2})$

De la ecuación se observa que el vértice es $(-\frac{1}{2},-1)$

Como $4c=8$, entonces $c= 2$, de donde se deduce que el foco es $(-\frac{1}{2}+2,-1)=(\frac{3}{2},1)$

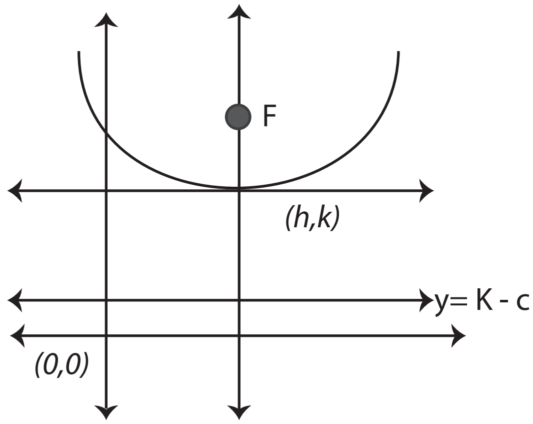
La ecuación de la directriz es $x= -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$



Si la parábola tiene su vértice (h, k) entonces la ecuación sería:

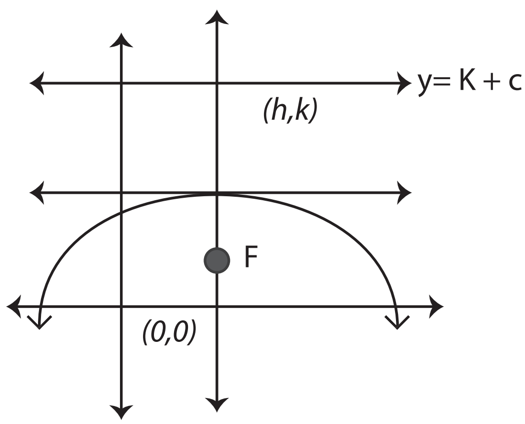
3. $(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$

Ecuación canónica de la parábola con eje de simetría paralelo al eje y. La directriz es la recta $y= k-c$. La parábola abre hacia arriba.



4. $(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$

   Ecuación canónica de la parábola con eje de simetría paralelo al eje y. La directriz es la recta y= k+c. La parábola abre hacia abajo.



Desarrollando la ecuación se tiene: $x^2 - 2xh - 2py + h^2 + 2pk = 0$

Si $D = -2h$; $E = -2p$; $F = h^2 + 2pk$

Se obtendrá: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ ecuación general de la parábola.

Ejemplo

Hallar el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y dibujar la gráfica de:

$x^2+2x+4y-7=0$

Solución

Como la ecuación está escrita en su forma general $x^2+2+4y-7=0$ se escribe en su forma canónica, así:

$x^2+2x-7=-4y$

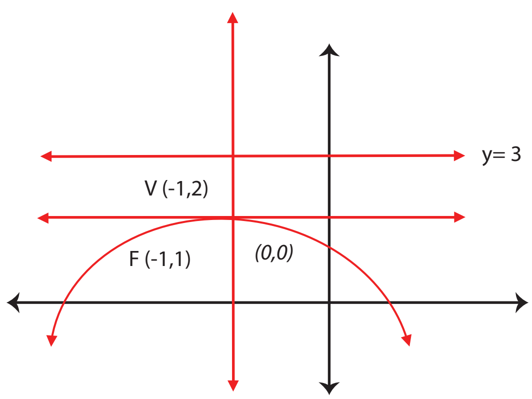
Luego se completa el cuadrado:

$x^2+ 2x+ 1= -4y+ 7+ 1$
$x^2+ 2x+ 1= -4y+ 8$
$(x+ 1)^2= -4(y- 2)$

De la ecuación se observa que el vértice es (-1,2).

La parábola abre hacia abajo por el signo negativo.

Como 4c= 4 entonces c= 1, de donde se deduce que el foco es (-1,-1+2)= (-1,1). La ecuación de la directriz es y= 2+1= 3



Actividad 1

Hallar el foco y la directriz de $y^2=12x$ y dibujar su gráfica:

a) $y^2= 4x$

b) $x^2= 10y$

c) $(y-4)^2= 4(x+1)$

d) $(x-3)^2=-6(y-1)$

e) $y^2=16x$

f) $(y+2)^2=20x$

g) $(x-1)^2=12(y-2)$

Actividad 2

Hallar el vértice, el foco y la ecuación de la directriz de:

a) $y^2+2y+2x+7=0$

b) $x^2-2x-4y+5=0$

c) $y^2-6y+8x+41=0$

d) $x^2 - 6y + 8x + 41 = 0$

e) $x^2 - 6y + 18x + 25 = 0$

f) $y^2 + 2y - 8x - 3 = 0$

g) $x^2 + 2x + 4y - 7 = 0$

La elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la elipse.

Los focos están ubicados sobre el eje de las x, situados en los puntos F_1 (c, 0) y F_2 (– c, 0). Sea un punto P de la elipse cuyas coordenadas son (x, y). En el caso de la elipse la suma de las distancias entre PF y PF' es igual al doble del radio sobre el eje x.

$d(P,F_1) + d(P,F_2) = d(A_1, A_2)$ Donde:

c(h, k) es el centro.

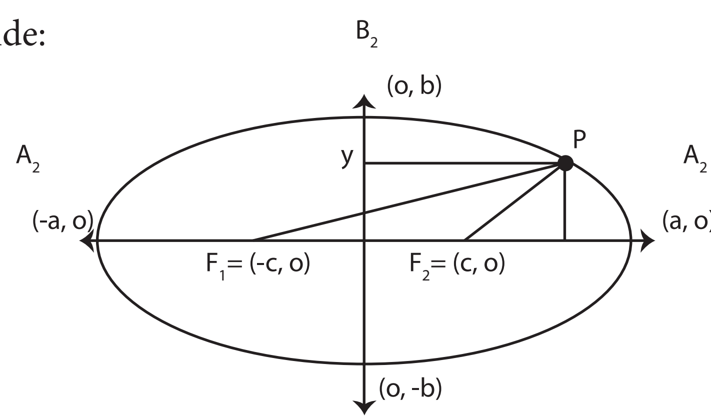
A_1, A_2, B_1, B_2 son los vértices.

F_1 y F_2 son los focos.

$\overline{A_1 A_2} = 2a$ eje mayor.

$\overline{F_1 F_2}$ = eje focal.

$\overline{B_1 B_2}$ = eje menor.



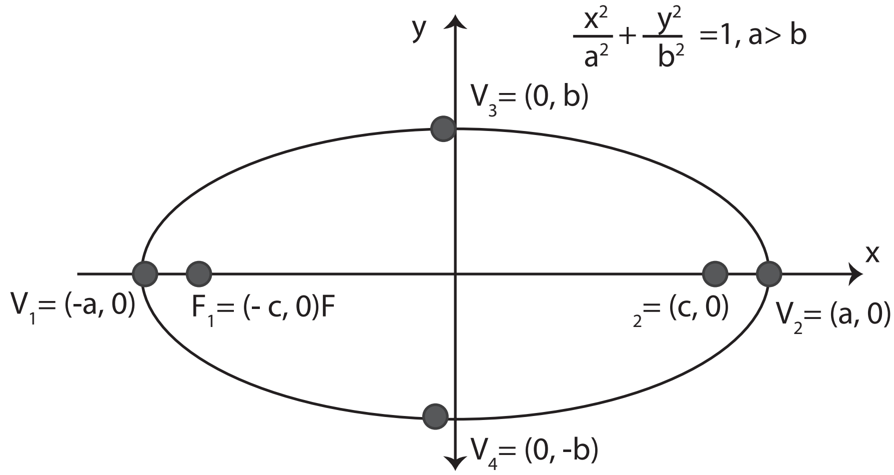
Elipse de focos $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

Ecuaciones de la elipse

La ecuación para la elipse con focos $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$, siendo $b^2= a^2-c^2$, $a > b$, 2a la longitud del lado mayor, 2b la del eje menor.

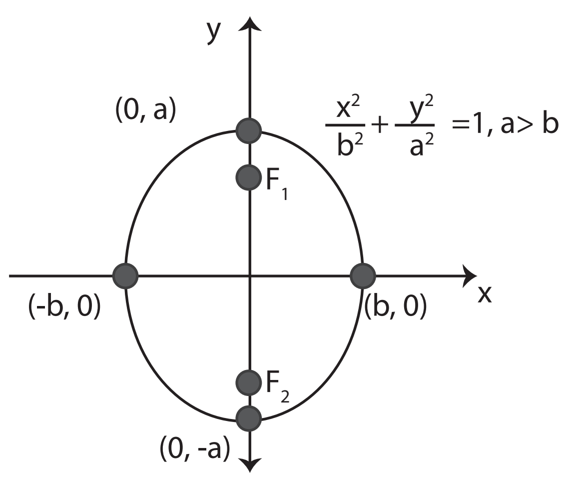
Ecuación con centro en (0,0) y eje focal x:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



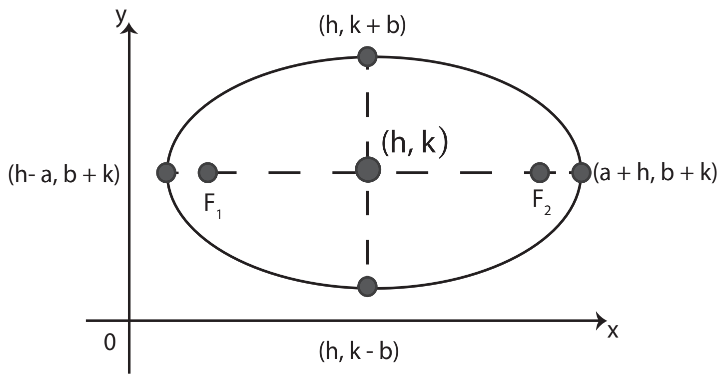
Ecuación con centro en (0,0) y eje focal y:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



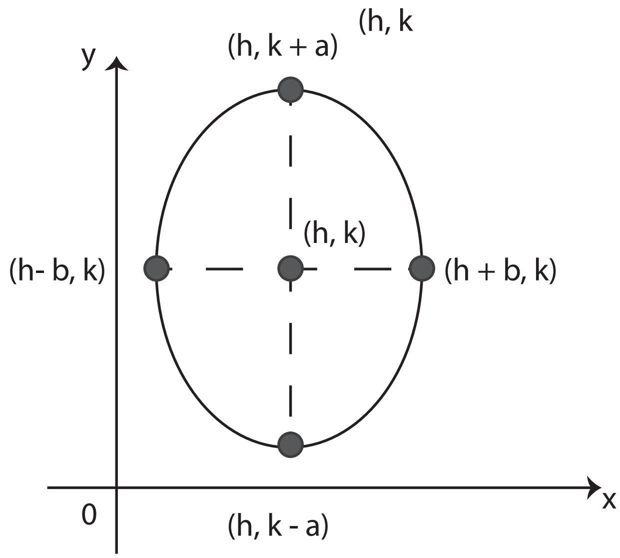
Cuando el eje focal está paralelo al eje de las abscisas (x, x_1):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



Cuando el eje focal está paralelo al eje de las coordenadas (y, y_1):

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Observación

El centro es $C(h, k)$, a^2 y b^2 están relacionadas con el eje mayor y menor, respectivamente, por lo tanto para identificar los dos casos, solo se tiene que ver con quien está el mayor denominador (con la variable x o con la variable y). Se tiene la ecuación general de la elipse:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Si $A = b^2$; $B = a^2$; $C = -2hb^2$; $D = -2ka^2$; $E = h^2b^2 + k^2a^2 - a^2b^2$

Ejemplo

Dada la ecuación $4x^2 + 9y^2 + 24x - 54y + 81 = 0$, determine su centro y la ecuación sobre alguno de sus ejes:

A= 4 entonces $4=b^2$ por tanto b= 2
B=9 entonces $9= a^2$ por tanto a = 3
Los radios de la elipse son: sobre el eje x , a = 3; sobre el eje y , b = 2

Para determinar el centro C (h, k), se tiene que:

C=24 entonces $24 = -2hb^2$ como b= 2 se tiene que h= 3
D = – 54 entonces $-54 = -2ka^2$ como a= 3 se tiene que k = 3

Entonces el centro C(h, k) = (– 3, 3).

Para verificar que se trate de una elipse, calcule E que debe tener el valor de 81.
$E = h^2b^2 + k^2a^2 - a^2b^2 = 81$

La ecuación de la elipse queda: $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

2. Determinar el centro, los puntos de los ejes, los focos y la gráfica de:

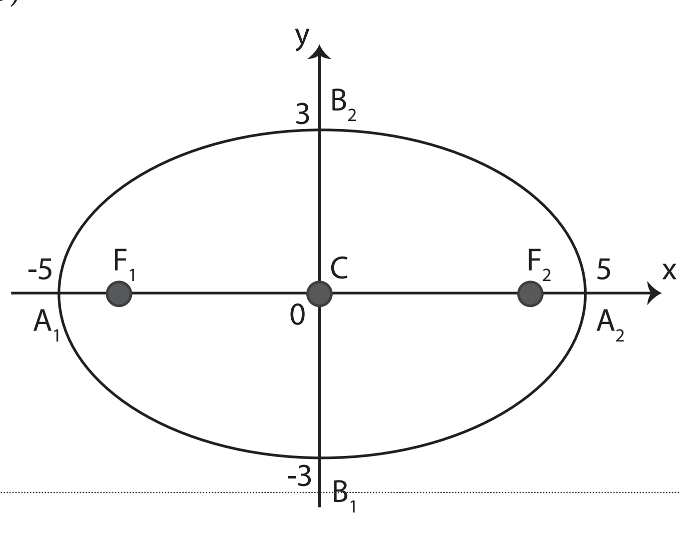
a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Centro (0,0), el eje mayor está sobre el eje *x*. a=5; b=3

$A_1=(-5, 0)$; $A_2= (5,0)$; $B_1=(0, -3)$; $B_2= (0, 3)$

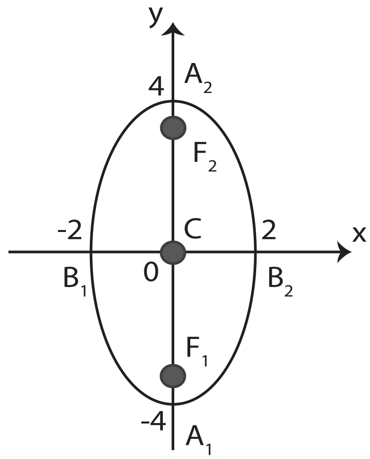
Como $b^2= a^2-c^2$, entonces la distancia focal es:

$c^2= a^2-b^2$
$c= \sqrt{a^2-b^2}= \sqrt{25-9}= \sqrt{16} \rightarrow c= \pm 4$
$f_1= (-4, 0)$; $F_2=(4,0)$



b) $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} = 1$

C(0,0), el eje mayor está sobre el eje y . a=4, b=2.
$c= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-4}= \sqrt{12}$ $A_1=(0,-4)$; $A_2=(0,4)$; $B_1=(-2,0)$; $B_2=(2,0)$ $F_1=(0,-\sqrt{12})$; $F_2=(0,\sqrt{12})$



c) $\frac{(x+5)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

c(-5,2); a= 6; b= 3. La distancia es $c= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36-6}= \sqrt{27}$

Para determinar A_1 y A_2 y : cuando y= 2: $\frac{(x+ 5)^2}{36} = 1$ $(x+5)^2 =36$

$x+5= \pm\sqrt{36}$ $x+5=\pm 6 \rightarrow \begin{matrix} x_1= 1 \\ x_2= -11 \end{matrix}$ $A_1= (-11, 2)$; $A_2=(1, 2)$

Para determinar B_1 y B_2:

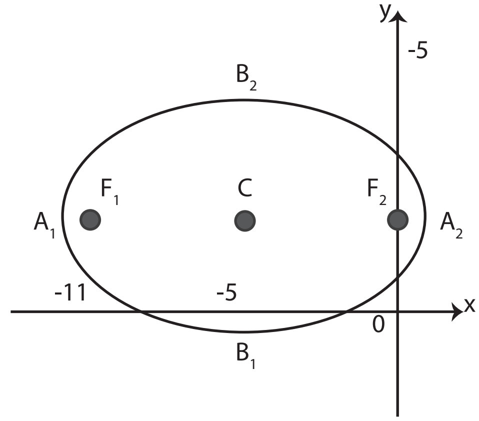
Cuando x= -5: $\frac{(y-2)^2}{9} = 1$ $(y- 2)^2= 9$ $x+5= \pm\sqrt{36}$

$y - 2 = \pm 3 \rightarrow \begin{matrix} y_1= 5 \\ y_2= -1 \end{matrix}$

$B_1= (-5, -1)$; $B_2= (2, 0)$

$F_1= (0, -\sqrt{12})$;

$F_2= (-5 + \sqrt{27}, 2)$



3. Convertir la siguiente ecuación en su forma estándar:

$4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$

Se ordena cada trinomio y completan los cuadrados perfectos:

$4(x^2+4x+4)+ 9(y^2-2y+1)= 11+ 16+ 9$

Se efectúa la operación y se factoriza cada trinomio

$4(x^2+4x+4)+ 9(y^2-2y+1)=36$
$4(x+2)^2+ 9(y-1)^2 =36$

Se divide entre 36 a cada lado de la igualdad:

$$\frac{(x+ 2)^2}{9}+\frac{(y- 1)^2}{4} =36$$

Actividad 3

Si el centro de una elipse es (0,0) y el valor de a=5 y b= 4, determinar la ecuación de la elipse y su gráfica.

Actividad 4

Determinar el centro, los puntos de los ejes, los focos y la gráfica de:

1. $\frac{x^2}{36} + y^2 = 1$

2. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

3. $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

4. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

5. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

Actividad 5

Dada las ecuaciones de las siguientes elipses, hallar las coordenadas del centro, de los vértices, de los focos y dibujar su gráfica:

1. $3(x-1)^2+4(y+2)^2=192$

2. $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$

3. $9x^2+4y^2-18x-16y-11=0$

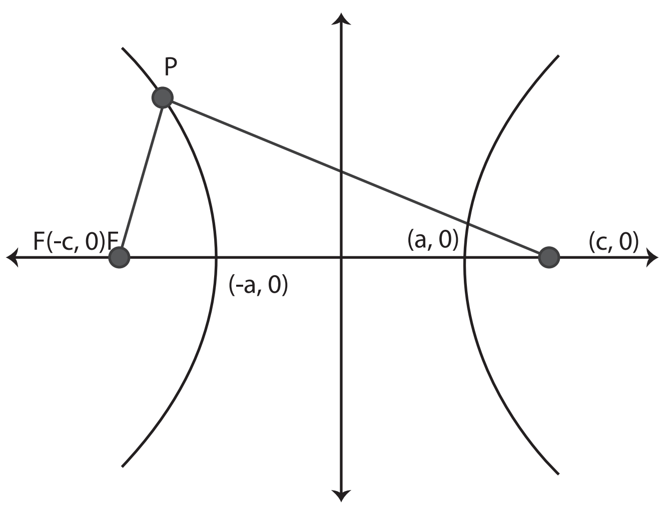
4. $x^2+4y^2-2x-16y+11=0$

5. $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0$

6. $16(x+2)^2+25(y-1)^2=400$

La hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la hipérbola.



Hipérbola de focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$

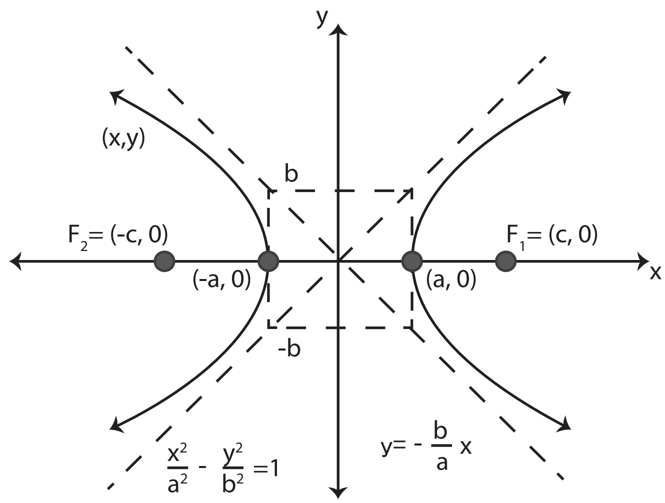
- La recta determinada por los focos es un eje de simetría.
- El punto medio determinado por los focos es el centro de la hipérbola.
- Los dos puntos de intersección de la hipérbola con el eje de simetría se llaman vértices de la hipérbola.
- El segmento determinado por los vértices se llama eje real o transverso.

Ecuación de la hipérbola

La ecuación de la hipérbola con centro en (0,0) con eje focal en el eje x es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde $b^2 = c^2 - a^2$



La ecuación de la hipérbola con centro en (0,0) con eje focal en el eje x es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$
por tanto $c^2 = b^2 + a^2$

Ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

Son rectas que jamás cortan a la hipérbola, aunque se acercan lo más posible a ella. ambas deben pasar por el centro c(0,0).

Las ecuaciones de las asíntotas para c (0,0) son: $y = \pm \frac{b}{a} x$

Ejemplo

Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,

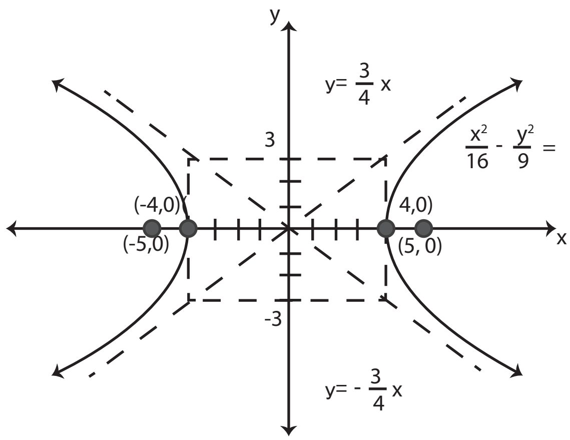
hallar las coordenadas de los focos, las coordenadas de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y dibujar la gráfica.

Solución

Como a= 4 y b= 3 se tiene que c= $\sqrt{4^2+3^2}$ =5, por tanto las coordenadas de los focos son (5,0) y (-5,0).

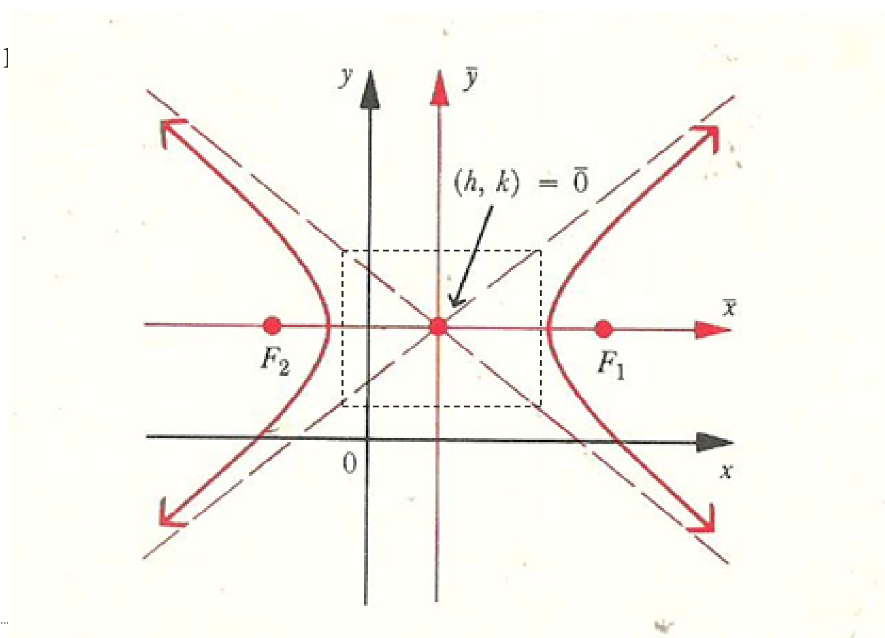
Las coordenadas de los vértices son: (4,0) y (-4,0).

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{3}{4} x$



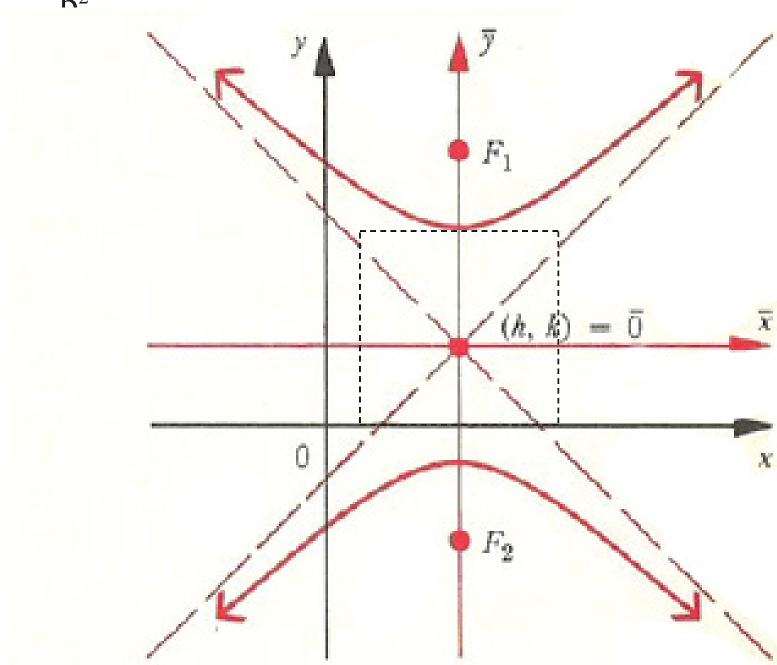
Si la hipérbola estuviese centrada en un punto cualquiera (h, k) y el eje focal paralelo al eje x, es:

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



Si la hipérbola estuviese centrada en un punto cualquiera (h, k) y el eje focal paralelo al eje y, es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)}{b^2} = 1$$



La ecuación en su forma general es: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

Son rectas que jamás cortan a la hipérbola, aunque se acercan lo más posible a ella. Ambas deben pasar por el centro c(h , k). Las ecuaciones de las asíntotas para c (h,k) son:

$$y - k = \pm b/a(x-h)$$

Ejemplo 1

Dada la ecuación de la hipérbola $4x^2-y^2-x+2y+7=0$, hallar las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y dibujar la gráfica:

Solución

Se completa el cuadrado de cada trinomio

$4(x^2-2x+1)-(y^2-2y+1)=-7+4-1$
$4(x-1)^2-(y-1)^2=-4$

Se divide entre -4

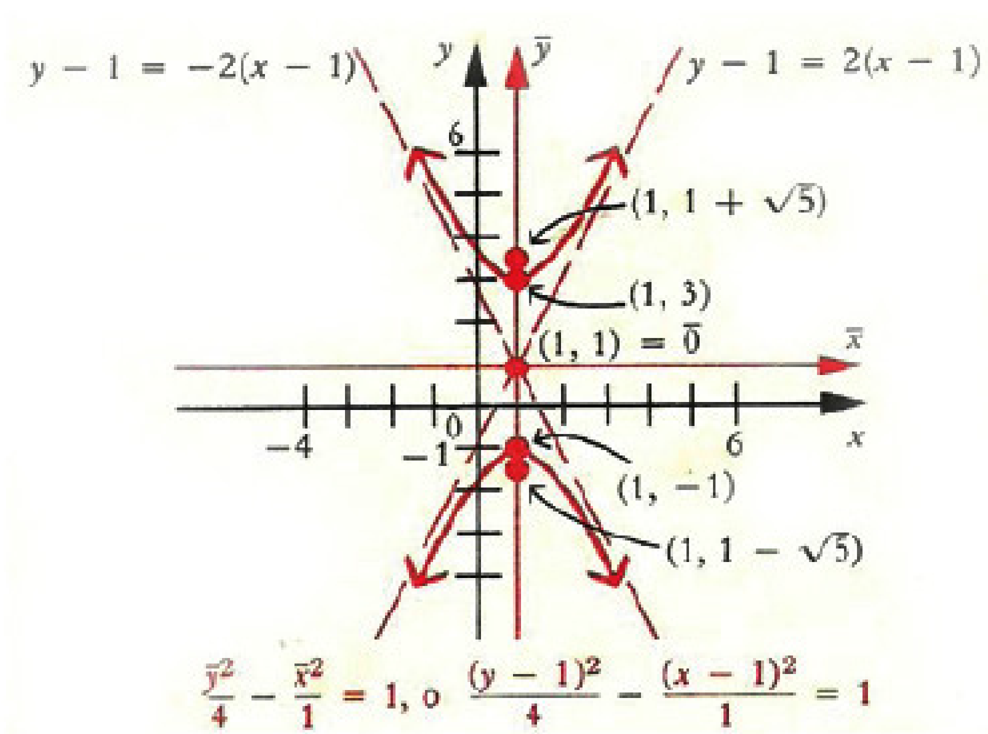
$$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{1}=1$$

El centro (h,k)= (1,1)

Como el signo menos afecta a las abscisas, las coordenadas de los focos (h, k+c) y (h, k-c) son $(1, 1+\sqrt{5})$ y $(1, 1-\sqrt{5})$, ya que $c=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$, luego como el centro es (1,1) se le suma el desplazamiento a la coordenada y del punto.

Como a=2, los vértices (h, k+a) y (h, k-a) son (1, 3) y (1,-1)

Las ecuaciones de las asíntotas son $y-k=\pm b/a(x-h)$
$y-1=\pm 2(x-1)$



Ejemplo 2

Dada la ecuación de la hipérbola x^2-$4y^2$+6x+24y-43=0, hallar las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y dibujar la gráfica:

Solución

Se completa el cuadrado de cada trinomio:

$(x^2+6x+9)-4(y^2-6y+9)=43+9-36$
$(x+3)^2-4(y-3)^2=16$

Se divide entre 16

$$\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$$

El centro (h,k)= (-3,3)

Como el signo menos afecta a las ordenadas, las coordenadas de los focos (h+c, k) y (h-c, k) son $(-3-2\sqrt{5}, 3)$ y $(-3+\sqrt{5}, 3)$,
ya que c= $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, luego como el centro es (-3,3) se le suma el desplazamiento a la coordenada x del punto.

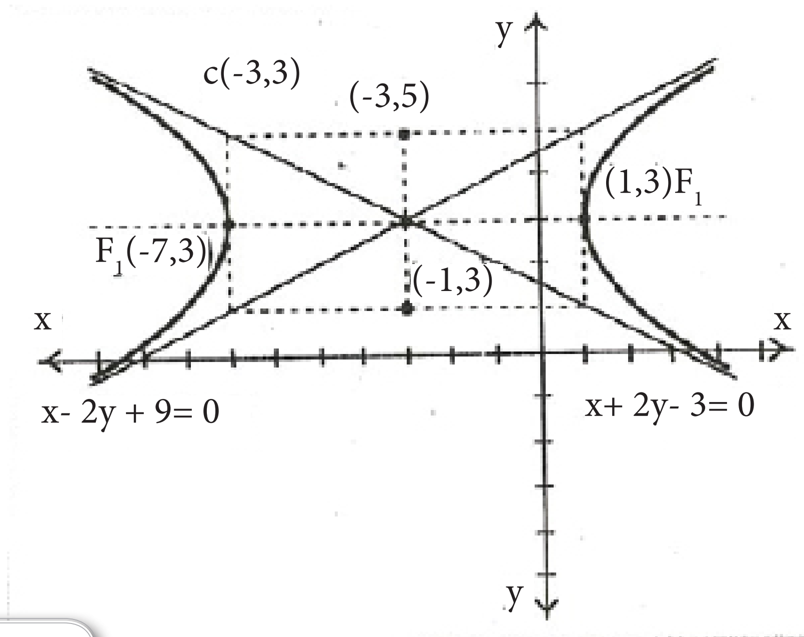
Como a=4, los vértices v_1 (h+k, k) y v_2(h-a, k) son:

v_1 (-3+4, 3) = (1,3)
v_2 (-3-4, 3) = (-7,3)

Las ecuaciones de las asíntotas son $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

$$y-3=\pm\frac{4}{3}(x-3)$$

x-2y+9=0 y x+2y-3=0



Actividad 6

Dadas las ecuaciones de las siguientes ecuaciones de hipérbolas, hallar coordenadas del centro, de los focos de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y dibujar la gráfica.

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

2. $\frac{x^2}{26}+\frac{y^2}{49}=1$

3. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1$

4. $25x^2- 9y^2= 1$

5. $4x^2- 3y^2+ 8x- 2y+ 6= 0$

6. $4x^2- 9y^2- 32x+ 36y+ 27= 0$

7. $4x^2- y^2= 16$

8. $9y^2- 13x^2= 117$

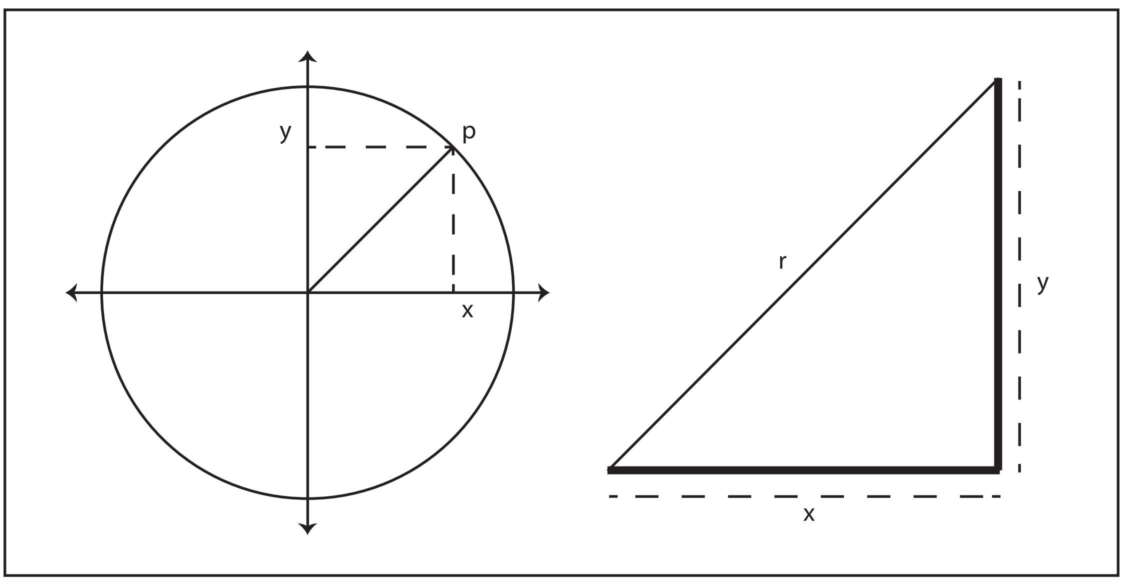
Circunferencia

La curva cuadrática más simple es la circunferencia, que es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Se denomina radio de la circunferencia a la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro.

Ecuación de la circunferencia

Si se hace coincidir el centro de la circunferencia con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, las coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia determina un triángulo rectángulo.



Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$x^2 + y^2 = r^2$ Ecuación canónica de la circunferencia con centro (0,0)

Sea (h, k) el centro de la circunferencia, recuerde que la distancia del centro a cualquier punto (x, y) de la circunferencia es constante e igual al radio r, por tanto, se tiene que:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ Ecuación canónica de la circunferencia con centro (h,k)

Desarrollando los cuadrados se obtiene: $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$
Si se reemplaza: $-2h = D$; $-2k = E$; $F = h^2 + k^2 - r^2$ se tiene:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ La ecuación general de la circunferencia.

Ejemplos

1. Dada la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$, determine el centro y radio.

   Se tiene que:

   $D = 6$, entonces: $6 = -2h$ por tanto: $h = -3$
   $E = -8$, entonces: $-8 = -2k$, por tanto: $k = 4$

   Con los datos anteriores se tiene que el centro de la circunferencia es: $C(-3, 4)$.

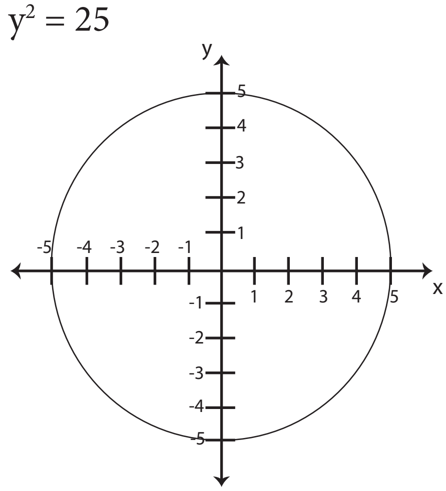
2. Dada la ecuación de la circunferencia: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$, determine el su centro y su radio:

   El centro es $c(1,-3)$ y su radio $r = 4$

3. $x^2 + (y - 4)^2 = 7$ es la ecuación de una circunferencia de centro $c(0, 4)$ y radio $r = \sqrt{7}$.

4. Si el centro de la circunferencia es $c(0,0)$ y radio $r = 5$, determine la ecuación de la circunferencia y su gráfica:

   La ecuación es: $x^2 + y^2 = 25$



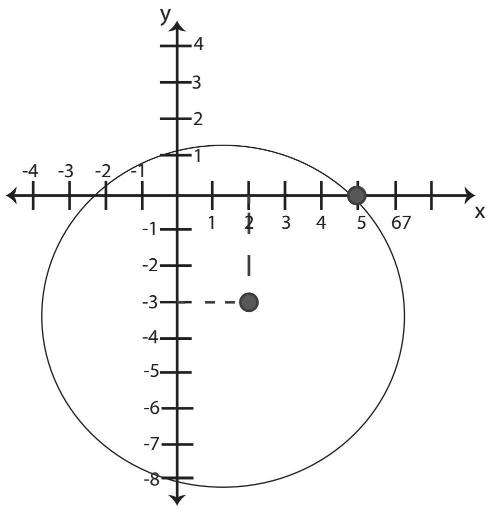
5. Representar gráficamente la siguiente circunferencia, determinar el centro y el radio:

$x^2 + y^2 - ax + 9y - 3 = 0$

Para encontrar centro y radio hay que completar cuadrados:

$(x^2 + -4x + 4 - 4) + (y^2 + 9y + 9 - 9) - 3 = 0,$
$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Luego, el centro es c(2, -3) y el radio es 4.



Actividad 7

Dadas las circunferencias:

1. $(x-2)^2 + y^2 = 4$
2. $x^2 + (y-1)^2 = 9$
3. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

- Determine el centro, el radio y graficar cada una.
- Averiguar si los siguientes puntos pertenecen a las mismas: $P_1(2, 2)$; $P_2(0, 4)$; $P_3(7,-1)$

Actividad 8

Representar gráficamente la siguiente circunferencia, determinar el centro y el radio y la ecuación con su centro:

1. $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 22 = 0$

2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 14x + 4y + 53 = 0$

Actividad 9

Con los siguientes datos, determine la ecuación de la circunferencia y elabore la gráfica:

a) c(0, 0), r= 3

b) c(0, 0), r= 4

Actividad metacognitiva

Con base a lo que ha aprendido, responda lo siguiente:

1. ¿Por qué es importante poder plantear y resolver una ecuación?

2. ¿Considera que adquirió nuevos aprendizajes al estudiar los temas de esta unidad? ¿Puede mencionar cuáles?

3. ¿Qué contenidos de los estudiados considera importantes para su aplicación en su vida habitual? ¿Por qué?

4. ¿Por qué considera importante el estudio de la geometría analítica plana?

5. ¿Cuáles de los contenidos estudiados en esta unidad le presentaron mayor problema al estudiarlos?

Glosario

Circunferencia: curva plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro, el centro, situado en el mismo plano.

Directriz: dicho de una línea, de una figura o de una superficie: que determina las condiciones de generación de otra línea, figura o superficie.

Elipse: lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos llamados focos es constante, que resulta de cortar un cono circular por un plano que encuentra a todas las generatrices del mismo lado del vértice.

Hipérbola: lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, que resulta de cortar un cono circular por un plano que encuentra a todas las generatrices a ambos lados del vértice.

Parábola: lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una recta y de un punto fijo, que resulta de cortar un cono circular recto por un plano paralelo a una generatriz.

Perpendicular: dicho de una línea o de un plano: que forma ángulo recto con otra línea o con otro plano.

Autoevaluación

Realice cada una las actividades y ejercicios que a continuación se le solicitan.

1. Complete el siguiente cuadro:

Centro C	Radio R	Ecuación de la circunferencia de centro C y radio r	Representación gráfica
(0,0)	3		
(0,0)	4		
(0, -2)	5/2		
(-1, -2)		$x^2 + y^2 = 9$	
		$(x + 4)^2 + y^2 = 1$	

2. Complete el siguiente cuadro:

$C (x_0, y_0)$	a	b	Ecuación	Representación gráfica
(0,0)	5	4		
			$\frac{x^2}{36} + y^2 = 1$	
			$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	

3. Encuentre los elementos de las siguientes hipérbolas y elabore una gráfica de cada una:

a. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

b. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

4. Encuentre los elementos de las siguientes parábolas y elabore la gráfica de cada una:

   a. $y^2 = 4x$

   b. $x^2 = 10y$

   c. $(y - 4)^2 = 4(x + 1)$

   d. $(x - 3)^2 = -6(y - 1)$

5. Halle el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y dibuje la gráfica de: $x^2-4x-8y-12=0$

6. Dada la siguiente ecuaciones de hipérbola, encuentre las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y dibuje la gráfica: $x^2- 4y^2+ 6x+ 24y- 43= 0$

7. Dada la ecuación de la siguiente elipse, halle las coordenadas del centro, de los vértices, de los focos y dibuje su gráfica: $9x^2+ 4y^2- 54x- 16y+ 25= 0$

8. Represente gráficamente la siguiente circunferencia, determine el centro y el radio y la ecuación con su centro: $x^2+ y^2- 4x- 10y+ 25$

Bibliografía

Ángel, Allen R. (1990). *Intermediate Algebra for College students. New Jersey*: Editorial Prentice Hall.

Goodman, Arthur y Hirsch, Lewis. (1996). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Editorial Person Educación.

Londoño Nelson, Bedoya Hernando. (1991). *Geometría analítica y trigonometría*. Colombia: Grupo Editorial Norma Educativa.

O´Daffer, Phares. (1998). *Introducción al Álgebra*. México: Editorial Addison Wesley.

Ortiz Campos. (1992). *Matemáticas 2. Geometría y Trigonometría*. México: Editorial Publicaciones Cultural.

Ortiz Campos. (1992). *Matemáticas 1. Álgebra*. México: Editorial Publicaciones Cultural.

Reyes Núñez, Horacio y León Tejeda, Denia. (2006). *Matemática 10° grado*. Tegucigalpa: Equipo Editorial.

Smith, Estanley. (1998). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. México: Editorial Prentice Hall.

Sullivan, Michael. (1997). *Trigonometría y Geometría Analítica*. México: Editorial Prentice Hall.