Unidad I

Conjunto de puntos

Introducción

En esta unidad desarrollaremos los conceptos fundamentales de la geometría, disciplina que abarca un amplio campo de estudio, que incluye conocimientos prácticos y teóricos sobre las propiedades de las figuras en el plano y en el espacio.

En sus orígenes se enmarcaba en la solución de problemas concretos relacionados con medidas, situación que ha cambiado con el pasar del tiempo, convirtiéndose en una disciplina aplicable a muchos otros campos prácticos.

Al observar nuestro alrededor es difícil encontrar un contexto donde la geometría no aparezca de manera directa o indirecta y en muchas de las actividades cotidianas se aplican de manera consciente o inconsciente procedimientos geométricos, esto la convierte en una disciplina necesaria para el desarrollo de la vida humana, sin dejar de mencionar su aporte al progreso del pensamiento lógico.

Partiendo de la conciencia del valor práctico de la geometría, se pretende facilitar que usted logre un aprendizaje significativo y desarrolle competencias en este campo del conocimiento a través de la resolución de todas las actividades de esta unidad.

¿Qué vamos a aprender?

Competencia	Objetivos	Contenido
1. Definir y describir las propiedades de los elementos básicos del conjunto de puntos.	1. Investigar sobre el conjunto de puntos y algunos aspectos de teoría de conjuntos.	1. Conjunto de puntos 2. Elementos básicos de teoría de conjuntos
2. Representar e identificar, haciendo uso del lenguaje simbólico, términos básicos de la geometría.	2. Proponer con sus propias palabras lo que se entiende por punto, recta y plano. 3. Identificar puntos, rectas, planos, segmentos y rayos.	3. Definición intuitiva de punto, recta y plano 4. Lenguaje simbólico para denotar el punto, recta y plano
3. Resolver problemas aplicando las propiedades de un segmento de recta.	4. Determinar relaciones entre puntos, rectas y planos en una figura dada. 5. Conceptualizar los postulados de incidencia entre punto, recta y plano.	5. Punto, recta y plano 6. Postulados y teoremas referentes al punto, recta y plano
4. Establecer procedimientos para determinar rayos, segmentos, distancia y puntos medios de un segmento.	6. Utilizar correctamente los postulados entre punto, recta y plano. 7. Expresar con sus propias palabras los conceptos de rayo, segmento, semirrecta y punto medio de un segmento.	7. Utilizar los postulados y teoremas sobre punto, recta y plano 8. El rayo, el segmento, la semirrecta y el punto medio
5. Demostrar la existencia de un punto en un segmento y una recta a través del uso de propiedades y postulados.	8. Utilizar las propiedades y postulados para demostrar la existencia de un punto en un segmento y una recta.	9. Demostración de la existencia de un punto en un segmento y en una recta

Mis conocimientos previos

Instrucciones: desarrolle lo que se le plantea a continuación.

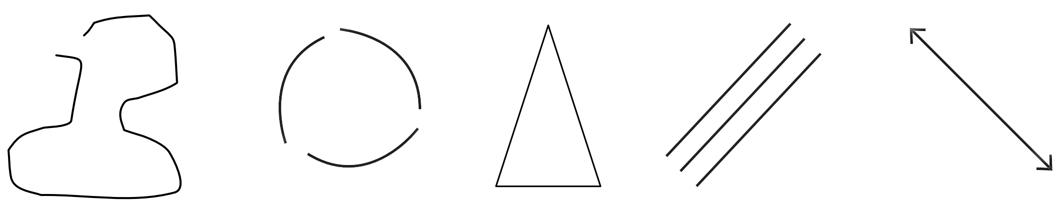
1. Mencione dos objetos que den la idea de punto:

___

___

2. Dibuje dos objetos que den la idea de plano:

3. Encierre en un círculo las siguientes figuras geométricas que son conjuntos de puntos:



4. ¿Por qué dibujamos flechas en los extremos de una recta?

___

___

___

Es evidente que poseemos conocimientos geométricos básicos, los cuales en su mayoría han sido adquiridos de manera intuitiva e inconsciente durante nuestra interacción con el entorno.

Conjunto

La geometría trata con conjuntos de puntos; por ejemplo, ya hemos definido el espacio como el conjunto de todos los puntos, y las figuras geométricas son conjuntos de puntos. En el desarrollo de la geometría estudiaremos algunas propiedades de diferentes conjuntos de puntos.

La palabra conjunto denota una colección de elementos que guardan alguna característica en común, ya sean números, personas, figuras, ideas o conceptos. Las partes de un conjunto se llaman elementos, los cuales generalmente se denotan por letras minúsculas; los conjuntos se representan con letras mayúsculas.

En matemáticas el concepto de conjunto es considerado primitivo y no se da una definición de este, sino que se trabaja con la notación de colección y agrupamiento de objetos; también puede decirse que se consideran primitivas las ideas de elemento y pertenencia.

Algunos conjuntos tienen la característica de que están bien definidos, es decir que dado un objeto particular, se puede determinar si este pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, si se considera el conjunto de los números dígitos, sabemos que 3 pertenece al conjunto, pero 19 no; otro ejemplo es el conjunto de las bellas obras musicales, que no es un conjunto bien definido, puesto que diferentes personas puedan incluir distintas obras en el conjunto.

Como ya mencionamos anteriormente, los objetos que forman un conjunto son llamados miembros o elementos. Por ejemplo, el conjunto de las letras de alfabeto: a, b, c... x, y, z, que se puede escribir así:

$$A = \{a, b, c... x, y, z\}$$

Como se muestra, el conjunto se escribe entre llaves ({}) y sus elementos se separan con comas (,). En teoría de conjuntos se acostumbra a no repetir los elementos, por ejemplo, el conjunto {b, b, b, d, d} simplemente será {b, d}.

El detallar todos los elementos de un conjunto entre llaves se denomina forma tabular, extensión o enumeración de los elementos. Si el conjunto es finito no hay problema, pero si es infinito nos vemos obligados a escribir "..." y esperar que se entiendan cuáles son los demás elementos. Para los conjuntos infinitos es mejor hacerlo por comprensión.

Por comprensión: se trata de dar un conjunto de características o ecuaciones de forma que todas ellas sean cumplidas por todos los elementos que pertenecen al conjunto. Por ejemplo:

A = {x/x € naturales tales que x < 10 y x impar} = {x/x € N: x < 10, x impar}

Entonces, los números 1, 3, 5, 7 y 9 cumplen todas las condiciones del conjunto. Por tanto, esos números serían los únicos elementos de dicho conjunto y el conjunto, por extensión, se podría escribir como A = {1, 3, 5, 7, 9}.

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, por ejemplo, el conjunto {a, b, c} también puede escribirse: {a, c, b},{b, a, c},{b, c, a},{c, a, b},{c, b, a}.

El conjunto completo de los elementos bajo consideración en un contexto dado se llama conjunto universo o universal y es designado por la letra U. Para la mayor parte del desarrollo de la geometría el conjunto universo será el conjunto de todos los puntos de un plano.

Si cada elemento del conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces diremos que A es subconjunto de B; también podemos decir que A está contenida en B y lo escribiremos como $A \subset B$. Un subconjunto puede incluir algunos o todos los elementos del conjunto universo.

Conjunto vacío: conviene introducir el concepto de conjunto vacío, es decir, el conjunto que carece de elementos, mismo que también recibe el nombre de conjunto nulo, que se denota por el símbolo Ø.

Existen dos operaciones básicas que pueden desarrollarse con conjuntos: la unión y la intersección.

La unión de dos conjuntos es el conjunto que resulta de todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. Su símbolo es $\cup$. Por ejemplo:

A = { 1, 2, 3, 4, 5 } B = {4, 5, 6, 7, 8 } A $\cup$ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

La intersección es el conjunto formado por los elementos que tienen en común ambos conjuntos. El signo para la intersección es ∩. Por ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4, 5}   B = {3, 4, 7, 8}   A ∩ B = {3, 4}

En algunos casos es posible que la intersección sea igual a vacío Ø, debido a que ambos conjuntos no tienen elementos en común. Por ejemplo:

A= {a, b, c, d}   B = {e, f, g }   A ∩ B = Ø

Actividad 1

Instrcciones: resuelva los ejercicios que se le presentan a continuación.

1. Describa cada uno de los conjuntos siguientes enlistando todos sus elementos:

   a. El conjunto de los números compuestos menores que 20
   b. El conjunto de los enteros que están entre - 4 y 5
   c. El conjunto de los números mayores que -3 y menores que 3

2. Caracterice los siguientes conjuntos por comprensión:

   a. El conjunto A consiste de las letras a, b, c, d, e
   b. El conjunto B = {2, 4, 6, 8…}
   c. El conjunto C = todos los países de las Naciones Unidas
   d. El conjunto D = {3}
   e. El conjunto E = los presidentes más jóvenes de Honduras de los últimos 50 años

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos?

   a. A= {x/x es una letra anterior a *a* en el abecedario}
   b. B = {x/x^2 = 9 y 2x = 4}
   c. C = {x/x ≠ x }
   d. D = {x/x + 8 = 8}

4. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?

   a. A = {x/x es una letra de la palabra taco}
   b. B = {x/x es una letra de la palabra tacto}
   c. C = {las letras a, c, o, t }
   d. {x/x es una letra de la palabra cota}

5. Dados los conjuntos que se le presentan:

   A = {2, 4, 6, 8, 10}   B = {1, 3, 5, 7, 9}   C = {3, 4, 5, 6}

   Encuentre los siguientes conjuntos:

   a. $A \cup B$
   b. $A \cap B$
   c. $B \cup C$
   d. $A \cap C$
   e. $(A \cap C) \cup C$

Términos primitivos

En geometría existen términos primitivos, también conocidos como conceptos primarios. Dichos términos geométricos se aceptan sin ser definidos, solamente podemos hacer representaciones concretas de ellos. Estos términos son considerados como base fundamental en el desarrollo geométrico, ya que con ellos como punto de partida se pueden definir nuevos fundamentos, como es el espacio. Los términos primitivos son: el punto, la recta y el plano.

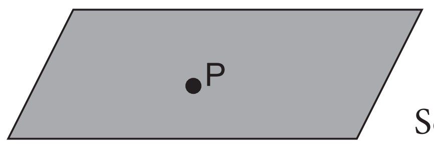
Espacio: es el conjunto de todos los puntos.
Figura: es un subconjunto no vacío del espacio.

A partir de los términos primitivos de la geometría se definen espacio y figura.

Punto

Solamente podemos hacer representaciones concretas sobre ellos, por ejemplo, lo más cercano a un punto es el agujero que deja en el papel un lápiz bien afilado, un granito de arena, etc.

Notación: para nombrar un punto cualquiera se suelen utilizar las letras mayúsculas del abecedario y se representa gráficamente por un círculo. Las letras usadas generalmente para designar un punto son: A, B, C, P, Q, R. Por ejemplo:



Se lee como punto P.

Características:

1. Los puntos carecen de dimensión, por lo tanto, carecen de longitud, anchura y altura.
2. Un punto indica posición en el espacio y en el plano.
3. Existen infinitos puntos.

Recta

Una manera intuitiva del concepto de recta es el de una línea, la cual se extiende de forma indefinida en ambos sentidos, no inicia ni termina. Esta característica se indica en las ilustraciones colocando flechas a los extremos de la recta:

Matemáticamente, la recta puede considerarse como una sucesión infinita de puntos alineados o colineales.

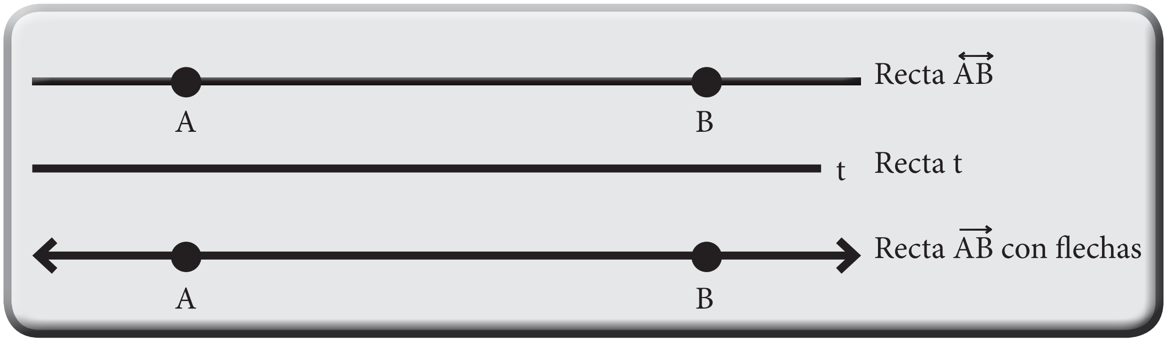
Notación: para nombrar una recta cualquiera se utilizan dos de sus puntos y el signo $\longleftrightarrow$ sobre ellos, o bien podemos nombrarla con una letra minúscula.

Ejemplo:

$\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{BA}$

Se lee como recta $\overleftrightarrow{AB}$ o recta $\overleftrightarrow{BA}$

Se lee como recta t.



Como ya se consideró la recta como una sucesión infinita de puntos alineados o colineales, la misma recta puede llevar varios nombres. Ejemplo:

t $= \overleftrightarrow{RT} = \overleftrightarrow{TR}, \overleftrightarrow{RS} = \overleftrightarrow{SR}, \overleftrightarrow{ST} = \overleftrightarrow{TS}$

Características:

1. Las rectas indican dirección y dos sentidos contrarios.
2. Las rectas tienen una sola dimensión, la longitud.

Plano

Generalmente los planos se representan con un paralelogramo.

Notación: para nombrar un plano cualquiera utilizamos una letra mayúscula. Por ejemplo:

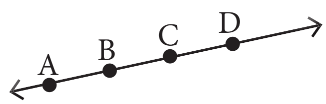
Se lee plano E.

Características:

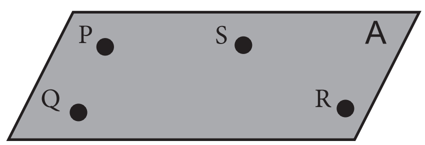
1. Los planos tienen infinitos puntos.
2. Los planos tienen infinitas rectas.
3. Los planos son ilimitados.

Considerando muchos enunciados sobre puntos rectas y planos, puesto que ellos son conjuntos de puntos, todos los cuales están sobre una recta o un plano, las siguientes definiciones describen esta situación:

- **Puntos colineales:** son aquellos que están sobre una misma recta.



- **Puntos coplanares:** son aquellos que están en el mismo plano.



Actividad 2

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le presentan a continuación.

1. Punto, recta y plano se consideran como términos no definidos en nuestro desarrollo de la geometría. Busque estas palabras en un diccionario común y escriba sus significados en su cuaderno.

2. Trace una figura de tres puntos colineales A, B y C.

3. Trace una figura de tres puntos no colineales D, E y F.

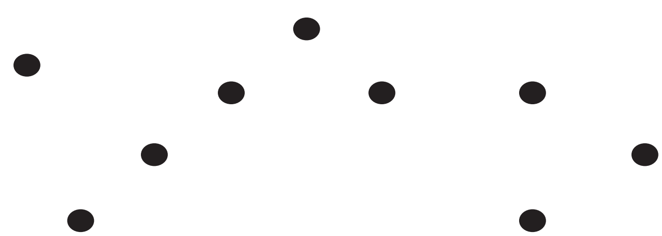
4. Trace una figura de rectas que se intersecan.

5. Trace una figura de dos rectas que no se intersecan.

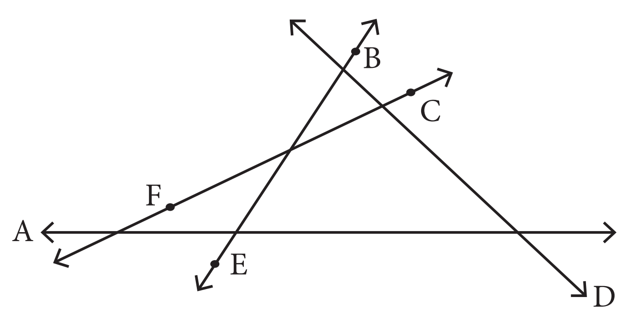
6. ¿Pueden 3 puntos ser no coplanares?

7. Menciónе tres objetos que sugieran la idea de espacio.

8. Observe el grupo de puntos que se le presenta a continuación. Con una regla dibuje una recta a través de grupos de tres o más puntos colineales.



9. Observe la siguiente figura:



¿Cuántas rectas contiene? Identifíquelas.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Demostraciones, axiomas, postulados, teoremas y corolarios

Es necesario conocer por qué los términos geométricos son aceptables y para ello en geometría son importantes las demostraciones de los mismos.

Demostración

Demostrar una proposición, en este caso alguna regla geométrica, básicamente consiste en comprobar que dicha proposición es coherente utilizando reglas lógicas que son matemáticamente aceptables y que, una vez demostrada, no existe ninguna contradicción con otra proposición que haya sido antes demostrada como verdadera.

Como toda proposición para ser aceptada como verdadera debe ser demostrada, la geometría se vuelve una disciplina completa. Las reglas lógicas utilizadas en una demostración son:

1. **Axioma:** es una proposición considerada sencilla y que es tan evidente que no necesita una demostración. Ejemplo: la recta tiene infinitos puntos.

2. **Postulado:** es una proposición sencilla, aunque no tan evidente como un axioma, puede estar sujeta a una comprobación, pero se acepta sin necesidad de demostración. Ejemplo: la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

3. **Teorema:** es una preposición que amerita una demostración obligatoria, dicha demostración hace uso de axiomas, postulados e incluso de otros teoremas. Los enunciados de un teorema se estructuran así:

    - Hipótesis: es lo que se supone.
    - Tesis: es lo que hay que demostrar.

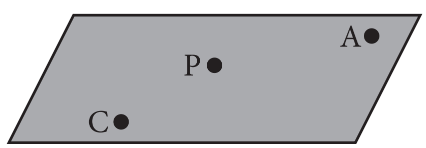
Haciendo uso correcto de todas estas proposiciones, respetando el orden lógico y con ayuda de un método demostrativo, podemos demostrar cualquier propiedad geométrica.

Puntos, rectas y planos: postulados y teoremas

Rectas y puntos

Postulado 1.1. Toda recta contiene cuando menos dos puntos:

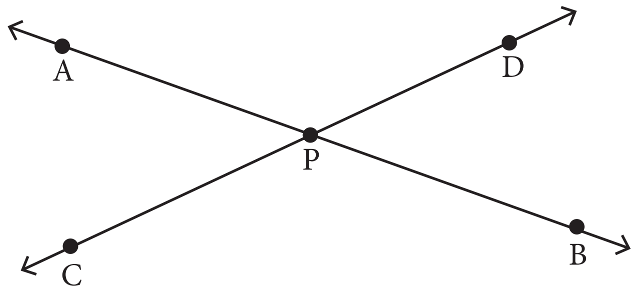
Postulado 1.2. Todo plano contiene cuando menos tres puntos no colineales:



Postulado 1.3. Existe el espacio que contiene cuando menos cuatro puntos no colineales:

Postulado 1.4. Dados dos puntos cualesquiera, existe exactamente una recta que los contiene:

Teorema 1.1. Si tenemos dos rectas cualesquiera, la intersección de las dos rectas es un punto:



Actividad 3

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le presentan a continuación.

1. Sean A, B, C tres puntos no colineales:

   a. ¿Cuántas rectas distintas quedan determinadas por cada pareja de estos puntos?

   b. ¿Cuántos planos distintos contendrán a estos tres puntos?

   c. ¿Es posible alguna vez que exactamente una recta quede determinada por tres puntos? Si la respuesta es sí, diga cómo.

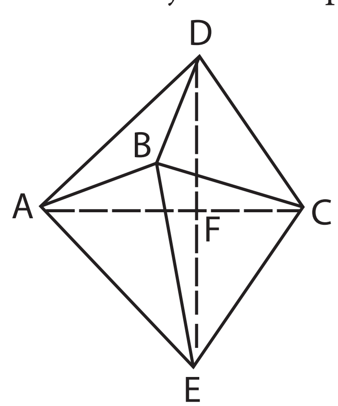
2. En la figura tridimensional de la derecha, $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ se intersecan en F. Identifique si cada uno de los siguientes conjuntos de puntos son colineales o coplanares:

   a. {E, B} e. {A, B, C, D}

   b. {A, E, D} f. {A, B, C, F}

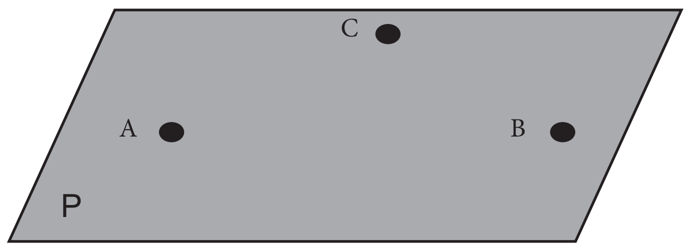
   c. {A, B, C} g. {E, F, H}

   d. {A, F, C} h. {A, F, C, D}

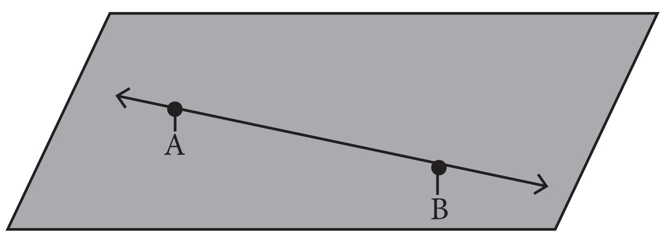


Rectas y planos

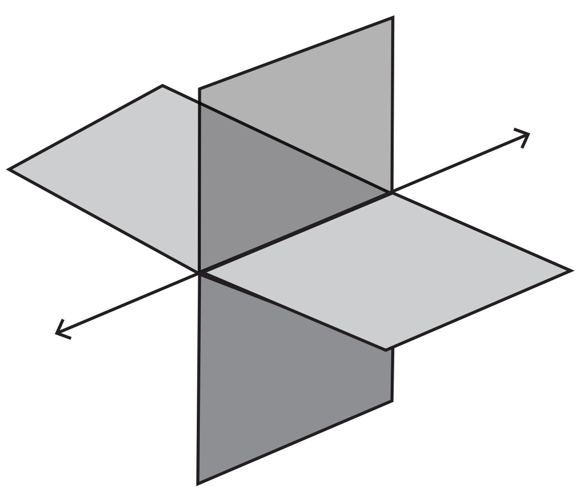
Postulado 1.5. Dados tres puntos cualquiera no colineales, existe exactamente un plano que los contiene.



Postulado 1.6. Dados dos puntos cualquiera del plano, la recta que los contiene está contenida en el plano.

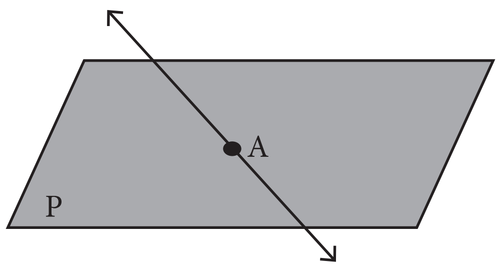


Postulado 1.7. Si dos planos se intersecan, entonces su intersección es exactamente una recta.

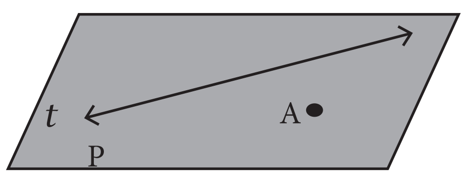


Si convenimos en estos postulados, es posible demostrar que se siguen otras propiedades. El postulado 1.6 nos habla de que si una recta y un plano se intersecan en dos puntos, la recta está contenida en el plano. El postulado 1.4 nos dice que hay solamente una recta que contiene a dos puntos dados. De ambos postulados decimos que si una recta que no está contenida en un plano interseca al plano, la intersección debe ser un punto. Si la intersección contuviera más de un punto, la recta estaría contenida en el plano de acuerdo con el postulado 1.6, y con esto queda demostrado el segundo teorema.

Teorema 1.2. Si una recta intersecta a un plano que no la contiene, entonces la intersección es exactamente un punto.



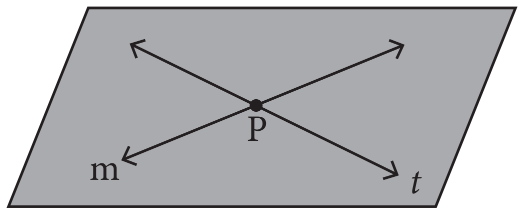
Teorema 1.3. Dada una recta y punto fuera de ella, hay exactamente un plano que los contiene.



Este teorema es una extensión del postulado 1.1 (toda recta contiene cuando menos dos puntos). Puesto que el punto dado no está contenido en la recta dada, tenemos cuando menos tres puntos no colineales. De acuerdo con el postulado 1.5, hay exactamente un plano que contiene tres puntos no colineales, esto significa que hay exactamente un plano que contiene a la recta dada y al punto dado, por lo que el teorema queda demostrado.

Puesto que una recta contiene cuanto menos dos puntos, podemos argumentar que dos rectas que se intersecan contienen cuanto menos tres puntos no colineales. De acuerdo con el postulado 1.5, hay exactamente un plano que contiene a estos tres puntos. El postulado 1.6 nos lleva a la conclusión de que este plano contiene todos los puntos de las dos rectas que contienen a esos tres puntos. Este razonamiento nos conduce a aceptar el siguiente teorema.

Teorama 1.4. Si dos rectas se intersecan, entonces existe exactamente un plano que las contiene.



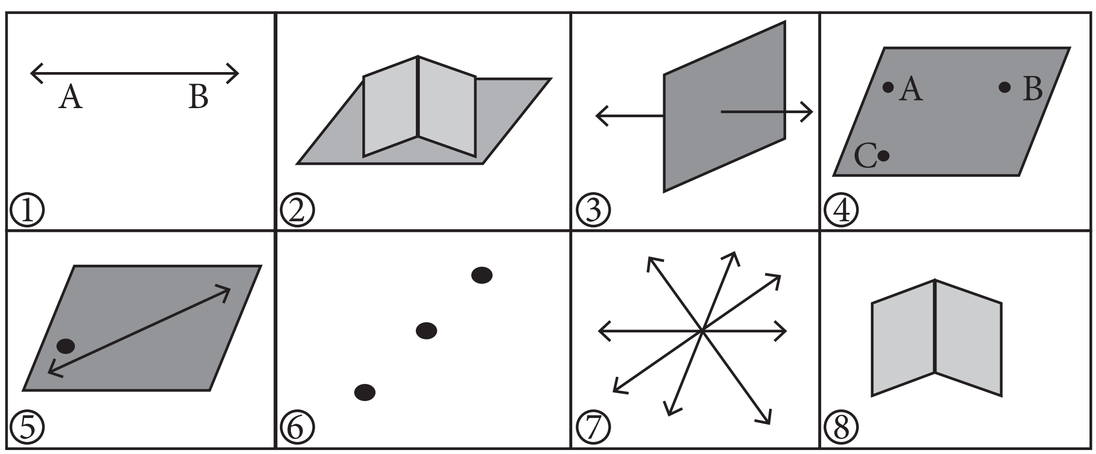
Actividad 4

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le presentan a continuación.

1. Dados cuatro puntos A, B, C y D, ¿cuántas rectas y planos diferentes están determinados por alguna combinación de estos puntos si

   a. los puntos son colineales,
   b. los puntos son coplanares,
   c. los puntos no son ni colineales ni coplanares?

2. Seleccione la figura correcta para cada proposición escribiendo en la raya de la derecha el número que corresponde a la figura.



a. Dos planos que se intersecan en una recta. __________

b. Cuatro rectas que pasan por un punto. __________

c. Una recta que interseca a un plano en un punto. __________

d. Dos puntos que determinan una recta. __________

e. Tres puntos que determinan un plano. __________

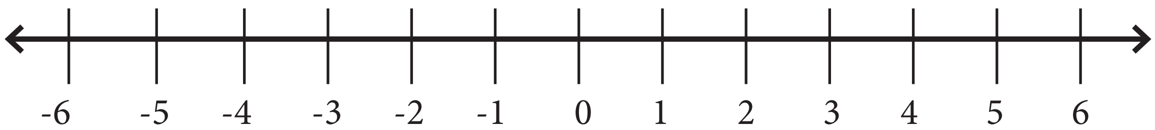
f. Un punto y una recta que determinan un plano. __________

g. Tres planos que se intersecan. __________

h. Tres puntos colineales. __________

La recta numérica

Frecuentemente hacemos coincidir los puntos de una recta con números reales, al hacer esto la recta toma el nombre de recta numérica:



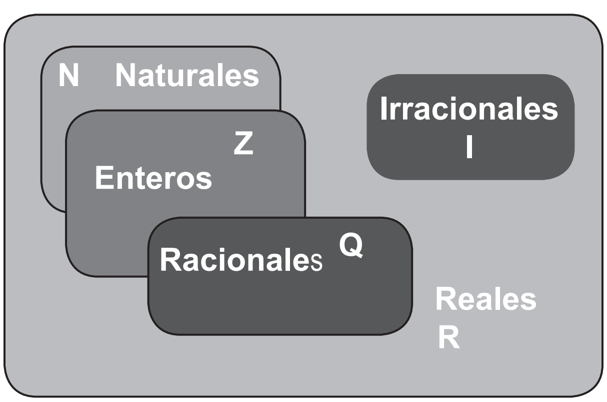
Algunos puntos de la recta numérica son números racionales, tales como 2.45, -3/4, 2/3, etc.; otros puntos corresponden a números irracionales, tales como $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{47}$.

El número asociado con un punto se llama coordenada del punto y el punto asociado con un número se llama gráfica del número.

Para enmarcar este esquema y que tenga relación con la geometría necesitamos otro postulado que llamaremos postulado de la regla.

Postulado 1.8. Existe una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales:

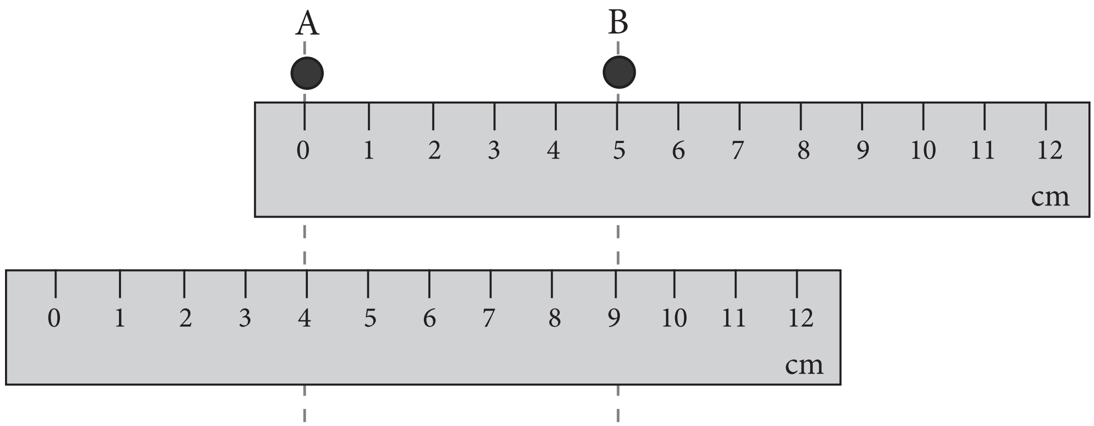
1. A cada punto en una recta le corresponde un número real.
2. La distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.



Recuerde que los números reales son el conjunto formado por los números racionales e irracionales.

Distancia entre dos puntos

Si tenemos un dibujo de dos puntos es muy sencillo encontrar la distancia entre ellos midiéndolos con una regla. Analicemos la ilustración:

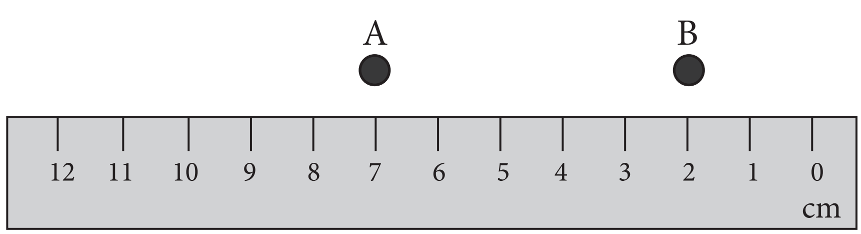


La distancia entre A y B sería de 5 cm. Observemos que si movemos la regla la distancia no varía, aunque los números que correspondan a los puntos sean otros. La distancia es la diferencia entre los dos números correspondientes a los dos puntos. En este caso la distancia 9 - 4 = 5 cm, y la distancia 5 - 0 = 5 cm.

La correspondencia descrita en este postulado se llama correspondencia uno-uno entre dos puntos de una recta y el conjunto de los números reales.

Si se considera que uno de los puntos está en el origen de una recta numérica y el otro en el lado positivo de la recta, entonces la distancia de un punto a otro es la coordenada del segundo punto. Empleamos este principio cuando medimos la distancia entre dos puntos.

Si le damos vuelta a la regla la distancia no cambiará, de modo que obtenemos el mismo número positivo para esta medida. Veamos el ejemplo:



Si encontramos la diferencia de los números que corresponden a los puntos tendremos $2 - 7 = -5$, pero para distancia necesitamos un número positivo, para lo cual tenemos que recordar el concepto de valor absoluto estudiado en cursos anteriores.

Dado que el valor absoluto de un número negativo es positivo, empleamos ese concepto para decir que:

$$|2 - 7| = |-5| = 5$$

Notación:

Distancia entre A y B $\quad AB = |c(B) - c(A)|$ con $AB > 0$

Postulado 1.9. Correspondiente a cada pareja de puntos distintos existe uno y solamente un número real positivo llamado distancia entre los puntos. Esta distancia es el valor absoluto de la diferencia de los números reales correspondientes a los dos puntos.

Interposición

Decir que un punto B está entre otros dos puntos A y C significa que los tres puntos están en una recta o son colineales y están colocados así:

Notación:

El punto B está entre A y C y se representa por A-B-C, si

a. A, B, C son puntos distintos de una recta y
b. la distancia de A a B más la distancia de B a C es igual a la distancia de A a C, es decir, $d(A, B) + d(B, C) = d(A,C)$.

Si A-B-C, entonces la coordenada B está entre la coordenada A y la coordenada C.

Ejemplos:

- Si la coordenada de $A = 3$, $B = 8$ y $C = 10$, entonces B está entre A y C.

Solución:

a. Si A, B y C son puntos diferentes de la misma recta porque tienen coordenadas diferentes:

b. d (A, B) = 8 – 3 = 5
 d (B, C) = 10 – 8 = 2
 d (A, C) = 10 – 3 = 7
 d (A, B) + d(B, C) = d (A, C) = 5 + 2 = 7

c. Entonces B está entre A y C.

- Si d(A, B) = 6 y d(B, C) = 9, entonces ¿cuál es el valor de d(A, C)? ¿Está A-B-C? ¿Es cierto que A, B, C son puntos diferentes de la recta?

Solución:

a. d(A, B) + d(B, C) = d (A, C)
 6 + 9 = d (A, C)
 15 = d (A, C)

b. Sí es cierto que A-B-C.

c. Sí A, B y C son puntos diferentes de la misma recta.

Segmentos, semirrecta y rayo

Segmento

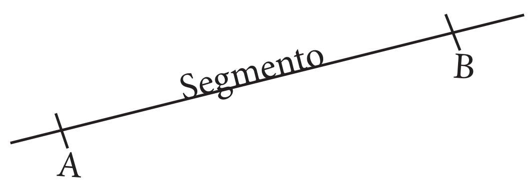
Por el postulado 1.1 es evidente que para que una recta exista es necesario que contenga al menos dos puntos distintos.

Tomemos AB:

Dados los puntos A y B contenidos en una misma recta, llamaremos segmento a todos los puntos que están entre A y B, donde el punto A y el punto B son los extremos del segmento.

Notación: se simboliza por $\overline{AB}$. La longitud o medida de $\overline{AB}$ es la distancia entre A y B y se designa por dos letras seguidas, por ejemplo: MN.

Según esta definición, $\overline{AB} = \{A\} \cup \{B\}, \{\text{puntos entre A y B}\}$.



Características:

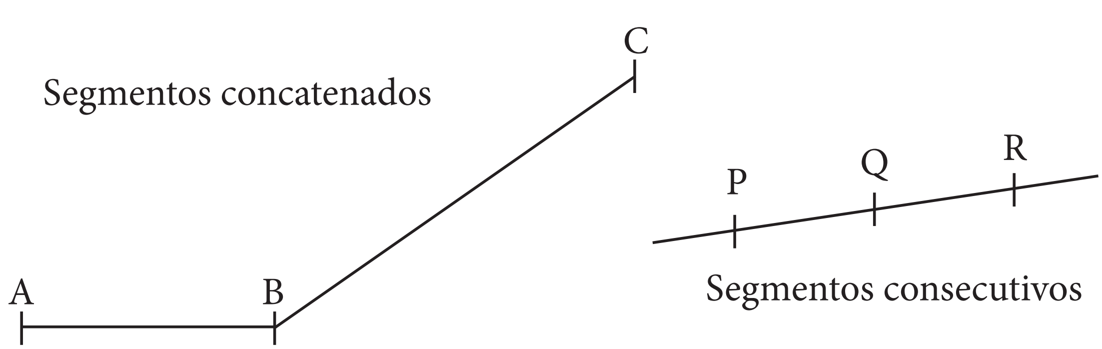
1. Los segmentos son finitos.
2. Su longitud puede ser muy variada, tan grande o pequeña como sea necesario.

Con la definición de segmento aparecen los tipos de segmentos:

1. **Segmento nulo:** un segmento es nulo cuando los extremos del segmento son el mismo punto.

2. **Segmento concatenado:** dos segmentos son concatenados cuando tienen un extremo en común.

3. **Segmento consecutivo:** dos segmentos son consecutivos cuando tienen un extremo en común y se encuentran en la misma recta.



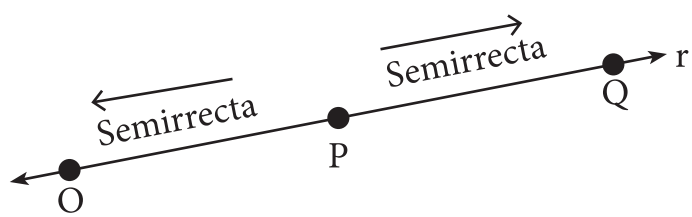
Recordemos que empleamos el símbolo $\overleftrightarrow{AB}$ para referirnos a la recta que contiene a los puntos A y B. El símbolo $\overline{AB}$ se refiere al segmento determinado por sus puntos extremos A y B. El símbolo $\overline{AB}$ también hace referencia al número real que es magnitud de $\overline{AB}$. Observemos que una recta puede designarse por cualquiera de dos de sus puntos, pero no así un segmento, que solo puede ser designado por sus extremos.

Un segmento es un subconjunto de una recta. Hay otros subconjuntos de una recta que son muy importantes en geometría.

Semirrecta

El punto P divide a la recta r en dos semirrectas opuestas. El punto P es el origen de las dos semirrectas. El conjunto P no pertenece a ninguno de los conjuntos de puntos de su derecha ni de su izquierda. Al conjunto de puntos que están a un lado cualquiera de P se llama semirrecta.

Notación: se simboliza $\overrightarrow{PQ}$ = {todos los puntos que están entre P y Q}



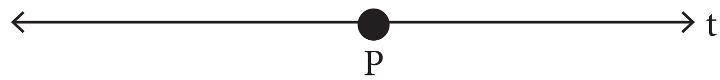
Características:

1. Tiene un origen que le da inicio, pero se extiende hasta el infinito.
2. Es una media línea cerrada.

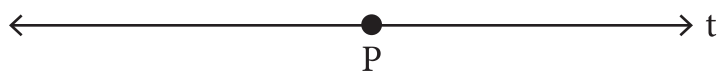
Rayo

Como ya lo determinamos antes, en una recta están contenidos infinitos puntos alineados o colineales.

Tenemos por ejemplo la recta t



Tomamos como referencia el punto P, decimos que el punto P divide a la recta en dos semirrectas donde el punto P se llamará frontera y no pertenece a ninguna de las dos semirrectas:



A una semirrecta le llamaremos rayo si el punto frontera forma parte de ella:

Y al punto frontera P se le llama origen del rayo.

Los rayos poseen dirección, pueden dirigirse a cualquiera de los sentidos de la recta que los contiene. Para nombrar un rayo cualquiera es necesario utilizar su punto origen primero y otro contenido en el rayo, colocando el signo sobre ellos.

Notación:

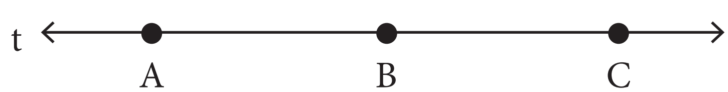
$\overrightarrow{PQ}$

Se lee rayo PQ.

$\overrightarrow{DF}$

Se lee rayo $\overrightarrow{DF}$.

Si tomamos una recta t tal que



El punto B está entre el punto A y el punto C, entonces los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ serán rayos opuestos.

Características:

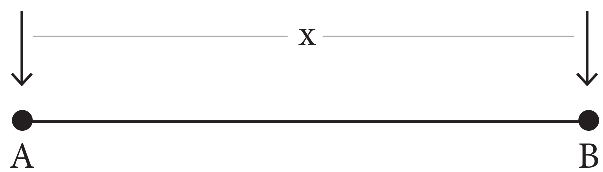
1. Son infinitos en una dirección, pero limitados en el otro extremo.
2. Son líneas rectas con una flecha en un extremo y un punto del otro lado.

Congruencia de segmentos

A diferencia de las rectas, los segmentos son finitos y medibles, por ello la distancia de un segmento es el número correspondiente a la longitud del segmento.

Notación: para nombrar la distancia de un segmento utilizamos sus extremos.

Ejemplo:



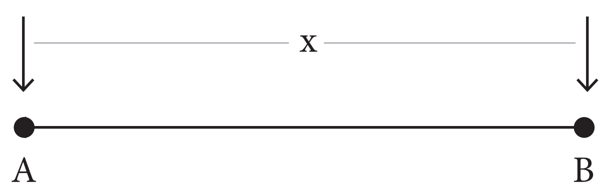
$\overline{AB} = x$

Se lee la distancia del segmento AB es x.

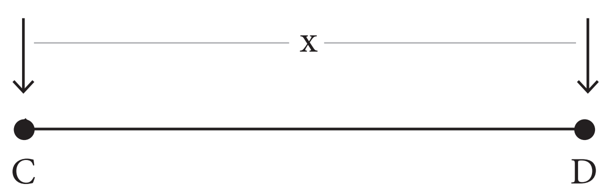
Con $\overline{AB} > 0$

La distancia de un segmento se mide con los instrumentos de medición convencionales: reglas, cintas métricas, etc.

Si tenemos que:



$\overline{AB} = x$



$\overline{CD} = x$

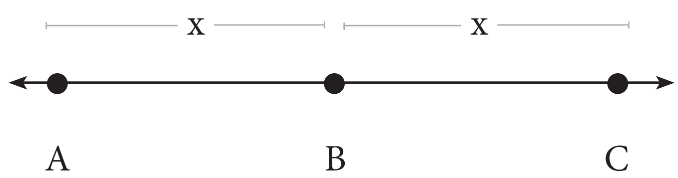
Entonces las distancias de los segmentos son iguales, y cuando las distancias

de dos segmentos son iguales, decimos que los segmentos son congruentes.
Notación: para identificar que dos segmentos son congruentes usamos el símbolo $\cong$.

Dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, segmentos que tienen la misma distancia, se dice que son congruentes y se escribe así: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; se lee el segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{CD}$.

Si tenemos:

$\overleftrightarrow{AC}$



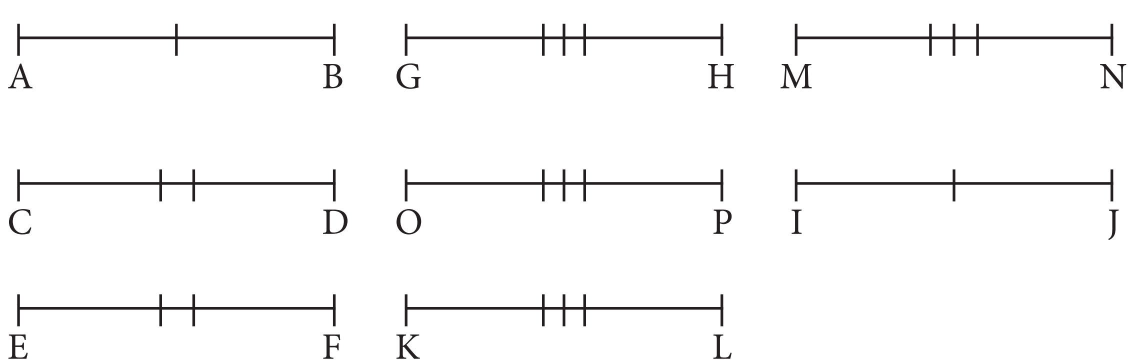
Tal que:

$\overline{AB} = x$
$\overline{BC} = x$
y $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

A veces se usan marcas para indicar que los segmentos de los lados de una figura geométrica son congruentes. El mismo número de marcas en dos o más segmentos indica que estos son congruentes.

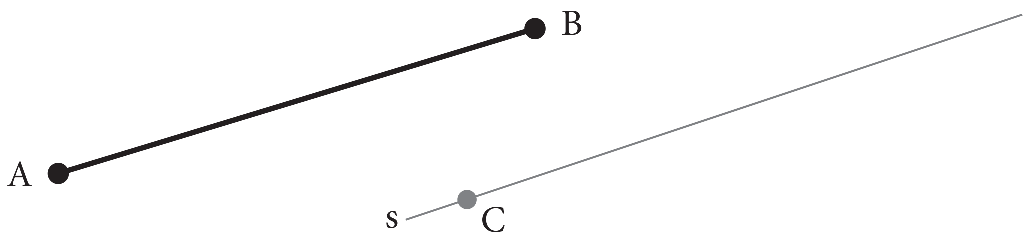
Ejemplo:

$\overline{AB} \cong \overline{IJ}$; $\overline{CD} \cong \overline{EF}$; $\overline{GH} \cong \overline{MN}$; $\overline{KL} \approx \overline{OP}$

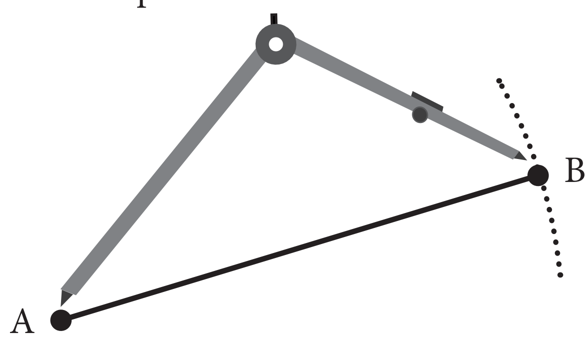


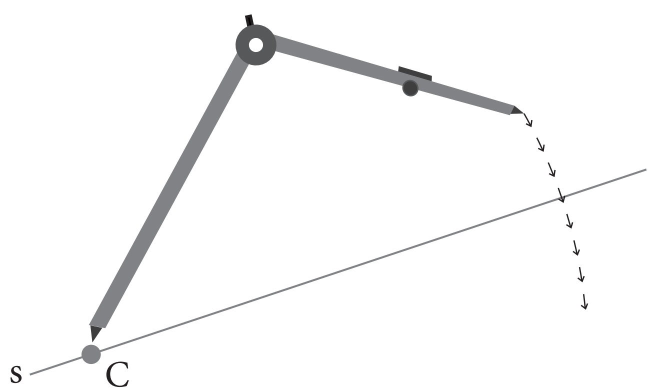
Dos segmentos son congruentes cuando superpuestos sus extremos coinciden.

Si queremos construir segmentos congruentes debemos utilizar un compás. Por ejemplo, construyamos un segmento $\overline{CD}$ con origen en el punto C congruente al segmento $\overline{AB}$, tal como se muestra a continuación.



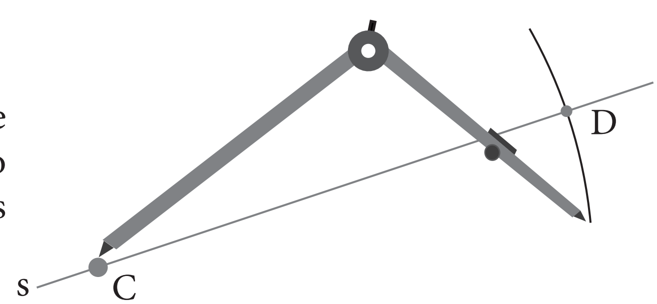
Con el compás tomamos la distancia entre los puntos A y B, haciendo centro en A y con el extremo del lápiz en B.



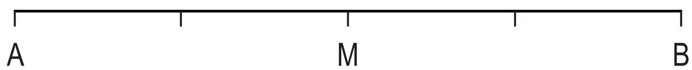


Luego, manteniendo fija la amplitud del compás, hacemos centro en C y trazamos un arco que corte a la recta s.

Marcamos el punto de intersección, en este caso lo llamamos D. Tenemos que $\overline{AB} = \overline{CD}$.



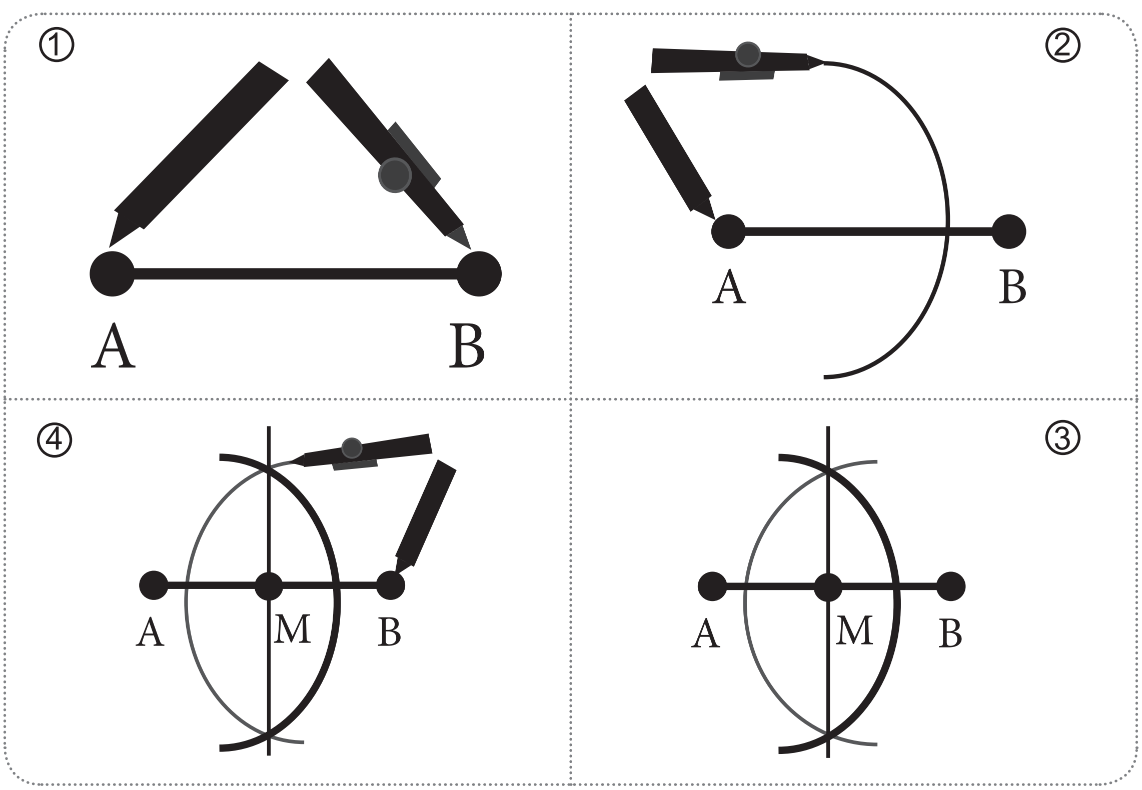
El simple acto de medir segmentos congruentes con una regla o con otro instrumento realmente depende de la determinación de segmentos congruentes. En el lenguaje común, la palabra bisector significa dividir en dos partes de igual tamaño. El punto M biseca dados $\overline{AB}$ si y solo si $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, como se muestra en la siguiente figura:



En términos prácticos, es mas facil construir o trasladar un segmento haciendo uso, por ejemplo, de regla y compás. Las construcciones geométricas se hacen con regla y compas, el compás sirve para trasladar la magnitud del segmento y la regla (sin numeración) para trazar rectas.

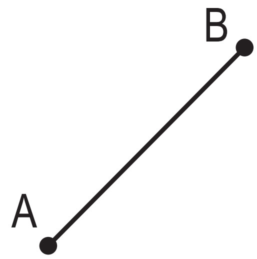
Construcción básica:

1. Construir con regla y compás un segmento $\overline{AB}$.
2. Con A como centro y el compás con una abertura mayor que la mitad de $\overline{AB}$, trace un arco semicircular.
3. Con B como centro y el compás con la misma abertura que el inciso anterior, trace un arco semicircular que interseque al primer arco.
4. Una los dos puntos de intersección para completar la construcción de la bisectriz de $\overline{AB}$.



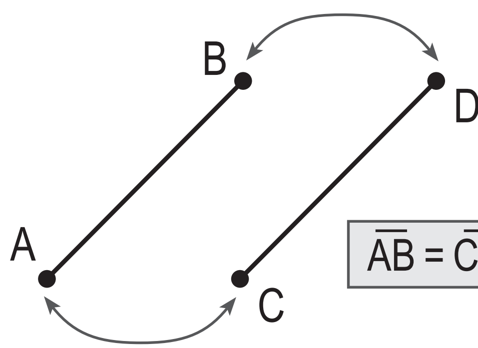
Propiedades de la congruencia de segmentos

Propiedad reflexiva: cada segmento es congruente consigo mismo, es decir: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ para todo segmento $\overline{AB}$.



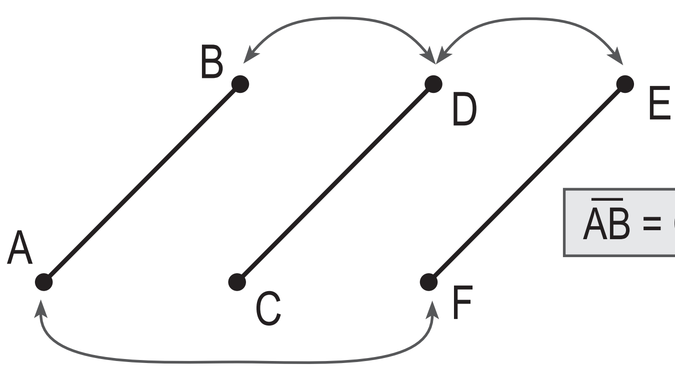
$\overline{AB} = \overline{AB}$

Propiedad de simétrica: si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$. Esto significa que si un segmento es congruente con otro, este último es congruente con el primero.



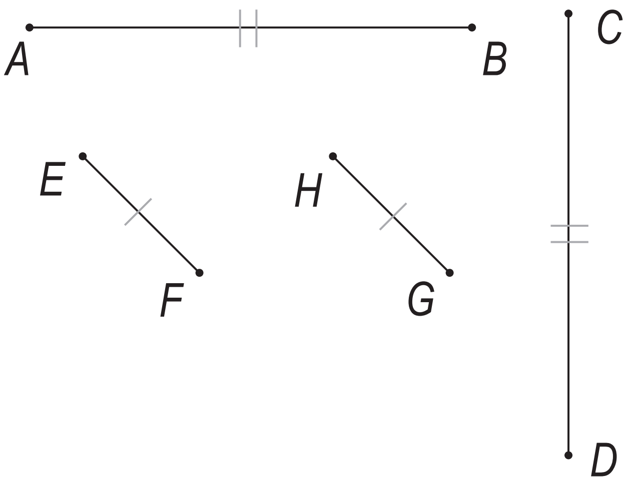
$\overline{AB} = \overline{CD} \;\rightarrow\; \overline{CD} = \overline{AB}$

Propiedad transitiva: si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. Esto significa que si un segmento es congruente con otro y este con un tercero, entonces el primero es congruente con el tercero.



$\overline{AB} = \overline{CD} \;\wedge\; \overline{CD} = \overline{EF} \;\rightarrow\; \overline{AB} = \overline{EF}$

Analicemos cómo escribir una proposición con ≅ utilizando las propiedades de la congruencia de segmentos:



$\overline{EF} \cong \overline{EF}$ — Propiedad reflexiva

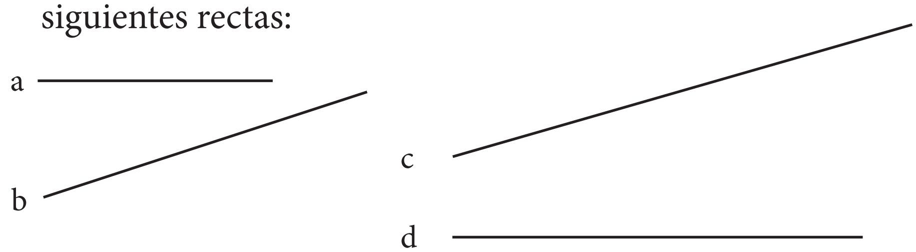
$\overline{EF} \cong \overline{HG} \rightarrow \overline{GH} \cong \overline{EF}$ — Propiedad simétrica

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ Y $\overline{CD} \cong \overline{RS} \rightarrow \overline{AB} \cong \overline{RS}$ — Propiedad transitiva

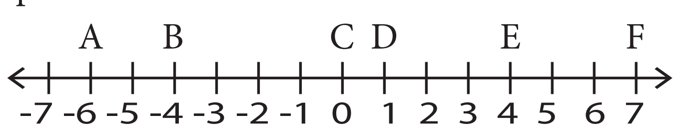
Actividad 5

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le presentan a continuación.

1. Con una regla graduada en centímetros, encuentre la longitud de las siguientes rectas:

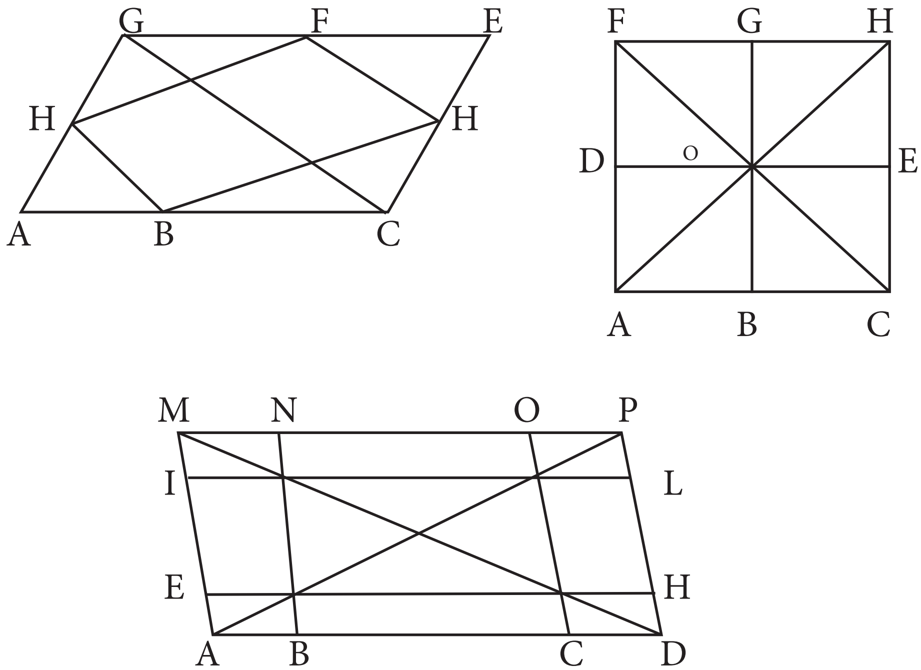


2. Usando la recta numérica, encuentre la distancia entre las parejas de puntos indicadas:



a. A y B	d. C y F	g. B y F
b. B y C	e. E y F	h. B y D
c. C y D	f. A y C	i. A y F

3. A partir de las figuras dadas, escriba todos los pares de segmentos congruentes:



4. Trace un segmento $\overline{AB}$; posteriormente, haciendo uso del compás, biseque dicho segmento:

5. Resolver:

a. Si $\overline{AB} = 6$ y $\overline{BC} = 9$, ¿es $\overline{AC}$ necesariamente 15?

b. $\overline{AB} = 37$, $\overline{BC} = 43$ y $\overline{AC} = 70$, ¿qué concluye sobre los puntos A-B-C?

c. Si $\overline{AB} = 12$ y $\overline{AC} = 28$, ¿es $\overline{BC}$ necesariamente 16?

d. Si $\overline{AB} = \overline{BC} = 37$, entonces ¿$\overline{AC} = 92$?

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Glosario

Curva: conjunto de puntos que cambian continuamente de dirección.

Figura: en geometría, se llama figura a todo conjunto de puntos. Es el espacio cerrado por líneas o superficies.

Intersección: conjunto que contiene los elementos comunes a los conjuntos dados. Punto donde se cruzan dos líneas.

Geometría: es una rama de la matemática que estudia las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio.

Línea: es una figura geométrica que se genera por un punto en movimiento.

Mediatriz: recta que divide (biseca) un segmento de recta en dos partes congruentes y que también es perpendicular al segmento de recta.

Perpendicular: es un término geométrico que puede ser usado como nombre o adjetivo. El significado del término hace referencia a la posición relativa de dos líneas rectas cuando forman un ángulo de noventa grados, un ángulo recto.

Punto: es el elemento de representación más simple.

Recta: es la línea más corta que une dos puntos. Conjunto continuo de puntos alineados en una dirección constante.

Segmento: es la parte de la recta que está delimitada por dos puntos que son los extremos del segmento, por tanto, se puede medir su longitud.

Actividad metacognitiva

Instrucciones: con base en lo que ha aprendido, responda lo siguiente:

1. ¿Son las definiciones del diccionario lo suficientemente claras para un desarrollo matemático?

2. ¿Pueden tres puntos ser no coplanares?

3. ¿Por qué la recta es una figura de dos dimensiones?

4. ¿Es posible encontrar el punto medio de una recta?

5. ¿Cuántos extremos tienen una recta, un rayo y un segmento?

Autoevaluación

Instrucciones generales: a continuación se le presentan una serie de ejercicios de evaluación de los aprendizajes de esta unidad. Su trabajo consiste en desarrollarlos con la mayor honestidad posible, sin copiar del libro. Recuerde que esta actividad le dará información sobre su progreso educativo. Al terminar, confronte sus respuestas con las soluciones que se encuentran en la guía didáctica de este libro y vuelva a estudiar aquellas preguntas o temas cuyas respuestas no acertó.

I. Verdadero o falso

Instrucciones: a continuación se le presentan varias proposiciones verdaderas o falsas, escriba una V o una F según el caso.

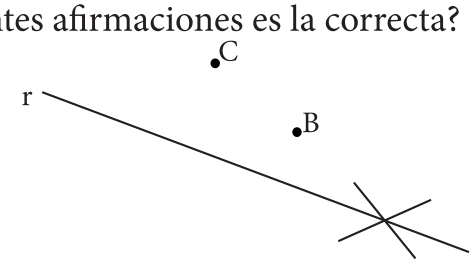
1. Dos puntos siempre son colineales……….....………………..……( )
2. El punto D está en $\overline{AB}$ ….....……………………………….…( )

3. Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.............( )
4. Un segmento se prolonga en un solo sentido…………………......( )
5. Dos rectas determinan un plano……………………………...( )

II. Selección única

Instrucciones: a continuación encontrará proposiciones de selección única. Léalas y encierre con un círculo la letra que contenga la respuesta correcta para cada proposición.

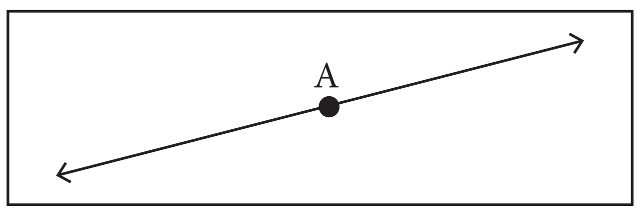
1. Observe la figura, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?
   a. La recta r pasa por el punto B
   b. La recta r pasa por el punto C
   c. El punto C está en la recta r
   d. El punto B no está en la recta r



2. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta?
    a. La intersección de dos segmentos puede ser un segmento
    b. La unión de dos rayos no colineales es un rayo
    c. La intersección de dos rectas no coplanares es un punto
    d. La unión de dos rayos puede ser un conjunto vacío

3. Con frecuencia se usan rectas para representar la realidad, ¿cuál de los siguientes ejemplos representa dos rectas que se intersectan en un punto en común?
    a. Iniciar un fuego con una lupa
    b. La luz procedente de una linterna
    c. El uso de un telescopio de refracción
    d. La abertura de un compás

4. El punto A forma:
    a. Dos segmentos
    b. Dos rectas
    c. Dos semirrectas
    d. Dos puntos

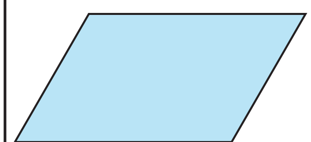
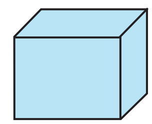


III. Parte práctica

Instrucciones: resuelva cada ejercicio en forma clara y ordenada.

1. Si en el mapa de Honduras se considera la escala 1 cm = 48.8 km, qué distancia hay entre dos lugares en nuestro país si en el mapa se encuentran a:
    a. 7.25 cm
    b. 1.25 cm
    c. 0.45 cm
    d. 32.4 cm
    e. 19.8 cm

2. Complete los espacios en blanco del cuadro con la palabra, palabras o figura que corresponda:

Punto	Recta		Sólido
	Una dimensión	Dos dimensiones	
•			

3. Construya una definición propia sobre:

Punto: ______________________________

____

Recta: ______________________________

____

Plano: ______________________________

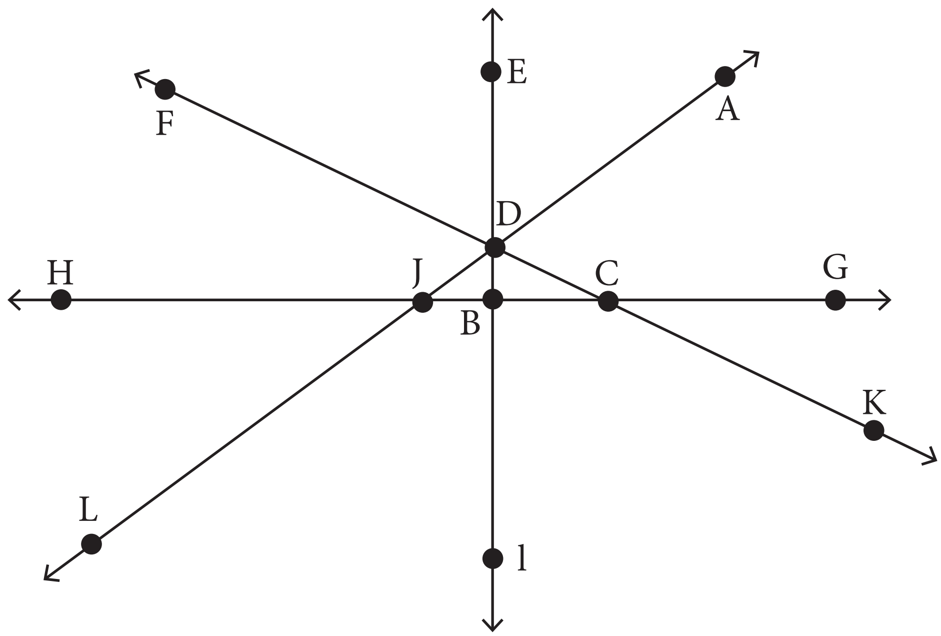
____

4. Escriba las diferencias entre:

Axioma	Postulado	Teorema	Corolario

5. En la figura identifique lo que se le pide a continuación.

Rectas	Segmentos	Rayos



6. Los puntos A, B, C, D de este cubo son coplanares. ¿Cuántos conjuntos de cuatro puntos coplanares hay en el cubo?