Unidad III

Triángulos

Introducción

En esta unidad el tema principal serán los conjuntos de puntos llamados triángulos.

Los triángulos son importantes en geometría porque cualquier otro polígono puede cortarse para ser transformado en un triángulo (formalmente llamamos a esto añadir líneas auxiliares). Pensemos en un cuadrado, por ejemplo. Si le añadimos una línea auxiliar, tal como una diagonal, entonces se convierte en dos triángulos rectángulos.

De lo anterior se deduce que si comprendemos bien los triángulos, entonces podemos aplicar ese conocimiento a todos los otros polígonos. En esta unidad aprenderemos sobre los triángulos congruentes y sus aplicaciones.

¿ Qué vamos a aprender ?

Competencias	Objetivos	Contenidos
1. Describir los elementos del triángulo	1. Identificar las características del triángulo y sus elementos.	1. Elementos del triángulo vértice, lados ángulos internos y externos
2. Clasificar los triángulos según sus lados y la medida de sus ángulos.	2.1 Clasificar diferentes triángulos según sus lados y sus ángulos. 2.2 Demostrar la suma de ángulos de un triángulo. (ángulos internos y externos).	2.1 Clasificación de triángulos 2.2 Suma de ángulos de un triángulo
3. Demostrar la congruencia y semejanza de triángulos aplicando sus propiedades y postulados.	3.1 Aplican la congruencia de triángulos en la resolución de problemas. 3.2 Construyen triángulos congruentes a un triángulo dado. 3.3 Formular postulados de la congruencia de triángulos.	3.1 Figuras congruentes 3.2 Construcción de triángulos congruentes a un triangulo dado 3.3 Propiedades de congruencia de triángulos 3.4 Postulados de congruencia de triángulos 3.5 Demostracion sobre la congruencia de triángulos

Competencias	Objetivos	Contenidos
4. Utilizar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	4. Determinar la longitud de un lado de un triángulo usando la proporción y la semejanza.	4.1 Figuras semejantes 4.2 Figuras semejantes y congruentes
5. Aplicar la semejanza de triángulos rectángulos en la resolución de problemas.	5. Aplicar la semejanza de triángulos rectángulos en la resolución de problemas.	5.1 Teorema fundamental de la proporcionalidad y su reciproco 5.2 Propiedades y postulados de la semejanza de triángulos 5.3 Triángulos semejantes 5.4 Propiedades del triángulo rectángulo 5.5 Semejanzas de los triángulos rectángulos

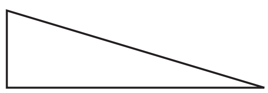
Mis conocimientos previos

Instrucciones: conteste lo que se le pregunta a continuación.

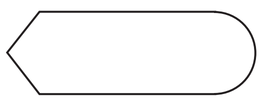
1. ¿Cuáles de las siguientes figuras ilustran conjuntos convexos?

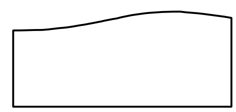
a. 

b. 

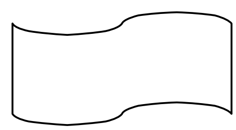
c. 

d. 

e. 

f. 

g.

h. 

2. Tomando en cuenta su medida, clasifique los siguientes ángulos como agudos, obtusos o rectos.

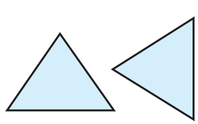
a. $m \angle A = 115^\circ$ ______________________

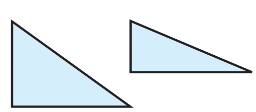
b. $m \angle B = 35^\circ$ ______________________

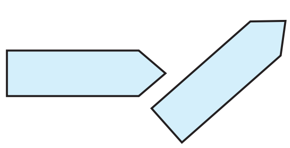
c. $m \angle C = 90^\circ$ ______________________

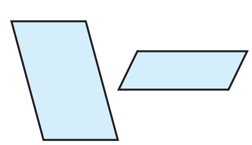
d. $m \angle D = 95^\circ$ ______________________

3. ¿Cuáles de los siguientes pares de figuras son congruentes?

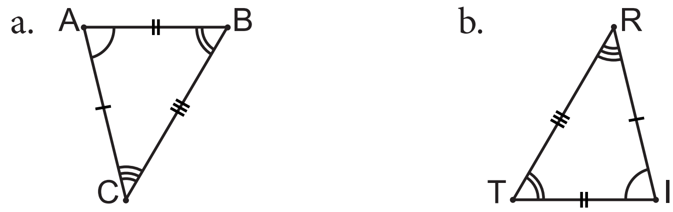
a. 

b. 

c. 

d. 

4. ¿Son congruentes los dos triángulos siguientes?

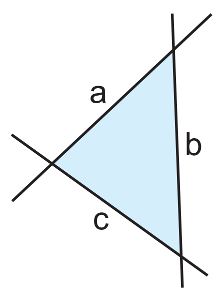


En plenaria, comparta con sus compañeros y tutor

Triángulos

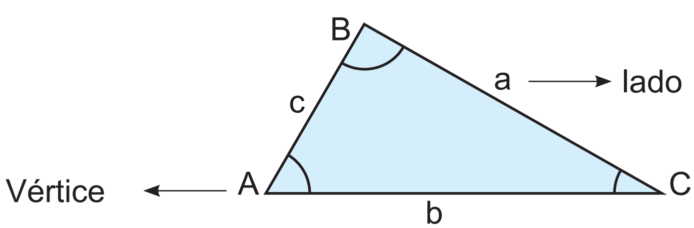
Un triángulo es un polígono de tres lados que está determinado por:

1. Tres segmentos de recta que se denominan lados.



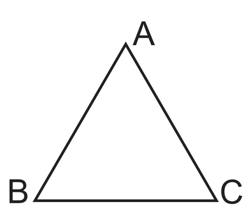
Los lados de un triángulo se representan con letras minúsculas.

2. Tres puntos A, B y C no colineales que se llaman vértices del triángulo.



Los vértices de un triángulo se representan con letras mayúsculas.

Notación: la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ es un triángulo que se designa por ΔABC si y solo si A, B y C son tres puntos no colineales.

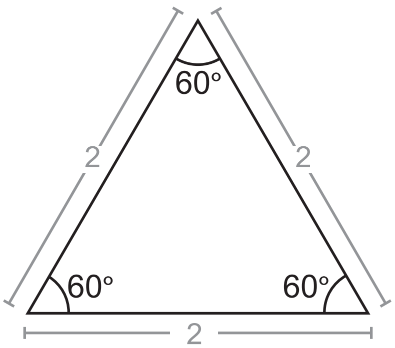


ΔABC	ΔBCA
ΔCBA	ΔACB
ΔBAC	ΔCAB

Triángulos y regiones triangulares

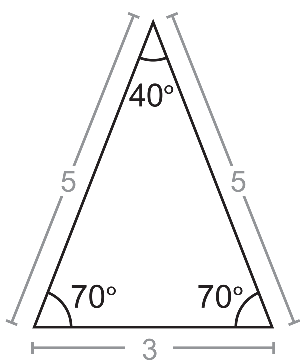
Clasificación de triángulos según sus lados y ángulos

Triángulos equiláteros: tienen sus tres lados y sus tres ángulos iguales.



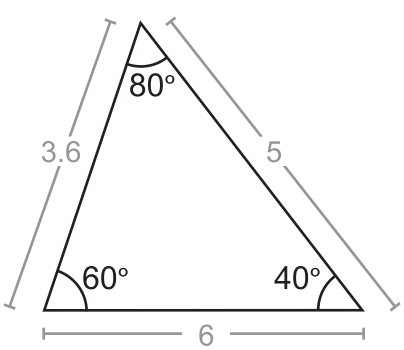
Las pirámides de Giza representan triángulos equiláteros.

Triángulos isósceles: tienen dos lados y dos ángulos iguales, y un lado y un ángulo diferente.



Se puede apreciar un triángulo isósceles en la mayoría de los techos de los templos en la arquitectura clásica griega.

Triángulos escalenos: sus tres lados y sus tres ángulos son diferentes entre sí.

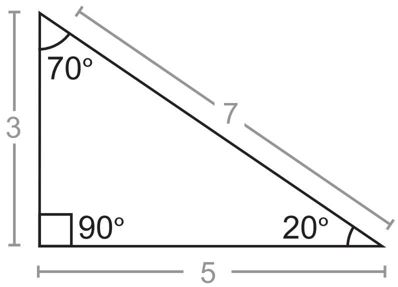


La fachada de este edificio está compuesta por dos triángulos escalenos.

Clasificación de triángulos por sus ángulos

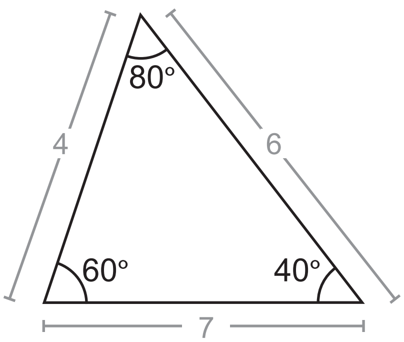
Triángulo rectángulo: tiene un ángulo recto (90º), como el de las repisas. Es uno de los triángulos más utilizados para construir otras figuras geométricas.

Es importante recordar que los triángulos son figuras planas limitadas por tres lados que forman 3 ángulos.



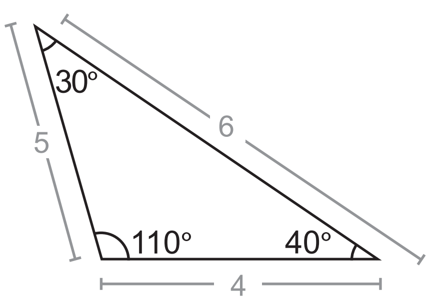
La cara lateral de una rampa forma un triángulo rectángulo.

Acutángulo: un triángulo acutángulo tiene sus tres ángulos agudos.



Podemos identificar un triángulo acutángulo en la vela de los veleros.

Obtusángulo: este tipo de triángulo tiene un ángulo obtuso y dos agudos. El lado opuesto al ángulo obtuso será el de mayor longitud.

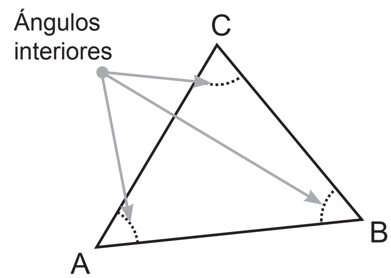


Apreciamos un obtusángulo en el techo de esta construcción.

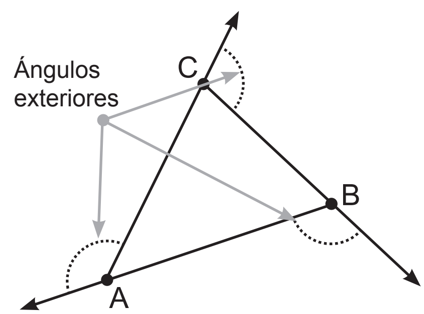
Demostración de la suma de ángulos de un triángulo

Ángulos interiores y exteriores

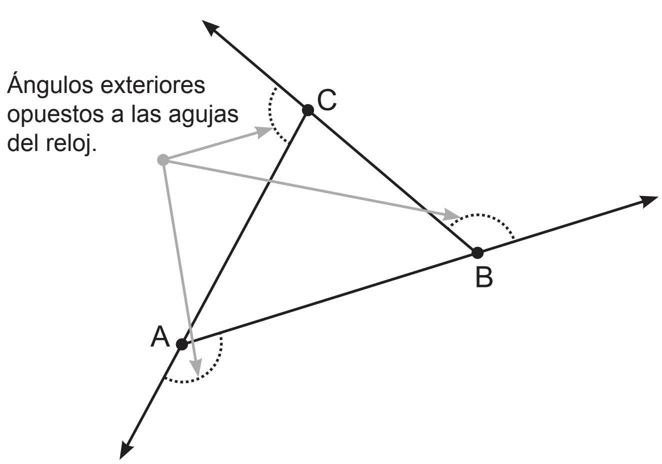
Cualquier estructura cerrada tiene un adentro y un afuera. En geometría usamos la palabra interior para la parte de adentro y exterior para la parte de afuera de una figura.

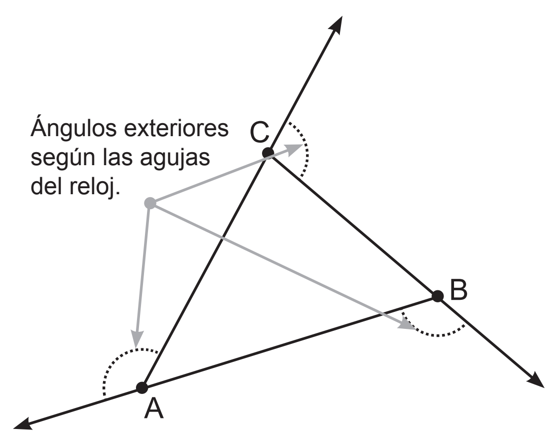


Los términos interior y exterior ayudan cuando necesitamos identificar los diferentes ángulos en los triángulos. Los tres ángulos dentro de los triángulos son llamados ángulos interiores. En la parte de afuera están los ángulos exteriores, formados al extender los lados del triángulo. Un ángulo exterior es el ángulo formado por un lado del triángulo y la extensión del otro lado.



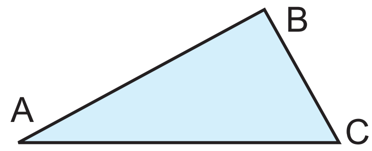
Nota: en los triángulos y otros polígonos existen dos grupos de ángulos exteriores, uno en sentido horario y otro en sentido antihorario. El siguiente diagrama debería ayudar a entender mejor esto:





Si observamos un vértice del triángulo, veremos que el ángulo interior y el ángulo exterior forman un par lineal. Basados en el postulado del par lineal, podemos concluir que ángulos interiores y exteriores en el mismo vértice serán siempre suplementarios. Esto nos indica que los dos ángulos exteriores en el mismo vértice son congruentes.

Teorema 3.1. La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



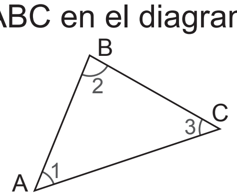
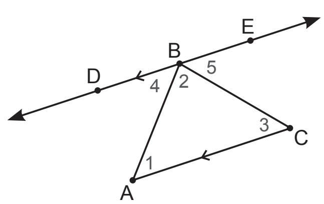
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

Líneas auxiliares: para probar ciertos teoremas se necesita agregar una línea, un segmento o un rayo a una figura dada.

Ejemplo 1:

Pruebe que las medidas de los tres ángulos suman 180° o, en símbolos, que $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$.

Solución:

Enunciado	Razonamiento
1. Dado $\angle ABC$ en el diagrama 	1. Dado
2. A través del punto B, dibujar la línea paralela a $\overline{AC}$. La llamaremos $\overleftrightarrow{BD}$ 	2. Postulado paralelo
3. $\angle 4 \cong \angle 1$ ($m\angle 4 = m\angle 1$)	3. Teorema de ángulos alternos internos
4. $\angle 5 \cong \angle 3$ ($m\angle 5 = m\angle 3$)	4. Teorema de ángulos alternos internos
5. $m\angle 4 + m\angle 2 = m\angle DBC$	5. Postulado de la suma del ángulo
6. $m\angle DBC + m\angle 5 = 180°$	6. Postulado de pares lineales
7. $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180°$	7. Sustitución (también conocida como propiedad transitiva de la igualdad)
8. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	8. Sustitución (combinando los pasos 3, 4 y 7). Propiedad de igualdad

Construcción de Triángulos

Un triángulo tiene tres lados y tres ángulos. Para construir un triángulo hay que conocer tres de esos datos, siendo al menos uno de ellos un lado.

- Construcción de un triángulo conociendo los tres lados.

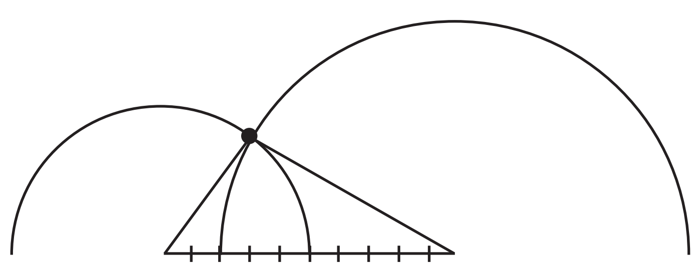
  El proceso de construcción es el siguiente:

  1. Se representa un segmento de medida igual al primer lado.
  2. Desde cada extremo del primer lado se traza una circunferencia cuyo radio será el valor del segundo y tercer lado.
  3. El triángulo tiene por vértices los extremos del primer segmento y una de las intersecciones de las circunferencias.

  Recuerde que para poder realizar la construcción, la medida de cada lado ha de ser menor que la suma de los otros dos.

  Ejemplo 2:

  Construir un triángulo de lados 3, 5 y 6 cm.
  Desde los extremos del lado mayor trazamos dos circunferencias de radios 3 y 5 cm. El punto de corte nos da el tercer vértice.



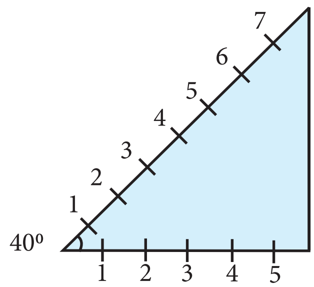
- Construcción de un triángulo, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

  1. Se representa uno de los segmentos.
  2. Se traza el ángulo que forman los lados.
  3. Se lleva el segundo lado conocido sobre el lado del ángulo.
  4. Basta con unir los extremos de los dos lados para construir el triángulo.

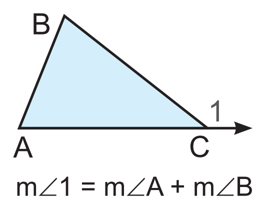
Ejemplo 3

Construir un triángulo de lados 5 cm y 7 cm, siendo el ángulo comprendido de 40°.

Con el transportador dibujamos un ángulo de 40° y sobre los lados del ángulo señalamos los segmentos de 5 y 7 cm, respectivamente. Uniendo los extremos de los segmentos por un tercero, obtenemos el triángulo.

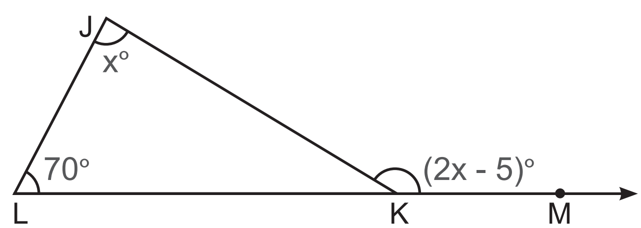


Teorema 3.2. La medida de un ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de las medidas de dos ángulos internos no adyacentes.



Ejemplo 4

Encuentre m $\angle$JKM.



Solución:

Paso 1. Escribir y resolver la ecuación y encontrar el valor de x.

Teorema 2.1: ángulo exterior.
Despejar para x.
$(2x - 5)^\circ = 70^\circ + x^\circ$
$2x - x = 70 + 5$
$x = 75$

Paso 2. Sustituir 75 en 2x – 5 para encontrar m $\angle$JKM:
$2x - 5 = 2\,(75) - 5 = 145$
La medida de m $\angle$JKM $= 145^\circ$

Actividad 1

Instrucciones: Resuelva los ejercicios que se le plantean a continuación.

1. Construya un triángulo equilátero de 4 cm.

2. Construya un triángulo con dos lados que midan 3.5 cm y 2.5 cm, de tal manera que ambos determinen un ángulo de 45°.

3. Construya un triángulo con un lado de 8 cm y ángulos adyacentes de 60° y 45°.

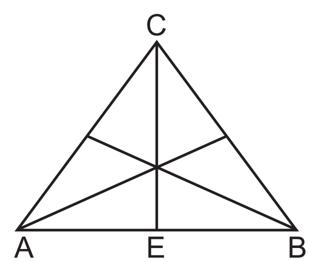
4. Relacione la descripción de cada triángulo con su respectivo nombre escribiendo en el espacio en blanco de la columna A la letra que le corresponde de la columna B.

Columna A	**Columna B**
____ La medida de sus ángulos es 30°, 60°, 90°	a. Isósceles
____ La medida de sus lados es 2 cm, 2 cm, 2 cm.	b. Escaleno
____ La medida de sus ángulos es 60°, 60°, 60°.	c. Recto
____ La medida de sus lados es 6 m, 3 m, 6 m.	d. Obtuso
____ La medida de sus lados es 5 cm, 7 m, 9 m.	e. Equilátero
____ La medida de sus ángulos es 20°, 125°, 35°.	f. Acutángulo

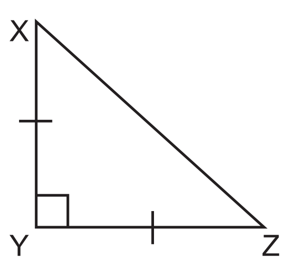
5. Dada la siguiente figura, encuentre un nombre más simple para cada uno de los conjuntos descritos.

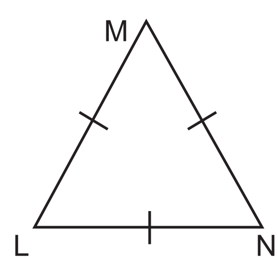
a. $\overline{AB} \cup \overline{EG} \cup \overline{GA}$

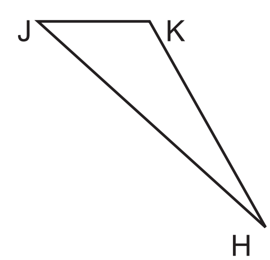
b. $\overline{BG} \cup \overline{GC} \cup \overline{CB}$



6. Clasifique los triángulos según sus lados y ángulos.

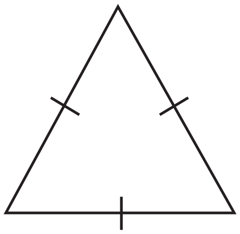
a.


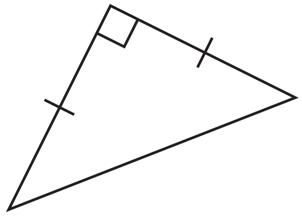
b.


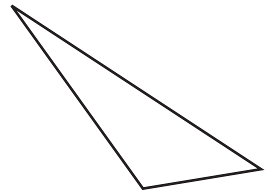
c.


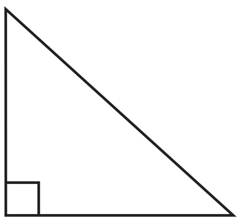
________________ ________________ ________________

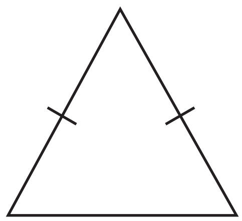
7. Basándose en la apariencia y en las marcas de cada triángulo, clasifíquelos según sus ángulos y sus lados. Analice si cada uno de ellos puede ser clasificado de más de una forma.

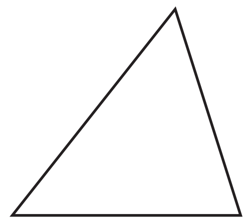
a.


b.


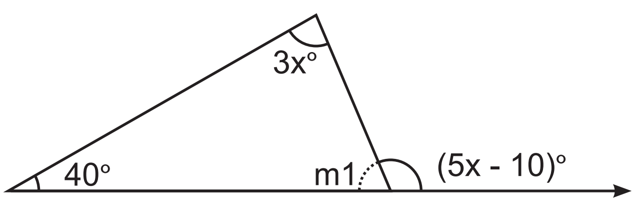
c.


d.


e.


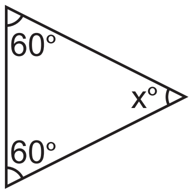
f.


8. Encuentre m1 utilizando la figura dada.

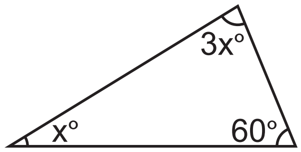


9. Encuentre el valor de x. Clasifique los triángulos según sus ángulos.

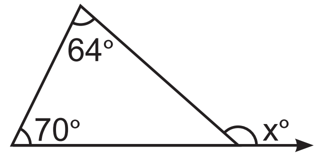
a.



b.

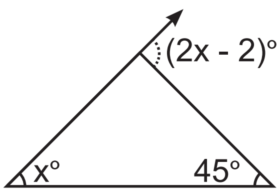


c.

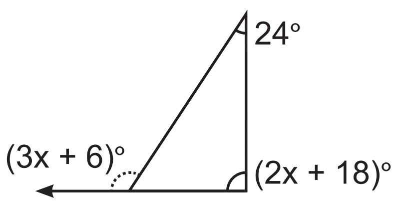


10. Encuentre la medida de los ángulos exteriores de:

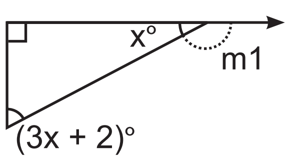
a.



b.



c.

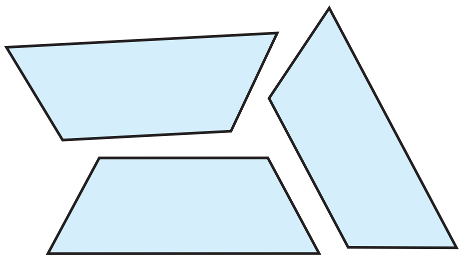


En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Congruencia de triángulos

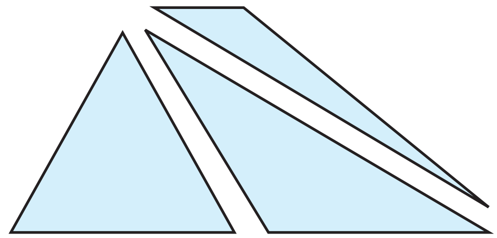
Dos figuras geométricas son congruentes si tienen exactamente la misma medida y forma. Si cortáramos varias figuras congruentes, podríamos sobreponerlas una encima de la otra y se acoplarían perfectamente.

Congruentes



La misma medida y forma

No congruentes



Diferente medida y forma

En dos figuras congruentes todas las partes de una de ellas son congruentes con las partes correspondientes de la otra. En polígonos congruentes eso significa que los ángulos y los lados correspondientes son congruentes.

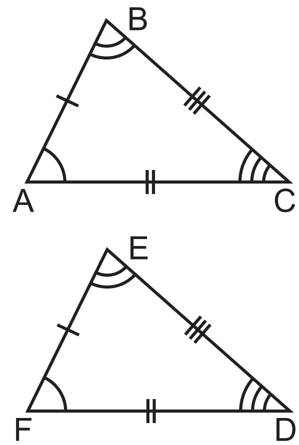
Cuando se escribe una relación de congruencia entre dos polígonos, siempre se nombran los vértices correspondientes en el mismo orden. Una relación de congruencia puede escribirse en más de una forma.

Dos posibles relaciones de congruencia para las figuras que aparecen a la derecha son:

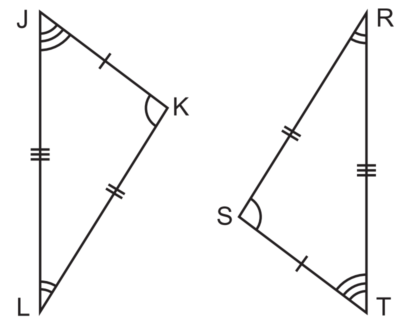
$\Delta ABC \cong \Delta FED$ o $\Delta BCA \cong \Delta EDF$

Ángulos correspondientes: $\angle A$ y $\angle F$, $\angle B$ y $\angle E$, $\angle C$ y $\angle D$.

Lados correspondientes: $\overline{AB} \cong \overline{FE}$, $\overline{BC} \cong \overline{ED}$, $\overline{AC} \cong \overline{FD}$.



Ejemplo 5:



Escriba una relación de congruencia para los triángulos de la derecha. Identifique todas las correspondientes partes congruentes.

Solución:

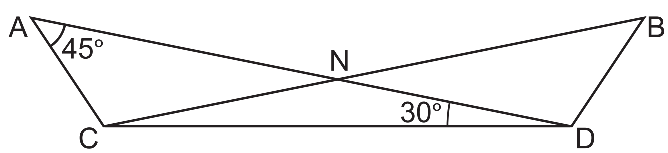
El diagrama indica que $\Delta JKL \cong \Delta TSR$

Ángulos correspondientes: $\angle J \cong \angle T$, $\angle K \cong \angle S$, $\angle T \cong \angle R$

Lados correspondientes: $\overline{JK} \cong \overline{TS}$, $\overline{KL} \cong \overline{SR}$, $\overline{LJ} \cong \overline{RT}$

Teorema 3.3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los terceros ángulos también son congruentes. Este teorema se conoce con el nombre de teorema del tercer ángulo.

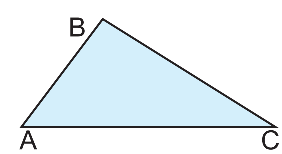
Ejemplo 6:



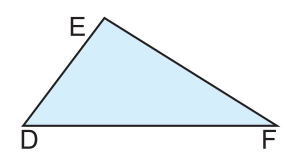
Encuentre m $\angle BDC$.

$\angle A \cong B$ y $\angle ADC \cong \angle BCD$	Dado
$\angle ACD \cong \angle BDC$	Teorema 3.3
m $\angle ACD = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$	Definición de ángulos congruentes

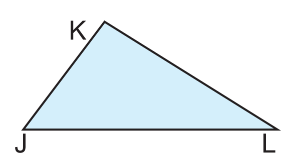
Teorema 3.4. Propiedades de congruencia de triángulos:



Propiedad reflexiva de la congruencia de ángulos:
para cualquier triángulo ABC: $\Delta ABC \cong \Delta ABC$



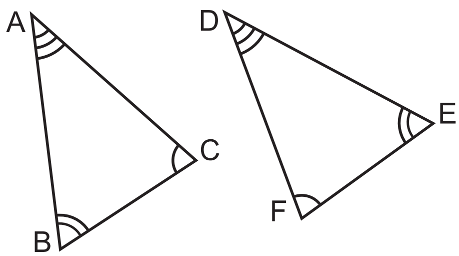
Propiedad simétrica de la congruencia de triángulos:
si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, entonces $\Delta DEF \cong \Delta ABC$



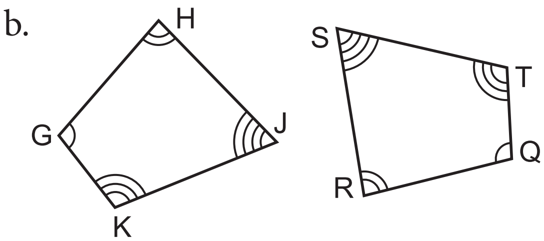
Propiedad transitiva de la congruencia de triángulos:
si $\Delta ABC \cong DEF$ y $\Delta DEF \cong JFK$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta JKL$

Actividad 2

Instrucciones: trabaje en su cuadreno, identifique todos los pares de partes correspondientes congruentes. Escriba otra relación de congruencia para las figuras.

a. 

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b. 

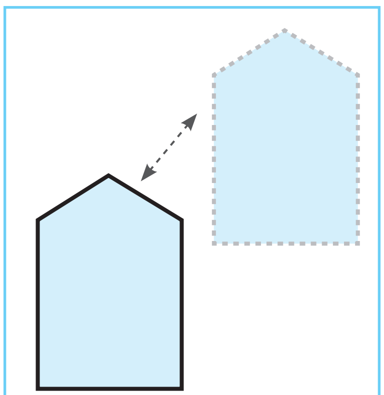
$GHJK \cong RSTQ$

____________________________ ____________________________

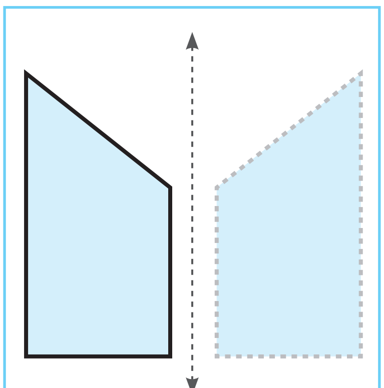
En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Transformaciones y congruencia

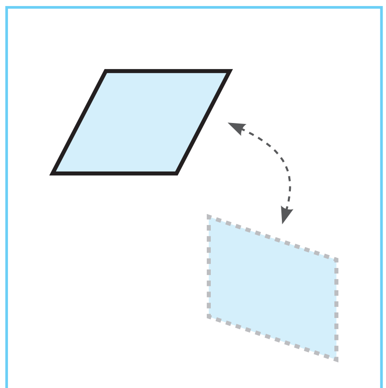
Transformar en el plano es mover o cambiar una figura para producir otra. El movimiento rígido es la transformación que preserva largo, ángulo, medida y área. En las siguientes figuras se representan las formas de transformación:



Traslación



Reflejo



Rotación

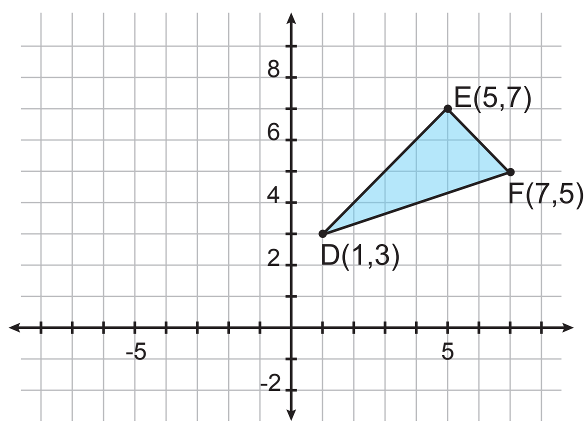
Traslaciones

Las traslaciones son un tipo de transformación. Se traslada una figura moviéndola hacia la derecha o hacia la izquierda y hacia arriba o hacia abajo. Es importante conocer cómo la transformación de una figura afecta las coordenadas de sus vértices. En el caso de las traslaciones, por cada unidad que una figura es movida a la derecha, se suma 1 unidad a cada coordenada *x*- en los vértices. Por cada unidad que una figura es trasladada a la izquierda, se sustrae 1 de las coordenadas *x*-. Siempre recuerde que mover una figura hacia la izquierda y a la derecha solo afecta la coordenada *x*-.

Si una figura es trasladada hacia arriba o hacia abajo, afecta la coordenada *y*-. En este contexto, si mueve una figura hacia arriba 1 unidad, entonces suma 1 unidad a cada una de las coordenadas *y*- en los vértices. De forma similar, si traslada una figura hacia abajo 1 unidad, sustrae 1 unidad de las coordenadas *y*-.

Ejemplo 6:

ΔDEF es mostrado en la cuadrícula de coordenadas de la derecha. ¿Cuáles serían las coordenadas de $\Delta D'E'F'$ si ha sido trasladado 4 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia arriba?



Analice el cambio y piense en cómo eso afectará las coordenadas de los vértices. La traslación mueve la figura 4 unidades a la izquierda. Eso significa que sustraerá 4 de cada una de las coordenadas *x*-. También indica que moverá la figura hacia arriba 2 unidades, lo que significa que sumará 2 a cada una de las coordenadas *y*-. Así, el cambio de coordenadas puede ser expresado como sigue:

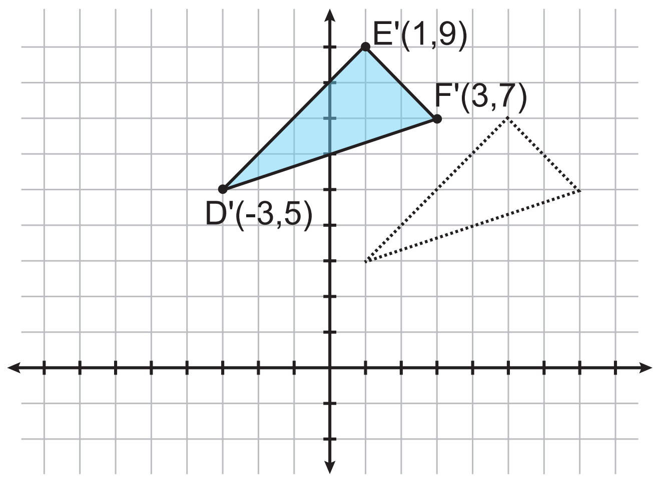
$$(x,y) \rightarrow (x-4, y+2)$$

Ajustamos cada coordenada usando la fórmula: $(x,y) \rightarrow (x - 4, y + 2)$.

D(1, 3) → D'(1 – 4, 3 + 2)
E(5, 7) → E'(5 – 4, 7 + 2)
F(7, 5) → F'(7 – 4, 5 + 2)

Esto nos da las nuevas coordenadas: D'(–3, 5), E'(1, 9), y F'(3, 7).

Finalmente, dibujamos el triángulo trasladado para verificar que la respuesta es correcta.



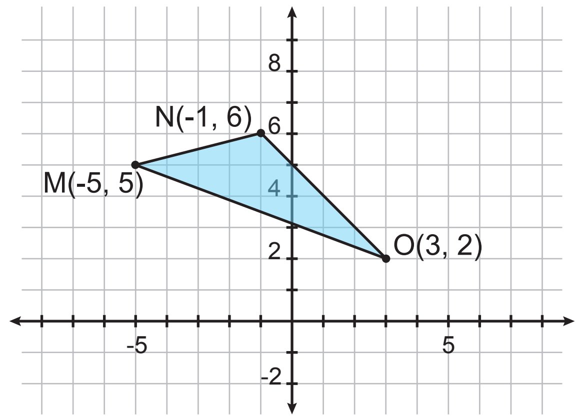
Reflejos

Los reflejos son otra forma de transformación que resulta en figuras congruentes. Cuando "reflejamos" una figura sobre el eje *x*- o el eje *y*-, en realidad no se cambia la figura en absoluto. Para encontrar las coordenadas de una figura reflejada se usa el opuesto de una de las coordenadas. Debe tomar en consideración lo siguiente:

a. Si usted refleja una imagen sobre el eje *x*-, las nuevas coordenadas *y*- serán opuestas a la vieja coordenada *y*-. Las coordenadas *x*- permanecen igual.

b. Si usted refleja una imagen sobre el eje *y*-, toma las coordenadas opuestas de *x*-. Las coordenadas *y*- permanecen iguales.

Ejemplo 7:



El triángulo ΔMNO se muestra en la cuadrícula coordenada de la derecha. ¿Cuáles serían las coordenadas de ΔM'N'O' si ha sido reflejado sobre el eje *x*-?

Ya que está encontrando el reflejo de la imagen sobre el eje *x*-, encontrará el opuesto de las coordenadas *y*-. Las coordenadas *x*- permanecerán iguales. Así, el cambio de coordenadas puede ser expresado como sigue:

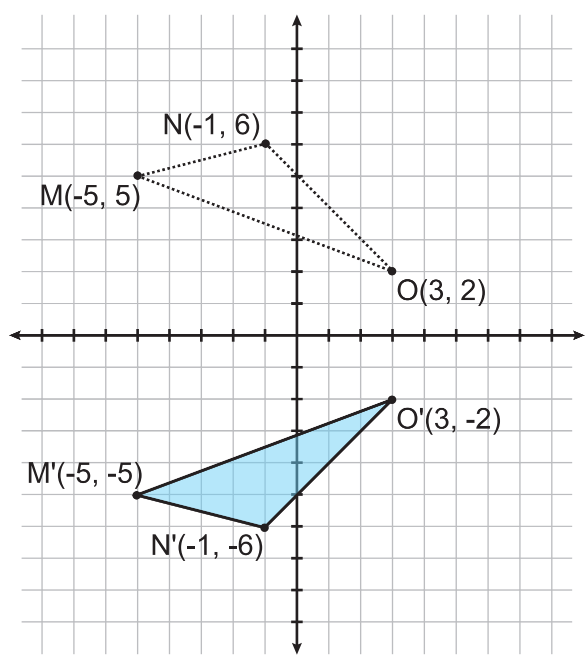
$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

Ajuste cuidadosamente cada coordenada usando la fórmula de arriba.

M(-5, 5) → M'(−5, −(5))
N(-1, 6) → N'(−1, −(6))
O(3, 2) → O'(3, −(2))

Esto nos da nuevas coordenadas: M'(−5, −5), N'(−1, −6), O'(3, −2).

Dibuje el triángulo trasladado para verificar que su respuesta es correcta.



Rotaciones

La más complicada de las transformaciones de congruencia es la rotación. Para simplificar las rotaciones solo nos interesarán las rotaciones de 90° o 180° alrededor del origen (0, 0). Las siguientes reglas describen cómo cambian las coordenadas bajo las rotaciones.

Rotaciones de 180°: se toma el opuesto de ambas coordenadas.

$$(x, y) \text{ se vuelve } (-x, -y)$$

Rotaciones en el sentido de las agujas del reloj de 90°: se encuentra el opuesto de la coordenada "*x*" y se inverten las coordenadas.

$$(x, y) \text{ se vuelve } (y, -x)$$

Rotaciones antihorarias de 90°: se encuentra el opuesto de la coordenada "*y*" y se invierten las coordenadas.

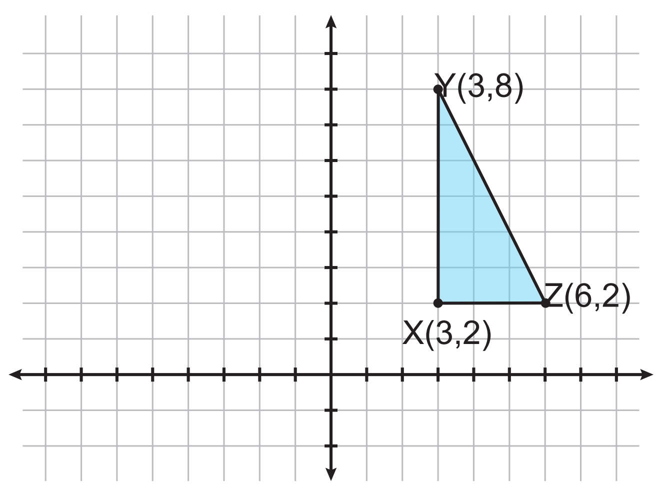
$$(x, y) \text{ se vuelve } (-y, x)$$

Ejemplo 8:

El ΔXYZ es mostrado en la cuadrícula de coordenadas. ¿Cuáles serían las coordenadas de ΔX'Y'Z' si ha sido rotado 90˚en sentido antihorario alrededor del origen?

Ya que está encontrando la rotación de la imagen 90° antihorario alrededor del origen, hallará el opuesto de la coordenada *y*, luego invertirá el orden. Así, el cambio de coordenadas puede ser expresado como sigue:

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$

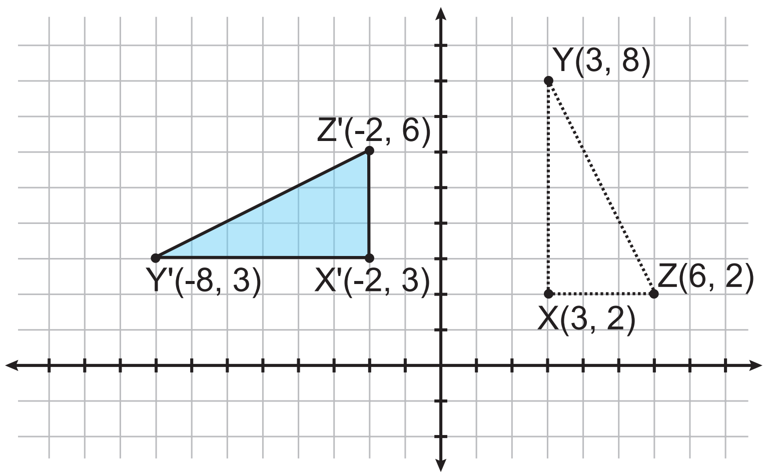


Cuidadosamente, ajuste cada coordenada usando la fórmula $(x, y) \rightarrow (-y, x)$.

$X(3, 2) \rightarrow X'(-(2), 3)$
$Y(3, 8) \rightarrow Y'(-(8), 3)$
$Z(6, 2) \rightarrow Z'(-(2), 6)$

Esto da como resultado nuevas coordenadas: $X'(-2, 3)$, $Y'(-8, 3)$, $Z'(-2, 6)$.

Finalmente, dibuje el triángulo rotado para verificar que su respuesta es correcta.

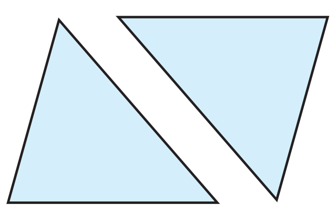


Actividad 3

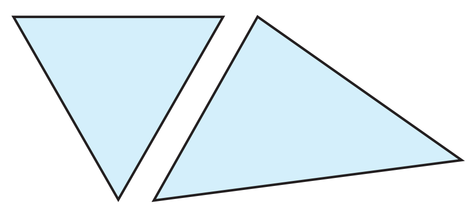
Instrucciónes: resuelva los ejercicios que se le plantean a continuación.

1. ¿Cuál de las dos parejas de triángulos está formada por triángulos congruentes?

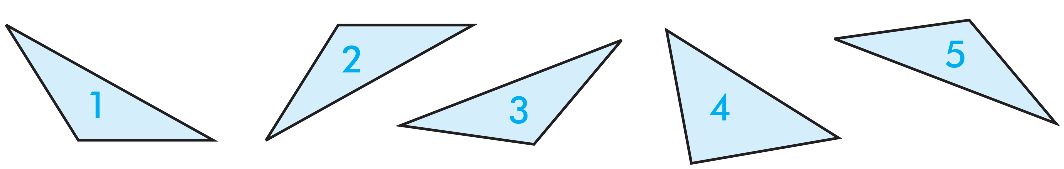
a.



b.



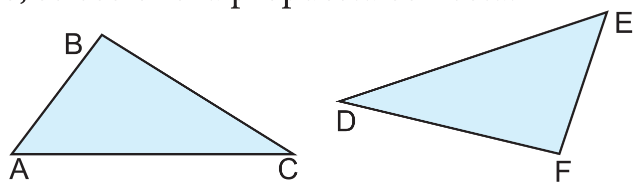
2. ¿Cuál de los triángulos no parece ser congruente con ninguno de los triángulos restantes?



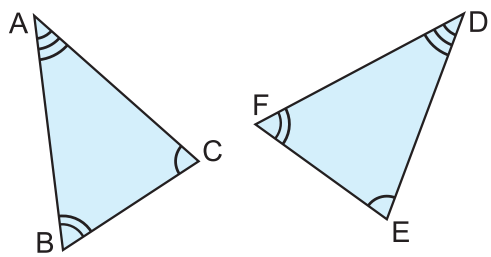
____

3. En el siguiente ejercicio, seleccione la propuesta correcta:

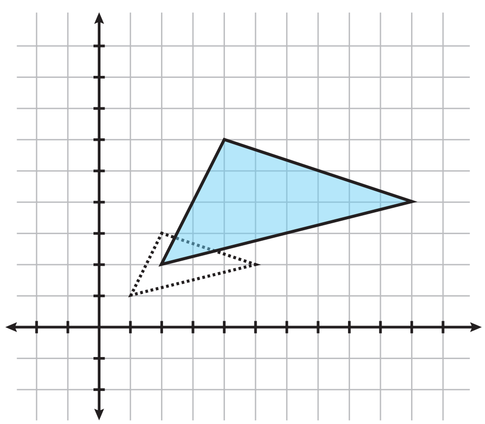
   a. ΔABC ≅ ΔDEF
   b. ΔABC ≅ ΔEDF
   c. ΔABC ≅ ΔEFD
   d. ΔABC ≅ ΔFDE



4. Formule una proposición de congruencia para el siguiente par de triángulos congruentes.



5. ¿Qué clase de transformación se muestra en la siguiente figura?



____

¿Preserva la congruencia la transformación anterior? Justifique su respuesta.

____
____
____
____
____

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Criterios de congruencia

La información mínima necesaria para que los triángulos sean congruentes responde a los llamados criterios de congruencia.

Los criterios de congruencia corresponden a los postulados y teoremas que enuncian cuáles son las condiciones mínimas que deben reunir dos o más triángulos para que sean congruentes.

Estas condiciones son:

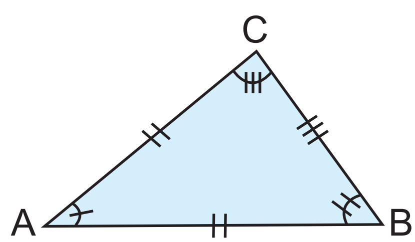
- Congruencia de sus lados
- Congruencia de sus ángulos

Para que dos triángulos sean congruentes es suficiente que solo algunos lados y/o ángulos sean congruentes.

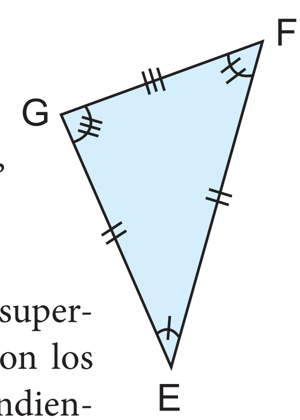
Dos triángulos son congruentes o iguales si y solamente si tienen exactamente el mismo tamaño y la misma forma. Si dos triángulos son congruentes, entonces los ángulos y lados correspondientes son congruentes o iguales.

Simbólicamente:

Si $\Delta ABC \cong \Delta ABC$ entonces,
$\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle G$,
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ y $\overline{CA} \cong \overline{GE}$



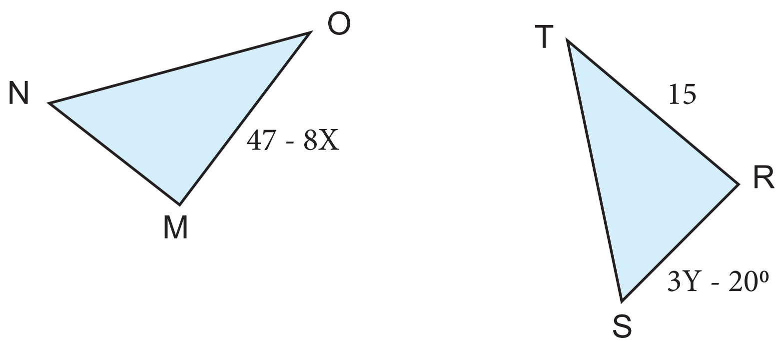
El inverso de la definición también es válido. Es decir,
Si $\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle G$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ y $\overline{CA} \cong \overline{GF}$,
entonces $\Delta ABC \cong \Delta EFG$



Si mediante traslaciones y rotaciones uno de los triángulos se superpone encima del otro, todos los puntos de uno coincidirán con los puntos respectivos del otro. Estos significa que partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes o coinciden.

Ejemplo 9:

Encuentre los valores de x y de y de tal manera que ΔMNO sea congruente a ΔRST.



Solución:

Puesto que $\Delta MNO \cong \Delta RST$, entonces $\angle N \cong \angle S$ Y $MO \cong RT$

La congruencia de ángulos y segmentos, significa medidas iguales. Por lo tanto:

$m\angle N = m\angle S$	$MO = RT$
$58 = 3y - 20$	$47 - 8x = 15$
$78 = 3y$	$-8x = -32$
$26 = y$	$x = 4$

Postulados de congruencia

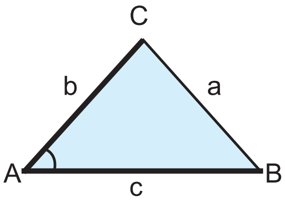
La definición de congruencia de triángulos establece que si se dibuja un segundo triángulo con los tres lados y los tres ángulos congruentes con aquellos de un primer triángulo, el segundo triángulo será congruente con el primero. Esencialmente será el mismo triángulo.

De lo anterior surgen las siguientes interrogantes:

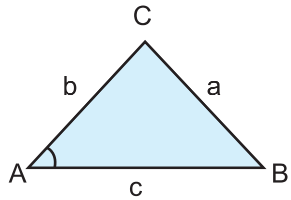
- ¿Se requieren estos seis elementos para garantizar la congruencia?
- ¿Son congruentes dos triángulos si sus tres ángulos son iguales?
- ¿Los triángulos son iguales si conocemos dos lados y un ángulo y si conocemos tres lados?

Empezaremos estudiando los siguientes conceptos previos:

Antecedentes para comprender la terminología implicada en los criterios de congruencia:

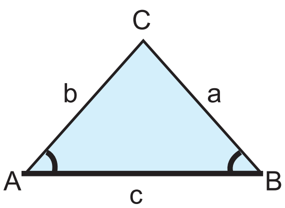


Los lados b y c comprenden el ángulo A.

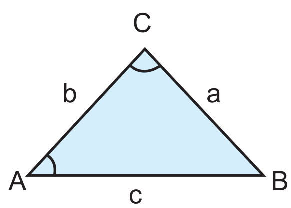


Los lados a y c comprenden el ángulo A.

Dos lados comprenden un ángulo si el vértice de este es un extremo de ambos lados.



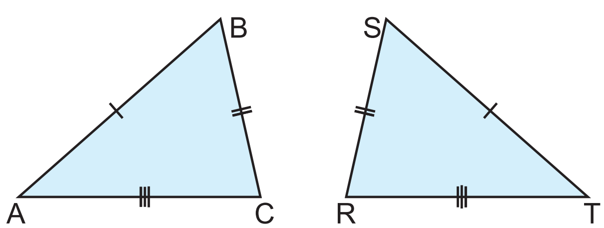
Los lados A y B comprenden el ángulo c.



Los lados A y B comprenden el ángulo a.

Dos ángulos comprenden un lado si los extremos de un lado son vértices de los dos ángulos.

Postulado 3.1. LLL (Lado, Lado, Lado): dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.



Si lado AB ≅ TS

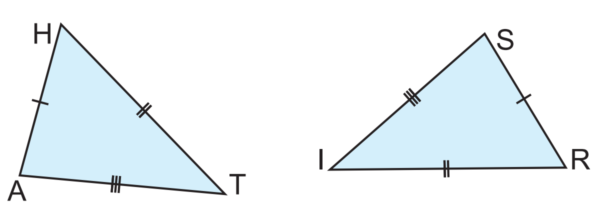
lado BC ≅ SR

lado CA ≅ RT

entonces ΔABC ≅ ΔTSR

Ejemplo 10:

Escriba un enunciado de congruencia de triángulos basado en el diagrama:



Si lado AH ≅ SR

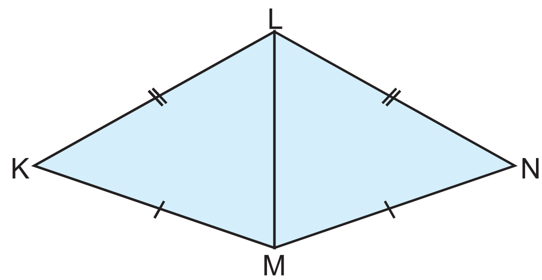
lado HT ≅ RI

lado TA ≅ IS

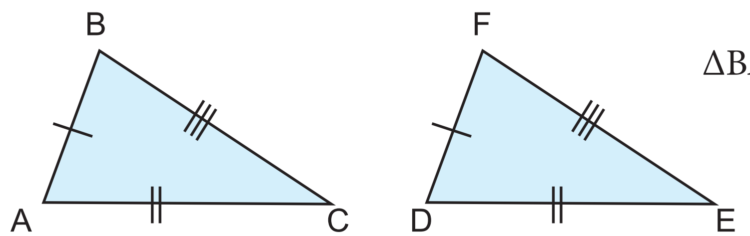
entonces ΔAHT ≅ ΔSRI

Ejemplo 11:

Use el postulado LLL de congruencia de triángulos.



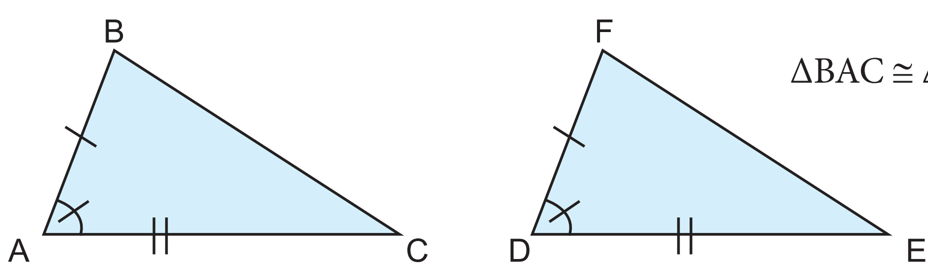
Si MK ≅ MN, KL ≅ NL, LM ≅ ML, entonces ΔMKL ≅ ΔMNL



ΔBAC ≅ ΔFDE, por LLL

Interpretación: si AC ≅ DE, AB ≅ DF y BC ≅ FE, automáticamente se cumple que ∠A ≅ ∠D, ∠B ≅ ∠F y ∠C ≅ ∠E

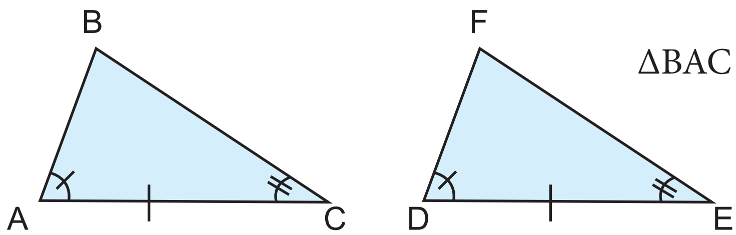
Postulado 3.2. LAL (Lado-Ángulo-Lado). Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido en este son congruentes a dos lados y al ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



ΔBAC ≅ ΔFDE, por LAL

Interpretación: si $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, automáticamente se cumple que $\overline{BC} \cong \overline{FE}$, $\angle B \cong \angle F$ y $\angle C \cong \angle E$

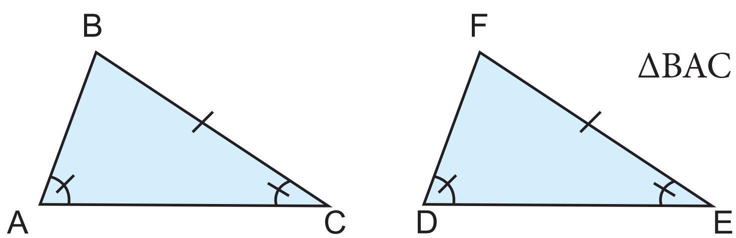
Postulado 3.3. ALA (Ángulo-Lado-Ángulo). Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



$\Delta BAC \cong \Delta FBD$, por ALA

Interpretación: si $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ y $\angle C \cong \angle E$, automáticamente se cumple que: $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle F$ y $\overline{BC} \cong \overline{FE}$

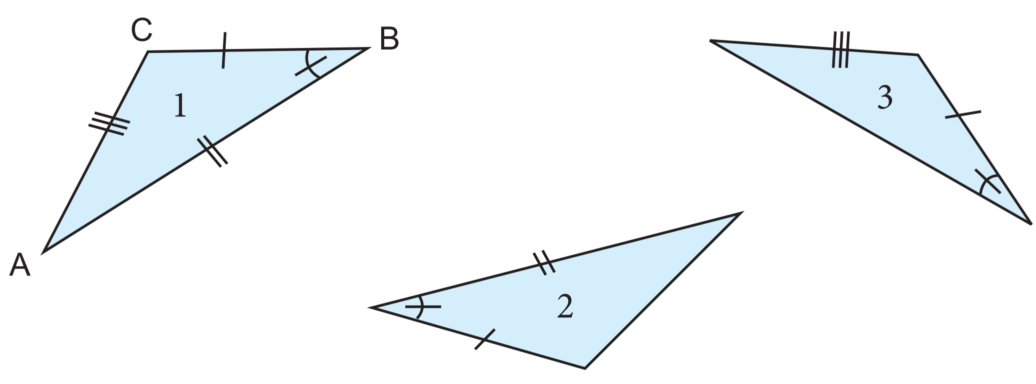
Postulado 3.4. AAL (Ángulo-Ángulo-Lado) Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y un lado, no comprendido entre los ángulos, tienen la misma medida y longitud, respectivamente.



$\Delta BAC \cong \Delta FDE$, por AAL o LAA

Ejemplo 12:

Usando solamente la información dada, determine cuales de los siguientes triángulos son congruentes.



Solución:

Comparando 1 y 2:

Como $AB \cong WQ$, $\angle B \cong \angle Q$ y $BC \cong QS$, $\Delta ABC \cong \Delta WQS$, según LAL:

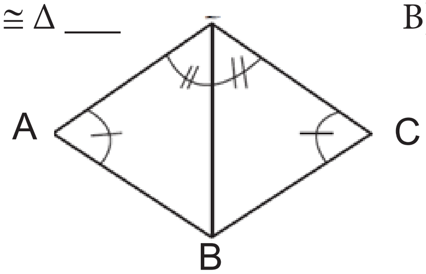
Comparando 1 y 3:
Se afirma que PT ≅ CB, PY ≅ AC y ∠B ≅ ∠T. Es decir, aparece LLA, pero esto no es un criterio de congruencia.

Comparando 2 y 3:
Solo se sabe que ∠Q ≅ ∠T y QS ≅ PT. Esto no es suficiente información para concluir que los triángulos son congruentes.

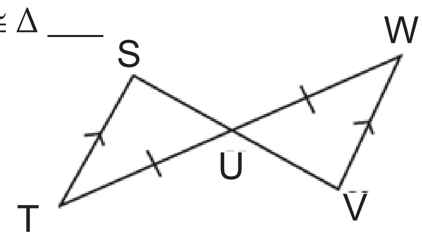
Ejemplo 13:

Complete cada proposición y especifique qué criterio se usa para determinar que los triángulos son congruentes.

a) ΔADB ≅ Δ ___



B) ΔSTU ≅ Δ ___



Solución:

a) Como ∠A ≅ C, ∠ADB ≅ ∠CDB, y BD ≅ BD, ΔADB ≅ ΔCDB, según LAA.
b) Hay dos formas en las que podríamos razonar este problema:

- Como ST y WV son paralelos, ∠S ≅ ∠V y ∠T ≅ ∠W. Se afirma que TU ≅ WU. Por lo tanto, ΔSTU ≅ ΔVWU, según LAA.
- ∠SUT ≅ ∠VUW porque son ángulos opuestos por el vértice. ∠T ≅ ∠W porque ST y WV son paralelas. Se afirma que TU ≅ WU. Por lo tanto, ΔSTU ≅ ΔVWU, según ALA.

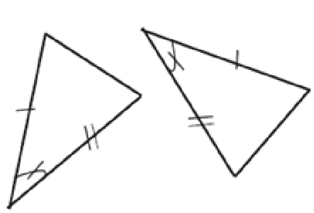
Actividad 4

Instrucciones: desarrolle lo que se solicita a continuación:

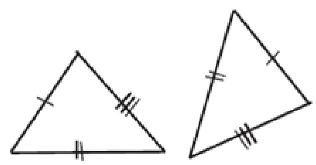
1. Anote en el siguiente espacio los principales conceptos de esta unidad.

2. ¿Por cuál de los tres postulados de congruencia (LAL, ALA, LLL) son congruentes los siguientes pares de triángulos?

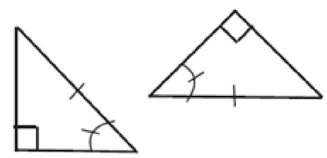
a.



b.

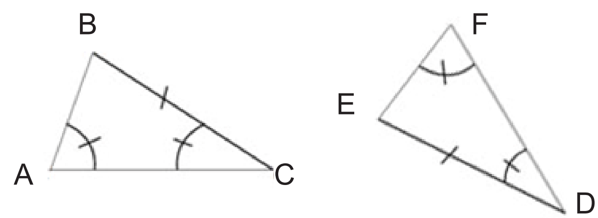


c.



3. En el siguiente ejercicio seleccione la propuesta correcta:

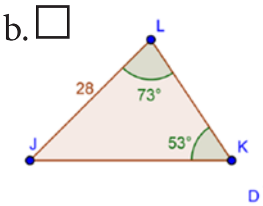
a. ΔABC ≅ ΔDEF
b. ΔABC ≅ ΔEDF
c. ΔABC ≅ ΔEFD



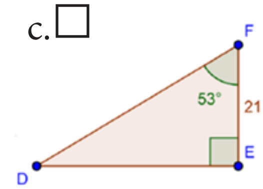
4. Señale con un cheque los triángulos congruentes:

a. ☐

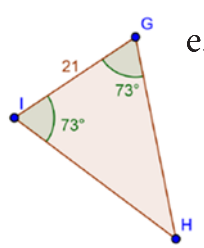
b. ☐



c. ☐

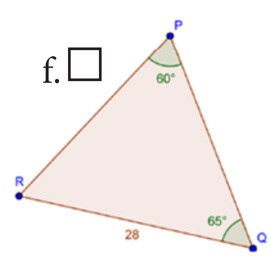


d. ☐

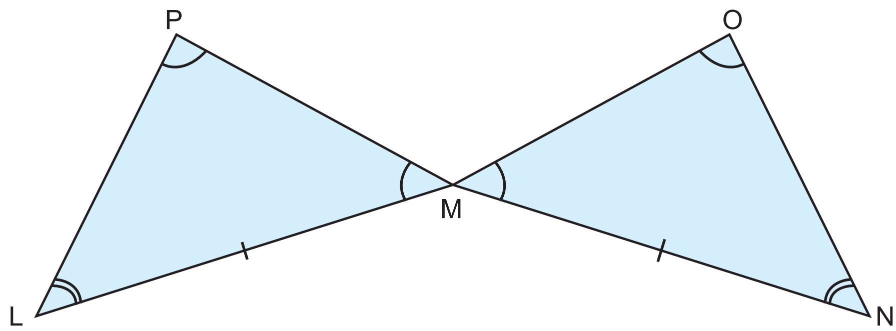


e. ☐

f. ☐



5. Complete los pasos de la siguiente demostración a dos columnas:

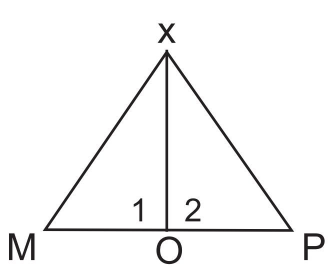


Dado que $\angle L \cong \angle N$, $\angle P \cong \angle O$ y $\overline{LM} \cong \overline{MN}$
Probar: $\angle PML \cong \angle OMN$

Enunciado	Razonamiento
1. $\angle L \cong \angle N$	1. Dado
2. $\angle P \cong \angle O$	2.
3.	3. Dado
4. $\Delta LMP \cong$	4. ____________ postulado de congruencia de triángulos.
5. $\angle PML \cong \angle OMN$	5.

Nota: no puede asumir que P, M y N son colineales o que L, M y O son colineales.

6. Dados $\overline{XO}$ es mediatriz de $\overline{MP}$ ¿Es $\overline{XM} = \overline{XP}$? Justifique su respuesta.



En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Semejanza de triángulos

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, aunque tengan distinto tamaño.

Matemáticamente eso quiere decir que sus lados son proporcionales entre sí. De hecho, cuando vemos copias (ampliaciones o reducciones) que no reproducen exactamente al original, decimos que "están desproporcionadas".

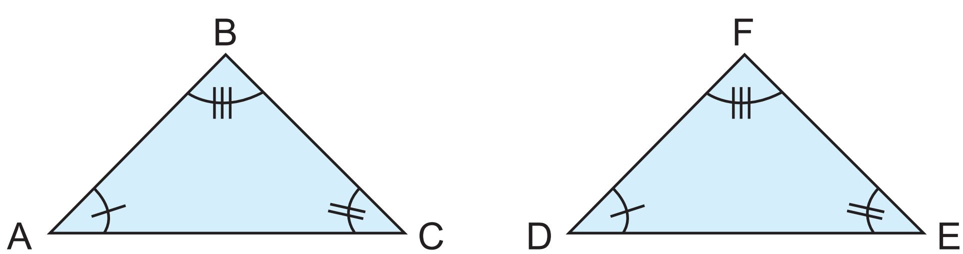
Cuando dos figuras son semejantes, la razón entre los lados homólogos es una constante que se denomina razón de proporcionalidad.

Diferencia entre figuras congruentes y semejantes

Las figuras congruentes tienen la misma forma y la misma área. En cuanto a las figuras semejantes, tienen la misma forma pero área diferente.

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos respectivos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales. La semejanza se representa por el símbolo ~.

Lados homólogos: También llamados correspondientes, son lados que se oponen a ángulos iguales, o lados comprendidos entre ángulos iguales.



Si $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle F$, $\angle C = \angle E$
y $AB / DF = AC / DE = BC / FE = k$,
Entonces $\Delta ABC \cong \Delta DFE$

(Se lee: el triángulo ABC es semejante al triángulo DFE)

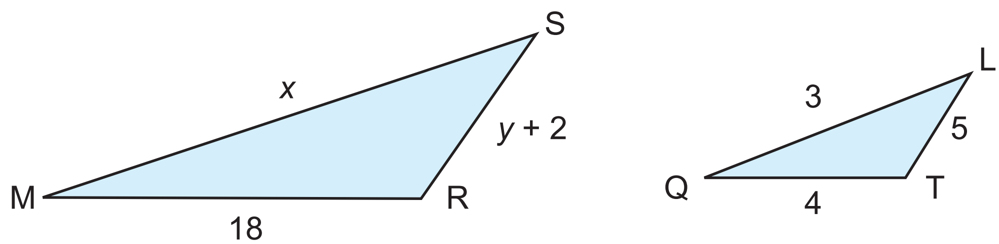
El símbolo k es la razón de semejanza, es decir, el cociente entre dos lados homólogos cualesquiera.

Debemos observar que los triángulos congruentes o iguales tienen igual forma e igual tamaño y que los triángulos semejantes tienen igual forma pero no necesariamente igual tamaño.

Las propiedades de las proporciones se pueden utilizar para resolver problemas que tengan que ver con triángulos semejantes.

Ejemplo 14:

Si el ΔMRS es semejante al triangulo ΔQTL. Determina los valores de x y y.



Solución:

Ya que los triángulos son semejantes, los lados homólogos son proporcionales. De este modo, podemos escribir proporciones para encontrar los valores de x y y.

Escriba una proporción tal que involucre números y la variable x.

a. $\dfrac{MR}{QT} = \dfrac{MS}{QL}$

$\dfrac{18}{4} = \dfrac{x}{3}$

$54 = 4x$

$13.5 = x$

Escribe una proporción tal que involucre números y la variable y.

$\dfrac{MR}{QT} = \dfrac{RS}{TL}$

$\dfrac{18}{4} = \dfrac{y + 2}{5}$

$90 = 4y + 8$

$82 = 4y$

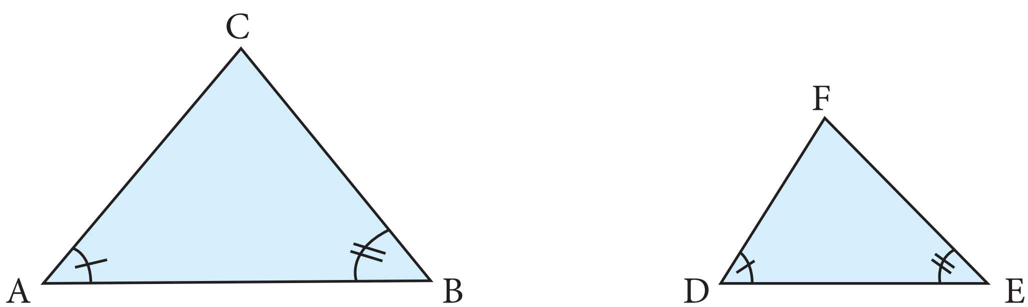
$x = y$

Postulados o criterios de semejanza

La definición de semejanza exige dos cosas:

1. Los ángulos respectivos deben ser iguales.
2. Los lados homólogos deben ser proporcionales.

Postulado de semejanza 3.5. AA (Ángulo-Ángulo). Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.



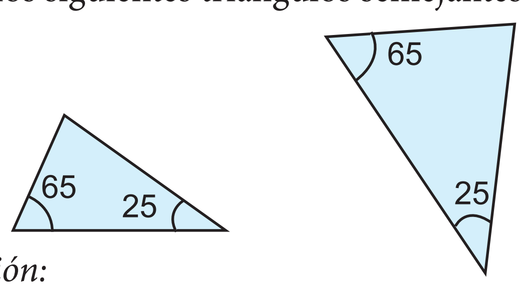
Si $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle E$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Una conclusión importante de esto es que automáticamente los lados son proporcionales. Es decir, podemos asegurar lo siguiente:

$\overline{AB} / \overline{DE} = \overline{AC} / \overline{DF} = \overline{BC} / \overline{EF}$

Ejemplo 15:

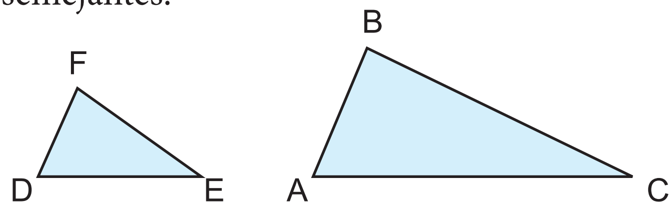
¿Son los siguientes triángulos semejantes?



Solución:

Sí, ya que al tener dos de sus ángulos congruentes se cumple con el criterio AA.

Postulado de semejanza 3.6. LLL (lado-lado-lado). Si las medidas de los lados homólogos de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.



Si $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DE}$

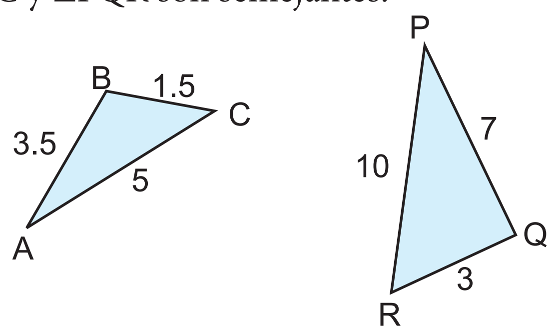
entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Una conclusión importante de esto, es que, automáticamente los ángulos son iguales. Es decir, podemos asegurar que:

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle F$ y $\angle C = \angle E$.

Ejemplo 16:

Determine si ΔABC y ΔPQR son semejantes.



Solución:

- Verifique si las medidas de los lados son proporcionales.

  $$\frac{1.5}{3} = \frac{3.5}{7} = \frac{5}{10}$$

- Efectivamente es así, ya que los productos "cruzados" son iguales.

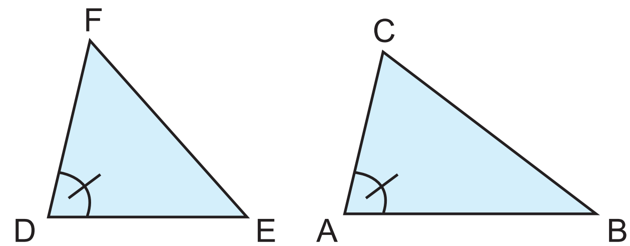
  $(1.5)(7) = (3)(3.5) = 10.5$
  $(3.5)(10) = (7)\ (5) = 35$

- Por lo tanto ΔABC y ΔPQR son semejantes por el criterio LLL.

Postulado de semejanza 3.7. LAL (Lado-Ángulo-Lado). Si dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo y los ángulos comprendidos entre estos lados son iguales, entonces los triángulos son semejantes.

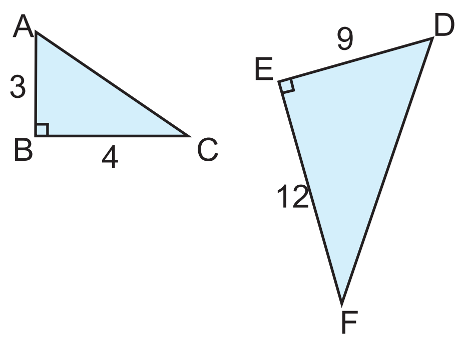
Si $\frac{AC}{DF}\ \frac{AB}{DE}$ y $\angle A = \angle D$,

entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



Ejemplo 17:

¿Son ΔABC y ΔDEF semejantes?



Solución:

- Verique que dos de sus lados son proporcionales

  $$\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

  Efectivamente así es, ya que los productos "cruzados" son iguales:
  $(3)(12) = (4)(9)$

- Verificando que los dos ángulos formados por estos dos lados son congruentes.

  Efectivamente así es, ya que como está demostrado en la figura, ambos ángulos son rectos (90°).

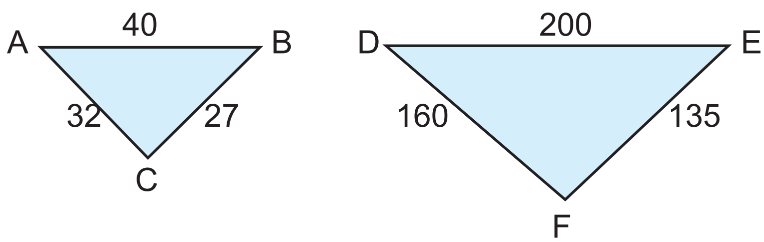
- Por el criterio LAL, ΔABC y ΔDEF son semejantes.

Actividad 5

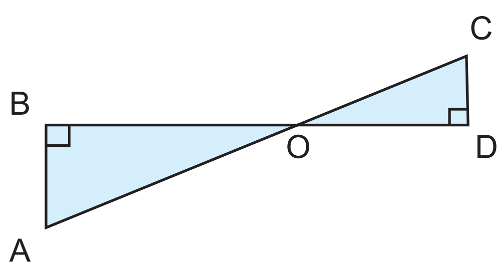
Instrucciones: desarrolle lo que se le plantea a continuación

1. Anote en el siguiente espacio los principales conceptos de esta unidad.

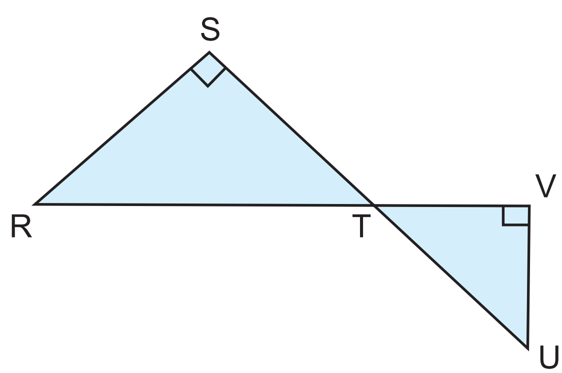
2. Determine si los siguientes triángulos son semejantes. Justifique su respuesta.



3. ¿Establezca si ΔABO y ΔCDO son semejantes?

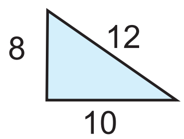


4. Probar que $\overline{ST} / \overline{TV} = \overline{RT} / \overline{TU}$

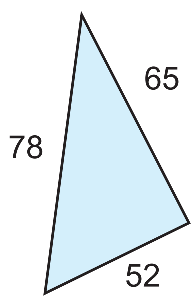


5. Compruebe si los siguientes triángulos son semejantes, si se conocen sus dimensiones.

   a. 8 cm, 10 cm, 12 cm



   b. 52 cm, 65 cm, 78 cm

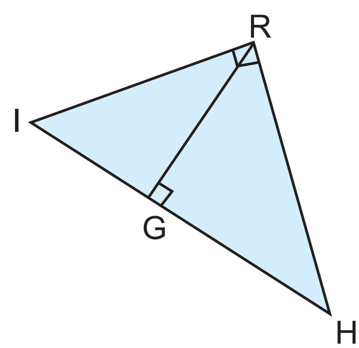


6. Explique por qué cada par de triángulos son semejantes.

   a. ΔIRH y ΔIGR

   b. ΔIRH y ΔRGH

   c. ΔIRG y ΔRHG



En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Medición indirecta con triángulos semejantes

Ocasionalmente nos encontramos con el hecho de realizar medidas de objetos que serían difíciles de medir directamente: la atura de un árbol grande, el ancho de un amplio río, la altura de los cráteres de la luna aún la distancia entre dos ciudades separadas por terreno montañoso. En tales circunstancias, las medidas pueden ser hechas indirectamente, usando proporciones y triángulos semejantes. Estos métodos indirectos enlazan medición con geometría y números. Examinaremos algunos de los métodos para hacer medidas indirectas.

Ejemplo 18:

Un edificio proyecta una sombra de 7.40 m de largo. Al mismo tiempo, un niño de 0.90 m de alto proyecta una sombra de 1.52 m de largo. ¿Qué altura tiene el edificio?

Solución:

Observe el dibujo donde las líneas discontinuas muestran los rayos paralelos del sol. Los triángulos formados son semejantes por el criterio AA. Entonces, x se puede determinar estableciendo y resolviendo una proporción.

$$\frac{\text{Altura del niño}}{\text{Altura del edificio}} = \frac{\text{Longitud de la sombra del niño}}{\text{Longitud de la sombra del edificio}}$$

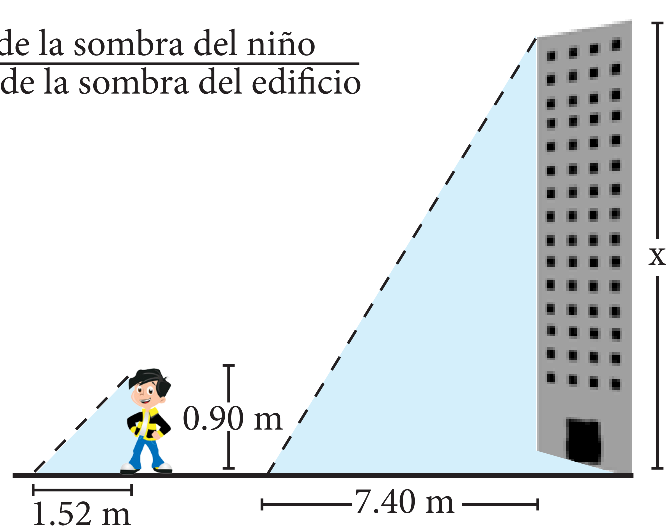
$$\frac{0.90\text{ m}}{x} = \frac{1.52\text{ m}}{7.40\text{ m}}$$

$$(0.90)(7.40) = (1.52)(x)$$

$$6.66 = 1.52\,x$$

$$6.66/1.52 = x$$

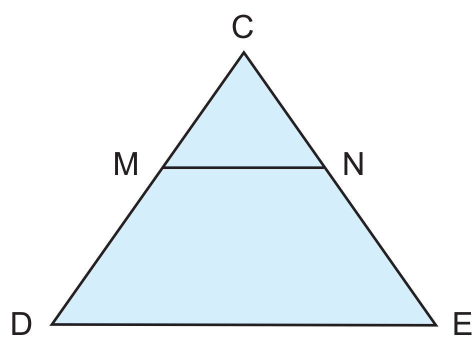
$$4.38 = x$$



El edificio tiene 4.38 m de altura.

Teorema fundamental de la proporcionalidad y su recíproco

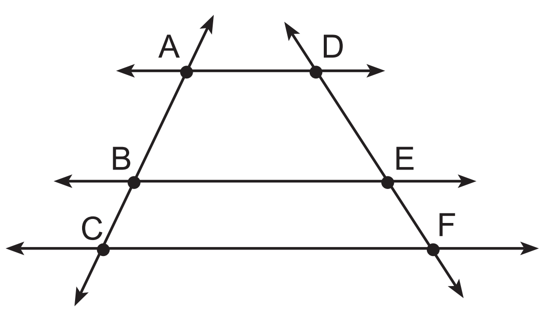
Teorema 3.2. Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide a estos proporcionalmente.



Si $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{DE}$, entonces $\frac{CM}{MD} = \frac{CN}{NE}$

Este teorema es consecuencia de otro más general, cuyo nombre se debe a su creador, Tales de Mileto:

Teorema 3.3. Teorema de Tales. Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.



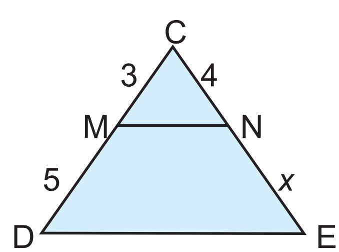
Si $\overline{AD}$ // $\overline{BE}$ // $\overline{CF}$

Entonces:

$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ o bien $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

Ejemplo 19:

En esta figura, $\overline{MN}$ // $\overline{DE}$, encuentre $\overline{NE}$.



Solución:

$\overline{CM} / \overline{MD} = \overline{CN} / \overline{NE}$, por el teorema de Tales

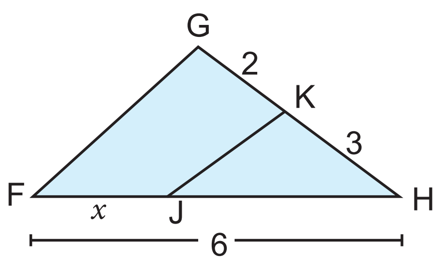
Por tanto, $\frac{3}{5} = \frac{4}{x}$

$$3x = 20$$

$$x = \frac{20}{3}$$

Ejemplo 20:

Encuentre $\overline{FJ}$ en esta figura si $\overline{GF} // \overline{KJ}$.



Solución:

$\overline{GK} / \overline{KH} = \overline{FJ} / \overline{HJ}$ Por el teorema de Tales.

Por tanto $\frac{2}{3} = \frac{x}{6 - x}$

$$3x = 12 - 2x$$

$$5x = 12$$

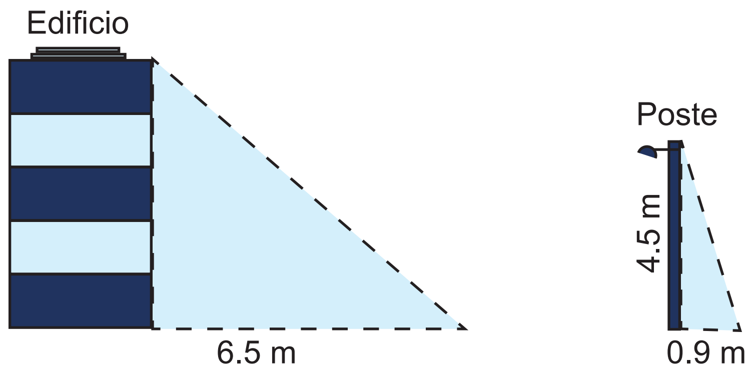
$$x = \frac{12}{3}$$

Actividad 6

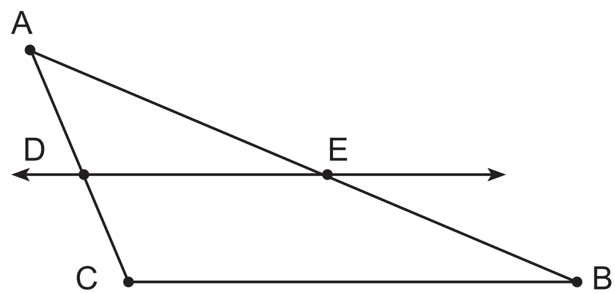
Instrucciones: conteste lo que acontinuación se le pide.

1. Anote en el siguiente espacio los principales conceptos de esta unidad.

2. Calcule la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6.5 m a la misma hora que un poste de 4.5 m de altura da una sombra de 0.90 m.

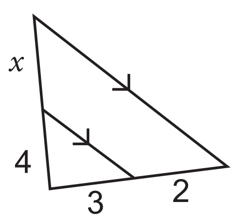


3. En la siguiente figura. $\overline{AB} = 120$ cm, $\overline{AC} = 96$ cm y $\overline{AE} = 80$ cm. Calcule $\overline{CD}$.

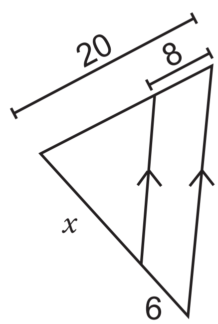


4. En los ejercicios siguientes, encuentre el valor de x.

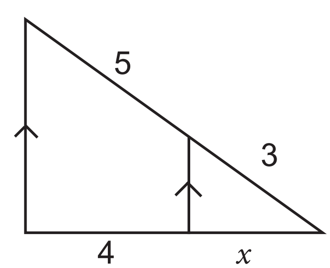
a.



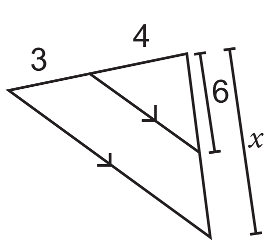
b.



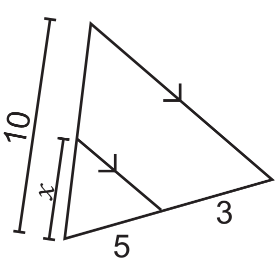
c.



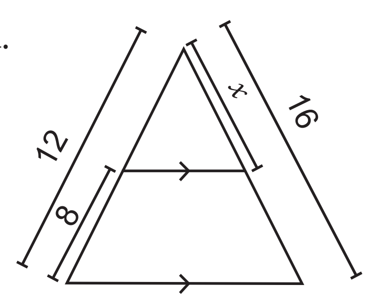
d.



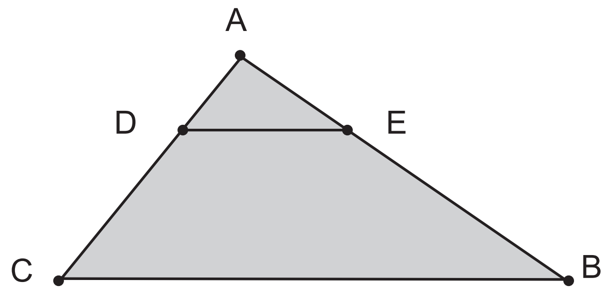
e.



d.



5. En la siguiente figura, $\overline{AB} = 20$ cm, $\overline{AD} = 3$ cm y $\overline{CD} = 12$ cm. Calcule $\overline{EB}$.



En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Propiedades del triángulo rectángulo

Un número x es una media proporcional para dos números a y b si

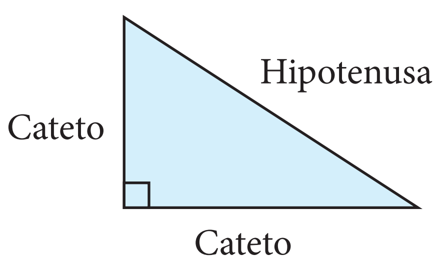
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},\ x \neq 0,\ b \neq 0$$

Por ejemplo, la media proporcional para 4 y 16 es 8, dado que

$$\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$$

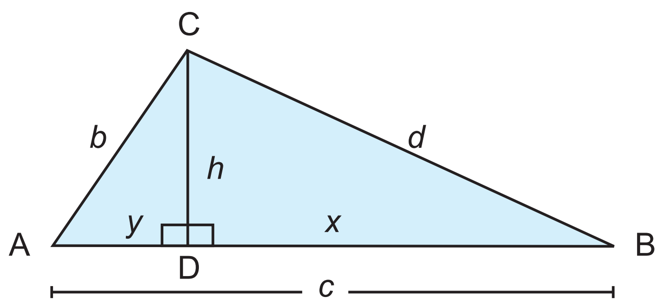
Recuerde las partes de un triángulo rectángulo:

En el triangulo rectángulo los lados que determinan el ángulo recto se llaman catetos, y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

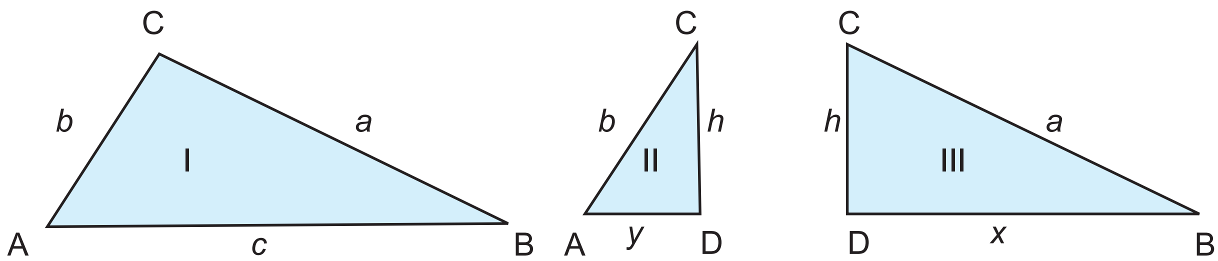


La semejanza de triángulos permite establecer algunas propiedades importantes de los triángulos rectángulos. A continuación estableceremos dos propiedades relacionadas con la altura de un triángulo rectángulo y la media proporcional.

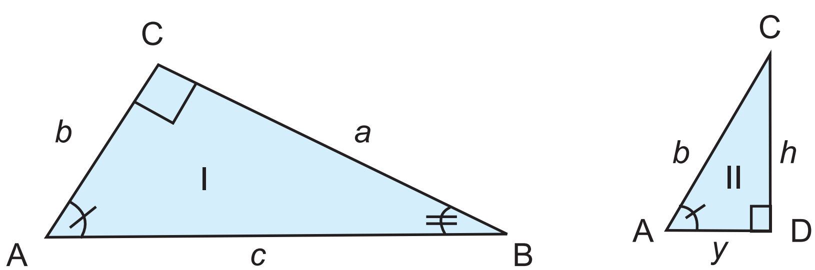
La altura interior de un triángulo rectángulo (segmento CD) divide a este en dos triángulos semejantes a él y semejantes entre sí.



Estudie a continuación la justificación de este hecho. Separe los triángulos formados:



Considere estos triángulos en parejas:

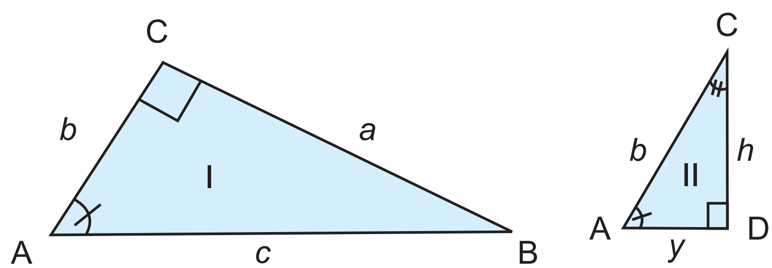


$\angle$ACB = $\angle$ADC porque son ángulos rectos
$\angle$CAB = $\angle$CAD porque son ángulos comunes a ambos triángulos.
Por la tanto, ΔI ~ ΔII por el criterio AA.

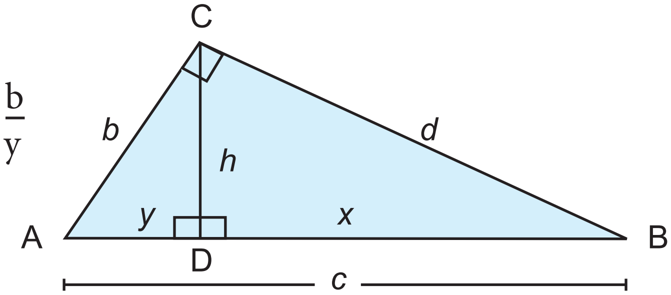
Automáticamente, por la propiedad del tercer ángulo, el par de ángulos restantes son iguales:

Entonces: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{CB}{DC}$

Sustituyendo: $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{a}{h}$

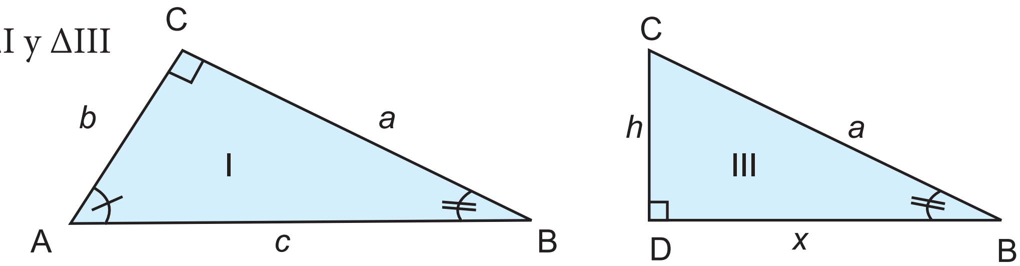


Si consideramos la proporción, $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{y}$
resulta lo siguiente: $b^2 = cy$



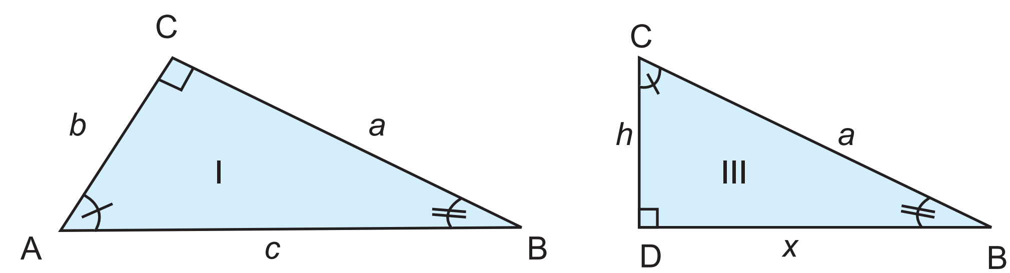
Por lo tanto, el cateto b es media proporcional para *y* y *c*.

ΔI y ΔIII



∠ACB = ∠CDB porque son ángulos rectos.
∠ABC =∠DBC porque son ángulos comunes a ambos triángulos.
Por la tanto, ΔI ~ ΔIII por el criterrio AA.

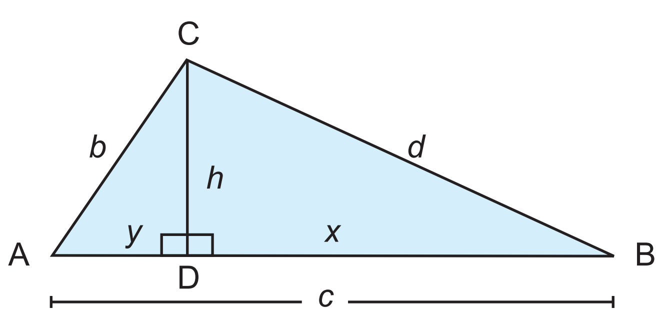
Automáticamente, el par de ángulos restantes son iguales:



Entonces: $\dfrac{\text{AC}}{\text{CD}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{CB}} = \dfrac{\text{CB}}{\text{DB}}$

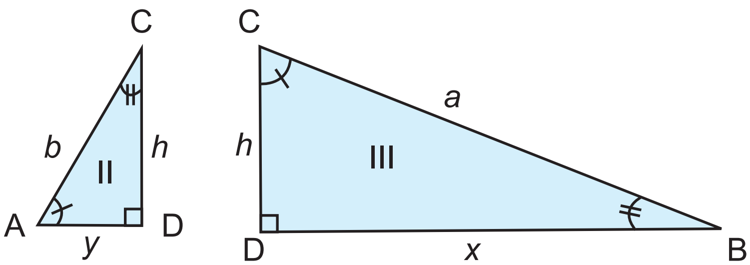
Sustituyendo: $\dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{x}$

Si consideramos la proporción $\dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{x}$,
resulta lo siguiente: $a^2 = cx$



Entonces, el cateto es la media proporcional para x y c.

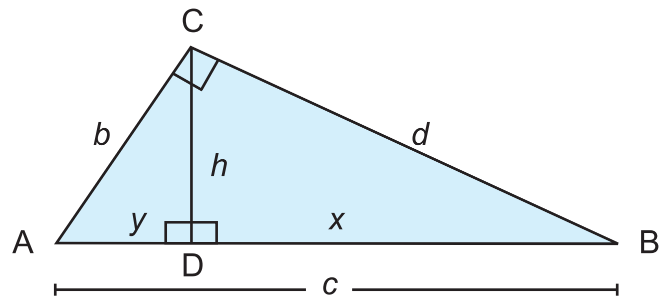
ΔII y ΔIII: para el análisis de estos triángulos, utilizaremos los pares de ángulos iguales resultantes de los análisis anteriores. En la siguiente figura se presentan con marcas iguales a los ángulos iguales.



Por lo tanto , $\Delta II \sim \Delta III$

Entonces: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CB}{BD}$

Sustituyendo: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{y}{h} = \dfrac{h}{x}$

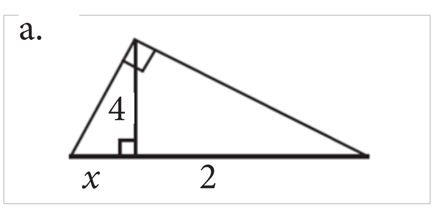


Si consideramos la proporción, $\dfrac{y}{h} = \dfrac{h}{x}$ resulta lo siguiente: $h^2 = xy$

Entonces, la altura h es la media proporcional para x e y.

De los análisis anteriores se infieren las siguientes propiedades:

Teorema de la altura. En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que dividen a esta: $h^2 = n.m$ Ejemplo 20: Calcular el valor de cada incógnita.



Solución:

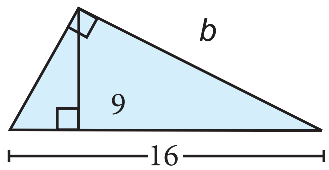
con la propiedad 1 obtenemos

$$4^2 = 2x$$
$$16 = 2x$$
$$x = \frac{16}{2} = 8$$

Ejemplo 21:

Calcular el valor de cada incógnita.

b.



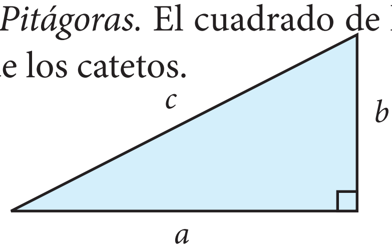
Solución:

con la propiedad 2 obtenemos:

$b^2 = 9\,(16)$
$b^2 = 144$
$b = \sqrt{144} = 12$

Teorema de Pitágoras. El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

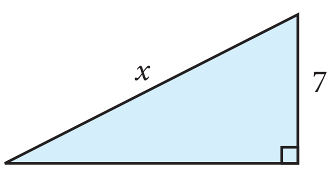
$c^2 = a^2 + b^2$



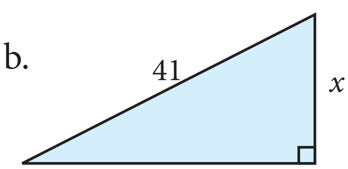
Ejemplo 22:

Obtener en cada caso el lado desconocido.

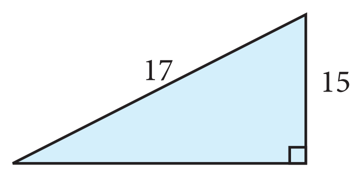
a.



b.



c.



Solución:

a. Por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 24^2 + 7^2$
$x^2 = 576 + 49$
$x = \sqrt{625} = 25$

b. Por el teorema de Pitágoras:
$y^2 = 40^2 + 41^2$
$y^2 = 1{,}681 + 1{,}600$
$y = \sqrt{81} = 9$

c. Por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 15^2 + 17^2$
$x^2 = 289 + 225$
$x = \sqrt{64} = 8$

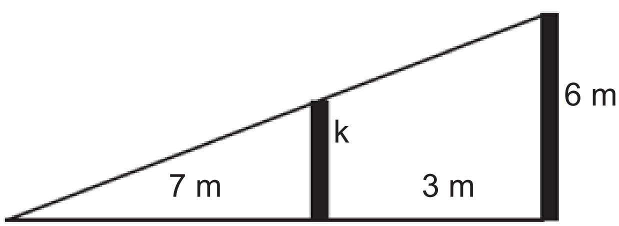
Actividad 7

Instrucciones: desarrolle lo que se le presenta a continuación.

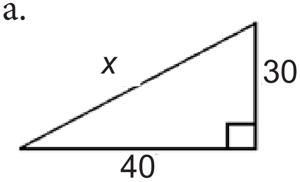
1. Anote en el siguiente espacio los principales conceptos de esta unidad.

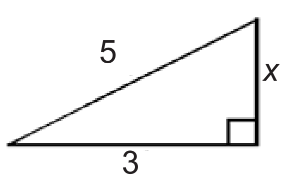
2. A cierta hora del día, una persona de 180 cm de alto proyecta una sombra de 120 cm. En el mismo instante, un árbol proyecta una sombra de 540 cm. ¿Qué altura tiene el árbol?

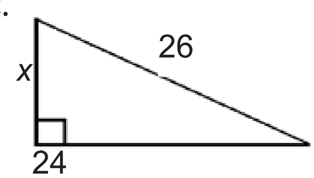
3. Calcular la altura del poste menor con los datos del siguiente esquema.

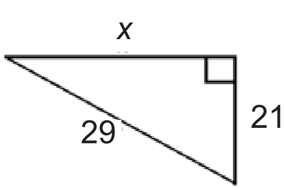


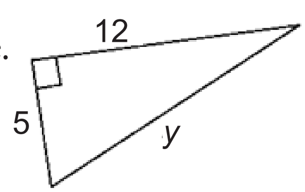
4. En los ejercicios siguientes obtener la medida del lado desconocido en cada triángulo.

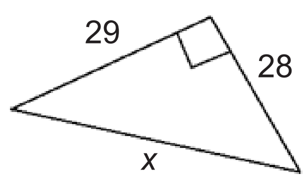
a.


b.


c.


d.


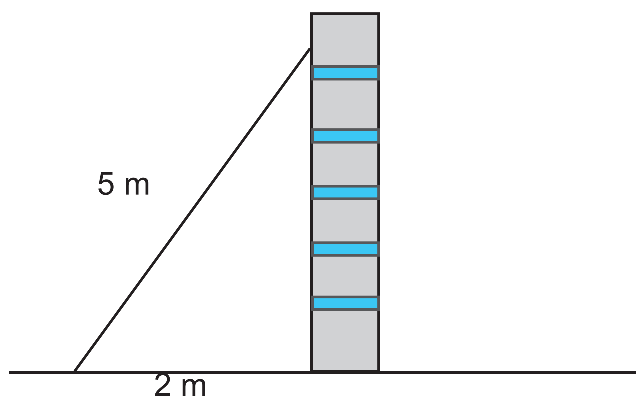
e.


f.


5. ¿Cuál de los siguientes proposiciones se utiliza para verificar si un triángulo es rectángulo o no?

   a. Teorema de Pitágoras
   b. Media
   c. Altura
   d. Hipotenusa
   e. Media proporcional

6. ¿A qué altura llega una escalera de 5 m de longitud en un muro vertical, si sus pies están a 2 m del muro?



En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Glosario

Acutángulo: triángulo que tiene los tres ángulos agudos.

Altura: en geometría, perpendicular que va desde el vértice de una figura geométrica a la base opuesta. También es, en una figura geométrica, la perpendicular trazada desde la base al vértice opuesto.

Área (o superficie): es la magnitud física que expresa la extensión de un cuerpo en dos dimensiones: largo y ancho. Su unidad de medida en el sistema cegesimal es el metro cuadrado. Otra forma de definirla es la siguiente: superficie de una figura geométrica.

Bisectriz: bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo.

Caras: son los polígonos que limitan un poliedro. Diferenciamos las caras laterales y las bases.
Cateto: en geometría se denomina cateto a cualquiera de los dos lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Complementario: ángulo que sumado a otro da 90º.

Cuadrilátero: polígono de cuatro lados.

Decágono: polígono de diez lados.

Diagonal: segmento rectilíneo que une dos vértices no consecutivos de una figura geométrica.

Eneágono: polígono de nueve lados.

Escala: la proporción entre la longitud real y la longitud en el plano.

Escaleno: triángulo que tiene sus tres lados desiguales.

Geometría: rama de la matemática que estudia las propiedades de las figuras y las relaciones entre los puntos, líneas, ángulos, superficies y cuerpos.

Geometría plana: trata de las figuras cuyos puntos y líneas están situados en un plano.

Generatriz: en un cono, es la hipotenusa del triángulo rectángulo que al girar sobre su cateto engendra el cono. El cateto sobre el cual se gira es la altura (h). El otro cateto es el radio (r) de la base.

Girar: rotar alrededor de un punto.

Heptágono: un polígono de 7 lados (una figura plana de lados rectos). También se le llama septágono.

Heptágono regular: polígono de siete lados iguales.

Hexágono: polígono de seis lados.

Hexágono regular: polígono de seis lados iguales. Sus ángulos interiores son iguales y miden 120° cada uno.

Hipotenusa: es el lado opuesto al ángulo recto, en un triángulo rectángulo. Cumple la condición, descubierta y demostrada por Pitágoras, de que su cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Isósceles: triángulo que tiene dos de sus lados iguales.

Lado: una de las líneas que forman una figura plana (bidimensional), o una de las superficies que forman un objeto sólido (tridimensional). También se le llama cara.

Largo: longitud de una cosa.

Lateral: relativo a los bordes de los polígonos o a las caras de los poliedros.

Líneas paralelas: líneas que no se juntan por mucho que se prolonguen.

Líneas perpendiculares: líneas que al cortarse forman un ángulo de 90°.

Obtusángulo: triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Oblicuo: en declive. No de arriba abajo ni de izquierda a derecha.

Octágono: un polígono de 8 lados (una figura plana de lados rectos).

Paralelo: dícese de dos o más rectas que, dos a dos, se encuentran en un mismo plano y no se cortan (las rectas paralelas están siempre a la misma distancia, sin cortarse nunca).

Pentágono: polígono de cinco lados.

Pentágono regular: polígono de cinco lados iguales. Cada ángulo interior mide 108°.

Perímetro: el perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.

Perpendicular: dos rectas son perpendiculares si forman un ángulo recto (90˚)

Pitágoras: Pitágoras de Samos (582 a.C. - 496 a.C.) fue un filósofo y matemático griego, mejor conocido por el teorema de Pitágoras.

Plano: es una superficie plana, sin espesor. Se extiende hacia el infinito.

Poliedro: cuerpo limitado por polígonos planos.

Poliedro regular: cuerpo limitado por polígonos planos. En caso de ser todos iguales y regulares, se trata de un poliedro regular. Existen solo cinco poliedros regulares convexos, denominados "platónicos": el tetraedro, el octaedro, el cubo, el dodecaedro y el icosaedro.

Polígono: figura geométrica plana limitada por segmentos rectos consecutivos no alineados, llamados lados. Por ejemplo, el hexágono es un polígono de seis lados. La palabra "polígono" procede del griego y quiere decir muchos (poly) y ángulos (gwnos).

Rectángulo: es un polígono de cuatro lados (una figura plana de lados rectos) donde cada ángulo es un ángulo recto (90°).

Rombo: figura de cuatro lados que tiene todos sus lados de una misma longitud. También los lados opuestos son paralelos y los ángulos opuestos son iguales. Es un tipo de paralelogramo.

Rotación: movimiento circular. Hay un punto central que se mantiene fijo y todo lo demás se mueve alrededor de ese punto en círculos.

Secante (línea): línea que intersecta dos o más puntos de una curva. Recta que intercepta a la circunferencia en dos puntos no coincidentes.

Sector: superficie plana limitada por dos segmentos rectilíneos y un arco de curva.

Sector circular: porción de círculo limitado por dos radios y el arco de circunferencia interceptado por ellos.

Segmento: porción de recta limitada por dos puntos.

Semicírculo: mitad de un circulo.

Semejantes: figuras cuyos ángulos homólogos son congruentes y sus segmentos son homólogos proporcionales.

Símbolo: representación convencional de un número, cantidad, relación, operación, etc.

Solución: valores numéricos que hacen que sea cierta una ecuación.

Superficie: límite bidimensional que puede ser plano o curvo.

Teorema de Pitágoras: en un triángulo rectángulo, el cuadrado del lado más largo (la hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (los catetos).

Transformación: mover una figura para que esté en una posición diferente, pero manteniendo su tamaño, área, ángulos y longitud de sus líneas. Girar, voltear o deslizar son los movimientos básicos.

Tetraedro: poliedro de cuatro caras. Con este número de caras ha de ser forzosamente un poliedro convexo, y sus caras triangulares, encontrándose tres de ellas en cada vértice. Si las cuatro caras del tetraedro son triángulos equiláteros, forzosamente iguales entre sí, el tetraedro se denomina regular.

Trapecios: cuadriláteros con un par de lados paralelos.

Triángulo: un polígono de tres lados (una figura plana de lados rectos).

Triángulos semejantes: dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos iguales o sus lados proporcionales.

Vértices: son los puntos donde se unen las aristas. En cada vértice concurren tres o más aristas.

Actividad metacognitiva

Instrucciones: con base en lo aprendido en clases, responda lo que se le pide a continuación.

1. ¿Son semejantes todos los triángulos isósceles? ¿Por qué?
   Haga un dibujo.

2. ¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos? ¿Por qué?
   Haga un dibujo.

3. ¿Son semejantes dos triángulos isósceles que tienen sus ángulos del vértice iguales? ¿Por qué?

4. ¿Por qué tenemos que usar varias letras para nombrar $\angle PML$ y $\angle OMN$, mientras que podemos usar solo una letra para nombrar $\angle L$ o $\angle N$?

5. ¿Qué hace que dos triángulos sean semejantes?

Autoevaluación

Instrucciones generales: a continuación se le presentan una serie de ejercicios de evaluación de los aprendizajes de esta unidad. Su trabajo consiste en desarrollarlos con la mayor honestidad posible, sin copiar del libro. Recuerde que esta actividad le dará información sobre su progreso educativo. Al terminar, confronte sus respuestas con las soluciones que se encuentran en la guia didática de este libro y vuelva a estudiar aquellas preguntas o temas cuyas respuestas no acertó.

Verdadero o falso

Instrucciones: a continuación se le presentan una serie de proposiciones, indique si son verdaderas o falsas.

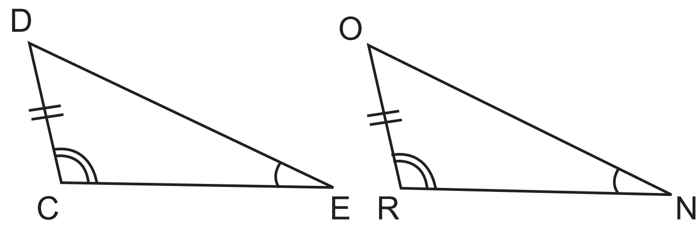
1. La unión de dos conjuntos convexos cualesquiera es un conjunto convexo……………………………………..…………………………..………( )
2. La intersección de dos conjuntos convexos cualesquiera
3. Es un conjunto convexo……………………………………………… ( )
4. Todo triángulo equilátero es isósceles……………………………….. ( )
5. Los lados homólogos deben ser proporcionales…………………….. ( )
6. Los lados homólogos son llamadps correspondientes..…………….. ( )

Selección única

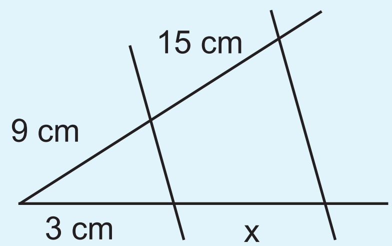
Instrucciones: a continuación encontrará varias proposiciones de selección única. Léalas y encierre con un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta para cada proposición.

1. ¿Cuál es el tipo de triángulo que tiene tres ángulos agudos? Seleccione una respuesta:
   a. Rectángulo
   b. Acutángulo
   c. Obtusángulo
   d. Llano

2. Cuál regla puede probar que los triángulos que siguen son congruentes?
   a. LLL
   b. LLA
   c. ALA
   d. AAL

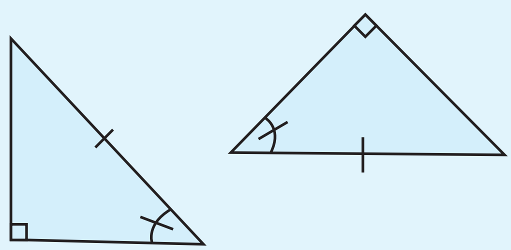


3. Calcule la longitud del segmento x de la figura:
   a. 4.5 cm
   b. 5 cm
   c. 3 cm
   d. 4 cm



4. Cuál propiedad puede ser usada para probar las siguientes afirmaciones: Si el $\Delta MNO \cong \Delta PQR$ y el $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$, entonces $\Delta MNO \cong \Delta XYZ$?
   a. propiedad reflexiva de congruencia
   b. propiedad de identidad de congruencia
   c. propiedad transitiva de congruencia
   d. propiedad simétrica de congruencia

5. ¿Por cuál de los postulados, es congruente el siguiente triángulo?
   a. LAL
   b. ALA
   c. LLL
   d. AAL

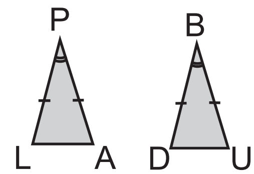


Parte Práctica

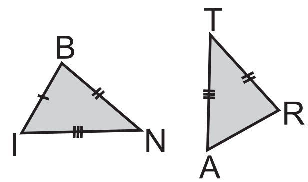
Instrucciones: resuelva cada ejercicio en forma clara y ordenada.

I. Para cada par de triángulos, complete la relación de congruencia de triángulos o escriba “no es posible establecer relación de congruencia.” Indique el nombre del postulado de congruencia que utilice o escriba una justificación que explique por qué no puedes establecer una afirmación de congruencia de triángulos.

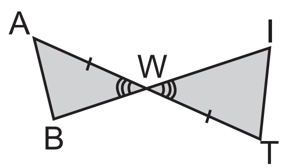
a. $\Delta PAL \cong \Delta$____________.



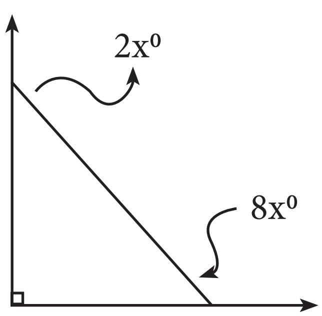
b. $\Delta BIN \cong \Delta$ ____________.



c. $\Delta BOW \cong \Delta$ ____________.



2. Encuentre la medida del ángulo exterior de:



3. Escribe un enunciado de congruencia de triángulos basado en el siguiente diagrama