Unidad IV

Polígonos

Introducción

En la siguiente unidad desarrollaremos principalmente los temas de cuadriláteros y polígonos, sus funciones, propiedades y su construcción.

Los cuadriláteros son importantes en trigonometría, que a su vez sirve de base para cualquier tipo de construcción, desde pirámides hasta edificios. La forma de los cuadrilateros está presente en depósitos de agua, piscinas o empaques para transporte.

Además, por su forma y la cantidad de lados que tiene un cuadrilatero resiste las fuerzas que se ejercen sobre él. Es decir, usted puede colocar una roca sobre un palo y lo más seguro es que la roca no sea sostenida por el palo, ya que se necesita una base plana para sostener su peso, pero el cuadrilátero (figura con caras planas en forma de cubo) si es capaz de sostener este peso encima y porque este se distribuye en toda la figura, siempre y cuando no rebase su capacidad.

Por otro lado la geometría, a través de los polígonos, está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestras actuales sociedades (industria, diseño, arquitectura, topografía, etc...).

Además la forma geométrica es también un componente esencial del arte y representa un aspecto importante en el estudio de los elementos de la naturaleza.

En conclusión, con el estudio de los polígonos y en general de las figuras geométricas usted podra reconocer que la geometría y la trigonometría son parte del mundo cotidiano y su aprendizaje es util y está al alcance de todos.

¿Qué vamos a aprender ?

Competencias	Objetivos	Contenidos
1. Determinar las características del paralelogramo, trapecio y trapezoide.	1. Resolver problemas de la vida cotidiana mediante la construcción de diferentes tipos de cuadriláteros.	1. Cuadriláteros 2. Elementos del cuadrilátero 3. Propiedades de los cuadriláteros 4. Clasificación de los cuadriláteros 5. Perímetro y área del cuadrilátero
2. Identificar los elementos de un polígono.	2. Construir objetos mediante el reconocimiento de los polígonos regulares.	6. Polígono 7. Polígono regular 8. Elementos del polígono 9. Clasificación de los polígonos 10. Propiedades de los polígonos 11. Suma de ángulos internos de un polígono regular 12. Número de lados de un polígono regular dada la medida de uno de sus ángulos
3. Construir polígonos regulares e irregulares utilizando un regla y un compás.	3. Construir polígonos regulares.	13. Construcción de polígonos regulares inscritos en un círculo 14. Propiedades del polígono regular
4. Deducir la fórmula para el cálculo del perímetro y área de un polígono regular.	4. Calcular el área y perímetro de polígonos regulares.	15. Área y perímetro de un polígono regular

Mis conocimientos previos

Instrucciones: desarrolle en forma clara y ordenada lo que se le pide a continuación.

1. Observe la imagen y conteste:
   a. ¿Cuántos lados tiene el cuerpo geométrico?

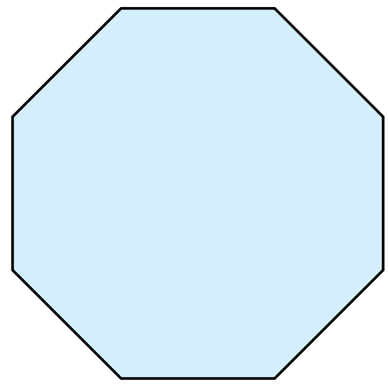
   ____

   b. ¿Cuántos ángulos tiene el cuerpo geométrico?

   ____

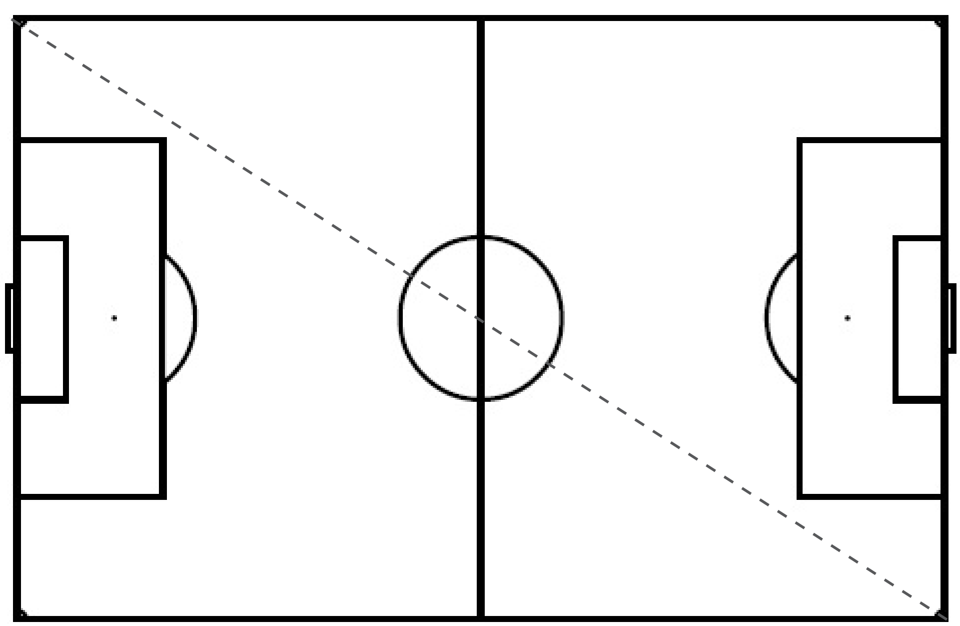
   c. ¿Cómo se llama el cuerpo geométrico?

   ____



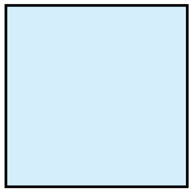
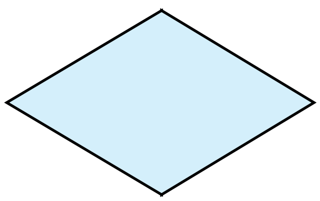
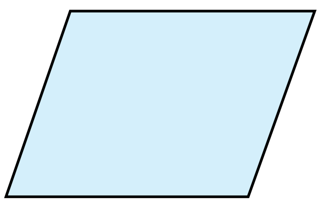
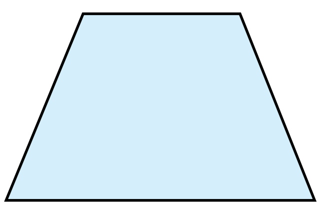
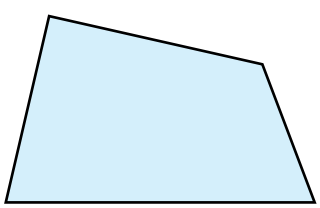
2. Calcule el área de un triángulo cuya base mide 8 cm y tiene una altura de 6 cm.

3. ¿Cómo se llama la línea punteada que se observa en la imagen del campo de fútbol?



____

4. Complete el siguiente cuadro escribiendo a la par de cada imagen el nombre de la figura geométrica que corresponde a cada uno de ellas.

Nº	Imagen	Nombre de la figura
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

En plenaria, comparta las respuestas con su tutor y compañeros.

Cuadriláteros

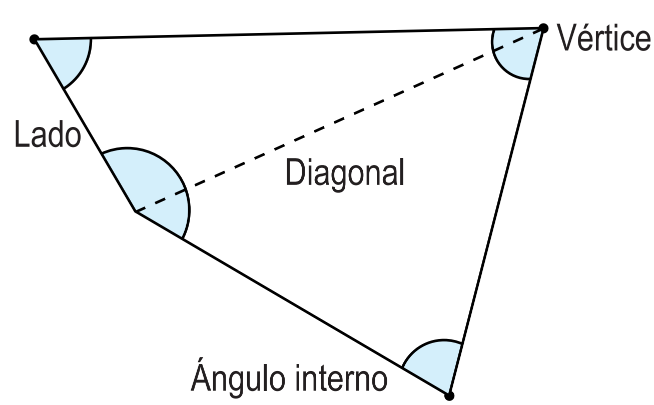
Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros pueden tener distintas formas, pero todos ellos poseen cuatro vértices y dos diagonales, y la suma de sus ángulos internos siempre da como resultado 360°. Para clasificarlos vamos a utilizar la longitud y posición relativa de sus lados y la relación que existe entre sus ángulos.

Identificación de los elementos de los cuadriláteros

Un polígono también es una figura geométrica plana limitada por rectas. Los cuadriláteros pueden tener diferentes formas, pero siempre los mismos elementos, que son los siguientes:

- 4 vértices: son los puntos de intersección de las rectas que conforman el cuadrilátero.
- 4 lados: son los segmentos limitados por dos vértices consecutivos.
- 2 diagonales: son los segmentos cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.
- 4 ángulos interiores: formados por dos lados y un vértice en común.
- 4 ángulos exteriores: formados por un lado, un vértice y la prolongación del lado adyacente.

Elementos de un cuadrilátero



Formulación de las propiedades de los cuadriláteros

En la figura anterior podemos observar algunas propiedades de los cuadriláteros, pero para entenderlos de mejor forma estudiaremos la siguiente teoría:

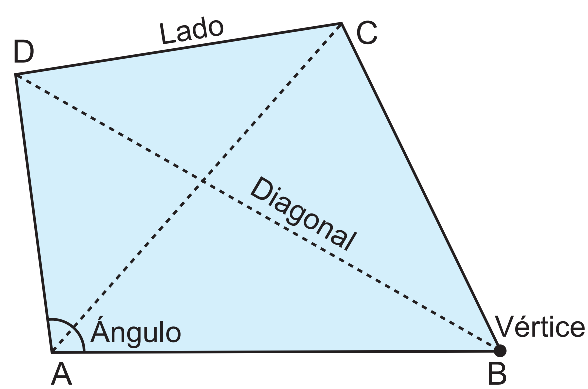
- Los lados opuestos son iguales y no tienen ningún vértice en común.
- Los lados consecutivos son los que tienen un vértice en común.
- Los vértices y ángulos opuestos son los que no pertenecen a un mismo lado, siendo los ángulos iguales.
- La suma de ángulos interiores es igual a cuatro ángulos rectos (360°). Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios, es decir, suman 180°.
- Las diagonales se cortan en un punto medio.
- El número total de diagonales que pueden trazarse siempre es dos. Estas diagonales se cortan en un punto interior.
- Desde un vértice solo puede trazarse una diagonal.

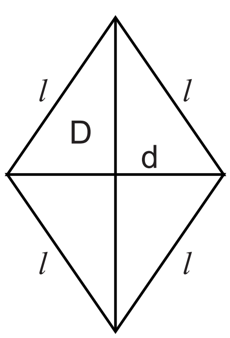
Propiedades de los cuadriláteros

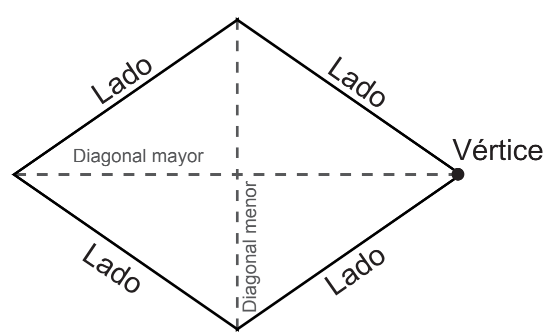
Usualmente los vértices de un cuadrilátero son nombrados con letras mayúsculas (A, B, C…).

Las uniones de sus lados AB, AC, etc.

Los ángulos se grafican según los lados que intervienen $\overline{CDA}$, para encontrar el ángulo que se encuentra en vértice D.

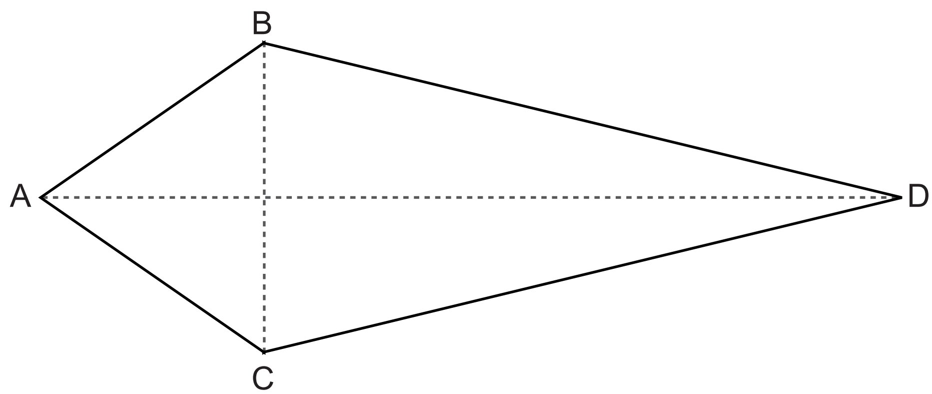






Actividad 1

Instrucciones: observe la figura y conteste lo que se le pide a continuación.



1. ¿Cuáles son los lados consecutivos?
   Ejemplo: AC son lados consecutivos

2. Determinar cuáles son los lados opuestos de la figura.

3. ¿Cuáles son los vértices?

4. Nombre las diagonales.

5. Indique cuál es el lado más largo de la figura.

6. ¿Cuál es el lado más corto?

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Clasificación de los cuadriláteros

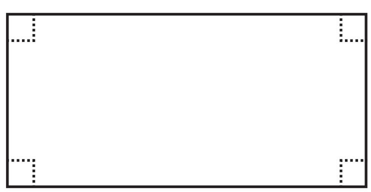
La forma más habitual de clasificar cuadriláteros es por el paralelismo de sus lados. Según este criterio los cuadriláteros pueden ser:

1. Paralelogramo

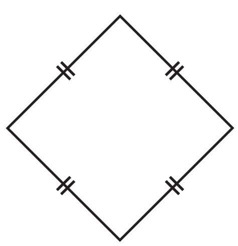
Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos dos a dos.

Propiedades:
- Los lados opuestos son iguales.
- Los ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suplementarios.
- Las diagonales se cortan en el punto medio.

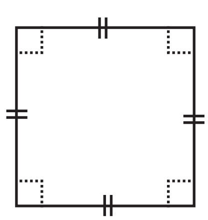
Un paralelogramo puede ser:
a. Rectángulo: tiene los ángulos rectos.



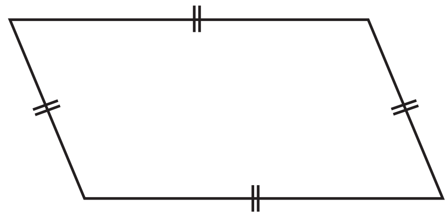
b. Rombo: tiene los lados iguales.



c. Cuadrado: un cuadrado tiene los lados iguales y, además, sus ángulos son rectos. El cuadrado tiene las diagonales iguales (por ser rectángulo) y perpendiculares (por ser rombo).



d. Romboide: tiene lados iguales dos a dos.



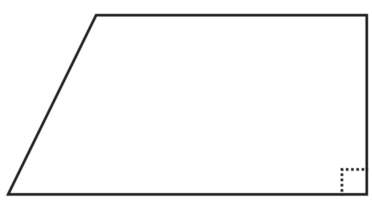
2. Trapecio

El trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos, y los otros dos no son paralelos.

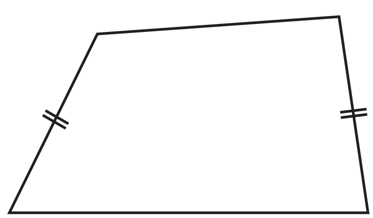
- Los lados paralelos se denominan base mayor y base menor.
- La distancia entre los lados paralelos se llama altura.

Se clasifican en:

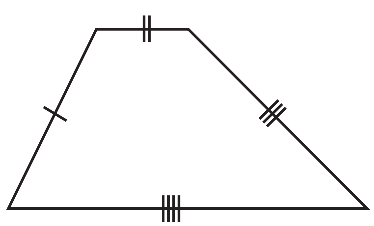
a. Trapecio rectángulo: tiene un ángulo recto.



b. Trapecio isósceles: tiene dos lados no paralelos iguales.

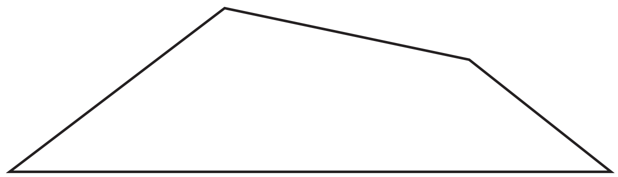


c. Trapecio escaleno: no tiene ningún lado igual ni ángulo recto.



3. Trapezoide

Se denomina trapezoide a un cuadrilátero que no tiene lados iguales ni paralelos. Por tanto, es un cuadrilátero sin más propiedades adicionales.

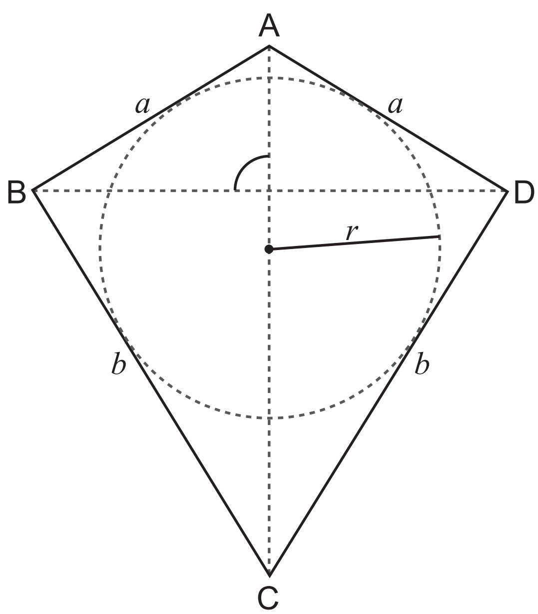


Trapezoide

Existe un tipo de trapezoide especialmente interesante, se llama cometa y es un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales.

Características:

• Las diagonales son perpendiculares.
• Un par de ángulos opuestos son iguales.



Trapezoide tipo cometa

Mueva los vértices hasta conseguir que el ángulo D sea mayor de 180º, en este caso suele llamarse deltoide al cuadrilátero que se forma.

Actividad 2

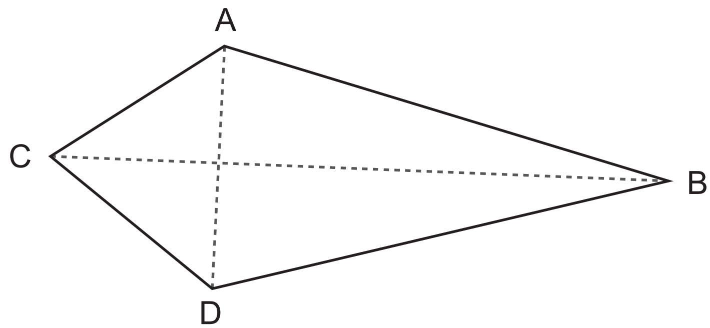
Instrucciones: construya un cuadrilátero siguiendo las indicaciones que se le presentan a continuación.

1. Utilizando una regla y un lápiz grafito, trace una línea en cualquier sentido, a estos vértices les llamaremos AB.
2. Trace las líneas para unir los vértices necesarios para construir un cuadrilátero: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.
3. Trace con una línea punteada las diagonales.
4. En la parte inferior deberá escribir qué tipo de cuadrilátero elaboró y cuáles son sus propiedades.

Demostración de propiedades de los cuadriláteros

Sean A, B, D y C cuatro puntos coplanarios. Si tres puntos cualesquiera de ellos no son colineales y los segmentos se intersecan solamente en sus extremos, entonces la unión de los cuatro segmentos se llama cuadrilátero.

Dado el cuadrilátero A, B, D y C, los elementos del cuadrilátero son:



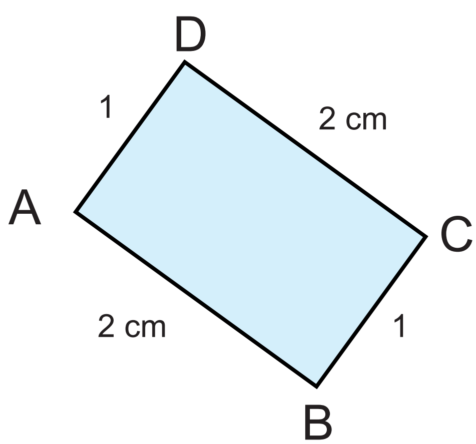
- Los puntos A, B, D y C son los vértices del cuadrilátero.
- Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CA}$ son los lados del cuadrilátero.
- Los ángulos $\angle ACD$, $\angle CDB$, $\angle DBA$ y $\angle BAC$ son los ángulos interiores del cuadrilátero.
- Los ángulos $\angle ACD$ y $\angle CDB$ son ángulos opuestos con $\angle DBA$ y $\angle BAC$, respectivamente, porque no tienen en común un lado del cuadrilátero. Los ángulos del cuadrilátero que no son opuestos se llaman ángulos adyacentes.
- Los lados $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ son lados opuestos con $\overline{BD}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, porque los lados no se intersecan. Los lados del cuadrilátero que no son opuestos se llaman lados adyacentes.
- El segmento determinado por dos vértices no adyacentes se llama diagonal del cuadrilátero. En un cuadrilátero hay solo dos diagonales, sean estas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

Aplicación del perímetro y área de cuadriláteros

Cálculo del perímetro y del área

A. El perímetro de un cuadrilátero

Es la longitud de la línea cerrada que lo bordea, es decir, la suma de las longitudes de sus cuatro lados.



El perímetro es igual a la sumatoria de sus lados.

$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

$p = 2\ cm + 1\ cm + 2\ cm + 1\ cm$

$p = 6\ cm$

B. Área de los cuadriláteros

A la medida de la extensión de la superficie de un cuadrilátero, es decir, de la porción del plano limitada por la línea cerrada que lo determina, se le llama área del cuadrilátero. Las unidades de superficie del sistema métrico decimal son el metro cuadrado (m^2), sus múltiplos y submúltiplos:

Tabla de medidas(unidades de superficie)

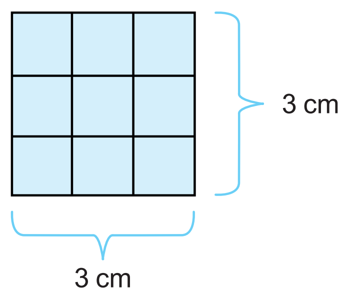
N°	Unidad	Representación
1	Decámetro cuadrado	dm^2
2	Hectómetro cuadrado	hm^2
3	Kilómetro cuadrado	km^2
4	Metro cuadrado	m^2
5	Centímetro cuadrado	cm^2
6	Milímetro cuadrado	mm^2

Las unidades que aparecen en el cuadro anterior son utilizadas según el tamaño del cuadrilátero que queramos medir, ya que algunos cuadriláteros tienen escalas más grandes que otros.

Para calcular el área de los distintos cuadriláteros nos apoyaremos en las siguientes fórmulas:

1. Paralelogramos

Cuadrados y rectángulos



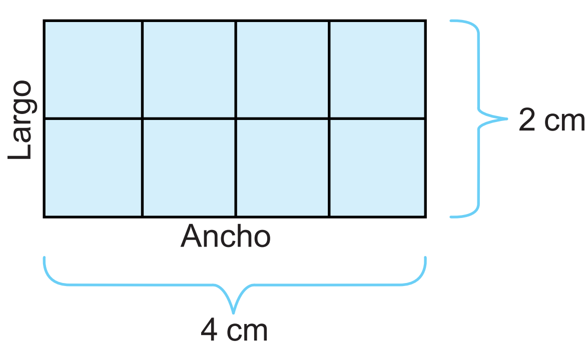
3 cm x 3 cm = 9 cm^2

Obtuvimos 9 cm^2, lo mismo que si multiplicamos lado por lado.

Si llamamos **a** al lado del cuadrado, podemos concluir que:

El área de un cuadrado es a x a = a^2

El área de un rectángulo se calcula de forma semejante, lo único que cambia es que las medidas de los lados son distintas. A lo largo lo denominaremos **a**, y lo ancho **b,** como se ve reflejado en la figura. Calculemos el área del siguiente rectángulo con centímetros cuadrados.

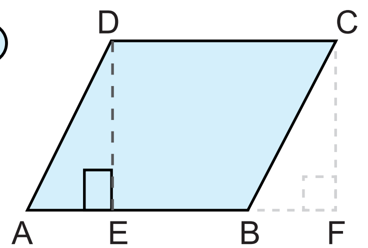


El área equivale a 8 cm^2. Matemáticamente se puede obtener multiplicando largo por ancho.
2 cm x 4 cm = 8 cm^2
En fórmula, el área de un rectángulo es a x b, donde **a** es el alto y **b** el ancho.

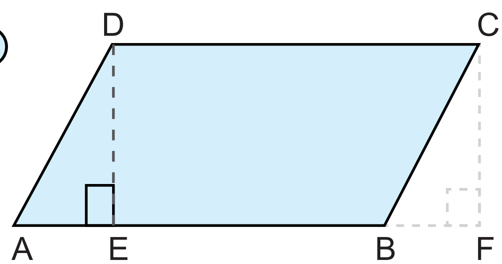
Rombos y romboides

Estos paralelogramos no tienen ángulos rectos, por lo que en ellos no se puede aplicar la misma fórmula de los cuadrados y rectángulos. Para calcular su área recurriremos a un elemento secundario: la altura, un segmento perpendicular (forma ángulos de 90°) que une un lado con su vértice opuesto.

1



2



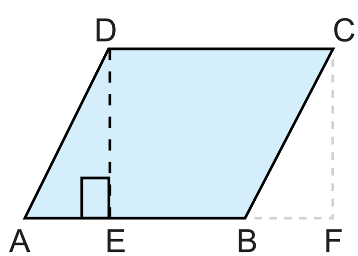
- En el rombo y romboide dibujados, $\overline{DE}$ corresponde a la altura.
- Trazaremos una paralela a la altura desde C y prolongaremos el lado AB hasta obtener F.
- Se formó un triángulo $\overline{BFC}$, congruente con $\overline{AED}$, y nos quedó el rectángulo $\overline{EFCD}$, que se verá reflejado en la figura 4.

¿Por qué necesitamos la altura para calcular el área?

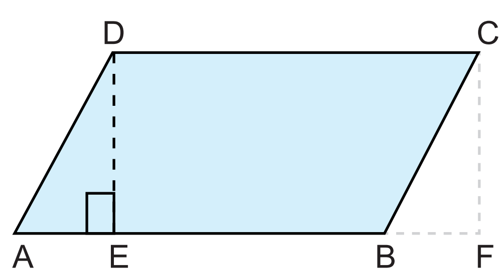
La nesesitamos porque, a diferencia de los cuadrados y rectángulos, en los rombos y romboides la altura sustituye al largo de la figura geométrica. En el siguiente gráfico trazaremos una paralela a la altura desde C y prolongaremos el lado $\overline{AB}$ hasta obtener F.

Se formó un triángulo $\overline{BFC}$, congruente con $\overline{AED}$, y nos quedó el rectángulo $\overline{EFCD}$.

3



4



El rectángulo formado tiene como largo el lado del rombo o romboide, y su ancho es la altura dibujada. Entonces, concluimos que:

El área del rombo o romboide = b x h, donde b es la base y h la altura.

En resumen, cualquier paralelogramo tiene una sola fórmula para calcular su área, ya que, en el cuadrado y en el rectángulo, un lado es la base y el otro la altura. Entonces:

Área de un paralelogramo = b x h, donde b es la base y h la altura.

Ejemplo 1:

Calculemos el área de un rombo que tiene 4.6 cm por lado y su altura es de 3 cm. Apliquemos la fórmula:

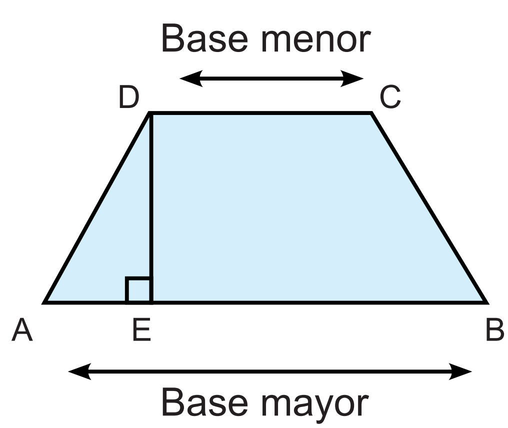
Área rombo = b x h

Área rombo = 4.6 cm x 3 cm

Área rombo = 13.8 cm^2

2. Trapecios

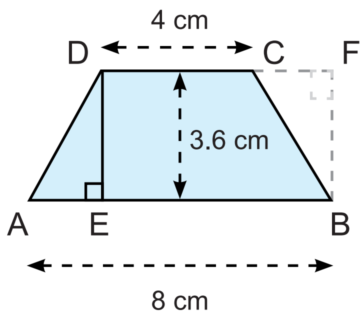
Sabemos que los trapecios son cuadriláteros que tienen un par de lados paralelos llamados bases. Sus lados, es decir, los no paralelos, no son perpendiculares a las bases, salvo en el trapecio rectángulo, que tiene perpendicular uno de ellos. Para el cálculo de su área también necesitamos considerar la altura.



Las líneas perpendiculares son dos o más líneas que se intersectan con un ángulo de 90 grados.

Para formar un rectángulo trazamos la paralela a $\overline{DE}$ desde B y prolongamos $\overline{DC}$ hasta formar F.

Nos queda el  $\overline{AED} \cong$  $\overline{CFB}$ y nuestro rectángulo es $\overline{EBFD}$.



Ejemplifiquemos:
base mayor = 8 cm
base menor = 4 cm
altura = 3.6 cm

El rectángulo tiene como largo la mitad de la suma de las bases del trapecio y su ancho es la altura que trazamos. El área del trapecio se puede calcular aplicando la fórmula:

$$\textit{Área del trapecio} = \frac{(\textit{base mayor} + \textit{base menor}) \times h}{2}$$

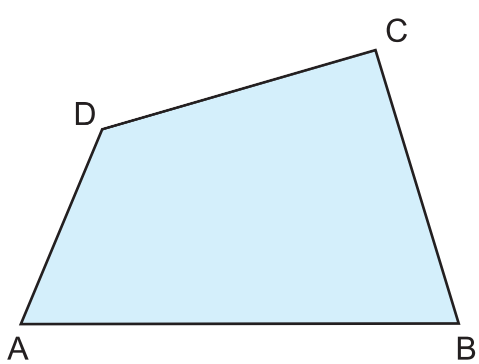
h = altura

Calculemos el área de nuestro trapecio:

$$\textit{Área del trapecio} = \frac{(8\ cm + 4\ cm) \times 3.6\ cm}{2} = \frac{(12\ cm) \times 3.6\ cm}{2} = 21.6\ cm^2$$

3. Trapezoides

Estos cuadriláteros no poseen lados paralelos.



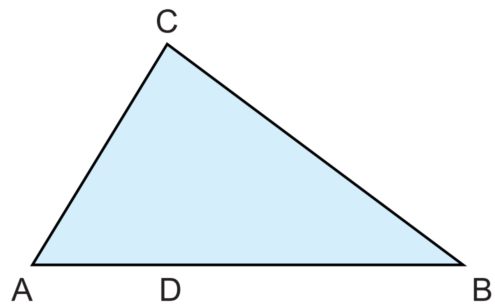
Para obtener el área de un trapezoide debemos aprender primero a calcular el área de un triángulo.

Triángulos

El área de un triángulo se calcula con la siguiente fórmula:

$$\textit{Área del triángulo} = \frac{\textit{base} \times \textit{altura}}{2}$$

Calculamos el área del siguiente triángulo:



AB = 5 cm
AC = 3.2 cm
BC = 4 cm
CD = 3 cm

Este ejercicio si usted observa bien tiene algunos datos que son irrelevantes para calcular el área de un triángulo, eso en ningún momento quiere decir que para otros cálculos no sean importantes.

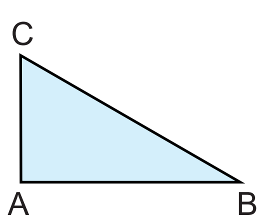
El ejercicio nos dice que el segmento $\overline{AB}$ es nuestra base y nuestra altura es denotada por el segmento punteado $\overline{CD}$, con estos datos podremos encontrar el área de nuestro triángulo.

$$\textit{Área del triángulo} = \frac{5\ cm \times 3\ cm}{2} = 7.5\ cm^2$$

Triángulo rectángulo

Si el triángulo es rectángulo, su área se puede calcular por medio de sus catetos, que son los lados perpendiculares, porque un cateto es la altura del otro. Entonces, la fórmula para su cálculo sería:

Solución:



AB = 4 cm
BC = 5 cm
AC = 3 cm

$$\textit{Área del triángulo} = \frac{4\ cm \times 3\ cm}{2} = 6\ cm^2$$

Ahora que ya sabemos cómo obtener el área de un triángulo, podremos calcular el área de un trapezoide.

Consideremos el siguiente trapezoide:

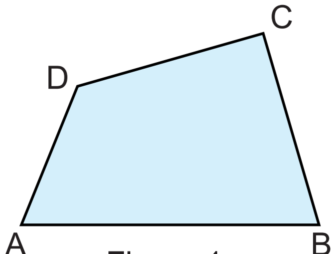


Figura 1

Partiremos dibujando un trazo entre dos vértices opuestos para así obtener dos triángulos.

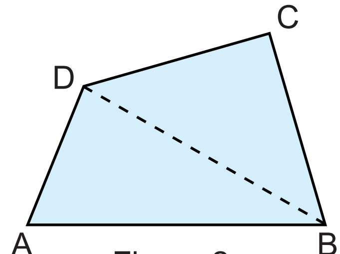


Figura 2

El área del trapezoide será la suma del área de ambos triángulos. Como sabemos que el área de un triángulo es la mitad del producto entre la base y la altura, dibujaremos ahora la altura de ambos triángulos:

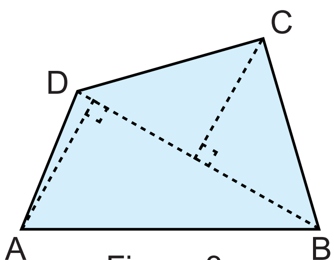


Figura 3

El área del trapezoide será entonces la siguiente:

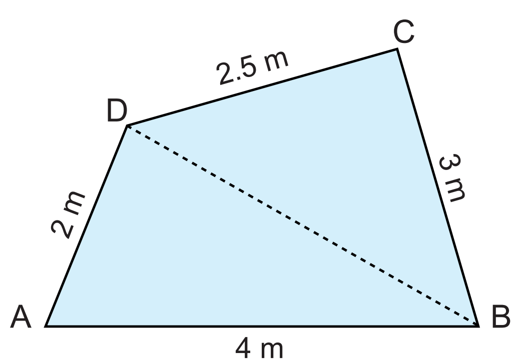
$$\frac{(BD \text{ x } h1)}{2} + \frac{(BD \text{ x } h2)}{2} = \frac{BD(h1 + h2)}{2}$$

Cuando desarrolle un ejercicio de trapezoide, usted deberá aplicar esta fórmula:

$$\mathbf{\frac{BD\,(h1 + h2)}{2}}$$

Ejemplo 2:

AB = 4 m
AD = 2 m
BC = 3 m
CD = 2.5 m
DB = AB
h1 = AD
h2 = CD



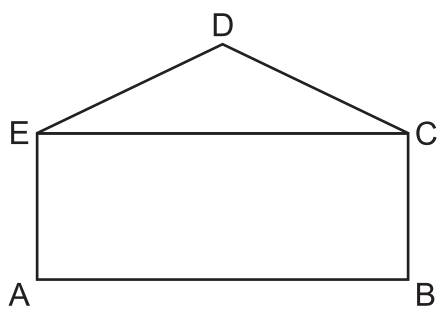
$$\text{Área del trapezoide} = \frac{4\text{ m }(2\text{ m} + 2.5\text{ m})}{2} = 9\text{ m}^2$$

Actividad 3

Instrucciones: tomando en cuenta todas las propiedades, fórmulas y clasificación de los cuadriláteros, resuelva los ejercicios que a continuación se le plantean.

Ejercicio 1

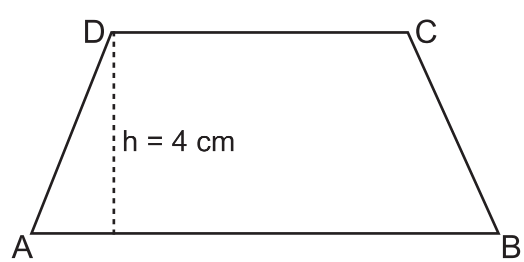
A continuación se le presenta una figura formada por un rectángulo y un triángulo, por lo tanto, el área de esta será la suma del área de ambas figuras. Si AB = 8 m; BC = 3 m y la altura (h) del triángulo es 2 m, ¿cuál es el área de nuestra figura en cm^2?



Ejercicio 2

Defina qué tipo de cuadrilátero es el que se le presenta.

Datos:
AB = 10 cm
BC = 3 cm
CD = 4 cm
DA = 3 cm



En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

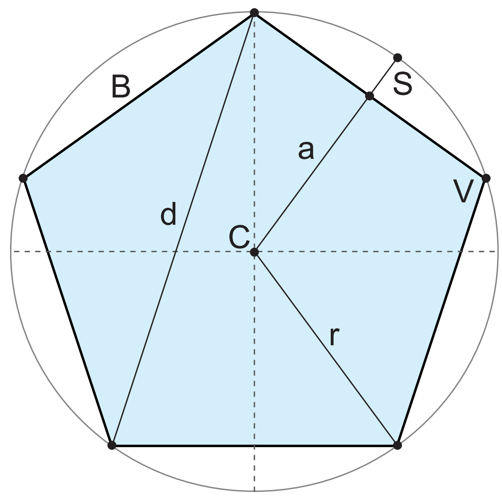
Polígonos

Definición del polígono:

Polígono es la superficie plana encerrada dentro de un contorno formado por segmentos rectos unidos en sus extremos.

Definición de polígono regular:

En geometría, se denomina polígono regular a un polígono cuyos lados y ángulos interiores son congruentes entre sí. Los polígonos regulares de tres y cuatro lados se llaman triángulo equilátero y cuadrado, respectivamente. Para polígonos de más lados, se añade el término regular (pentágono regular, hexágono regular, octágono regular, etc.). Solo algunos polígonos regulares pueden ser construidos con regla y compás.



Pentágono como polígono regular

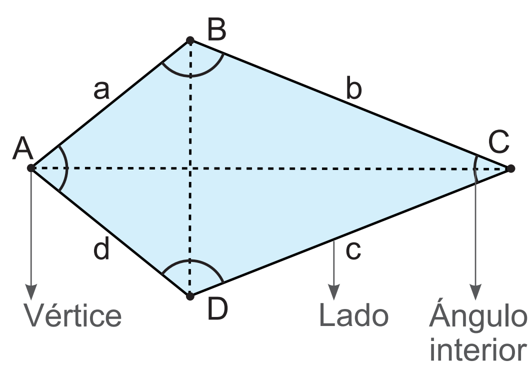
Identificación de los elementos del polígono

Elementos de un polígono:

Lados: son los segmentos que lo limitan.

Vértices: son los puntos donde concurren dos lados.

Ángulos interiores de un polígono: son los determinados por dos lados consecutivos.



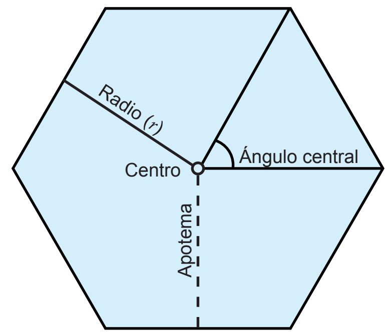
Diagonales: son los segmentos que determinan dos vértices no consecutivos.

Elementos de polígono regular:

1. **Centro**: punto interior que equidista de cada vértice.
2. **Radio:** es el segmento que va del centro a cada vértice.
3. **Apotema:** distancia del centro al punto medio de un lado.
4. **Ángulo central:** es el formado por dos radios consecutivos.

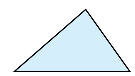
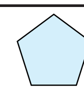
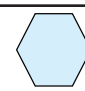
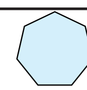
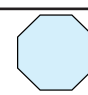
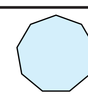
Si **n** es el número de lados de un polígono:

Ángulo central = 360°
Ángulo interior = (n – 2)180°: n
Ángulo exterior = ángulo central



Elementos de un polígono

Clasificación de los polígonos regulares según su número de lados:

Nombre	Número de lados	Suma de ángulos interiores	Número de triángulos	Figura
Triángulo	Tres lados	1 x 180° = 180°	1	
Cuadrilátero	Cuatro lados	2 x 180° = 360°	2	
Pentágono	Cinco lados	3 x 180° = 540°	3	
Hexágono	Seis lados	4 x 180° = 720°	4	
Heptágono	Siete lados	5 x 180° = 900°	5	
Octágono	Ocho lados	6 x 180° = 1,080°	6	
Eneágono	Nueve lados	7 x 180° = 1,260°	7	

Formulación de propiedades de los polígonos regulares

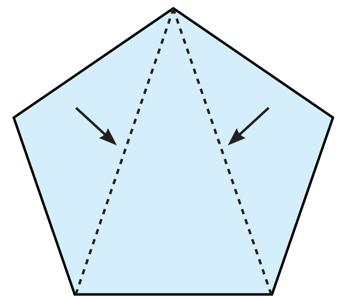
Primera propiedad

Numéricamente: lados, vértices, ángulos interiores, ángulos exteriores y ángulos centrales son iguales.

Segunda propiedad

A partir de un vértice de un polígono se pueden trazar (n - 3) diagonales.

Ejemplo 3:

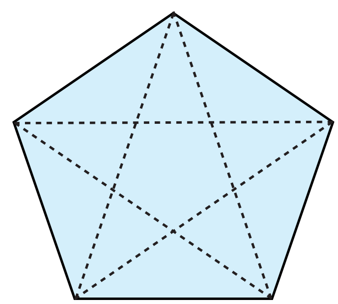


$N_D = (n - 3) = (5 - 3) = 2$ diagonales

n = número de lados del polígono

Tercera propiedad

El número total de diagonales que se puede trazar en un polígono.



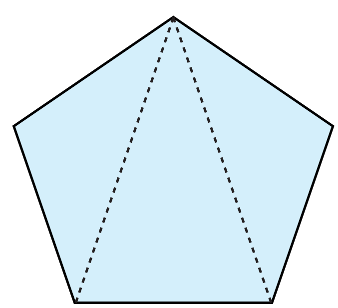
$$N_D = \frac{n(n - 3)}{2}$$

$$N_D = \frac{5(5 - 3)}{2} = 5 \text{ diagonales}$$

Cuarta propiedad

Al trazar diagonales desde un mismo vértice se obtiene (n - 2) triángulos.

Ejemplo 4:



$Ns = (n - 2)$

$Ns = (n - 2) = 5 - 2 = 3$ triángulos

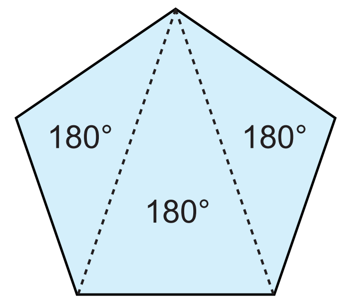
Quinta propiedad

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono.

$S\angle i = 180°(n - 2)$
Donde (n – 2) es número de triángulos

Respetando la fórmula:
$S\angle i = 180° (5 - 2) = 540°$

Otra solución
$S\angle i = 180°$ x número de triángulos $= 180°(3) = 540°$



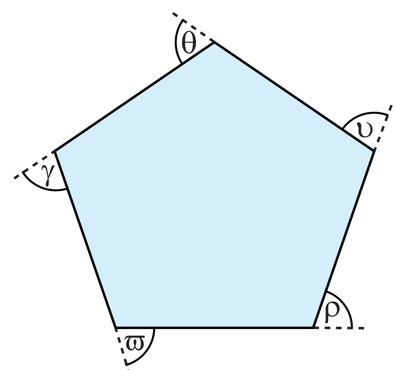
Sexta propiedad

La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono es 360º.

$S\angle e = 360°$

Ejemplo 5:

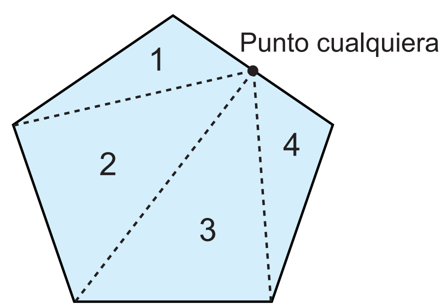
$\theta + \gamma + \upsilon + \rho + \varpi = 360°$



Séptima propiedad

Al unir un punto cualquiera de un lado, con los vértices opuestos se obtiene (n - 1) triángulos.

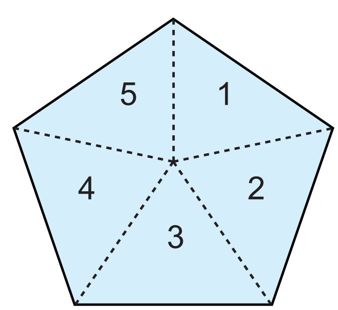
$Ns = (n - 1) = 5 - 1 = 4$ triángulos



Octava propiedad

Al unir un punto central con los vértices opuestos, se obtiene (n - 1) triángulos.

$Ns = n = 5 = 5$ triángulos

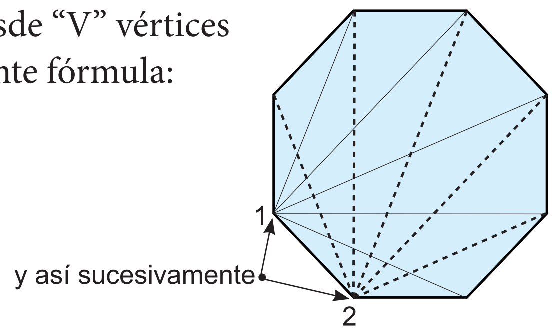


Novena propiedad

El número de diagonales trazadas desde "V" vértices consecutivos se obtiene con la siguiente fórmula:

$$N_D = nV - \frac{(V + 1)\,(V + 2)}{2} = 4$$

$$N_D = 8 - \frac{(1 + 1)\,(2 + 2)}{2} = 4$$



Propiedades angulares de los polígonos regulares

Primera propiedad

Medida de un ángulo interior de un polígono regular o polígono equiángulo.

$$m\angle i = \frac{180°\,(n - 2)}{2}$$

Segunda propiedad

Medida de un ángulo exterior de un polígono regular o polígono equiángulo.

$$m\angle e = \frac{360°}{2}$$

Tercera propiedad

Medida de un ángulo central de un polígono regular.

$$m\angle c = \frac{360°}{n}$$

Cuarta propiedad

Suma de las medidas de los ángulos centrales.

$$S\angle c = 360°$$

Determinación de la suma de los ángulos internos de un polígono regular

Para poder calcular la suma interna de ángulos de un polígono regular, desarrollaremos dos ejercicios que permitirán al estudiante identificar cuál es la fórmula que necesita para encontrar el resultado correcto.

Para resolver los ejercicios tendremos presente esta fórmula:

$n = 180° (n - 2)$

$\sum mi$ = sumatoria de medidas internas
$\sum m\angle i$ = sumatoria de medidas ángulos interiores

Ejemplo 6:

Calcular la suma de los ángulos internos de un hexágono.

Solución:

Como podemos observar la figura es un hexágono, que tiene 6 vértices, por lo tanto tiene la misma cantidad de ángulos.

$\sum mi = 180° (n - 2)$

Encontrando $n = 6$

Ya que n = al número de ángulos que tiene el hexágono decimos:

$\sum m\angle i = 180° (6 - 2)$

$\sum m\angle i = 180° (4) = 720°$

Ejemplo 7:

Calcular la suma de ángulos internos de un eneágono. En este ejercicio comprobaremos lo que en la tabla de clasificación ya tenemos definido, pero lo desarrollamos conforme a las fórmulas antes vistas.

Solución:

El eneágono es un polígono que tiene 9 lados, por tanto, definimos que n = 9

Sustituimos n

$$\text{Suma} \angle i = (9 - 2)180°$$
$$\text{Suma} \angle i = (7)180°$$
$$\text{Suma} \angle i = 1{,}260°$$

De esta forma comprobamos que los datos que están en la tabla son reales, verificando con la fórmula que los resultados son los correctos.

Actividad 4

Instrucciones: aplique las propiedades de los polígonos para resolver los ejercicios que se le presentan a continuación.

1. ¿Cuántas diagonales tiene un octágono?

2. Si un polígono tiene 14 lados, ¿a qué es igual la suma de sus ángulos?

3. Hallar la suma de los ángulos interiores más la suma de los ángulos exteriores, que es igual a 360°, de un polígono de 30 lados.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Calcular el número de lados de un polígono regular, dada la medida de uno de sus lados

Los lados de un polígono se pueden calcular de diferentes formas: teniendo la medida de uno de sus ángulos internos o cuando se nos da el número de diagonales; en ambas situaciones despejamos para n, que en este caso representaría la incógnita o los lados que tiene el polígono. Teniendo en consideración las fórmulas que se aplican a las propiedades, hay varias formas de calcular los lados de un polígono.

Ejemplo 8:

¿Cuántos lados tiene un polígono regular si su ángulo interior mide 60°?
Aquí observamos un ejercicio que ya tiene definido sus ángulos interiores.

Solución:

Suma $\angle$ i = 60°

$m\angle i = \dfrac{180°(n - 2)}{n}$ Sustituimos en la fórmula original.

$60° = \dfrac{180°(n - 2)}{n}$ Despejamos para n.

$60°\,n = 180°n - 360°$
$360° = 180°n - 60°n$

$360 = 120°n$

$\dfrac{360}{120} = n$

$\boxed{3 = n}$

Ejemplo 9:

Si un ángulo interno de un polígono mide 140°, ¿cuántos lados tiene el polígono?

Datos:
$m\angle t = 140°$

Solución:

$$m\angle t = \frac{180°(n - 2)}{n}$$

$$140° = \frac{180°(n - 2)}{n}$$

$140°n = 180°n - 360°$
$360° = 180°n - 140°n$
$360° = 40°n$

$$\frac{360}{40} = n$$

$$\boxed{9 = n}$$

Ejemplo 10:

Calcular el número de lados de un polígono de 77 diagonales.

Solución:

$n = \#$ lados

$$\frac{n(n - 3)}{2} = d$$

$$\frac{n(n - 3)}{2} = 77$$ Sustituimos en la fórmula original.

$n(n - 3) = (77)(2)$
$n^2 - 3n = 154$
$n^2 - 3n - 154 = 0$ Igualamos a cero para poder factorizar.
$(n - 14)(n + 11) = 0$

Seleccionamos el resultado con mayor valor por lo que n = 14. El polígono tiene 14 lados, a continuación la comprobacion:

Despejamos:

$(n - 14) = 0$	$(n + 11) = 0$
$n - 14 = 0$	$n + 11 = 0$
$n = 14$	$n = -11$

$$d = \frac{14(14 - 3)}{2} = 77$$

$$\boxed{d = 77}$$

Igualamos a cero la ecuación para poder factorizar:

$n^2 - 3n - 154 = 0$

$(n - 14)(n + 11) = 0$

Despejando

$(n - 14) = 0$

$n - 14 = 0$

$n = 14$

Despejando

$(n + 11) = 0$

$n + 11 = 0$

$n = -11$

Seleccionamos el resultado mayor:

Por lo tanto, $n = 14$

El polígono tiene 14 lados.

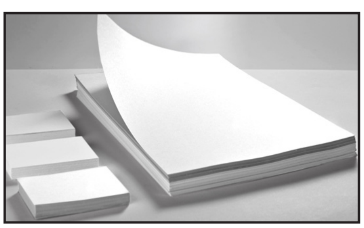
Comprobación:

$$d = \frac{14(14 - 3)}{2} = 77$$

Construcción de polígonos

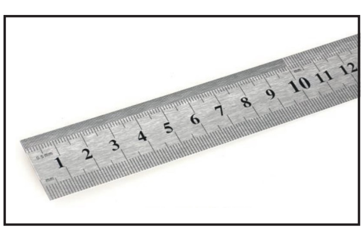
Construcción de polígonos regulares inscritos en un círculo

Primero lea la lista de materiales que necesitará para poder desarrollar este tema:



Papel bond

Lápiz carbón



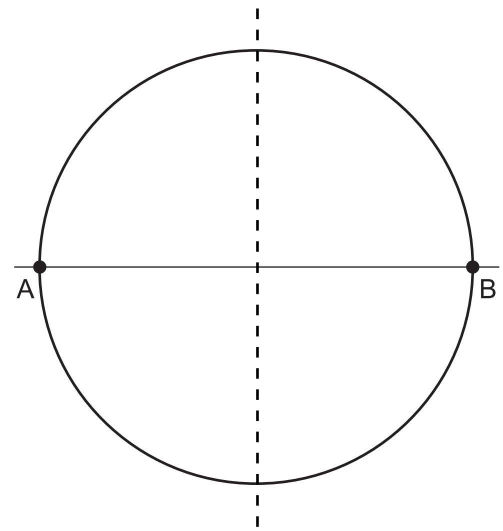
Regla

Lápiz tinta o marcador fino

Compás

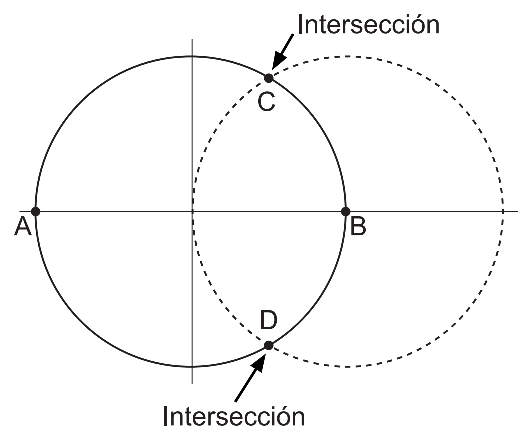
Para trazar un polígono regular en este caso haremos un hexágono, siguiendo estos pasos:

Empiece con un círculo: dibuje un círculo con el compás, con un radio conocido, y luego desde el centro trace dos líneas, una vertical y otra horizontal, para encontrar los puntos A y B.



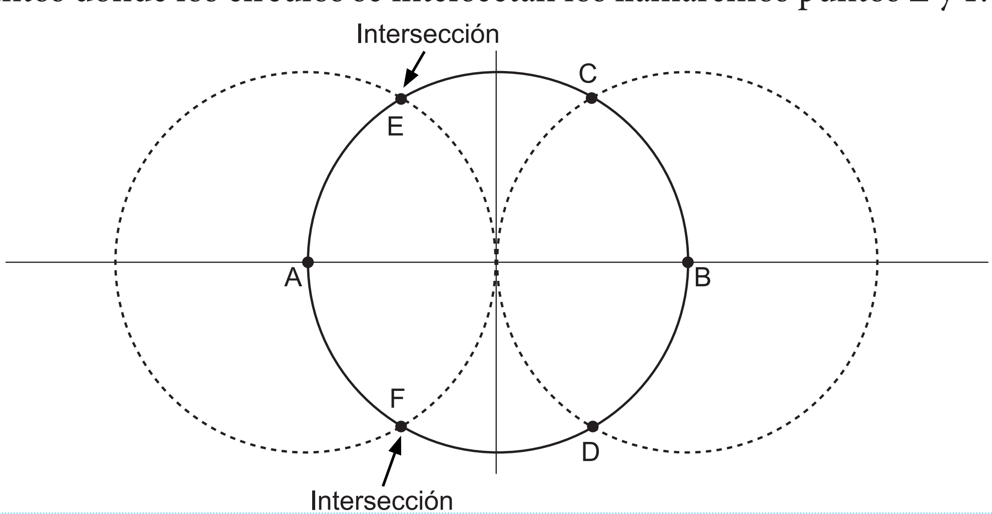
Calcule la longitud de uno de los lados: con el mismo radio que trazó el primer círculo, coloque el compás en el punto B y trace otra circunferencia.

A los puntos donde los círculos se intersectan los llamaremos puntos C y D.



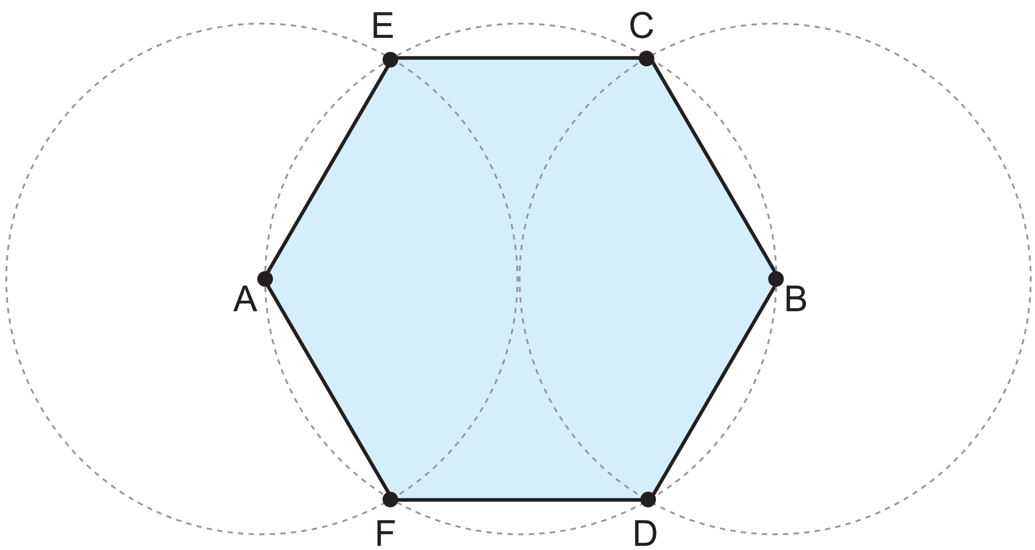
Calcule la longitud de uno de los lados: con el mismo radio que trazó el primer y segundo círculo, coloque el compás en el punto A y trace una circunferencia.

A los puntos donde los círculos se intersectan los llamaremos puntos E y F.



Puntos de intersección: ahora que tiene definidos todos los puntos del hexágono, con la regla proceda a unir los puntos consecutivos de la siguiente manera: $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{CB}$, y así sucesivamente.

Así se vería ya formado el hexágono:



Actividad 5

Instrucciones: desarrolle en su cuaderno los ejercicios que se le piden a continuación.

1. Haga un hexágono paso a paso. El radio deberá ser de 0.06 metros (pasar a centímetros).
2. Cuando ya tenga definidos los puntos, marque su hexágono con lápiz tinta negra, preferiblemente un marcador fino.
3. Preséntele su trabajo al tutor en hoja aparte, preferiblemente en cartulina.
    3.1. Esta hoja o cartulina deberá llevar su nombre completo, instituto donde estudia, el lugar y la fecha de entrega.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Perímetro y área de polígonos regulares

El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados.

El **área** de una figura corresponde a la medida de la superficie que dicha figura ocupa.

El cálculo del área se realiza de forma indirecta, es decir, hay que recurrir a diferentes fórmulas matemáticas para conocerla, no podemos medirla como hacemos con las longitudes (con una regla podemos "leer" directamente la longitud de un segmento).

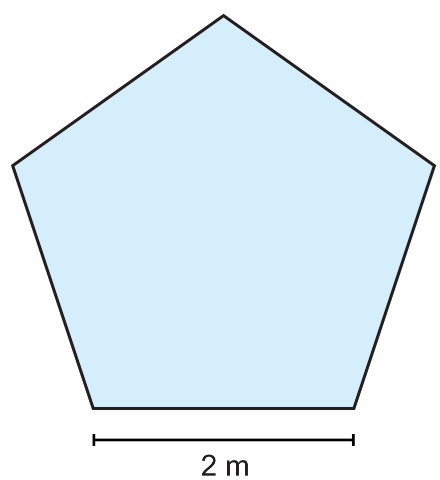
Unidades de superficie

Para medir superficies se toma como unidad la superficie que corresponde a un cuadrado de un metro de lado, a esta unidad se le denomina metro cuadrado y se simboliza m^2.

En la tabla de medidas (unidades de superficie) de la página 167 podremos encontrar todas las unidades con las que pueden ser medidas las superficies de los polígonos.

Ejemplo de cómo calcular perímetros:

Este es el caso de un pentágono regular cuyos lados miden 2 metros cada uno.



Solución:

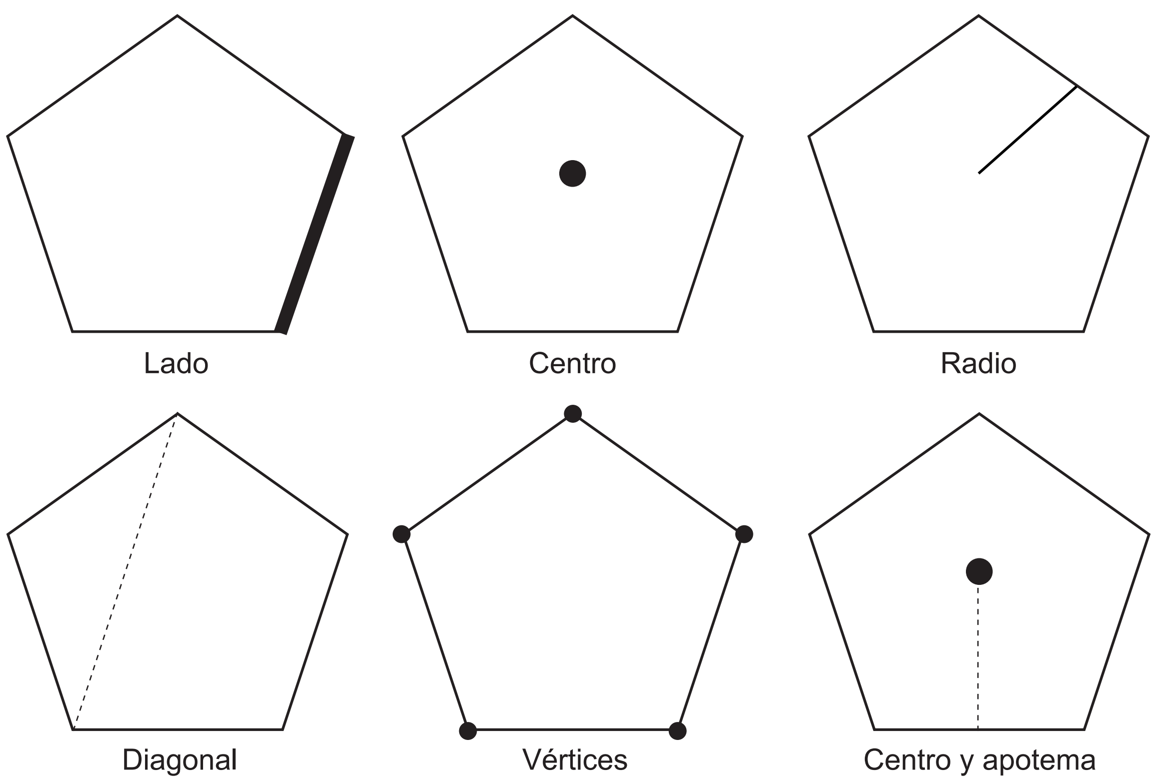
Perímetro = 5 m + 5 m + 5 m + 5 m + 5 m
Perímetro = 25 m^2

Áreas de polígonos regulares

Para calcular el área de un polígono regular cualquiera, este se divide en triángulos, uniendo el centro con cada uno de los vértices. La altura de cada uno de los triángulos coincide con la apotema del polígono. Se calcula el área de uno de estos triángulos y se multiplica por el número de triángulos que se han formado.

Antes de hacer las operaciones definiremos unos términos que son muy importantes para el cálculo de áreas y perímetros, estos son los elementos de un polígono:

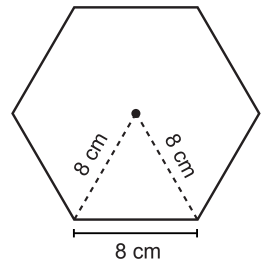
- **Lado:** segmento de la línea poligonal cerrada.
- **Vértice:** punto común de dos lados consecutivos.
- **Centro:** punto que equidista de todos los vértices y los lados de un polígono.
- **Apotema:** distancia perpendicular entre el centro y uno de los lados.
- **Radio:** distancia entre el centro y uno de los vértices.
- **Diagonal:** segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.



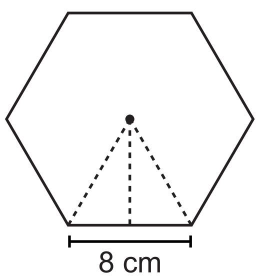
¿Cómo calcular la apotema?

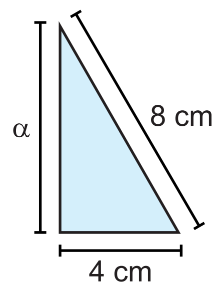
Para entender cómo obtenemos la apotema de un polígono analicemos el siguiente ejemplo:

Partiremos conociendo las distancias del centro del polígono a dos de sus vértices continuos, que, como es un polígono regular, miden lo mismo en sus tres lados, ya que se forma un triángulo equilátero.



Ahora separamos por la mitad el triángulo equilátero, que quedará de la siguiente forma:





Ya encontrados 2 lados de nuestro triángulo, podemos hallar la apotema por medio del teorema de Pitágoras, que es igual a:

$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Cateto}^2 + \text{Cateto}^2$$

Desarrollamos:

$h^2 = 8$

$c^2 = 4$

$c^2 = ¿?$

Sustituimos

$8^2 = 4^2 + c^2$

Despejamos para c

$64 = 16 + c^2$

$64 - 16 = c^2$

$48 = c^2$

Sustituimos c^2 por α^2

$48 = \alpha^2$

$\sqrt{48} = \alpha$

$6.93 = \alpha$

Ahora ya podemos revisar las fórmulas necesarias para calcular áreas de polígonos regulares.

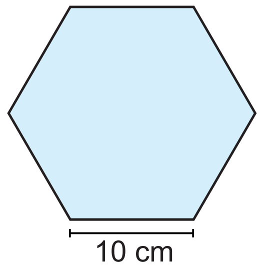
Área de un polígono

El área de un polígono es la medida de la región o superficie encerrada por un polígono y se calcula con la siguiente fórmula:

$$A = \frac{P\,(\alpha)}{2}$$

Ejemplo 11:

Calcular el área de un heptágono sabiendo que el lado mide 10 cm y la apotema 8.30 cm.



Calculemos el perímetro:
P = 10 cm + 10 cm + 10 cm + 10 cm + 10cm + 10 cm + 10 cm
P = 70 cm

También podemos decir que el perímetro es = tamaño del lado x cantidad de vértices.

P = 10 cm (7 cm) = 70 cm

El área es:

$$A = \frac{70 \text{ cm } (8.30 \text{ cm})}{2}$$

A = 290 cm²

Ejemplo 12:

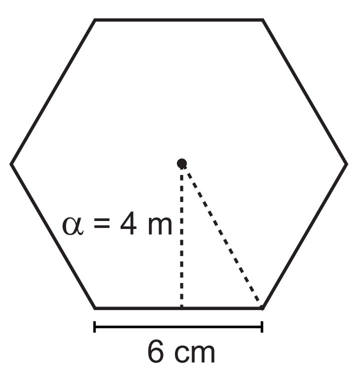
Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular de 6 cm de lado.

Calculemos el perímetro:
P = 6 m (5 m) = 30 m

El área es:

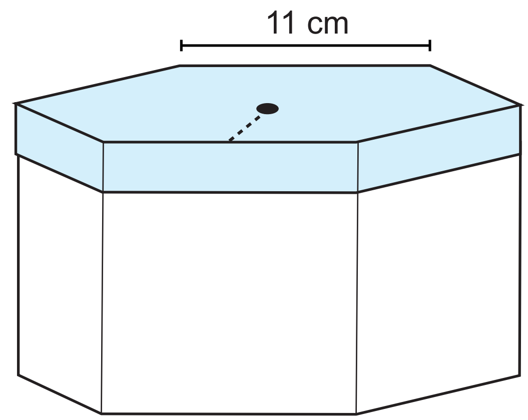
$$A = \frac{30 \text{ m } (4 \text{ m})}{2}$$

A = 60 m²



Ejemplo 13:

Hallar la apotema de la tapadera de una bombonera con forma de hexágono, cuya área es de 314.86 cm^2 y su lado es de 11 cm.



Calculemos el perímetro:
P = 11 cm (6 cm) = 66 cm

El área es:

$$A = \frac{66 \text{ cm } (\alpha)}{2}$$

$$314.86 \text{ cm}^2 = \frac{66 \text{ cm } (\alpha)}{2}$$

Despejando para α

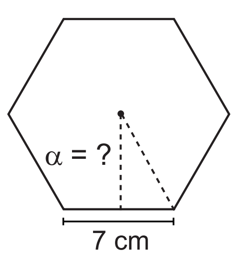
$$\frac{314.86 \text{ cm}^2 (2)}{66 \text{ cm}} = \alpha$$

$\boxed{\alpha = 9.54 \text{ cm}}$

Actividad 6

Instrucciones: desarrolle los ejercicios que se le presentan a continuación.

1. Calcular el área y el perímetro de un octágono regular de 7 m de lado, en este ejercicio tiene que encontrar la apotema.



2. Encontrar la apotema de un pentágono cuya área es de 226 cm^2, con un perímetro de 52 cm.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Capacidad de reflexión y análisis en la geometría

La geometría no solo es una de las tantas formas matemáticas que existen, pues influye en diferentes ramas del saber de manera directa. Para el caso, disciplinas como la arquitectura y la ingeniería emplean muchos conocimientos de geometría, pues al momento de hacer un construcción los arquitectos o ingenieros visualizan figuras geométricas que les permiten dar forma a su obra.

Analicemos casos donde las figuras geométricas son muy importantes para levantar las construcciones que los seres humanos hacemos.

Figura geométrica
Rectángulos

Los rectángulos son la base para construir edificios. Sobre estas bases trabajan los profesionales de la arquitectura y la ingeniería, agregando los detalles para darle forma a su obra.

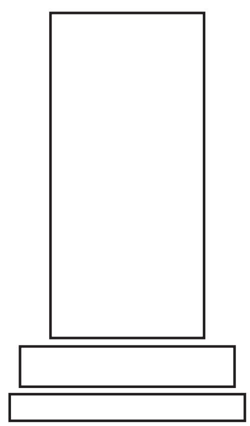
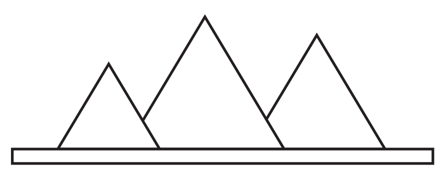
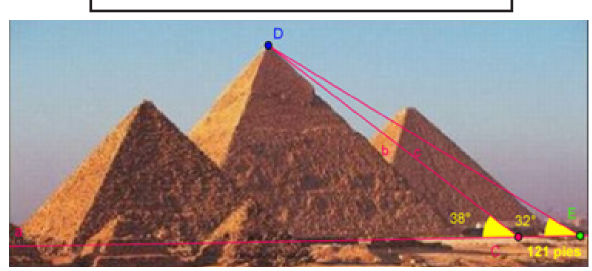


Figura geométrica
Triángulos



Como podemos observar, algunas edificaciones de la antigüedad, como las pirámides, poseían medidas precisas y la base para su construcción fueron figuras geométricas como el triángulo.



También se usan los ángulos como puntos de partida para levantar edificaciones.

Analicemos ambientes más cotidianos y que posiblemente nos permitan observar más fácilmente la amplitud de la geometría.

En la imagen observamos algo que a muchos apasiona, el fútbol, que se juega con figuras geométricas, como el balón que es redondo y asemeja un círculo y el arco o portería que tiene una forma rectangular.

En muchos sentidos la geometría es parte de nuestra vida cotidiana, pues instrumentos como las ollas en que se preparan los alimentos están vinculados con conceptos y términos matemáticos tales como la profundidad de un utensilio, su capacidad o volumen, tamaño, peso, presión, etc.

Además la geometría ha sido desde los inicios de la humanidad un mecanismo utilizado para encontrar soluciones a los problemas más comunes de quienes la han aplicado en su vida, pues, entre otros usos, facilita la medición de estructuras sólidas reales, tanto tridimensionales como superficies planas, y es bastante útil para la realización de complejas operaciones matemáticas.

La geometría es una parte importante de la cultura del hombre, no es fácil encontrar contextos en los que esta diciplina no aparezca de forma directa o indirecta. Acciones tan variadas como el deporte, la jardinería, la ingeniería o la arquitectura, por citar algunas actividades, se sirven de la utilización, consciente o no, de procedimientos geométricos.

Actividad 7

Instrucciones: investigue en una biblioteca, revistas, diarios o Internet cuáles son los campos de la vida cotidiana en que tiene influencia la geometría. Cite un ejemplo por cada campo encontrado.

Campo	Ejemplo
La albañilería	Construye columnas, que tienen forma cilíndrica o forma de cuadrilátero, y trabaja con ángulos.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor

Glosario

Bidimensional: se dice de lo que tiene dos dimensiones, por ejemplo, ancho y largo. Los planos son bidimensionales.

Longitud: es la magnitud física que determina la distancia, es decir, la cantidad de espacio existente entre dos puntos.

Rectas paralelas: se denominan rectas paralelas a las líneas que mantienen una equidistancia entre sí, y que, aunque prolonguemos su trayectoria hasta el infinito, nunca, en ningún punto sus trazos pueden bifurcarse, tocarse, encontrarse.

Trazar: dibujar una cosa mediante rayas o líneas.

Tridimensional: se utiliza para calificar a aquello que tiene tres dimensiones: largo, ancho y alto.

Actividad metacognitiva

Instrucciones: con base en lo aprendido en esta unidad, conteste lo que se le pregunta a continuación.

1. ¿Qué estrategias podemos utilizar para identificar los elementos de un cuadrilátero?

____

____

____

2. ¿Para qué es necesario calcular las áreas de los cuadriláteros?

____

____

____

3. ¿Qué estrategias podemos utilizar para diferenciar un polígono regular de un polígono irregular?

____

____

____

4. ¿Considera usted que adquirió nuevos aprendizajes al estudiar los temas de esta unidad? ¿Puede mencionar cuáles?

____

____

____

5. ¿Cuáles son los contenidos de la presente unidad que le presentaron mayor dificultad?¿Por qué?

____

____

____

Autoevaluación

Instrucciones generales: a continuación se le presentan una serie de ejercicios de evaluación de los aprendizajes de esta unidad. Su trabajo consiste en desarrollarlos con la mayor honestidad posible, sin copiar del libro. Recuerde que esta actividad le dará información sobre su progreso educativo. Al terminar, confronte sus respuestas con las soluciones que se encuentran en la guia didáctica de este libro y vuelva a estudiar aquellas preguntas o temas cuyas respuestas no acertó.

I Tipo selección única

Instrucciones: a continuación encontrará proposiciones de selección única. Léalas y encierre con un círculo la letra que considere correcta en cada proposición.

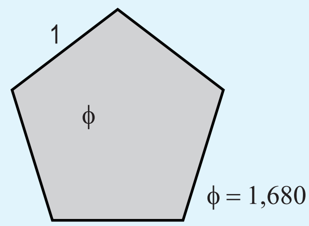
1. ¿Cuál de las siguientes opciones son los puntos en los que se interceptan las rectas que forman un cuadrilátero?
   a. Ángulo
   b. Diagonal
   c. Lado
   d. Vértice

2. ¿Cuál de las siguientes opciones es el cuadrilátero que tiene dos lados que son paralelos y otros dos lados que no son paralelos?
   a. Cuadrado
   b. Paralelogramo
   c. Rombo
   d. Trapecio

3. ¿Cuál de las siguientes opciones es el punto interior que equidista de todos los vértices y lados de un polígono?
   a. Ángulo central
   b. Apotema
   c. Centro
   d. Radio

4. ¿Cuántos grados suman los ángulos interiores de un triangulo?
   a. 180°
   b. 360°
   c. 540°
   d. 720°

5. ¿Qué elemento del polígono se representa en la imagen?
   a. Apotema
   b. Diagonal
   c. Vértice
   d. Radio



6. ¿Cuál es el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 30 y 16 cm y cada lado mide 17 cm?
   a. 38 cm
   b. 144.5 cm
   c. 240 cm^2
   d. 248.5 cm^2

7. ¿Cuál de las siguientes opciones es la ecuación que necesitamos para calcular el área de un paralelogramo?
   a. bxh
   b. $\frac{bxh}{2}$
   c. bxh^2
   d. $\sqrt{bxh}$

8. Observe la siguiente imagen y conteste: ¿cuál es el nombre de la figura geométrica que se utilizó como patrón para la construcción del edificio?
   a. Pentágono
   b. Hexano
   c. Heptágono
   d. Octágono

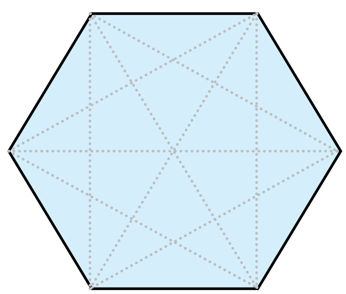
9. ¿Qué son los lados opuestos de un cuadrilátero?
   a. Son los que tienen un vértice en común
   b. Son iguales y no tienen un vértice en común
   c. Son iguales y no pertenecen a un mismo lado
   d. Son los que cortan un punto medio

10. ¿Cuál es el área de un triángulo que tiene una base de 10 cm y altura de 12 cm?
    a. 48 cm^2
    b. 60 cm^2
    c. 72 cm^2
    d. 120 cm^2

II Parte práctica

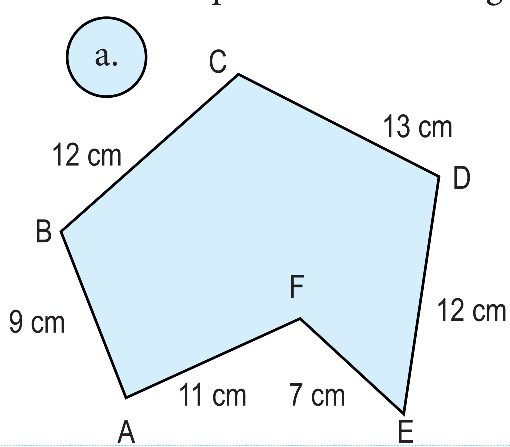
Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada en lo que se le pide.

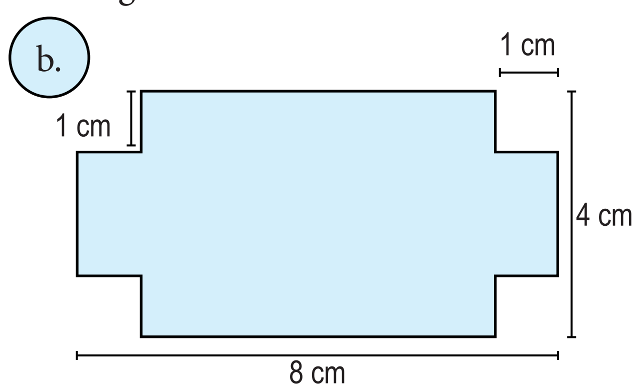
1. Calcule el número de diagonales de la siguiente figura geométrica:



2. Si el ángulo interior de un polígono regular mide 156°, ¿cuántos lados tiene el polígono?

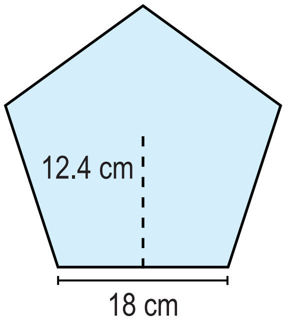
3. Calcule el perímetro de las siguientes figuras:



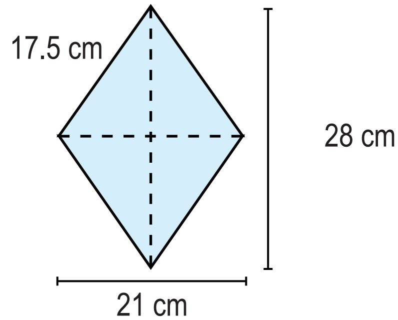


4. Calcule el área de las siguientes figuras:

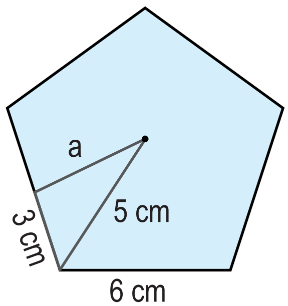
a.



b.



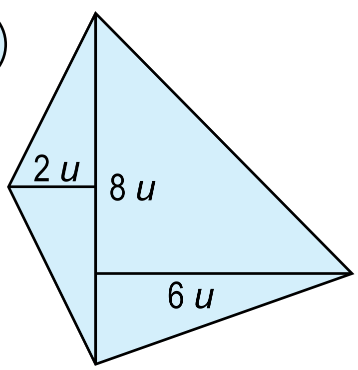
5. Calcule la apotema de la siguiente figura geométrica:



6. Si los ángulos de un cuadrilátero miden A = 80°, B =110° y C =70°, ¿cuánto medirá el ángulo D?

7. Calcule el área de los siguientes polígonos:

a.



b.