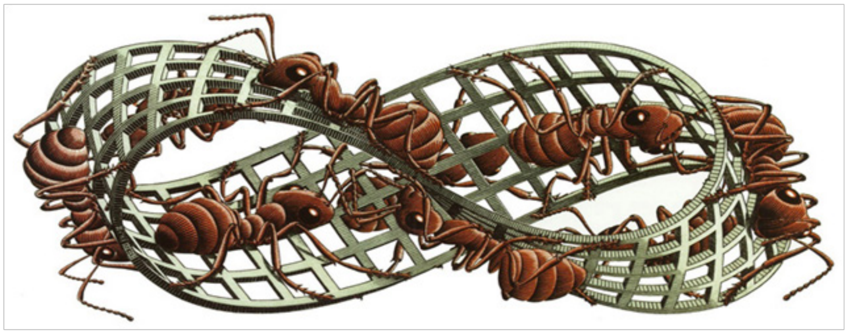
Introducción



Símbolo de infinito... No es grande... No es enorme...
No es tremendamente gigante... ...es...

¡ INTERMINABLE !

La presente unidad está dedicada al estudio de los límites partiendo del concepto de los mismos y la importancia de la aplicación para resolver problemas de matemática y de cálculo.

Desarrollaremos una serie de ejercicios prácticos orientados al cálculo de los límites a través de la implementación del método gráfico, que nos permita construir la gráfica y analizar la existencia de un límite.

Utilizaremos el método analítico para calcular, utilizar las propiedades, estrategias y evaluación de límites basados en la técnica de cancelación y racionalización.

Determinaremos las propiedades de la continuidad y el punto medio de un intervalo aplicado a límites laterales y unilaterales. También se desarrollarán una serie de ejercicios prácticos que nos permitirán comprender y aplicar el teorema del valor intermedio para calcular límites.

Finalizaremos esta unidad calculando límites infinitos aplicando sus propiedades, encontrando y dibujando las asíntotas verticales de una gráfica hasta valorar la importancia de los límites infinitos para resolver problemas de la ciencia y tecnología.

¿Qué vamos a aprender?

Competencias	Objetivos	Contenido
1. Calcular límites y analizar en una gráfica el límite de una función.	1. Estimar el límite utilizando el método gráfico.	1. Definición de límite
		2. Cálculo de límites por medio del método gráfico
		3. Construcción de gráficas de funciones para calcular límites
		4. Análisis de la existencia de un límite
	2. Calcular límites en forma analítica.	5. Cálculo analítico de límites
		6. Evaluación de límites utilizando las propiedades de los límites
		7. Desarrollo y utilización de estrategias para el cálculo de los límites
		8. Evaluación de límites utilizando la técnica de racionalización

Competencias	Objetivos	Contenido
2. Determinar la continuidad y el punto medio de un intervalo.	3. Determinar la continuidad y el punto medio de un intervalo.	9. Continuidad
		10. Límites laterales y unilaterales
		11. Determinación de la continuidad en un punto medio y en un intervalo
		12. Determinación de límites laterales y unilaterales utilizando la propiedad de continuidad
3. Comprender y aplicar el teorema del valor intermedio.	4. Aplicar el teorema del valor intermedio.	13. Teorema del valor intermedio
4. Determinar los límites infinitos.	5. Calcular límites infinitos.	14. Límites infinitos
		15. Propiedades de los límites infinitos
		16. Encuentra y dibuja asíntotas verticales de una gráfica
		17. Importancia de los límites infinitos para resolver problemas de la ciencia y tecnología

Mis conocimientos previos

A continuación desarrollarán individualmente una serie de ejercicios de aplicación de los conocimientos adquiridos de las funciones en matemática II.

1. Simplifique las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{x^2-9}{x+3}$

b. $\dfrac{x^2+10x+25}{x^2-25}$

c. $\dfrac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x}{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{12}x}$

2. Represente gráficamente la función $f(x) = 2x+3$:

3. Calcule el rango y recorrido de las siguientes funciones:

$f(x) = x^4+4x^2$

$f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

$f(x) = \sqrt{x-1}$

$f(x) = \log(x+1)$

Una vez finalizado el desarrollo de los ejercicios el tutor reforzará los contenidos en los casos que detecte dificultades de los estudiantes.

Límites y continuidad

Definición de límite

En matemática y cálculo existen muchas aplicaciones para el concepto del límite, dentro de ellas:

- En matemática, el límite es un concepto que describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a determinado valor.

- Además en matemática el límite de una función es un concepto fundamental del cálculo diferencial matemático.

- También se utiliza el límite para el cálculo infinitesimal o infinitésimo, que se puede definir como el cálculo de una cantidad infinitamente pequeña, en el que deben definirse estrictamente límites y considerarlos como números en la práctica.

- En cálculo, se utiliza para definir los conceptos fundamentales de convergencia, continuidad, derivación e integración, entre otros.

Podemos concluir que el límite se utiliza para el cálculo infinitesimal o infinitésimo, que se puede definir como el cálculo de una cantidad infinitamente pequeña, en el que deben definirse estrictamente límites y considerarlos como números en la práctica. Se utiliza para definir los conceptos fundamentales de convergencia, continuidad, derivación e integración, entre otros.

Un infinitesimal o infinitésimo se puede definir como una cantidad infinitamente pequeña, se usa en el cálculo infinitesimal, se definen estrictamente como límites y se suelen considerar como números en la práctica.

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \leq 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases}$$

Gráfica de la función

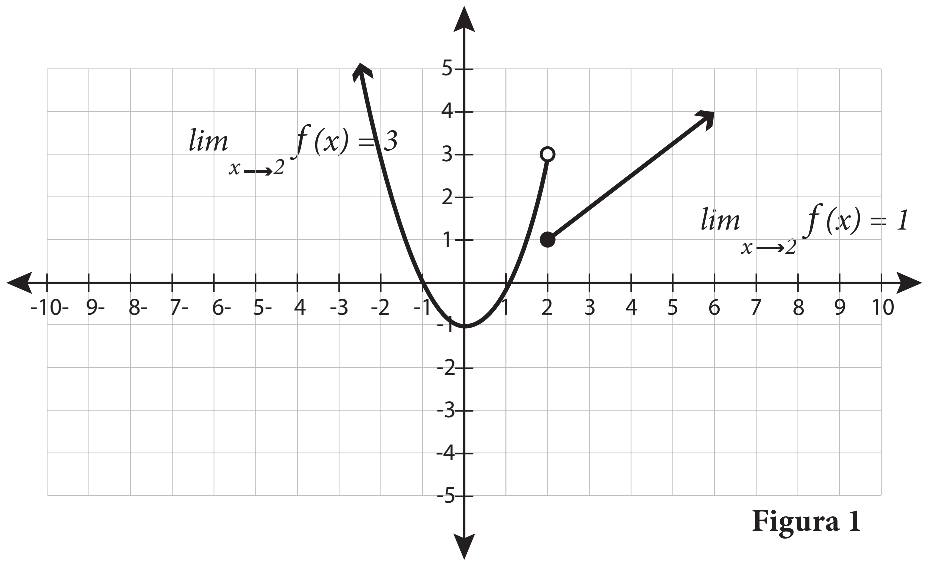


Figura 1

El límite de una función en un punto existe si y solo si existen los límites laterales y son iguales. A continuación describiremos los tres métodos para calcular los límites de una función:

1. Método numérico: se basa en construir una tabla de valores.

2. Método gráfico: se basa en elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico.

3. Método analítico: en el cual se utiliza el álgebra o cálculo.

Primero estudiaremos y aplicaremos límites mediante la implementación de los métodos numérico y gráfico.

Cálculo de límites por medio del método numérico y gráfico[1]

Para el desarrollo de estos ejercicios se emplean tablas de valores y gráficas de funciones para responder la pregunta. ¿Qué sucede con los valores $f(x)$ de una función f cuando la variable x se aproxima a un número a?

Definición de límite

Se comienza por investigar el comportamiento de la función definida por:

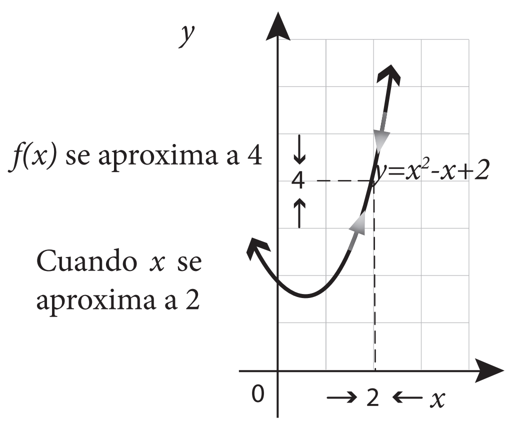
$$f(x) = x^2-x+2$$

Para valores de x cercanos a 2.

En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$
1.0	2.000000
1.5	2.750000
1.8	3.440000
1.9	3.710000
1.95	3.852500
1.99	3.970100
1.995	3.985025
1.999	3.997001

x	$f(x)$
3.0	8.000000
2.5	5.750000
2.2	4.640000
2.1	4.310000
2.05	4.150000
2.01	4.030100
2.005	4.015025
2.001	4.003001



2**Figura 2**

De la tabla y la gráfica de $f(x) = x^2- x + 2$ (una parábola) mostrada en la figura 2, se puede observar que cuando x está cerca de 2 (para cualquier lado de que se aproxime a 2), $f(x)$ está cerca de 4. De hecho, parece que se puede lograr que los valores de $f(x)$ se aproximen a 4 tanto como se desee al tomar x suficientemente cerca de 2. Esto se expresa diciendo "el límite de la función $f(x) = x^2-x+2$ cuando x se aproxima a 2 es igual a 4". La notación para esto es $\lim_{x \to 2}(x^2-x+2) = 4$

[1] Stewart, James y Redlin, Lothar. (2007). Matemáticas para el cálculo. México: International Thompson Editores.

Definición de límite de una función

Se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$,

Y se dice "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a, es igual a L".

Si es posible hacer que los valores de $f(x)$ se aproximen de manera arbitraria a L (tan cerca de como se quiera) al tomar x suficientemente próxima a a, pero no igual a a.

En términos generales, esto dice que los valores de $f(x)$ se aproximan más y más al número L cuando x se acerca cada vez más al número a (desde cualquier lado de a) pero $x \neq a$.

Otra notación para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \text{ Cuando } x \to a$$

Lo que normalmente se lee "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a".

Observe que $x \neq a$ en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca se considera $x = a$. De hecho, incluso $f(x)$ no necesita estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo $f(x)$ está definida cerca de a.

Estimación de límites en forma numérica y gráfica

A continuación se desarrollaran técnicas para hallar valores exactos de límites. Por ahora, se usan tablas y gráficas para estimar límites de funciones.

Ejemplo 1
Estimar un límite en forma numérica y gráfica.

Deduzca el valor de $\lim_{x \to a} \dfrac{x-1}{x^2-1}$,Compruebe con una gráfica.

Solución

Observe que la función $f(x) = (x - 1) / (x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero esto no importa porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que se consideran valores de x próximos a a, pero diferentes a a. Las siguientes tablas proporcionan valores de $f(x)$ (trabajar hasta seis decimales) para valores de x que se aproximan a 1 (pero que son distintos de 1) .

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.4000000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

Sobre la base de valores en las dos tablas, se infiere que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

Como comprobación gráfica se usa un dispositivo de graficación (software que se utiliza para graficar funciones en computadoras o calculadoras) para producir la figura 3 y 4.

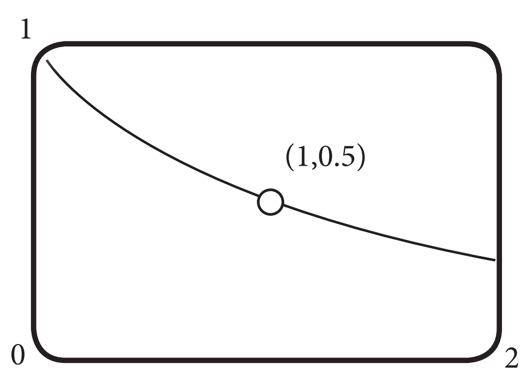


Figura 3

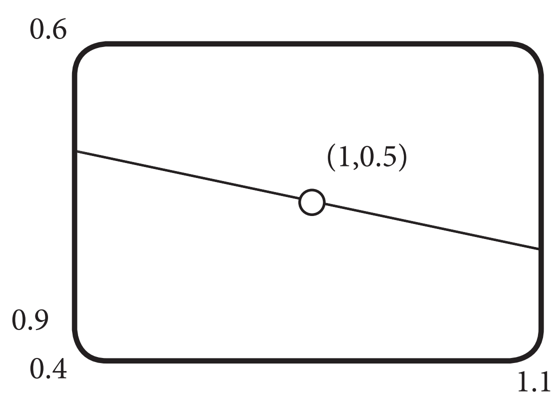


Figura 4

Se puede observar que cuando x se aproxima a 1, se acerca a 0.5.

Ejemplo 2

Dada la función $\lim_{r \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

Hallar un límite a partir de una tabla.

Solución

En las tablas siguientes se listan valores de la función para varios valores de t cerca de 0. Cuando t se aproxima a 0, los valores de la función al parecer tienden a 0.1666666……, y por lo tanto, se infiere que $\lim_{r \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$

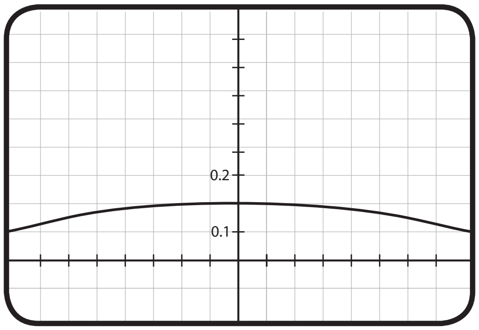
t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

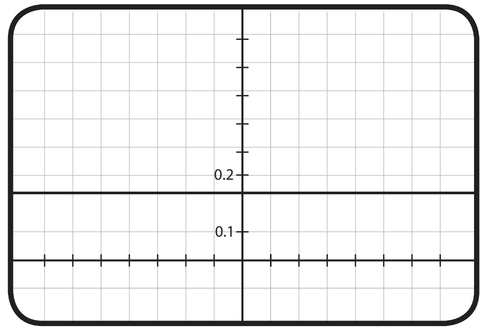
¿Qué sucedería en el ejemplo 2 si se hubiera tomado incluso valores cada vez más pequeños de t ? En las tablas se muestran los resultados que proporciona una calculadora; se puede observar que al parecer algo extraño está sucediendo.

Si prueba estos cálculos en su calculadora, podría obtener valores distintos, pero en algún momento se obtendría el valor 0 si se hace a t suficientemente pequeña. ¿Esto significa que en realidad la respuesta es 0 en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como se mostrará más adelante. El problema es que **la calculadora dio valores falsos** porque $\sqrt{t^2+9}$ es muy cercano a 3 cuando t es pequeña de hecho, cuando t es suficientemente pequeña, un valor de calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ es 3.000…. hasta los dígitos que la calculadora pueda llevar.

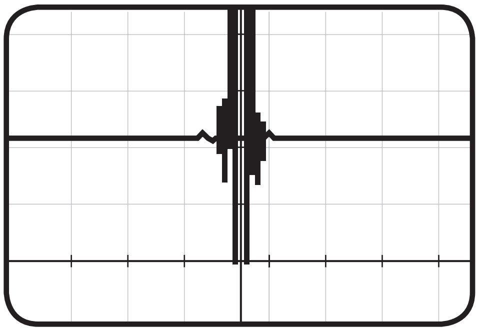
Algo similar sucede cuando se intenta graficar la función del ejemplo 2 en un dispositivo de graficación. Los incisos a) y b) de la figura 5 muestran gráficas bastante exactas de esta función y cuando se usa la característica TRACE, se puede estimar con facilidad que el límite está cercano a $\frac{1}{6}$. Pero al amplificar demasiado, como en los incisos c) y d), se obtienen entonces gráficas inexactas, de nuevo como resultado de problemas con la resta.



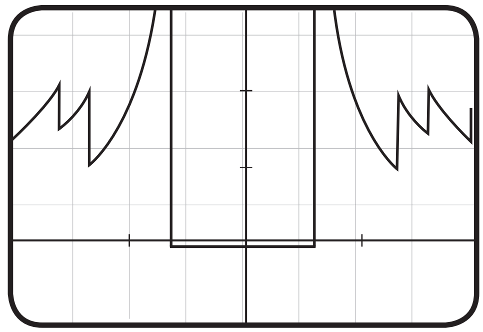
a) {-5.5} por {-0.1,0.3}



b) {-0.1,0.1} por {-0.1,0.3}



c) {-10^{-6},-10^{-6}} por {-0.1,0.3}



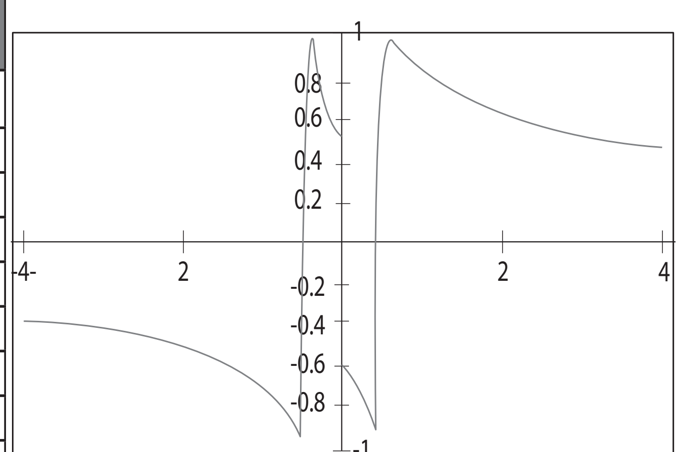
d) {-10^{-7},-10^{-7}} por {-0.1,0.3}

Figura 5

Ejemplo 3

Dada la siguente función $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, hallar un límite a partir de la siguiente tabla:

Acercándose a 0 por la izquierda:		Acercándose a 0 por la derecha:	
x	***f(x)***	***x***	***f(x)***
-0.001	-0.82708	0.001	0.82708
-0.0009	0.848291	0.0009	-0.848291
-0.0008	0.346117	0.0008	-0.346117
-0.0007	-0.753712	0.0007	0.753712
-0.0006	-0.998629	0.0006	0.998629
-0.0005	-0.930278	0.0005	0.930278
-0.0004	-0.649448	0.0004	-0.649448
-0.0003	0.104528	0.0003	-0.104528
-0.0002	0.987688	0.0002	-0.987688
-0.0001	0.309017	0.0001	-0.309017



Análisis de la existencia de un límite

Las funciones no necesariamente se aproximan a un valor infinito en todo punto. En otras palabras, es posible que un límite no exista. En los tres ejemplos siguientes se ilustran formas en las que esto puede suceder.

Ejemplo 4

Un límite que no existe (una función con un salto)

Encuentre el límite de la función de Heaviside H se define como:

$$H(t) = \begin{matrix} 0.....s(t) < 0 \\ 1.....s(t) \geq 0 \end{matrix}$$

Esta función es llamada así en honor al ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se activa en el punto $t = 0$, su gráfica se muestra en la figura 6. Observe el "salto" $x = 0$ en la gráfica.

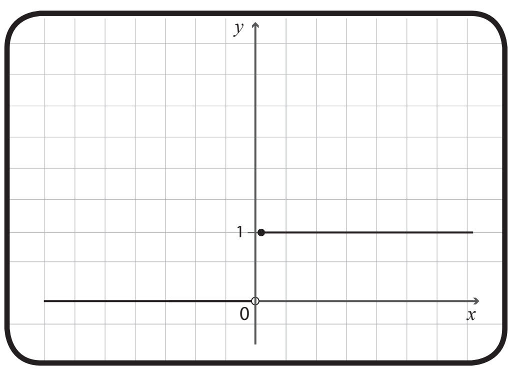


Figura 6

Cuando t tiende a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ tiende a 1. No hay un solo número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxima a 0. Por lo tanto, $\lim\limits_{t \to a} = H(x)$ no existe.

Ejemplo 5

Límite que no existe (una función que oscila).

Encuentre:

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Solución

La función $f(x)=sen(\pi/x)$ no está definida en 0. La evaluación de la función para algunos valores pequeños de x da.

$$f(1) = sen\pi = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = sen3\pi = 0$$

$$f(0.1) = sen10\pi = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = sen2\pi = 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = sen4\pi = 0$$

$$f(0.01) = sen100\pi = 0$$

De manera similar, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$; con base en esta información se podría inferir que:

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

Pero esta vez la inferencia es errónea. Observe que aunque $f(1/n) = sen..\, n\,\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x)=1$ para una infinidad de valores de x que se aproxima a 0 (observe la gráfica de la figura 7).

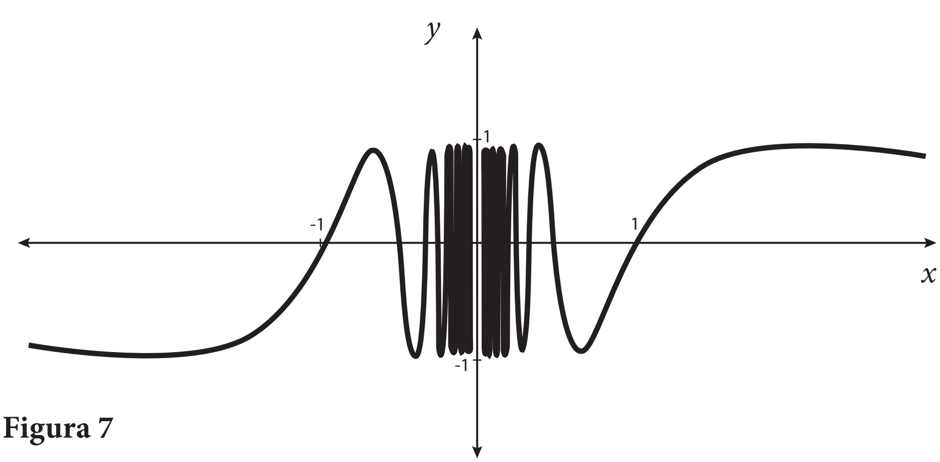


Figura 7

Las líneas discontinuas indican que los valores de $sen(\pi/x)$ oscilan entre 1 y -1 infinitamente cuando x se aproximan a 0. Puesto que los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo cuando x se aproxima a 0:

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right) \text{ no existe}$$

En el ejemplo 4 se ilustran algunas de las dificultades para interferir el valor de un límite. Es fácil inferir el valor erróneo si se usan inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como muestra la explicación después del ejemplo 2, algunas veces las calculadoras y computadoras dan valores incorrectos. Sin embargo, en las dos secciones siguientes se desarrollarán métodos infalibles para calcular límites.

Ejemplo 5

Un límite que no existe (una función con una asíntota vertical).

Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

Solución

Cuando x se aproxima a 0, x^2 también se acerca a 0 y $1/x^2$ se vuelve muy grande (véase la tabla de la figura 8). De hecho, resulta evidente de la gráfica de la función $f(x)=1/x^2$ mostrada en la figura 8 que los valores de $f(x)$ no se pueden hacer arbitrariamente grandes al tomar x lo bastante cerca a 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, de modo que $\lim_{x\to 0}(1/x^2)$ no existe.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
0.01	10000
0.001	1000000

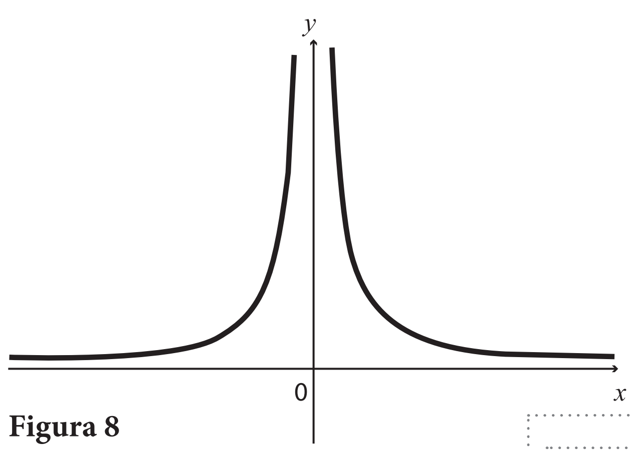


Figura 8

Para indicar la clase de comportamiento exhibido en el ejemplo 5, se usa la notación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no significa que se esté considerando a ∞ como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en la que el límite no existe: $1/x^2$ se puede hacer tan grande como se quiera al tomar el valor de x suficientemente cerca de 0. Observe que la línea $x = 0$ (el eje y) es un asíntota vertical.

Actividad 1

En su cuaderno elabore la gráfica haciendo uso del método numérico y gráfico, calcule el límite segun corresponda:

1. $f(x) = x^2+1$
2. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
4. $f(x)=\begin{cases} 4x-x^2, & x\geq 1 \\ 4-x, & x<1 \end{cases}$
5. $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 2x + 1)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+4}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} (4x + 2)$

Cálculo analítico de límites

Como lo mencionamos anteriormente con este método utilizamos el álgebra para aplicar el límite de una función. A continuación se darán a conocer una serie de casos en los que se aplica el método analítico.

Límites que se calculan de forma directa

Ejemplo 1

Calcular = $\lim_{t \to 5} (8t^2 - 2t + 1)$

Sustituyendo el valor de t por 5

$$\lim_{t \to 5}(8t^2-2t+1) = 8(5)^2 - 2(5) + 1 = 200 - 10 + 1 = 19$$

Ejemplo 2

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Sustituyendo el valor de x por -2

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(-2)^2-4}{-2-2} = \frac{4-4}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

Ejemplo 3

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [5x + 3(\Delta x)]$$

Sustituyendo el valor de Δx por 0

$$\lim_{\Delta x \to 0} [5x + 3(\Delta x)] = 5x + 3(0) = 5x$$

Actividad 2

En su cuaderno calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{4x-3}{7x-2}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x+2}{x+1}$

3. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{2x^2-10}$

4. $\lim\limits_{x \to 3} (4x-1)$

5. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \ln x$

7. $\lim\limits_{x \to 1} 3x^2$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-9}{x}$

Límites indeterminados

En los ejemplos anteriores se pueden observar que los límites calculados existen, pero no bastará con hallar la imagen en un punto deseado $x = c$, una nueva lectura de la definición del límite nos hace reflexionar que f puede no estar definido en c, esto lo podemos ver con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2-5x-3}{x-3}$$

Si en este ejemplo, evaluáramos directamente, $\lim_{x\to 3} f(x)$ se tendría:

Sustituyendo el valor de x por 3

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} = \frac{2(3)^2-5(3)-3}{3-3} = \frac{0}{0}$$

El cociente $\frac{0}{0}$ no es un número real, se conoce en el cálculo como una forma indeterminada (no puede determinarse a primera vista el valor exacto del límite). Sin embargo, usando manipulaciones algebraicas, se puede transformar la función en una función equivalente que tiene límite.

Efectuar el proceso algebraico y simplificar, se conoce en el lenguaje del cálculo como: "Eliminar la indeterminación".

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x+1)(x-3)}{(x-3)} \qquad \text{(factorizando)}$$

Así,

$$= \lim_{x\to 3} (2x+1)$$

$$=2 * 3 + 1 = 7$$

$$\lim_{x\to 3} = 7$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{2x^2+5x-3}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{2x^2+5x-3} \lim_{x\to -3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(2x-1)(x+3)} \lim_{x\to -3} \frac{x-3}{2x-1} = \frac{-3-3}{2(-3)-1} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

Actividad 3

En su cuaderno calcule los siguientes límites, eliminando la indeterminación cuando aplique:

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

2. $\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{x^2-6x-7}$

3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

4. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

5. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{2x^2+5x-3}$

Evaluación de límites utilizando las propiedades de los límites

A continuación resumimos las siete leyes de los límites:

N°	Ley	Representación
1	El límite de una suma es la suma de los límites	$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2	El límite de una diferencia es la diferencia de los límites	$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3	El límite de una constante por una función es la constante multiplicada por el límite de la función	$\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$
4	El límite de un producto es el producto de los límites	$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \bullet \lim_{x\to a} g(x)$
5	El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0)	$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ **si** $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
6	Límite de la potencia es la potencia del límite	$\lim_{x\to a} [f(x)^n] = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ donde n es un entero positivo.
7	El límite de una raíz es la raíz del límite	$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo "límite de una raíz". [si n es par, se supone que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$]

Evaluación de límites utilizando la técnica de cancelación y racionalización

Las técnicas de cancelación y racionalización utilizadas en aritmética son aplicables para evaluar los límites. A continuación se desarrollarán una serie de ejemplos en el que se aplican las estrategias basadas en las siete leyes de las propiedades de los límites.

Desarrollo y utilización de estrategias para el cálculo de los límites

Para evaluar los límites debemos aplicar las leyes de límites, se requiere usar cuatro límites especiales que describiremos a continuación:

Algunas unidades especiales:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un elemento positivo

4. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo y $a > 0$

Los límites especiales de 1 y 2 son intuitivamente obvios.

Los límites 3 y 4 son casos especiales de las leyes de límites.

Los límites 6 y 7 son casos de límites de una potencia y una raíz.

Ejemplo 1

Mediante el uso de las leyes de límites evalúe y justifique:

$\lim\limits_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

Solución

$\lim\limits_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim\limits_{x \to 5} (2x^2) - \lim\limits_{x \to 5} (3x) + \lim\limits_{x \to 5} 4$ Aplicación de la ley de los límites 1 y 2

$= 2 \lim\limits_{x \to 5} x^2 - 3 \lim\limits_{x \to 5} x + 4$ Aplicación de la ley de los límites l y 3

$= 2 (5^2) - 3 (5) + 4$ Cálculo del límite

$= 39$

Límites por sustitución directa

Si f es una función polinomial o racional y está en el dominio de f, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman continuas en a.

Ejemplo 2
Determine por sustitución directa y evalúe el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+5x}{x^4+2}$$

Solución
La función $f(x) = (x^2+5x) / (x^4+2)$ es una función racional y está en su dominio (porque el denominador no es cero para $x = -1$). Así, se puede hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+5x}{x^4+2} = \frac{(-1)^2+5(-1)}{(-1)^4+2} = -\frac{4}{3}$$

Como se pudo observar en el ejemplo anterior, evaluar los límites por sustitución directa es fácil. Pero no todos los límites pueden ser evaluados de esta manera. De hecho, la mayor parte de las situaciones en las que los límites son útiles requiere un tablado más arduo para evaluar el límite. En los tres ejemplos siguientes se ilustra cómo usar el álgebra para hallar límites.

Ejemplo 3
Hallar el límite mediante cancelación de un factor común:

Encuentre $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

Solución
Sea $f(x) = (x-1) / (x^2-1)$. No se puede hallar el límite sustituyendo $x = 1$ porque $f(1)$ no está definido: en cambio, es necesario realizar antes algunas operaciones algebraicas.

Factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de x-1. Al tomar el límite cuando x tiende a 1, se tiene $x \neq 1$ y, por lo tanto x - 1 ≠ 0. En consecuencia, se puede cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 4
Hallar el límite mediante simplificación:

Evalúe: $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$

Solución
No se puede usar sustitución directa para evaluar este límite porque el límite del denominador es 0. Así que primero se simplifica algebraicamente el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(9+6h+h^2)-9}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}}$$
$$=\lim_{h\to 0}(6+h)$$
$$=6$$

Ejemplo 5

Hallar el límite mediante racionalización:

Encuentre: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

Solución

No se puede aplicar la ley 5 (límite de un cociente) de manera inmediata, puesto que el límite del denominador es 0. Aquí el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \bullet \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{t \to 0} (t^2+9)}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Actividad 4

En su cuaderno aplique las leyes de límites y evalué los siguientes límites y justifique cada paso:

1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

2. $\lim\limits_{x \to 3} (2x^3\text{-}10x\text{-}8)$

3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$

4. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2-x}{x^2-4}$

Continuidad

En matemáticas, una función continua es aquella para la cual, intuitivamente, para puntos cercanos del dominio se producen pequeñas variaciones en los valores de la función. La continuidad de funciones es uno de los conceptos principales de la topología y del análisis real.

Determinación de la continuidad en un punto medio y en un intervalo[2]

A continuación explicaremos la aplicación de la continuidad en el límite de una función.
Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f es continua en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ que equivale a que se cumplan las tres condiciones siguientes:

1. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es finito

2. Existe $f(a)$

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Tipos de discontinuidad

Si una función no es continua en un punto se dice que presenta una discontinuidad en el punto, que puede ser:

- Evitable: si existe y es finito el límite de la función en el punto.
- Esencial: si no existe o es infinito alguno de los límites laterales de la función en el punto.
- De salto: si existen y son finitos los dos límites laterales de la función en el punto.

[2] Mata, Águeda y Reyes, Miguel. *Continuidad.* Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de: http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/calculo/apuntes/23_continuidad.pdf

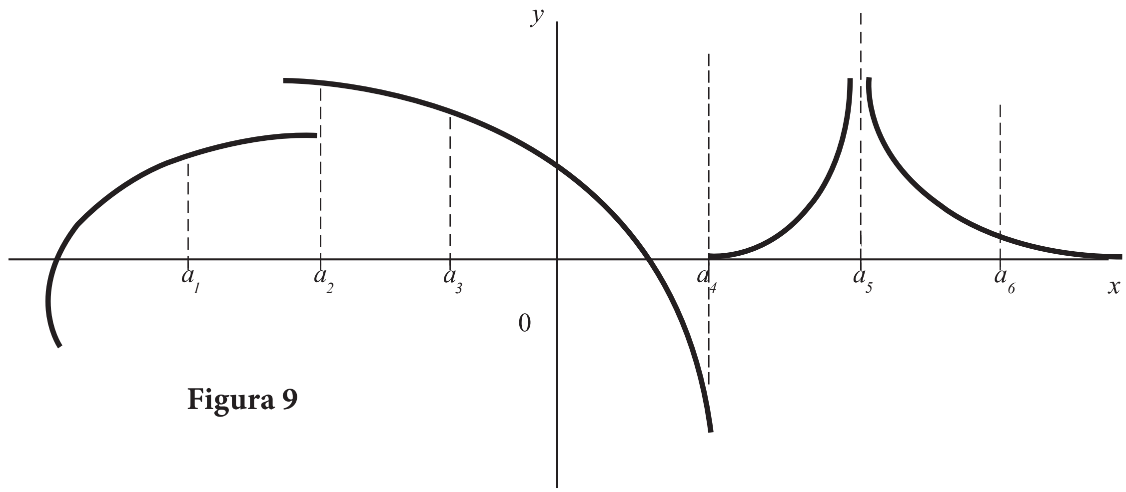


Figura 9

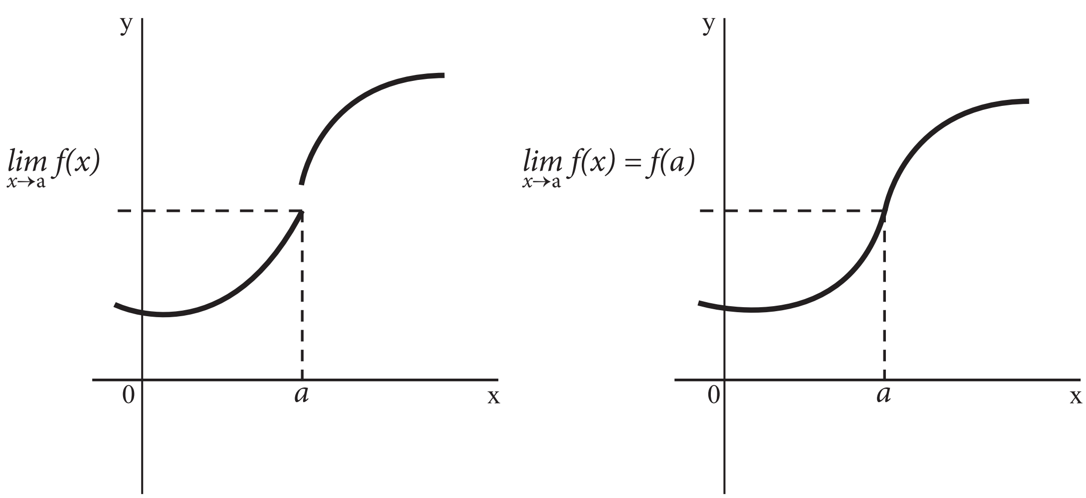
En la gráfica anterior (figura 9) observamos:

- Continuidad en a_3
- Discontinuidad evitable en a_1 y a_6
- Discontinuidad esencial en a_4 y a_5
- Discontinuidad de salto en a_2

Cuando una función presenta una discontinuidad evitable en un punto se puede redefinir en dicho punto para convertirla en una función continua. Concretamente, si *f* tiene una discontinuidad evitable en *a*, la función:

$$f(x) \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

es continua en *a* y solo se diferencia de *f* por su valor en el punto.



f Tiene una discontinuidad evitable en *a*

f es continua en *a*

Figura 10

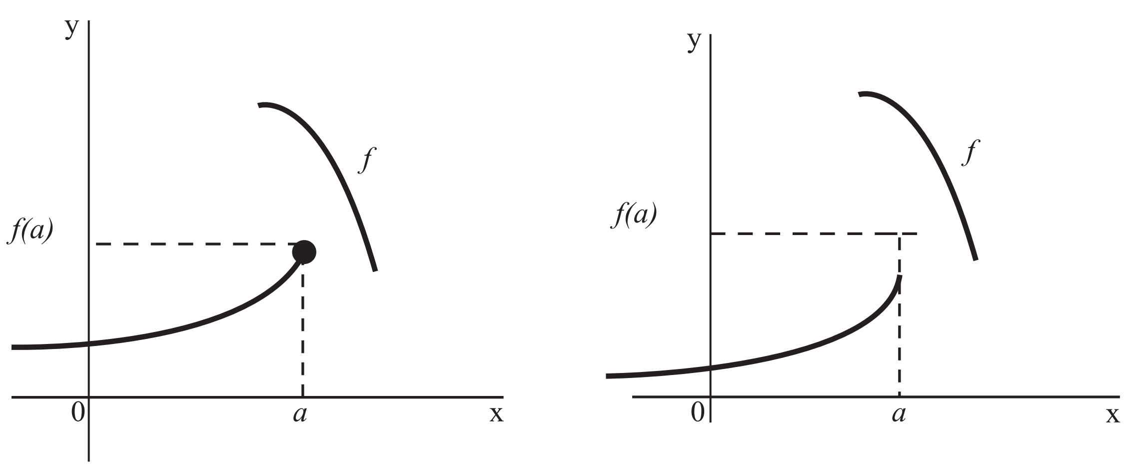
Continuidad lateral

Cuando el límite de la función en el punto no existe, pero alguno de los límites laterales coincide con el valor de la función se obtiene lo que se llama continuidad lateral.

- Se dice que *f* es continua por la izquierda en *a* si $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.
- Se dice que f es continua por la izquierda en *a* si $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

La continuidad lateral cobra especial significado en los extremos de los intervalos de definición y en los puntos donde cambian de expresión las funciones discontinuas como se observa en la figura 11:

Obviamente, una función es continua en un punto si y solo si es continua por la derecha y por la izquierda.



f es continua en *a* por la izquierda y no por la derecha

f no es continua en a por la izquierda ni por la derecha

Figura 11

Límites laterales y unilaterales

Algunos límites se calculan mejor si se determinan primero los límites izquierdo y derecho. Establece que un límite bilateral existe si solo ambos límites unilaterales existen y son iguales.

Primero definiremos límite unilateral, descrito de la forma siguiente:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Ahora lo leeremos "límite izquierdo de *f(x)* cuando *x* se aproxima a *a*" [o el "límite de *f(x)* cuando *x* se aproxima a *a* por la izquierda"] es igual a *L* si es posible hacer los valores de *f(x)* arbitrariamente cercanos a *L* al tomar *x* suficientemente cercana a *a* y *x* menor a *a*.

Hay que observar que esta definición difiere de la definición de un límite bilateral solo en que se requiere que *x* sea menor que *a*. De manera similar, si se requiere que *x* sea mayor que *a*, se obtiene "el límite derecho de *f(x)* cuando x se aproxima a *a* es igual a *L*" y se escribe:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Por lo tanto, el símbolo "$x \to a^+$" significa que solo se considera $x > a$.
Al calcular los límites unilaterales se emplea el hecho de que las leyes de los límites se cumplen también para los límites unilaterales.

Ejemplo 1
Comparar los límites derecho e izquierdo; muestre que $lim\ |x| = 0$

Solución
Recuerde que: $|x| = \begin{matrix} x..si..x \geq 0 \\ x..si..x < 0 \end{matrix}$

Puesto que $|x| = x$ para $x > 0$, se tiene $\lim_{x \to a^+} |x| = \lim_{x \to a^+} x = 0$

Para x < 0, se obtiene $|x| = -x$, así que $\lim_{x \to a^-} |x| = \lim_{x \to a^-} (-x) = 0$

Por consiguiente $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

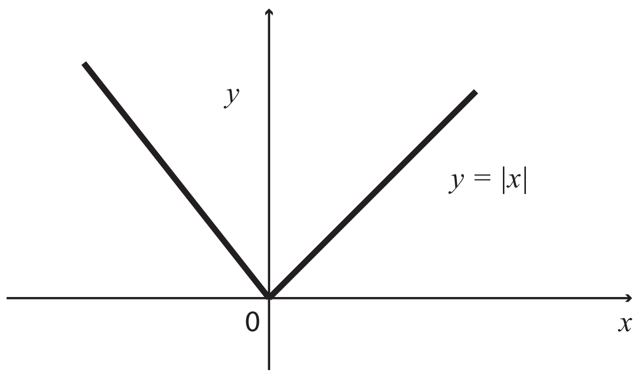


Figura 12

Ejemplo 2
Comparación de los límites derecho e izquierdo.

Pruebe que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

Solución

Puesto que $|x| = x$ para $x > 0$ y $|x| = -x$ para $x < 0$, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que los límites derecho e izquierdo existen y son diferentes, se deduce que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ se muestra en la figura 13 y corrobora los límites que se determinaron.

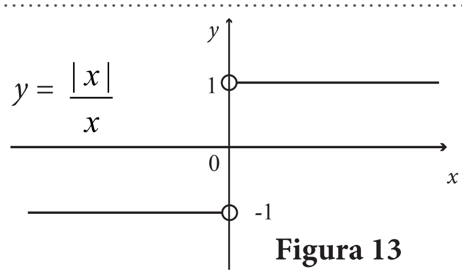


Figura 13

Al comparar las definiciones de límites bilaterales y unilaterales, se puede observar que la siguiente recta es cierta:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L}$$

Por lo tanto, si los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, el límite (bilateral) no existe. Se usa este hecho en los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 3
Límites de una gráfica.

1. La gráfica de una función g se muestra en la figura 14. Utilícela para expresar los valores (si existen) de los siguientes límites:
   a. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

   b. $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$

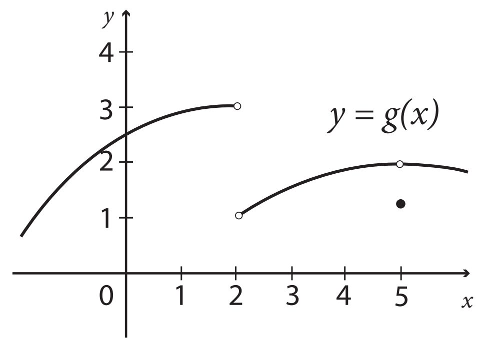


Figura 14

Solución

a. De la gráfica se puede observar que los valores de $g(x)$ se aproximan a 3 cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, pero se aproximan a 1 cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

Puesto que los límites izquierdo y derecho son diferentes, se concluye que

$\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ no existe.

b. Ahora $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$

2. La gráfica muestra también que:

$$\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

Esta vez los límites izquierdo y derecho son los mismos y, por lo tanto, se tiene:

$$\lim_{\to} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$

Ejemplo 4

Función definida por partes:

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{matrix} 2x^2 \ldots si \ldots x < 1 \\ 4\text{-}x \ldots si \ldots x > 1 \end{matrix}$$

Grafique f y emplee la gráfica para hallar lo siguiente:

a. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

b. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

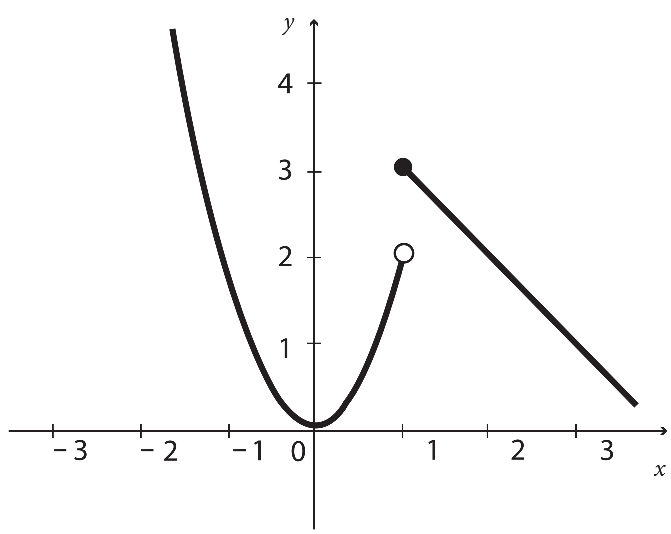


Figura 15

Determinación de límites laterales y unilaterales utilizando la propiedad continuidad en intervalos

Una función es continua en un intervalo cuando lo es en cada uno de los puntos del intervalo, entendiéndose como continuidad lateral en los extremos del mismo (por la derecha en el extremo de la izquierda y por la izquierda en el extremo de la derecha).

Por ejemplo:

La función parte entera: $E(x) = [x]$

Es continua en cada punto $a \notin Z$ y continua por la derecha en cada punto $n \in Z$. Globalmente, es continua en cada intervalo.

$[n,n+1), n \in Z$

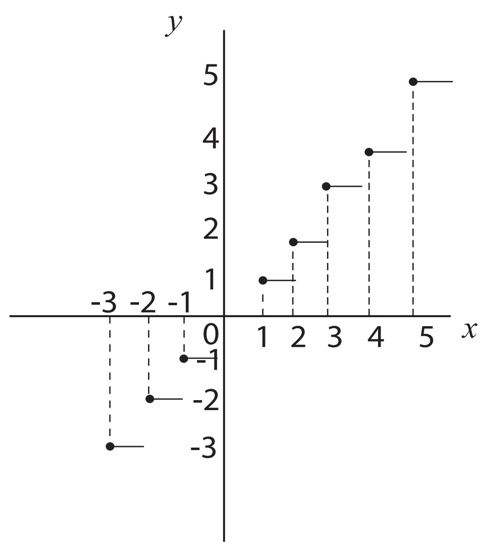


Figura 16

A continuación se presentará una serie de ejemplos para encontrar la continuidad de funciones:

Ejemplo 1

Calcule si existe el siguiente límite, justifique: $\lim_{x \to 4} \left(\dfrac{x^2 - 16 + |x - 4|}{x - 4} \right)$

Solución

Calculamos el límite lateral por la derecha:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16+|x-4|}{x-4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x+4)(x-4)(x-4)}{x-4}\right)=$$ simplificación de cuadrados

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)(x+4+1)}{x-4}\right)=9$$

Calculamos el límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x^2-16)+|x-4|}{x-4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x+4)(x-4)+x-4}{x-4}\right)=\frac{\cancel{(x-4)}(x+4-1)}{\cancel{(x-4)}}$$

$$\lim_{x\to 4} x+4-1=(4+4-1)=7$$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16+|x-4|}{x-4}\right)\to \textit{no esxiste}$$

Ejemplo 2

Sea la función real definida por:

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{2x-2} & si\ x\neq 1\\ 2, & si\ x=1\end{cases}$$

Determine si existe el límite $\lim_{x\to 1} f(x)$

Solución

$$|x-1|=\begin{cases}x-1 & si\quad x\geq 1\\ -(x-1), & si\quad x<1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)}{2(x-1)}=\dfrac{1}{2}, & si\quad x\geq 1\\ \dfrac{-(x-1)}{2(x-1)}=-\dfrac{1}{2}, & si\quad x<1\\ 2, & si\ x=1\end{cases}$$

Calculamos el límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}\left(\frac{-(x-1)}{2(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1-}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Calculamos el límite lateral por la derecha:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{(x-1)}{2(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Luego como $\lim_{x\to 1+} f(x) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$ no existe $\lim_{x\to 1} f(x)$

Actividad 5

En su cuaderno aplique las leyes de límites y evalúe los siguientes límites y justifique cada paso:

1. Calcule $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x}$
2. Calcule $\lim_{x\to 5-} |x-5|$
3. Calcule si existe el siguiente $\lim_{x\to -4}\left(\frac{x^2-16}{x^2+7x-12}\right)$
4. Calcule $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}\right)$
5. Determine si el valor del límite $\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[y]{1+y}}-\frac{1}{y}\right) = es -\frac{1}{2}$
6. Calcule $\lim_{x\to -3+} \sqrt{9-x^2}$
7. Calcule $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} x-2, & si \quad x<2 \\ x^2, & si \quad x\geq 2 \end{cases}$
8. Verifique si la función $g(x) = \begin{cases} x+1, & x\leq 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$ es discontinua en $x = 1$

Teorema del valor intermedio

Es un teorema sobre funciones continuas reales definidas sobre un intervalo. Intuitivamente el resultado afirma que si una función es continua en un intervalo, entonces toma todos los intermedios comprendidos entre los extremos del intervalo.

El teorema del valor intermedio o su versión equivalente el teorema de los ceros de Bolzano, es el resultado más importante de este tema.

Teorema de Bolzano (existencia de ceros)

Las funciones continuas tienen varias propiedades. Una de ellas, ya vista, es que evitan el cálculo de límites, ya que para ellas solo hay que sustituir el valor de la función en el punto límite.

Otra propiedad se explica en el conocido:

Teorema Bolzano. Si $f(a) \bullet (f(b) < 0$ (es la forma abreviada para escribir que la función cambia de signo entre a, b) y f es continua en $[a,b]$, entonces existe un valor $c \in [a,b]$ que cumple $f(c) = 0$.

En este teorema es esencial que la función sea continua y que se trate de un intervalo, como muestran las funciones siguientes:

$$f(x)\begin{cases} -1 & \in R(-1,0) \\ 1 & \in R(0,1) \end{cases} \qquad f(x)\begin{cases} -1 \quad x & \in R\ (3,4) \\ 1 \quad x & \in R\ (6,9) \end{cases}$$

La primera cambia de signo, no es continua y está definida en un intervalo; la segunda cambia de signo, es continua, pero no está definida en un intervalo. Ninguna alcanza el valor cero. A continuación desarrollamos una serie de ejemplos de aplicación de este teorema:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $xe^x = 1$

Esta ecuación puede escribirse como $xe^x - 1 = 0$ y la llamaremos $f(x) = xe^x - 1$ intentaremos encontrar si hay valores que cumplan $f(x) = 0$. Para ello, según el teorema de Bolzano, basta comprobar que la función es continua y que cambia de signo. En cada cambio de signo se halla un valor que cumple $f(x) = 0$.

La función es continua pues se trata del producto de x por e^x al que luego se le resta 1 (este razonamiento pone de manifiesto la necesidad de conocer qué funciones son continuas y las reglas que permiten decidir de forma rápida si una expresión es o no una función continua). Además, se pueden calcular valores de la función en distintos puntos. El gráfico siguiente muestra si la función es positiva o negativa en los siguientes puntos:

-2	-1	0	1	2
-	-	-	+	+

Como $f(x) < 0$ y $f(1) > 0$ el teorema de Bolzano dice que existe un valor c • $\in$ (0,1) que cumple $f(c) = 0$. Así $c = 0'$…para calcular más cifras decimales de c se vuelve a hacer el mismo procedimiento en el intervalo en el que hay un cambio de signo y se mira qué ocurre en los valores intermedios:

0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+

Luego la solución buscada cumple c $\in$ (0.5, 0.6) y así $c = 0.5$... Si se continua el proceso, ahora se elige el intervalo (0.5, 0.6) y se mira qué ocurre en los valores intermedios, se encuentra que la solución cumple $c = 0.56$... En cada paso se obtiene una cifra decimal más de la solución. Con un poco de paciencia se calcula $c = 0.567143$... y se pueden añadir tantas cifras decimales como se quiera.

Ejemplo 2

Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje de las abscisas en el intervalo [0,2].¿Se puede decir lo mismo de la función?

La primera función es continua en toda $\mathbb{R}$

$f(0) = 0^2 - 4 \bullet 0 + 2 > 0$

$\mathrm{f}(2) = 2^2 - 4 \bullet 2 + 2 < 0$

Como se cumple el teorema de Bolzano, existe al menos un c que pertenece al intervalo (0, 2) que corta al eje de abscisas.

Ejemplo 3

Utilizando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación: $x^3 + x - 5 = 0$, tiene al menos una solución x = a tal que 1< a <2.

$f(x)$ es continua en [1,2]

$f(1) = 1^3 + 1 - 5 = -3 < 0$

$f(2) = 2^3 + 2 - 5 = 5 > 0$

Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el teorema de Bolzano, existe c ϵ (1,2) tal que:

$f(c) = 0 \qquad c^3 + c - 5 = 0.$

Por tanto, existe al menos una solución real a la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$.

Actividad 6

Resuelva en su cuaderno los siguientes ejercicios utilizando el teorema de Bolzano:

1. Probar que la función $f(x) = x^2 - 2$ tiene solución real en el intervalo [1,2].

2. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$, ¿se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo [1,5]?

3. Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, ¿se puede afirmar que existe al menos un punto c en el interior del intervalo [1,2] tal que $f(c) = 0$?

4. Justificar que la función polinómica $f(x) = x^3 + x + 1$ tiene un cero comprendido entre -1 y 0.

5. Comprobar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo [0,1].

Límites en el infinito, límites de sucesiones[3]

El concepto de infinito en la matemática corresponde a la referencia a una cantidad sin límite o final, contrapuesto al concepto de finito.

En esta sección se estudia una clase especial de límite conocida como *límite en el infinito*. Se examina el límite de una función *f(x)* cuando aumenta el valor de *x*. Se examina también el límite de una sucesión a_x cuando *n* aumenta.

Límites en el infinito

Se investigará el comportamiento de la función *f* definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Cuando *x* toma valores grandes. En la tabla de abajo se dan los valores de esta función correctos hasta seis decimales, y la gráfica de *f* ha sido trazada mediante una computadora en la figura 17.

x	*f*
± 0	-1.000000
± 1	0.000000
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998

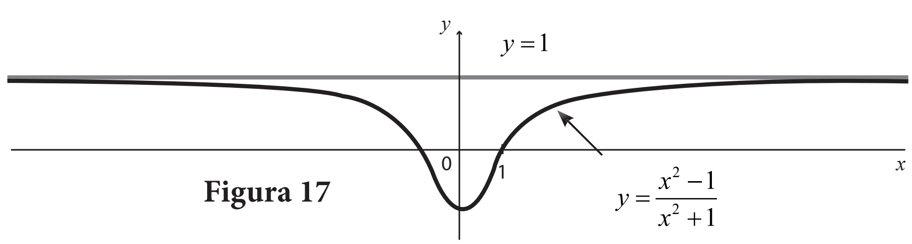


Figura 17

[3] Stewart, James y Redlin, Lothar. (2007). Matemáticas para el cálculo. México. International Thompson Editores.

Cuando x toma valores cada vez más grandes, se ve que los valores de $f(x)$ se aproximen a 1 tanto como se quiera al tomar suficientemente grande. Esta situación se expresa en símbolos como:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, se usa la notación:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Para indicar que los valores de $f(x)$ se aproximan más y más a L cuando x toma valores cada vez más grandes.

Límites al infinito

Sea f una función definida en algún intervalo (a,∞). Entonces, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Indica que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si x toma valores suficientemente grandes.

Otra notación para:

$f(x) \to L$ Cuando $x \to 0$

El símbolo ∞ no representa un número. Sin embargo, con frecuencia la expresión $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ se lee como "el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al infinito, es L.

Las ilustraciones geométricas se muestran en la figura 18. Observe que hay muchas maneras para que la gráfica de f se aproxime a la recta $y = L$ (que se llama asíntota horizontal) como se ve a la derecha.

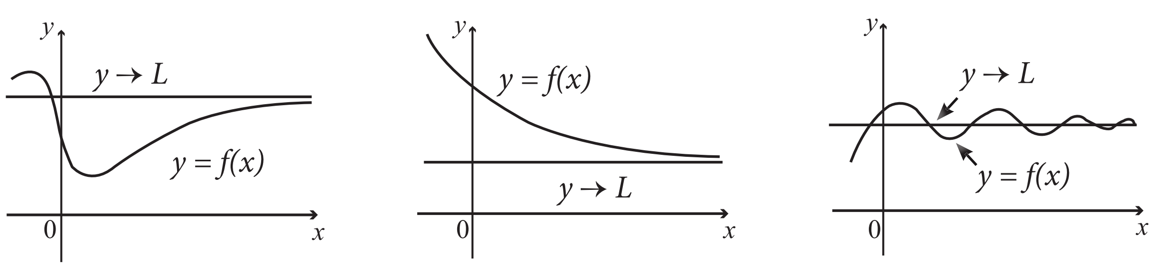


Figura 18

Refiriéndose de nuevo a la figura 17, se ve que para valores numéricamente grandes de x, los valores de $f(x)$ se aproximan a 1.

Si se permite que x disminuya por valores negativos sin cota, se puede hacer que $f(x)$ se aproxime a 1 tanto como se desee. Esto se explica escribiendo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

La definición general es como sigue:

Límites en el infinito negativo

Sea $f(x)$ una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si x toma valores negativos suficientemente grandes.

De nuevo, el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ suele leerse como:

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito negativo, es L"

La definición se ilustra en la figura 19.

Observe que la gráfica se aproxima a la recta $y = L$ como se ve a la izquierda.

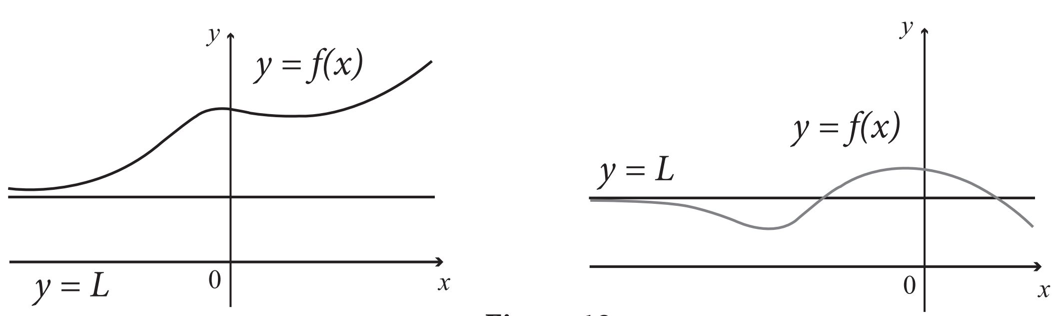


Figura 19

A continuación desarrollaremos una serie de ejemplos de aplicación de los límites infinitos:

Ejemplo 1

Límites en el infinito.

Encuentre $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$

Solución

Observe que cuando x es grande, $\frac{1}{x}$ es pequeña. Por ejemplo:

$$\frac{1}{100} = 0.01$$

$$\frac{1}{10{,}000} = 0.0001$$

$$\frac{1}{1{,}000{,}000} = 0.000001$$

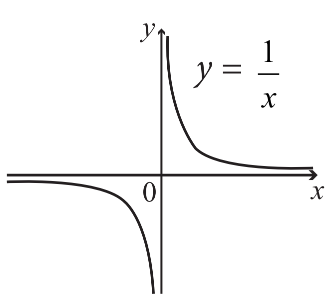
De hecho, si se toma un valor de x bastante grande, se puede hacer que $\frac{1}{x}$ se aproxime a 0 tanto como se desee. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Con un razonamiento similar se ve que cuando x es grande y negativa, $\frac{1}{x}$ es pequeña y negativa, por lo tanto se tiene también:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = \frac{1}{x}$.



$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Figura 20

Las leyes de límites se cumplen también para límites en el infinito. En particular, si se combina la ley 6 (límite de una potencia) con los resultados del ejemplo 1, se obtiene la siguiente importante regla para calcular límites:

si k es un entero positivo, entonces

$$\lim \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Ejemplo 2

Hallar el límite en el infinito.

Evalúe: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4 + 1}$

Solución

Para evaluar el límite de una función racional en el infinito, se divide primero numerador y denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador, (se podría suponer que $x \neq 0$ puesto que solo se tiene interés en valores grandes de x). En este caso, la potencia más alta en el denominador es x^2, así que se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty} \left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

Aplicando la 5ta. ley, límite de los cocientes

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 3 - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} - 2 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty} 5 + 4 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}$$

Aplicando leyes 1era. y 2da. límites de suma y diferencia

$$= \frac{-3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}$$

Un cálculo similar muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ es también $\frac{3}{5}$. En la figura 21 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo las gráficas de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal

$$y = \frac{3}{5}$$

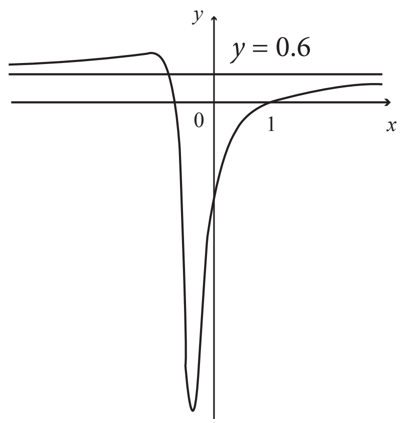


Figura 21

Ejemplo 3
Límite en el infinito negativo.

Use métodos numéricos y gráficos para determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

Solución
De la gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ en la figura 22 y la tabla de valores correspondientes, se puede observar que:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal

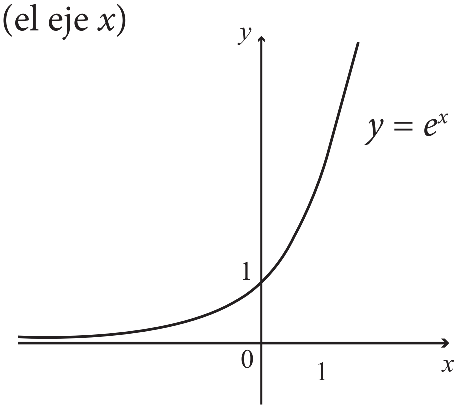


Figura 22

Ejemplo 4

Una función sin límite en el infinito.

Evalué $\lim_{x\to\infty} sen\ x$

Solución

De la gráfica de la figura 23 y la naturaleza periódica de la función seno, se puede observar que cuando se incrementa *x*, los valores de *sen x* oscilan entre 1 y -1 de manera infinita y, por lo tanto, no se aproximan a algún número definido. En consecuencias, $\lim_{x\to\infty} sen\ x$ no existe.

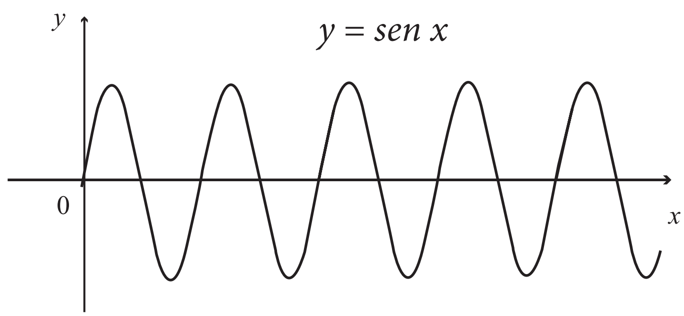


Figura 23

Límites de sucesión

Podemos representar sucesión de números a_1, a_2, a_3...
Aquí se tiene interés en su comportamiento cuando n toma valores grandes. Por ejemplo, la sucesión definida por:

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Se ilustra en la figura 24 graficando sus términos en una recta numérica y en la figura 25 mediante el trazo de su gráfica. De la figura 25 o 26 parece que los términos de la secuencia $a_n = \frac{n}{(n+1)}$ se aproximan a 1 cuando n crece. Esto se indica escribiendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

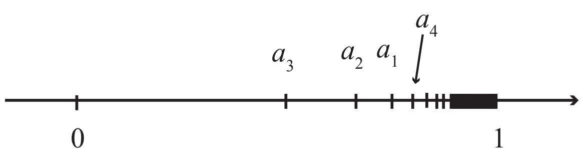


Figura 24

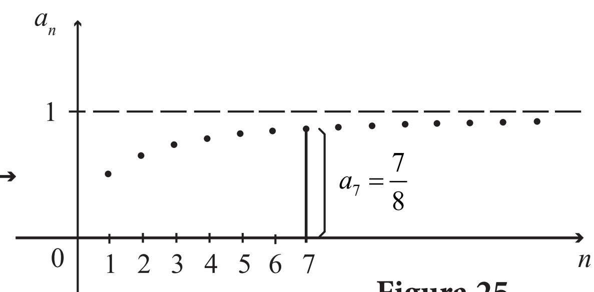


Figura 25

Definición de límite de una sucesión

Una sucesión a_1, a_2, a_3 tiene el límite L y se escribe:
$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = L$ O $a_n \to L$ cuando $n \to \infty$

Si el término n-ésimo a_n de la secuencia puede hacerse arbitrariamente cercano a L al tomar n suficientemente grande. Si $\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ existe, se dice que la sucesión converge (o es convergente). De lo contrario, se dice que la sucesión diverge (o es divergente).

Esta definición se ilustra en la figura 26

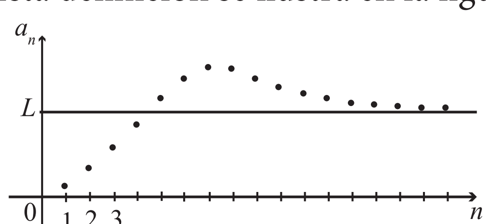


Figura 26

Gráficas de dos sucesiones con $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = L$

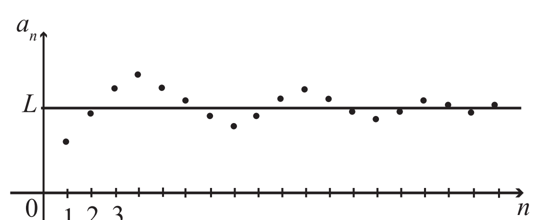


Figura 27

Si se comparan las definiciones de $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(xc) = L$, se observa que la única diferencia es que se requiere que n sea un entero. Así, lo siguiente es cierto:

si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ *cuando n es un entero, entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = L$

En particular, puesto que se sabe que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$ cuando k es un entero positivo, se tiene:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n^k}=0$ Si k es un entero positivo.

Observe que las leyes de los límites dadas en secciones anteriores se cumplen también para límites de sucesiones.

Ejemplo 5

Hallar el límite de una sucesión.

Encuentre: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

Solución

El método es similar al que se empleó en el ejemplo 2: divida numerador y denominador entre la potencia más alta de n y después use las leyes de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{1+0}=1$$

Por lo tanto, la sucesión $a_n=\frac{n}{(n+1)}$ es convergente.

Ejemplo 6

Una sucesión que diverge

Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

Solución

Si se escriben los términos de la sucesión, se obtiene: -1,1 -1,1 -1,1...
La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 28. Puesto que los términos oscilan entre 1 y -1 de manera infinita a_n no se aproxima a ningún número.

Así, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe; es decir, la sucesión $a_n = (-1)^n$ es divergente.

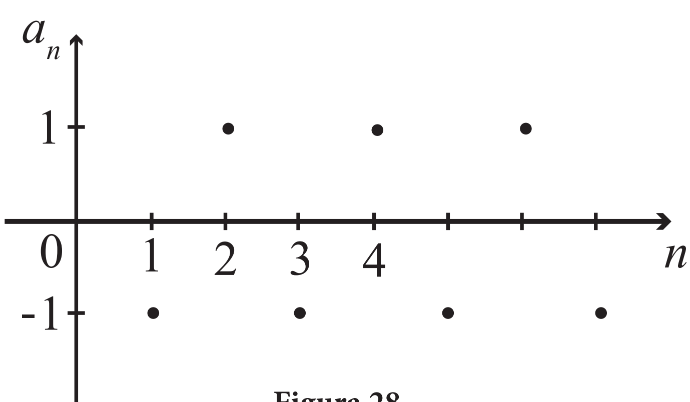


Figura 28

Ejemplo 7

Hallar el límite de una sucesión.

Encuentre el límite de la sucesión dada por:

$$a_n = \frac{15}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

Solución

Antes de calcular el límite, se simplificarán primero la expresión para a_n. Debido a que $n^3 = n \bullet n \bullet n$, se coloca un factor de n debajo de cada factor en el numerador que contiene una n:

$$a_n = \frac{15}{6} \bullet \frac{n}{n} \bullet \frac{n+1}{n} \bullet \frac{2n+1}{n} = \frac{5}{2} \bullet 1 \bullet \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Ahora se puede calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Actividad 7

En su cuaderno resuelva los siguientes ejercicios de límites infinitos:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} -x^2 + 3x + 5$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} x - 3x^4$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3+\dfrac{2}{n}\right)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} 7n$

Encuentre y dibuje asíntotas verticales de una gráfica

La palabra asíntota proviene del griego asumptotos que significa encontrarse y unirse. Denominamos asíntotas en el estudio de las funciones a las líneas rectas hacia la que se aproximan infinitamente la gráfica de una función, pero sin llegar a encontrarse ambas durante la aproximación infinita.

Podemos definir el concepto de asíntota de la siguiente forma:

Dada una función $y = f(x)$ cuya gráfica es la curva C se dice que la recta r es una **asíntota** de $f(x)$ si la curva C se acerca a r indefinidamente sin llegar a coincidir con la propia r.

Teniendo en cuenta que una asíntota es en particular una recta, vamos a distinguir tres tipos de asíntotas:

- Asíntotas horizontales
- Asíntotas verticales
- Asíntotas oblicuas

En la presente unidad solamente estudiaremos las asíntotas verticales para ello debemos partir del concepto de las mismas.

Las asíntotas verticales de una función son rectas verticales de la forma $x = k$. No hay restricciones en cuanto al número de asíntotas verticales que pueden haber en una función: hay funciones que no tienen asíntotas verticales, otras solamente tiene una y otras dos y hasta funciones infinitas se calculan de la siguiente forma:

- Sí: $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = \pm\,\infty$, entonces k es una asíntota vertical para $f(x)$ por la izquierda de la misma si el límite dado $-\,\infty$, y por la derecha si el límite ha dado $+\,\infty$.

- Sí: $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = \pm\,\infty$, entonces k es una asíntota vertical para $f(x)$ por la izquierda de la misma si el límite dado $-\,\infty$, y por la derecha si el límite ha dado $+\,\infty$.

Valores que se anulan en una asíntota

a. Valores que anulan algún denominador de la función. Por ejemplo:
   $f(x) = \frac{x}{x-1}$ tenemos que es un candidato asíntota vertical en el punto x=1.

b. Extremos de intervalos del dominio que no pertenecen al propio dominio. Por ejemplo: el dominio de $f(x) = xlim(x)$ es el intervalo $(0,+\infty)$. Por tanto $x = 0$, por consiguiente, es un candidato asíntota vertical para la función.

En consecuencia, lo primero que debemos hacer cuando se tenga que calcular las asíntotas de una función es calcular el dominio (fundamental para cualquier cálculo relacionado con la gráfica de una función) e igualar a ceros todos los denominadores que aparezcan en la misma para recopilar todos los candidatos.

Vamos a ver algunos casos interesantes que pueden darse:

1. Funciones que no tiene asíntotas verticales.

   Por ejemplo $f(x) = sen(x)$ no tiene asíntotas verticales porque su dominio es R y no tiene denominadores.

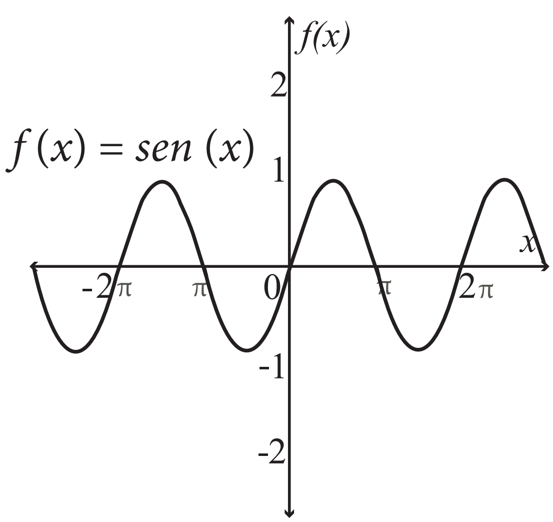


Figura 29

2. Funciones que tiene asíntota vertical por los dos lados.

Por ejemplo: $f(x)=\frac{x}{x+1}$ tiende a ser un candidato a asíntota vertical en x =-1(porque anula el denominador). Si calculamos los límites que hemos comentado anteriormente obtenemos los siguientes resultados:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

En consecuencia, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical para $f(x)$ por los dos lados así lo vemos en la siguiente gráfica la línea recta punteada.

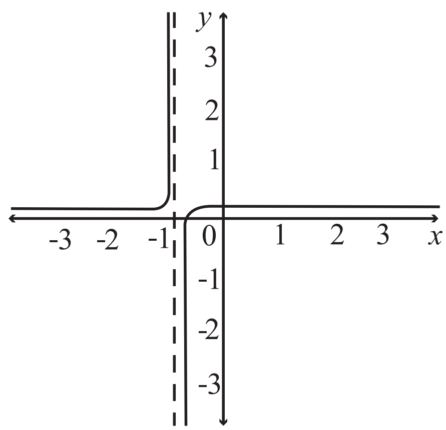


Figura 30

3. Funciones que tiene una asíntota vertical solamente por un lado.

Por ejemplo $f(x) = \frac{e^x}{x}$ tiene un candidato asíntota vertical en $x = 0$

Ahora calcularemos los límites:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Por tanto, la recta x=0 es una asíntota vertical para $f(x)$ solo por el lado derecho de la recta (en este lado el límite corresponde $a\pm\infty$) observemos la gráfica de la función a la izquierda y a la derecha de x =0.

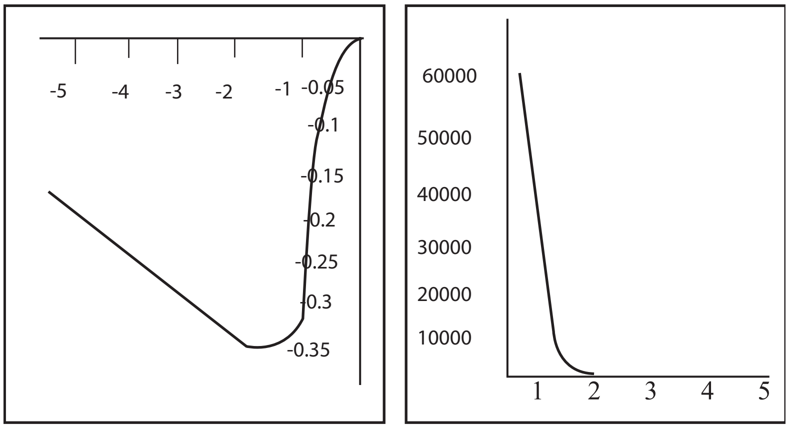


Figura 31

Funciones que tienen infinitas asíntotas verticales

Hemos comentado antes que una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales. El caso posiblemente más curioso es el de la función que tenga infinitas asíntotas de ese tipo. El ejemplo más conocido es el de la función *f(x) = tan (x)*. La razón es la siguiente:

Como $tan(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$ tenemos que los candidatos a asíntota vertical de esta función son los valores que anulen el denominador.

Por otra parte, la ecuación *cos(x)* = 0 tiene infinitas soluciones, en concreto todos lo números de la forma $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \in$ z.

Se puede comprobar de forma sencilla (con límites anteriores) que *f(x)* tiene una asíntota vertical en uno de esos puntos, por lo que *f(x)* tiene infinitas asíntotas verticales, observamos las líneas punteadas en la gráfica.

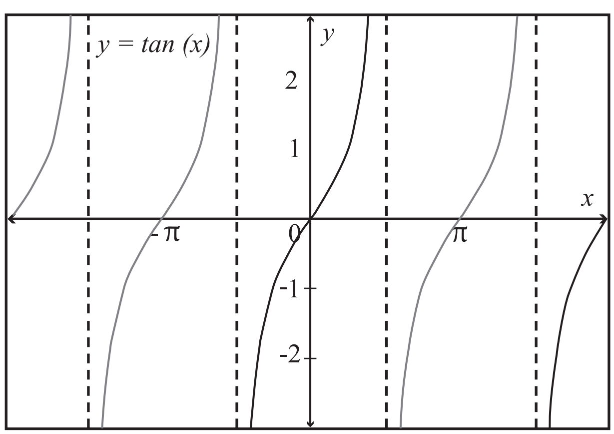


Figura 32

Actividad 8

En su cuaderno calcule las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+8}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x-2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

Valore la importancia de los límites infinitos para resolver problemas de la ciencia y tecnología[4]

Es momento de contestar las interrogantes: ¿Para qué sirve todo lo aprendido en esta unidad? Y ¿cómo podemos aplicar las propiedades y teoremas de los límites para resolver problemas de ciencia y tecnología?

Para una mayor comprensión de los problemas de límites, describiremos una serie de fenómenos donde se aplican estos:

1. Evolución de la población mundial:

   Podemos representar mediante una función de crecimiento de población respecto al tiempo, así podemos analizar lo que sucede con la población en un límite de tiempo t.

[1] Stewart, James y Redlin, Lothar. (2007). Matemáticas para el cálculo. México. International Thompson Editores.

Si calculamos el límite infinito, mediante una gráfica podremos observar el crecimiento exponencial de la población, por lo que la población en el infinito tenderá a lo infinito.

2. Velocidad instantánea:

   Partiremos de la definición de velocidad media que es el cociente del desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido, aplicado al límite, cuando el incremento de tiempo tiende a cero, obtendremos la velocidad instantánea en un tiempo dado.

3. Otros fenómenos:

Los límites y continuidad son aplicables a otros fenómenos de la física como ser: el movimiento, electromagnetismo y termodinámica. Podemos aplicar los límites para resolver problemas basados en actividades de la vida cotidiana, por ejemplo:

a. El record en la carrera de 100 metros planos marcado por el atleta jamaiquino Ussain Volt y las limitaciones de otros atletas para alcanzar esa marca.

b. Otro caso puede ser calentando un pollo, mediante los límites podemos medir la temperatura máxima y el tiempo máximo de cocción.

A continuación se desarrollarán una serie de ejemplos de la aplicación de los límites en problemas de ciencia y tecnología.

Se ha visto que los límites son necesarios para calcular la pendiente de una recta tangente o una tasa de cambio instantánea. Aquí se observa que también son necesarios para hallar el área de una región con un límite curvo. El problema de hallar tales áreas tiene consecuencias más allá de simplemente determinar el área.

Ejemplo 1

Estimar un área por medio de rectángulos.
Use rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$ de 0 a 1 (la región parabólica " S" ilustrada).

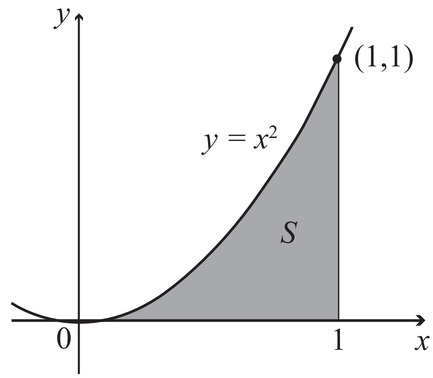


Figura 33

Solución:

Se observa primero que el área "S" debe estar en alguna parte entre 0 y 1 porque "S" está contenida en un cuadrado con longitud lateral 1.

Suponga que "S" se divide en cuatro tiras S_1, S_2, S_3 y S_4 dibujando líneas verticales $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 34a.

Se puede aproximar cada tira mediante un rectángulo con la misma que el lado derecho de la tira (véase la figura 34b). En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos finales derechos de los intervalos:

$\left(0 \text{ y } \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4} \text{ y } \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} \text{ y } \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4} \text{ y } 1\right)$

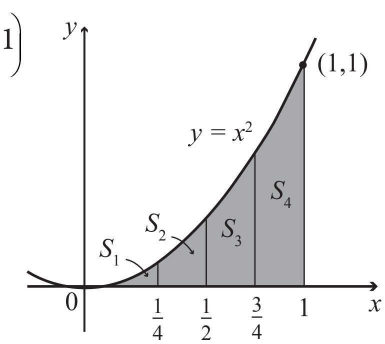


Figura 34 a

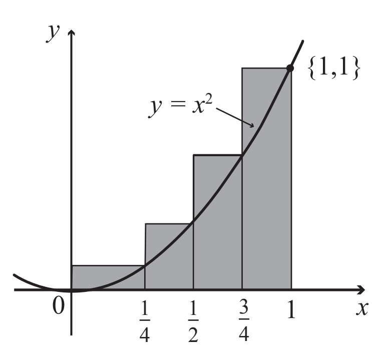


Figura 34 b

Cada rectángulo tiene amplitud $\frac{1}{4}$ y las alturas son $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2$ y 1^2. Si R_4 es la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, se obtiene:

$$R_4 = \frac{1}{4} \bullet \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \bullet 1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

De la figura 34b) se puede observar que el área A de “S” es menor que *R*, entonces $a < 0.46875$

En lugar de usar los rectángulos de la figura 34b se podrían usar los rectángulos más pequeños de la figura 34a, cuyas alturas son los valores de *f* en los puntos izquierdos de los subíntervalos (el rectángulo de la izquierda ha desaparecido porque su altura es cero.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es L_4:

$$L_4 = \frac{1}{4} \bullet 0^2 + \frac{1}{4} \bullet \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Se puede observar que el área de “S” es mayor que L_4, por lo tanto se tienen las estimaciones inferior y superior para A:

$0.21875 < a < 0.46875$

Se puede repetir este procedimiento con un número grande de tiras. En la figura 35 se muestra lo que sucede cuando se divide la región “S” en ocho tiras de igual amplitud.

Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), se obtienen las estimaciones inferior y superior para A:

$0.2734375 < A < 0.3984375$

Así que una respuesta posible a la pregunta es decir que el área verdadera de

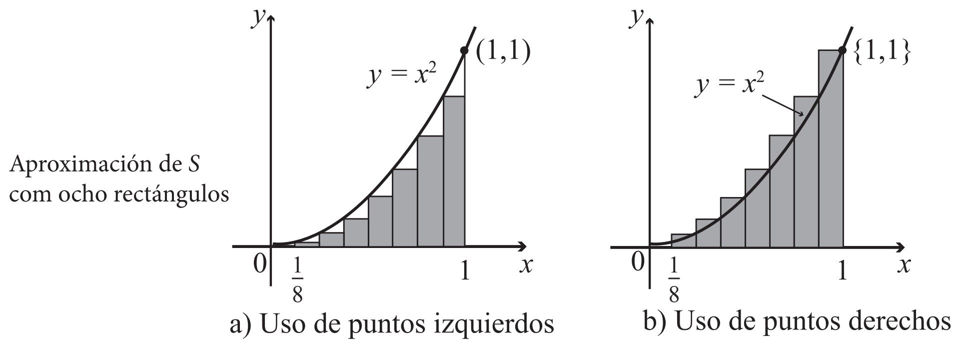


Figura 35

"S" se ubica en alguna parte entre 0.2734375 y 0.3984375.

Se podrían obtener mejores estimaciones si se incrementa el número de tiras. En la tabla del margen se muestran los resultados de cálculos similares (con una computadora) usando n rectángulos cuyas alturas se encuentran con puntos izquierdos (L_n) o puntos derechos (R_n). En particular, se puede observar al usar 50 tiras que el área está entre 0.3234 y 0.34324. Con 1000 tiras se estrecha aún más: A se localiza entre 0.3328335 y 0.3338335. Una buena estimación se obtiene promediando estos números:

$A \approx 0.3333335$

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3338335	0.3338335

De los valores de la tabla anterior parece como si R_4 se aproxima a $\frac{1}{3}$ cuando aumenta.

Es importante conocer la aplicación de los límites para problemas relacionados con las matemáticas financieras, el cálculo del interés compuesto que parte de la relación de la variación del capital en función del tiempo afectado por una tasa de interés.

El interés compuesto representa la acumulación de intereses devengados por un capital inicial (C) o principal a una tasa de interés (i) durante (n) periodos de imposición de modo que los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiran sino que se reinvierten o añaden al capital inicial, es decir, se capitalizan. Para esto utilizaremos la siguiente fórmula:[5]

$S = C\,(1 + i)^n$

Donde:

S = monto, es el capital final que convierte un capital inicial en determinado tiempo afectado por una tasa de interés.

C = capital inicial

i = tasa de interés

n = tiempo (periodos de pago)

Ejemplo 2
Averiguar en qué se convierte un capital de L. 1, 200,000.00 al cabo de 5 años y a una tasa de interés compuesto anual del 8 %.

Aplicando la fórmula $S = C\,(1 + i)^n$

Reemplazamos con los valores conocidos:

La tasa de interés compuesto $i = \frac{8}{100} = 0.08$

Capital inicial $C = L\ 1{,}200{,}000.00$

[5] Lincoyán, Portus G. (2005). Matemáticas Financieras. Colombia: Editorial McGraw-Hill Interamericana.

Periodo de tiempo en años (n) = 5 años

$$S = C(1 + i)^n$$

$$S = 1{,}200{,}000(1+0.08)^5$$

$$S = 1{,}200{,}000(1.08)^5$$

$$S = 1{,}200{,}000(1.4693)$$

$$S = 1{,}763{,}194$$

Respuesta:

El monto o capital final es de L. 1, 763,194.00

Ejemplo 3

Un cierto capital invertido durante 7 años a una tasa de interés compuesto anual del 10 % se ha convertido en L.1.583.945. Calcular el capital inicial, sabiendo que los intereses se han pagado semestralmente.

Resolución:

Aplicando la fórmula $S = C(1 + i)^n$

Reemplazamos con los valores conocidos:

Capital final o monto S = L.1, 583,945

La tasa de interés compuesto $i = \frac{10}{100} = 0.10$ anual

Como los pagos son semestrales se calcula el interés para pagos semestrales (dos veces al año) $i = \frac{0.10}{2} = 0.05$ semestral

n son los periodos de pago que se obtiene de multiplicar el tiempo total de pago por el número de pagos anuales es decir:

Semestral multiplicamos por 2
Trimestral multiplicamos por 4
Bimestral multiplicamos por 6
Mensual multiplicamos por 12 y
Diario multiplicamos por 360 (año comercial)

En este caso en un año se hacen dos pagos por lo que calcularemos los pagos para un periodo semestral:

$n = 7 * 2 = 14$ Semestres

$$S = C\,(1 + i)^n$$
$$1{,}583{,}945 = C\,(1+0.05)^{14}$$
$$1{,}583{,}945 = C\,(1.05)^{14}$$
$$1{,}583{,}945 = C\,(1.9799)$$

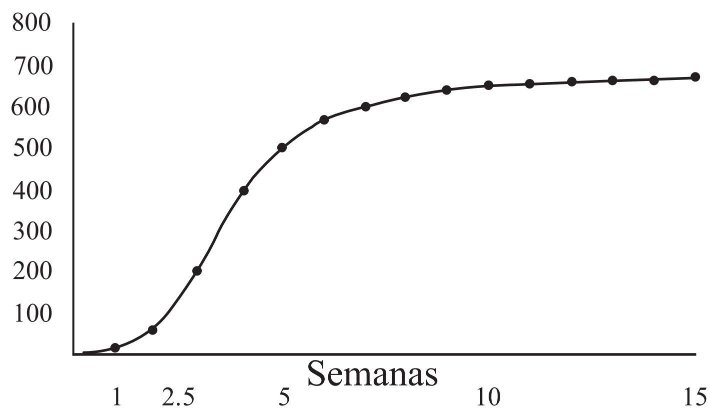
Despejando C: $= \frac{1{,}583{,}945}{1.9799} = 799{,}999.99$

Respuesta: el capital inicial es L. 799,999.99 si redondeamos tendremos L. 800,000.00

Actividad 9

Resuelva en su cuaderno los siguientes problemas de ciencia y tecnología aplicando límites:

1. Un aterrizaje de un avión proporciona una visión intuitiva del concepto de límite de una función. El avión aterrizará a lo largo de la pista (variable x), mientras que su altura (variable y) va disminuyendo hasta hacerse 0 al tocar la pista. La pista en este caso es la asíntota horizontal de la trayectoria del avión. Elabore la representación gráfica del aterrizaje del avión.
2. La gráfica mostrada abajo nos representa los datos estadísticos de 15 semanas de un conjunto de persona que se contagiaron de gripe. Tenemos la información exacta para el sábado de la semana 2 que son 50 y el sábado de la semana 3 fueron 200. Si hacemos la suposición de que la tasa de infección crece con una cierta regularidad; entonces el patrón de crecimiento debe obtenerse a partir de la gráfica:



   a. ¿Cuánta gente se contagió el miércoles de la tercera semana?
   b. ¿Cuál fue el total de la gente contagiada el sábado de la semana 15?

3. ¿Cuánto dinero tenemos que invertir para obtener L.152,000.00 a un interés del 9 trimestral en un periodo de tres años?

4. ¿Cuánto tenemos que pagar al finalizar 15 años por un préstamo de L. 90, 000.00 a un interés del 11 mensual?

Actividad metacognitiva

Con base a lo aprendido anteriormente, conteste lo siguiente:

1. ¿Qué estrategias puede utilizar para diferenciar un límite finito de un límite infinito?

2. Valore cuál es la utilidad de los límites para resolver problemas de ciencia y tecnología:

3. Valore cómo puede establecer una diferencia entre la continuidad y discontinuidad:

4. ¿Considera que adquirió nuevos aprendizajes al estudiar los temas de esta unidad? ¿Puede mencionar cuáles?

5. ¿Qué contenidos de la presente unidad generaron mayor dificultad? ¿por qué?

____

____

____

____

Autoevaluación

Tipo selección única

Instrucciones: a continuación encontrará proposiciones de selección única. Lea cada una y encierre con un círculo la letra que considere correcta para cada proposición.

1. Método que utiliza el álgebra para calcular el límite de una función:
   a) Numérico
   b) Gráfico
   c) Analítico
   d) Herramientas tecnológicas

2. ¿Cuál ley de los límites se cumple en la siguiente expresión $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n$?
   a) Límite de una suma
   b) Límite de un producto
   c) Límite de un cociente
   d) Límite de una potencia

3. Es aquel tipo de discontinuidad que se da cuando en un punto de la función existe y es finito el límite del punto:
   a) Elemental
   b) Evitable
   c) Esencial
   d) De salto

4. ¿Cuál de las siguientes opciones es la propiedad de los límites está definida por la expresión $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$?
 a) Crecimiento
 b) Decrecimiento
 c) Continuidad
 d) Sucesión

5. Son las líneas rectas donde se aproximan infinitamente las gráficas de una función:
 a) Asíntotas
 b) Arco
 c) Infitésima
 d) Límite

6. Este tipo de límite se da cuando los límites del lado derecho e izquierdo son iguales:
 a) Límite lateral
 b) Límite unilateral
 c) Límite bilateral
 d) Límite infinito

7. ¿Cuál de las siguientes opciones es la utilidad que podemos obtener de los límites y la continuidad para medir el incremento de la población mundial?
 a) Permite conocer la densidad de la población a nivel mundial
 b) Permite detectar la natalidad, mortalidad y movilidad de la población mundial
 c) Permite estudiar la temperatura a que están sometidas las poblaciones en distintos puntos de la tierra
 d) Permite calcular el aumento de la población en función del tiempo

8. Se definen como una cantidad infinitamente pequeña en la que se definen estrictamente los límites:
 a) Infitésima
 b) Números reales
 c) Valores de aproximación
 d) Valores falsos.

9. El límite de $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} + 2}{x + 3}$

a) 0

b) 1

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

10. El $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$ es:

a) e

b) 1

c) 0

d) $\frac{1}{e}$

Tipo práctico

Instrucciones: resuelva cada ejercicio en forma clara y ordenada.

1. Complete la tabla para estimar los valores en cada caso:

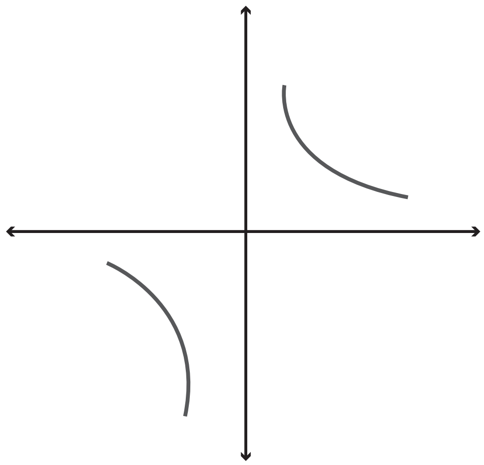
x	0.9	0.99	0.999	→	1
$f(x) = x^2$-1				→	
	1.1	1.01	1.001	→	1
$f(x) = x^2$-1				→	

2. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} (3x+2)$:

3. Calcule $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x}{x+3}$:

4. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x - 3}$:

5. Observe la siguiente gráfica y conteste:



a) ¿Qué tipo de discontinuidad se presenta en la gráfica?

____

b) Justifique por qué a su criterio se representa ese tipo de continuidad:

____

____

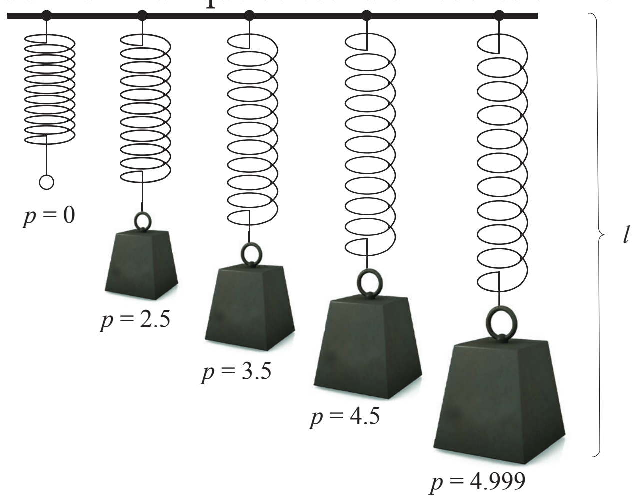
6. Determine la continuidad de la función $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$:

7. Determine la asíntota vertical de $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 2}$:

8. Probar que $x^3 + x - 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, 1]$:

9. Considere un resorte colgado por uno de sus extremos en una barra y con un peso p en el otro extremo. Se sabe que el resorte se rompe si el peso p es igual o mayor que 5 kilos.

   Determine la longitud máxima l que se estira el resorte sin romperse.



10. ¿Cuánto tenemos que invertir durante 5 años si pretendemos tener L.2,000,000 en un banco que paga una tasa del 10 % anual?

Bibliografía

James, Stewart; Lothar, Redlin y Saleem Watson. (2007). *Precálculo*. México: Thompson Editores.

Mata, Águeda y Reyes, Miguel. *Continuidad.* Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de: http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/calculo/apuntes/23_continuidad.pdf

Portus G., Lincoyán. (2005). *Matemáticas financieras.* Colombia: Editorial McGraw-Hill.