Unidad II

Ángulos perpendiculares y paralelismo

Introducción

El descubrimiento de los ángulos y su importancia data de miles de años y nos permite hasta el día de hoy resolver problemas técnicos como la localización de aviones con el radar o estudiar fenómenos naturales como el movimiento de los astros.

Cada vez que hacemos girar un objeto estamos generando un ángulo, por ejemplo: cuando abrimos o cerramos una puerta, el movimiento de las agujas de un reloj, el movimiento de nuestros brazos, etc. De la misma manera encontramos ángulos prácticamente en todo lo que nos rodea: los marcos de las ventanas, nuestra posición al sentarnos, las esquinas de una habitación, etc.

En esta unidad veremos información vieja bajo una nueva luz. Antes analizamos que las propiedades de igualdad reflexiva, simétrica y transitiva se pueden convertir fácilmente en teoremas sobre segmentos y ángulos congruentes. En la presente unidad nos moveremos hacia un nuevo campo, donde les daremos uso a todos los elementos de nuestra caja de herramientas de geometría para resolver problemas y crear nuevos teoremas.

Estamos en la transición entre los conceptos introductorios, que son necesarios pero no muy "geométricos", y el verdadero corazón de la geometría. Necesitábamos cierta cantidad de material fundamental antes de que pudiéramos comenzar a introducirnos a conceptos y relaciones más retadoras y poco familiares. Tenemos como fundamentos las definiciones, los postulados y las propiedades análogas a las de igualdad. De aquí en adelante podremos experimentar la geometría en un nivel más rico y profundo.

Sin importar qué tan complicado o abstracto pueda parecer el modelo de una situación de la vida real, a menudo el análisis final puede expresarse en términos de líneas simples, segmentos y ángulos. Al finalizar esta unidad seremos capaces de aplicar los teoremas que aquí se presentan para solucionar problemas cotidianos que impliquen figuras geométricas.

¿Qué vamos a aprender?

Competencias	Objetivos	Contenido
1. Conceptualizar ángulos, su medida y clasificación.	1.1 Definir los ángulos y sus características. 1.2 Clasificar ángulos tomando en cuenta su medida. 1.3 Utilizar ángulos congruentes para determinar su medida. 1.4 Construcción de ángulos haciendo uso de regla, compás y transportador.	1.1 Definición de ángulo 1.2 Clasificación de ángulos según su medida 1.3 Utilización de ángulos congruentes para determinar su medida (ángulos consecutivos, adyacentes, complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice) 1.4 Utilización de regla, compás y transportador para la construcción de ángulos
2. Construir la bisectriz de un ángulo.	2. Encontrar la bisectriz de un ángulo.	2. Definición y construcción de la bisectriz de un ángulo
3. Identificar, describir y trazar rectas paralelas y reconocer su presencia en figuras geométricas planas.	3. Comprender el concepto de rectas paralelas y sus propiedades.	3. Definición de rectas paralelas
4. Construir rectas paralelas.	4.1 Construir, haciendo uso de instrumentos de medición, rectas paralelas.	4.1 Construcción de rectas paralelas

Competencias	Objetivos	Contenido
	4.2 Identificar y clasificar los ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal o secante. 4.3 Determinar las relaciones de congruencia de los ángulos creados por la intersección de una recta transversal y dos paralelas.	4.2 Construcción de una recta transversal o secante a dos rectas paralelas 4.3 Determinación de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
5. Aplicar las propiedades para la demostración de rectas paralelas.	5. Realizar demostraciones sencillas relacionadas con los ángulos y rectas.	5. Aplicación de las propiedades de rectas paralelas cortadas por una transversal
6. Identificar, describir y trazar rectas perpendiculares y reconocer su presencia en figuras geométricas planas.	6. Comprender el concepto de perpendicularidad y sus propiedades.	6. Definición de perpendicularidad
7. Construir rectas perpendiculares.	7.1 Construir, haciendo uso de instrumentos de medición, rectas perpendiculares. 7.2 Determinar la mediatriz de un segmento como aplicación de perpendicularidad.	7.1 Construcción de de rectas perpendiculares 7.2 Definición de la mediatriz de un segmento

Competencia	Objetivos	Contenido
	7.3 Construir, haciendo uso de instrumentos de medición, la mediatriz del segmento.	7.3 Construcción de la mediatriz de un segmento
8. Resolver problemas utilizando las propiedades de ángulos congruentes y rectas paralelas y perpendiculares.	8. Aplicar las propiedades de los ángulos congruentes, rectas paralelas y perpendiculares en la resolución de problemas de la vida diaria.	8. Resolución de problemas utilizando las rectas paralelas y perpendiculares

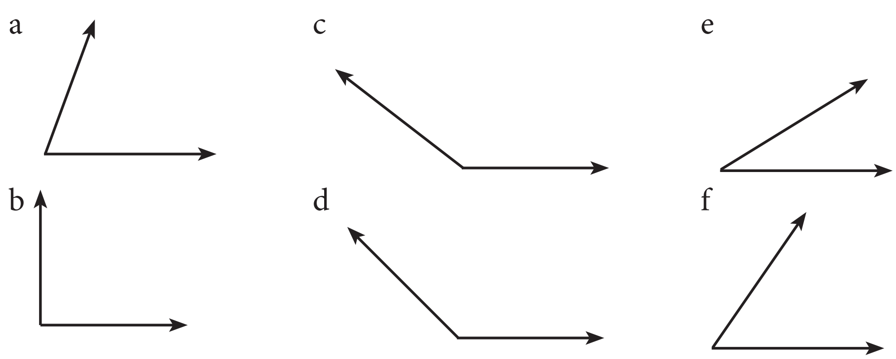
Mis conocimientos previos

Instrucciones: conteste las preguntas que se le plantean a continuación.

1. ¿Qué necesitamos saber para hacer un plano, mapa o dibujo utilizando instrumentos de medición?

2. ¿Qué instrumentos se necesitan para trazar con precisión diferentes tipos de líneas?

3. Sin emplear un transportador, estime la medida de cada ángulo.



a ______
b ______
c ______
d ______
e ______
f ______

4. Si tiene una recta y un punto no perteneciente a esta recta, ¿cuántas rectas paralelas a la recta anterior pueden pasar por dicho punto? Conteste después de haberlo comprobado con un dibujo.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y con el tutor.

Ángulos

En la unidad anterior los puntos y los conjuntos de puntos fueron los temas principales, además exploramos varios postulados y teoremas de las rectas, planos y de sus diversos subconjuntos. Nuestro nuevo contenido habla de otro conjunto de puntos. El conjunto de puntos que forman un ángulo.

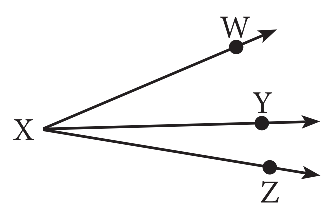
Definición: un ángulo es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo. Los rayos se llaman lados y el punto extremo común se llama vértice.

Notación:

$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = \angle BAC$ o $\angle CAB$; $\overrightarrow{AB}$ U $\overrightarrow{AC}$ se llaman lados, A se llama vértice. Un ángulo con los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se puede nombrar BAC y CAB o $\angle A$, señalando A como el vértice del ángulo.

Ejemplo 1:

Nombre los tres ángulos de la figura.



Solución:

$\angle WXY$ o $\angle YXW$
$\angle YXZ$ o $\angle ZXY$
$\angle WXZ$ o $\angle ZXW$

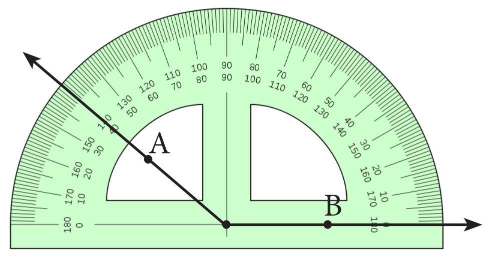
Medición de ángulos

Para poder describir los ángulos y conocer sobre sus propiedades es de gran utilidad saber medirlos.

Los siguientes postulados son relaciones que no se pueden demostrar, sin embargo, hacen posible el desarrollo de la geometría de ángulos.

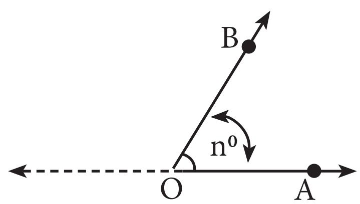
Postulado 2.1. A todo ángulo le corresponde un número real n tal que $0 \angle n \angle 180$.

Analice la siguiente imagen:



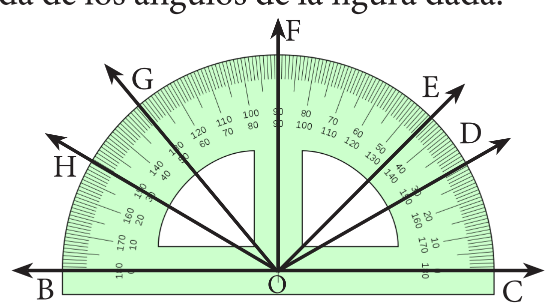
Al ángulo ∠ BOA le corresponde un número real, el cual es la medida en grados del ángulo.

Postulado 2.2. Dado un rayo $\overrightarrow{OA}$ en un plano, para cada número n, 0 n ∠ 180, hay exactamente un rayo $\overrightarrow{OB}$ sobre un lado de $\overrightarrow{OA}$, tal que la medida de AOB es el número dado n.



Ejemplo 2:

Encuentre la medida de los ángulos de la figura dada.



Solución:

Si hay r grados en el ABC, entonces escribiremos m ∠ ABC = r, en la cual m significa medida.

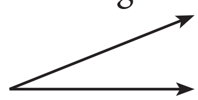
Observando las marcas del transportador tenemos que:

m ∠ CAD = 30˚
m ∠ CAE = 45˚
m ∠ CAF = 90˚
m ∠ CAG = 130˚
m ∠ CAH = 150˚

Clasificación de ángulos según su medida

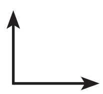
Los ángulos según su medida se pueden clasificar en agudos, obtusos, llanos y rectos.

- Si un ángulo tiene menos de 90°, se llama ángulo agudo.



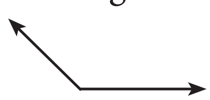
0 ∠ m A ∠ 90°

- Un cuarto de vuelta es un giro de 90°, también llamado ángulo recto.



m ∠ A = 90°

- Si un ángulo tiene más de 90°, pero menos de 180°, se llama ángulo obtuso.



90° ∠ m A ∠ 180°

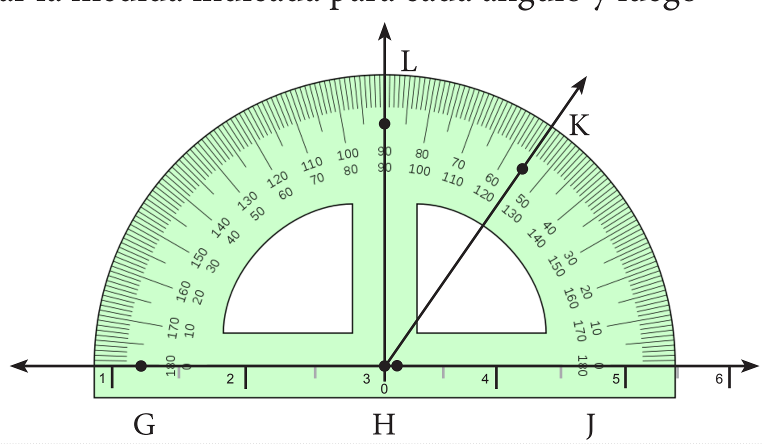
- Media vuelta completa (lo que significa pasar justo al lado opuesto) es un giro de 180°. Este tipo de ángulo se llama ángulo llano.

m ∠ A = 180°

Ejemplo 3:

Use el diagrama para encontrar la medida indicada para cada ángulo y luego clasifíquelos.

a. ∠ KHJ
b. ∠ GHK
c. ∠ GHJ
d. ∠ GHL



Solución:

El transportador tiene una escala interior y otra exterior. Cuando medimos un ángulo tenemos que tomar en cuenta cuál de las dos escalas debemos usar.

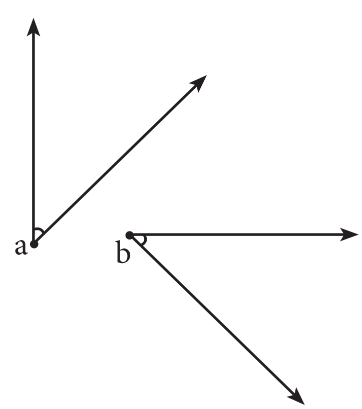
a. $\overrightarrow{HJ}$ está alineado con 0° en la escala interior del transportador, $\overrightarrow{HK}$ pasa por 55° en la escala interior, entonces m ∠ KHJ = 55°, por lo que es un ángulo agudo.
b. $\overrightarrow{HG}$ está alineado con 0° en la escala exterior, $\overrightarrow{HK}$ pasa por 125° en la escala exterior, entonces m ∠ GHK =125°, por lo que es un ángulo obtuso.
c. m ∠ GHJ = 180°. Es un ángulo llano.
d. m ∠ GHL = 90°. Es un ángulo recto.

Congruencia de ángulos

Los ángulos congruentes son ángulos con exactamente la misma medida.

Ejemplo 4:

En la figura mostrada, ∠ A es congruente a ∠ B pues ambos miden 45º.



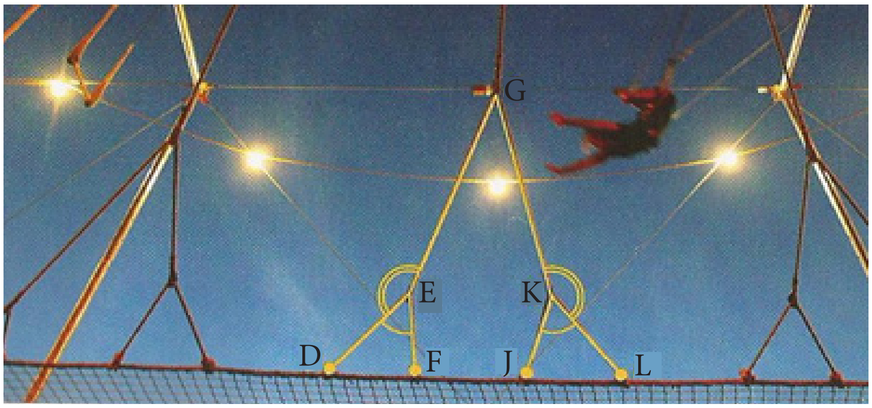
La medida de los ángulos es igual: m ∠ A ≅ m ∠ B

La medida de los ángulos es congruente: m ∠ A m ∠ B

La congruencia de ángulos se muestra en las figuras marcando los ángulos con el mismo número de arcos pequeños cerca del vértice.

Ejemplo 5:

En la fotografía se muestran algunos de los ángulos formados por las cuerdas de un trapecio. Identifique los ángulos congruentes si m ∠ DEG = 157°. ¿Cuál es la medida de m ∠ GKL?



Solución:

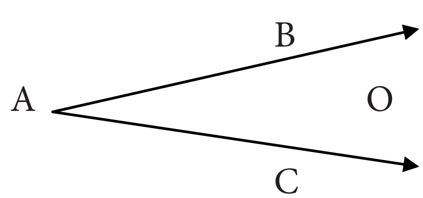
Hay dos pares de ángulos congruentes:

∠ DEF ≅ ∠ JKL y ∠ DEG ≅ ∠ GKL
∠ porque ∠ DEG ≅ GKL ∠, m ∠ DEG ≅ m ∠ GKL

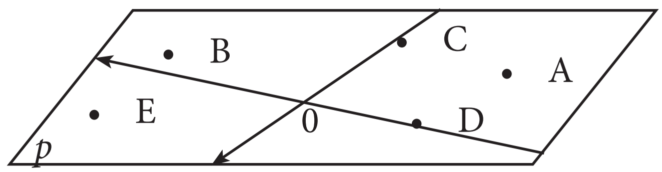
Entonces m ∠ GKL = 157°

Interior y exterior

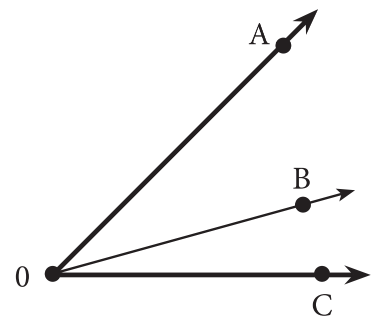
Si ∠ ABC es un ángulo en el plano p, entonces un punto B del plano p está en el interior del ángulo si y solo si está en el mismo lado del punto A respecto a $\overrightarrow{BC}$ y en el mismo lado del punto C respecto a $\overrightarrow{AB}$.



El exterior de un ángulo es el conjunto de todos los puntos del plano del ángulo que no están en el ángulo ni en el interior del ángulo.

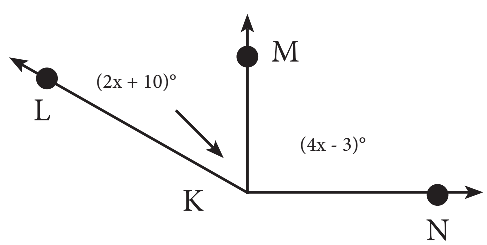


Postulado 2.3. m ∠ COB + m ∠ BOA = m ∠ COA si y solo si B está en el interior del ∠ COA.



Ejemplo 6:

Dado que m ∠ LKN = 145°. Encuentre m ∠ LKM y m ∠ MKN:



Solución:

Paso 1

Escriba y resuelva una ecuación para encontrar el valor de x.

m ∠ LKN = m ∠ LKM + m ∠ MKN	Postulado 2.3. Adicione los ángulos.
$145° = (2x + 10)° + (4x - 3)°$	Sustituya la medida de los ángulos.
$145 = 6x + 7$	Reduzca términos semejantes.
$145 - 7 = 6x + \cancel{7} - \cancel{7}$	Reste 7 a ambos lados.
$138 \div 6 = 6x \div 6$	Divida ambos lados entre 6.
$23 = x$	

Paso 2

Evalúe en las expresiones dadas x = 23
m $\angle$ LKM = $(2x + 10)° = (2(23) + 10)° = 56°$
m $\angle$ MKN = $(4x – 3)° = (4(23) – 3)° = 89°$
Entonces m $\angle$ LKM = 56° y m $\angle$ MKN = 89°

Actividad 1

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le plantean a continuación.

1. ¿Cuáles de los puntos marcados en la figura están en el interior de los siguientes ángulos?

a. $\angle$ COD

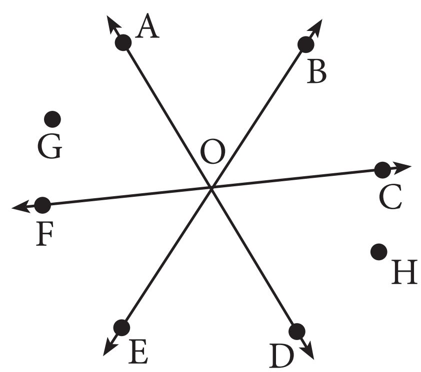
b. $\angle$ AOC

c. $\angle$ FOB

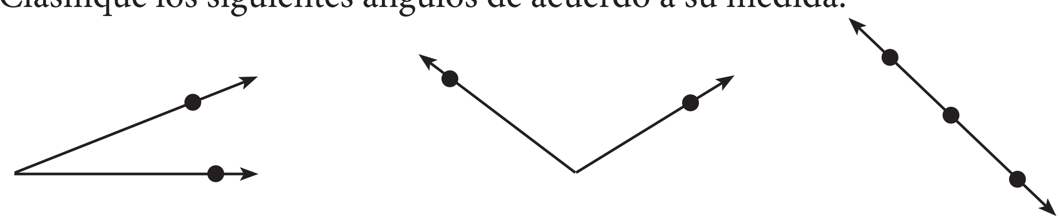
d. $\angle$ EOC

e. $\angle$ BOC

f. $\angle$ BOD

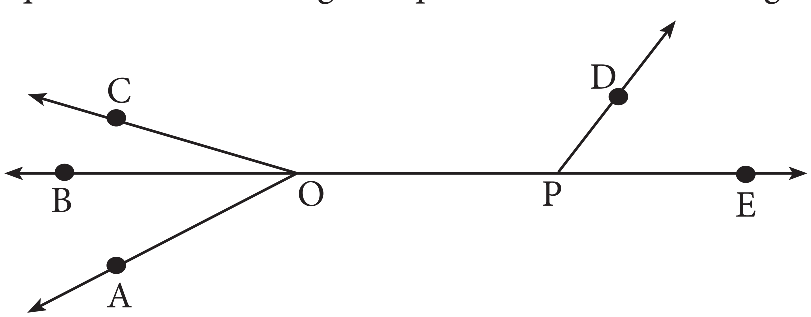


2. Clasifique los siguientes ángulos de acuerdo a su medida.



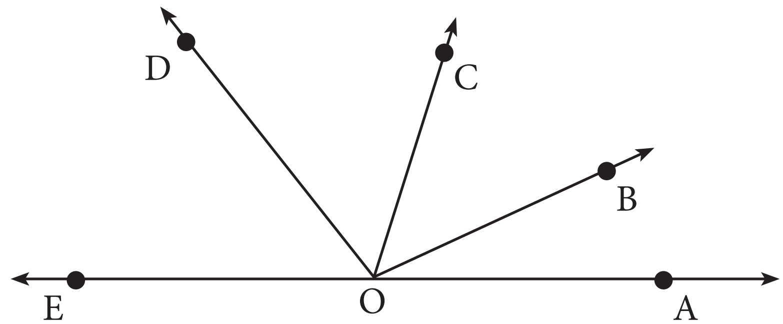
_________________ _________________ _________________

3. Identifique los diferentes ángulos que se encuentran en la gráfica.



4. Use el transportador para determinar la medida de cada uno de los ángulos de la lista.

   a. $\angle$ AOB
   b. $\angle$ BOC
   c. $\angle$ DOE
   d. $\angle$ COE
   e. $\angle$ COB
   f. $\angle$ AOD



5. ¿Cómo es el ángulo que genera el giro del segundero de un reloj a los 12 segundos?, ¿y a los 20?¿Cuántos segundos tienen que transcurrir para que cuando gire sea un ángulo llano?

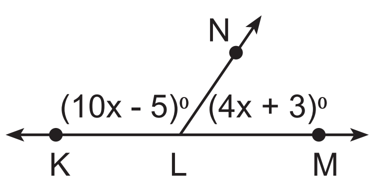


______________ ______________ ______________

6. Encuentre la medida indicada para cada ángulo.

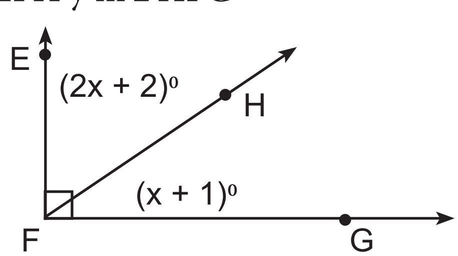
   a. Dado que $\angle$ KLM es un ángulo llano, encuentre:

   m $\angle$ KLN y m $\angle$ NLM



   b. Dado que $\angle$ EFG es un ángulo recto, encuentre:

   m $\angle$ EFH y m $\angle$ HFG



7. Construya, usando regla, compás y transportador, los siguientes ángulos:

   a. 37°

   b. 172°

   c. 86°

   d. 45°

   e. 230°

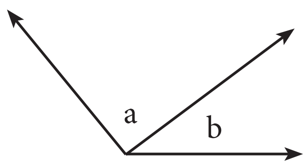
   f. 320°

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

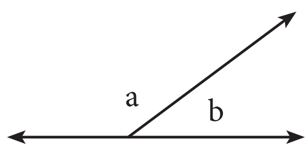
El ser humano emplea y mide ángulos en muchas cosas que contruye y que son útiles para la vida.

Tipos de ángulos según su posición

Ángulos consecutivos son aquellos que tienen el vértice y un lado común.

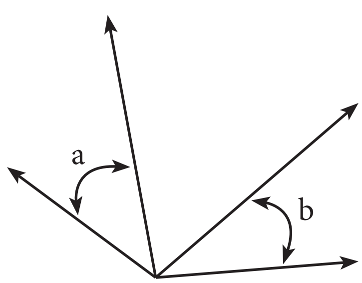


Ángulos adyacentes son aquellos que tienen el vértice y un lado común, y los otros lados, situados uno en prolongación del otro, forman un ángulo llano.

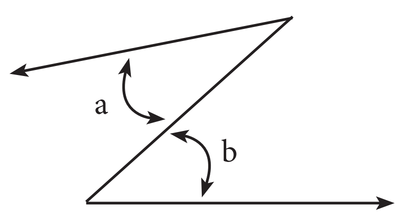


Postulado 2.4. La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es menor que 180º si y solo si todo punto de su lado común (excepto el vértice) está en el interior del ángulo formado por sus lados comunes.

¿Cuáles ángulos no son adyacentes?

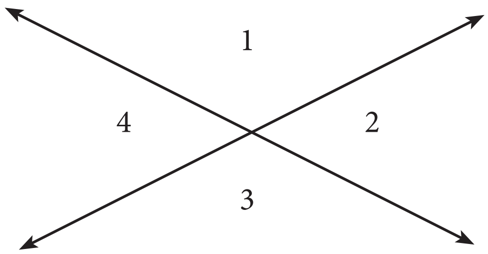


No son adyacentes aquellos que solo comparten el vértice, pero ningún lado.



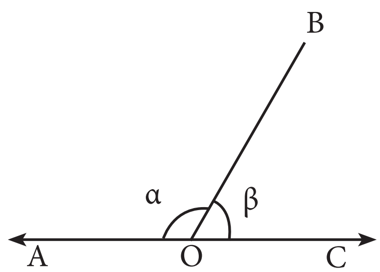
No son adyacentes aquellos que solo comparten un lado, pero no el vértice.

Ángulos opuestos por el vértice son los que teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro.



Los ángulos 1 y 3 son iguales.
Los ángulos 2 y 4 son iguales.

Par lineal: son dos ángulos adjacentes cuyos lados no comunes son rayos opuestos que forman una recta.



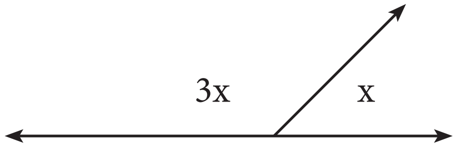
Teorema 2.1. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Ejemplo 7:

Dos ángulos forman un par lineal. La medida de uno de los ángulos es 3 veces la medida del otro. Encuentre la medida de cada ángulo.

Solución:

$x + 3x = 180°$	Escribir una ecuación.
$4x = 180°$	Reducir términos semejantes.
$x = 45°$	Dividir cada lado entre 4.



La medida del ángulo x es 45°.
La medida del ángulo 3x es 3 (45°) = 135°

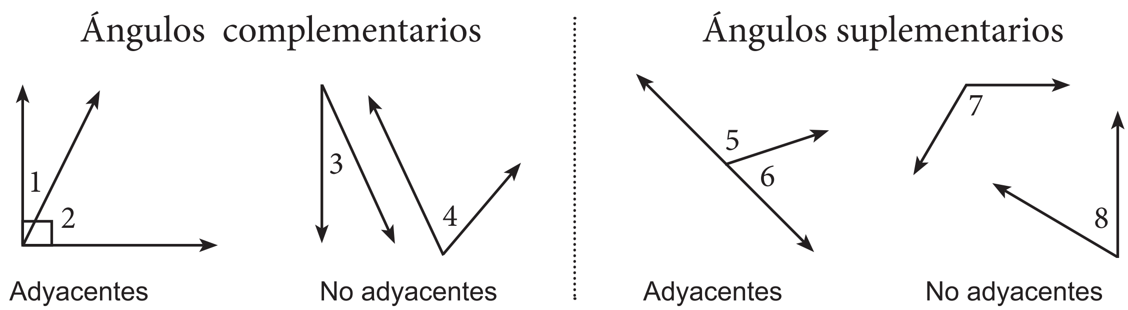
Clases de ángulos según su suma

Ángulos complementarios: dos ángulos son complementarios si suman 90°.

Ángulos suplementarios: dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

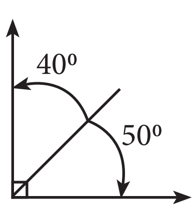
Los ángulos complementarios y suplementarios pueden ser también adyacentes.

Ángulos adyacentes: son aquellos que tienen el vértice y un lado común, pero no tienen puntos interiores en común.

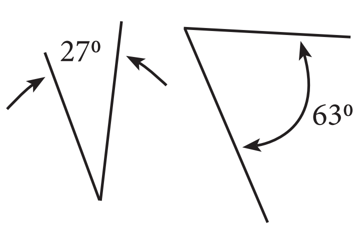


Ejemplo 8:

Estos dos ángulos (40° y 50°) son complementarios:



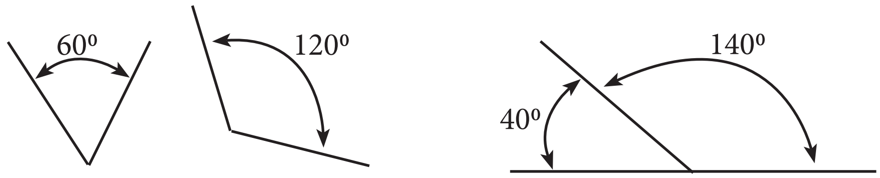
Son complementarios porque 27° + 63° = 90°:



Para su complementación los ángulos no tienen por qué estar juntos.

Ejemplo 9:

60° y 120° son ángulos suplementarios.
40° y 140° son ángulos suplementarios.



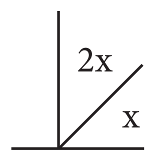
No necesitan estar juntos para ser suplementarios con tal de que su suma sea 180 grados.

Ejemplo 10:

Si el complemento del ángulo x es 2x, ¿cuál es el valor de x en grados?

Solución:

$$2x + x = 90°$$
$$3x = 90°$$
$$x = 90° \div 3$$
$$x = 30°$$

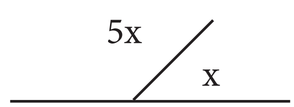


Ejemplo 11:

Si el suplemento del ángulo x es 5x, ¿cuál es el valor de x?

Solución:

$$5x + x = 180°$$
$$6x = 180$$
$$x = 180° \div 6$$
$$x = 30°$$



Ejemplo 12:

Encuentre dos ángulos complementarios tales que su diferencia sea 30°.

Solución:

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 90°$$
$$x - y = 30°$$

Resolvemos el sistema mediante el método de suma y resta.

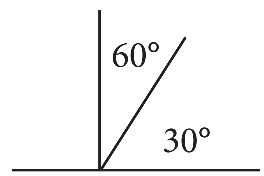
$$\begin{array}{rl} x + y & = 90° \\ x - y & = 30° \\ \hline 2x & = 120° \end{array}$$

Obtenemos:

$$2x = 120°$$
$$x = 120° \div 2$$
$$x = 60°$$

Hacemos la sustitución del valor encontrado de x en la primera ecuación:

$$60° + y = 90°$$
$$y = 90° - 60°$$
$$y = 30°$$



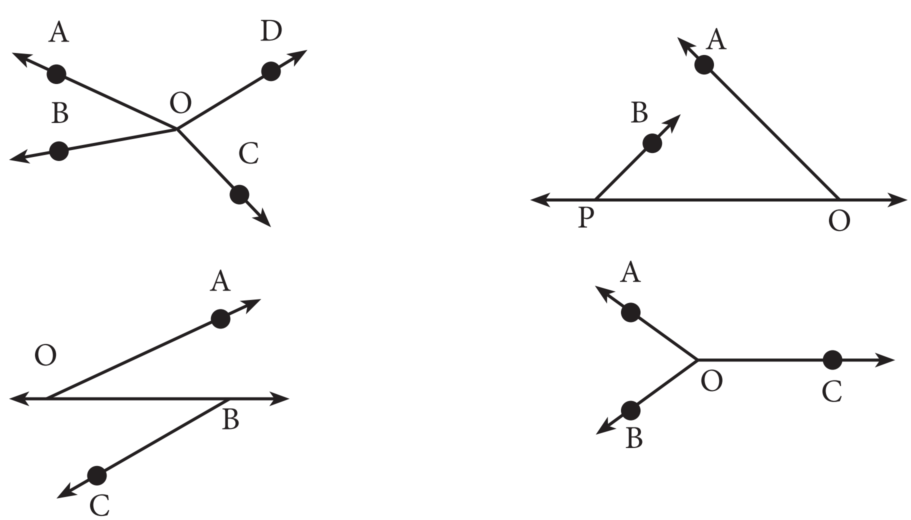
La solución al problema es $x = 60°$, $y = 30°$.

Recordemos el postulado 2.4. La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es menor que 180° si y solo si todo punto de su lado común (excepto el vértice) está en el interior del ángulo formado por sus lados comunes.

Actividad 2

Instrucciones: resuelva en su cuaderno los ejercicios que se le plantean a continuación.

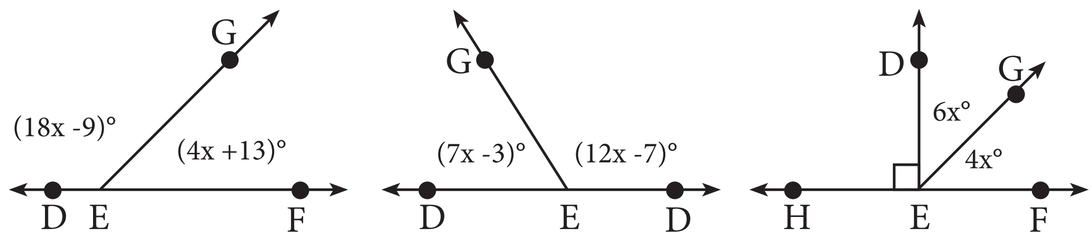
1. Identifique y nombre cada pareja de ángulos adyacentes.



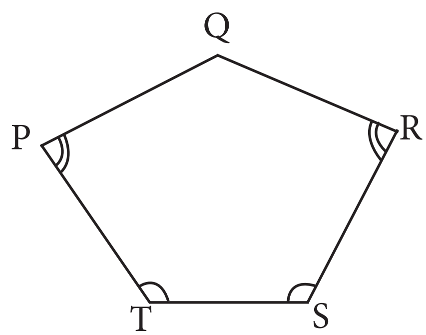
2. $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos suplementarios. Dada la m $\angle 1$, encuentre m de 2.

   a. m $\angle 1 = 60°$
   b. m $\angle 1 = 155°$
   c. m $\angle 1 = 130°$
   d. m $\angle 1 = 27°$

3. Encuentre m $\angle$ DEG y m $\angle$ GEF.

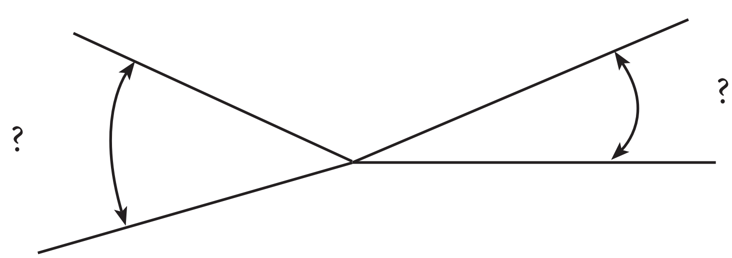


4. Analice la figura y haga lo que se le pide a continuación.

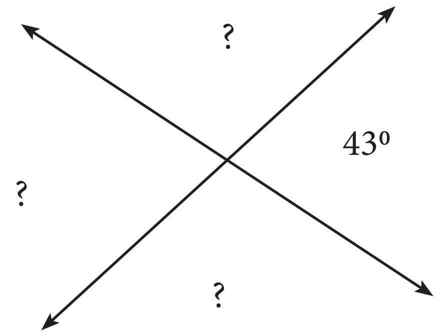


   a. Identifique todos los pares de ángulos congruentes.
   b. En la figura m $\angle$ PQR = 130°, m $\angle$ QRS = 84° y m $\angle$ TSR = 123°, encuentre la medida del otro ángulo.

5. ¿Son opuestos por el vértice los ángulos de la figura siguiente? ¿Por qué?



6. Complete las medidas sin transportador.



7. Verifique si el ángulo E, que mide 134º, y el ángulo D, cuya amplitud es 46º, son o no ángulos suplementarios.

8. ¿Son suplementarios dos ángulos si miden 23º y 114º respectivamente?

9. Encuentre los ángulos de "x", "y" cuya suma es 180° y cuya diferencia es 28°.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Construcción de ángulos

Con una regla y un transportador es posible construir un ángulo de una amplitud determinada. Debemos tener cuidado durante su construcción y asegurarnos de que el centro del transportador esté colocado exactamente en el extremo de la semirrecta a partir de la cual construiremos el ángulo; este extremo será el vértice del ángulo.

Construir un ángulo de una amplitud determinada

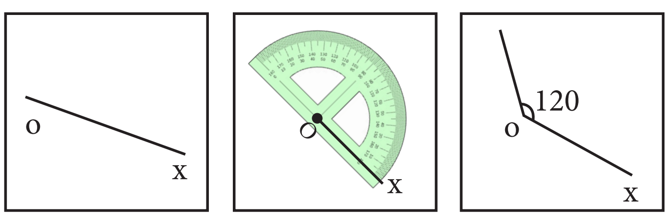
Ejemplo 13:

Podemos construir un ángulo de 120° de amplitud y cuyo lado sea la semirrecta 0x. Para esto pueden emplearse dos métodos.

Solución:

1. Primer método

La serie de imágenes que se presentan muestran el método de construcción. Las etapas de construcción han de adaptarse según los datos del ángulo dado.

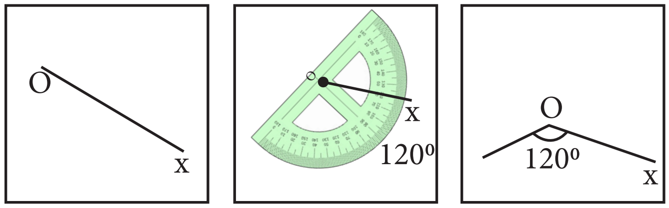


En la segunda imagen prestaremos atención a lo siguiente:

- La posición de la marca del 0º en la escala del transportador, la cual debe estar sobre la semirrecta Ox.
- La posición en la que está colocado el centro del transportador, el cual debe estar en el punto O, que es el origen de la semirrecta.

2. Segundo método

La serie de imágenes que se presentan muestran otro método de construcción. Igual que en el ejemplo anterior, las etapas de construcción deben ser adaptadas al tamaño del ángulo dado.

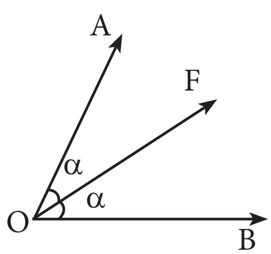


De nuevo, pongamos atención a lo siguiente:

- La posición de la marca de los 120º en el transportador, la cual debe estar sobre la semirrecta Ox.
- El lugar donde está colocado el centro del transportador, que debe ser el origen O de la semirrecta Ox.

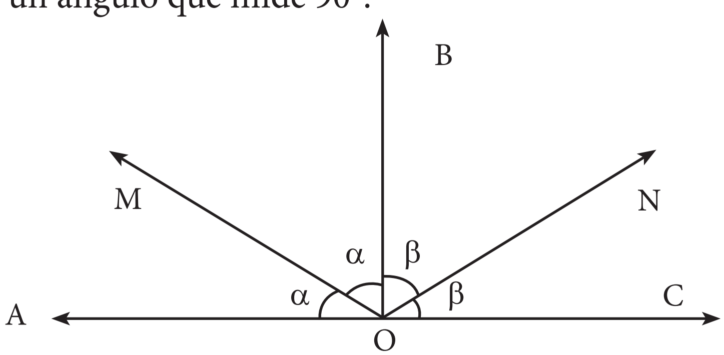
Bisectriz de un ángulo

La bisectriz es un rayo que partiendo del vértice divide al ángulo en dos ángulos que son congruentes.



$\overrightarrow{OF}$ divide al ∠ AOB en dos ángulos ∠ AOF y ∠ FOB, que son congruentes por tener la misma medida α. Luego, OF es la bisectriz del ∠ AOB.

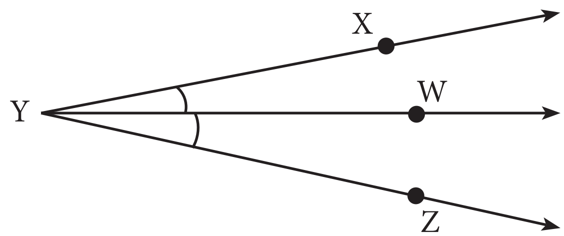
Teorema 2.2. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo que mide 90º.



$\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo ∠ AOB
$\overrightarrow{ON}$ es bisectriz del ángulo ∠ BOC
m ∠ MON = 90º

Ejemplo 14:

Analice el siguiente diagrama:

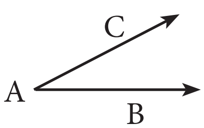


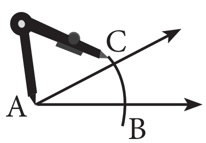
$\overrightarrow{YW}$ biseca a $\angle XYZ$ y m $\angle XYW = 18°$.
Encuentre m $\angle XYZ$.

Solución:

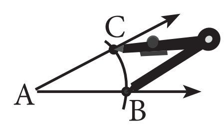
Por el postulado 2.3 m $\angle XYZ =$ m $\angle XYW +$ m $\angle WYZ$.
Entonces m $\angle XYW +$ m $\angle WYZ$ se puede escribir:
m $\angle XYZ =$ m $\angle XYW +$ m $\angle WYZ = 18° + 18° = 36°$.

Copiar un ángulo

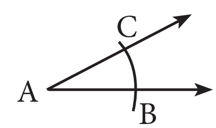




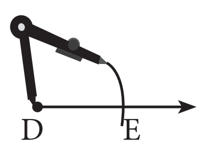
Dibuje un arco con centro en A.



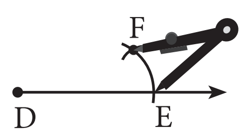
Señale B,C.



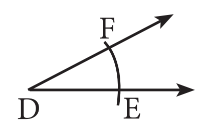
Dibuje un segmento y marque un punto D en este.



Usando uno de los radios, dibuje un arco con centro en D, marque E el punto de intersección.

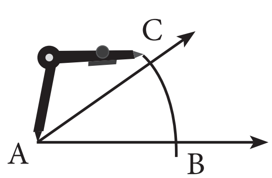


Dibuje un arco con radio BC y centro E, marque F el punto de intersección.

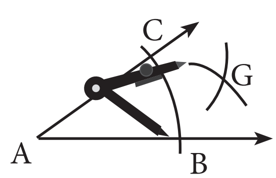


Dibuje $\overline{DF}$.
$\angle EDF = \angle BAC$.

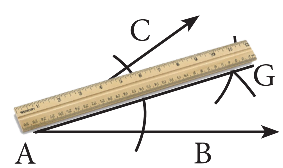
Bisecar un ángulo



Coloque el compás en A. Dibuje un arco que interseque los dos lados del ángulo. Nombre esas intersecciones A y B.



Coloque el compás en C, dibuje un arco y coloque el compás en el punto B, usando el mismo radio. Dibuje otro arco, la intersección de los arcos se llamara G.



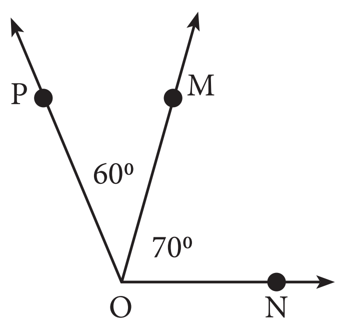
Marque la intersección G. Use una regla para dibujar un rayo de A hasta G. $\overrightarrow{AG}$ biseca $\angle$A.

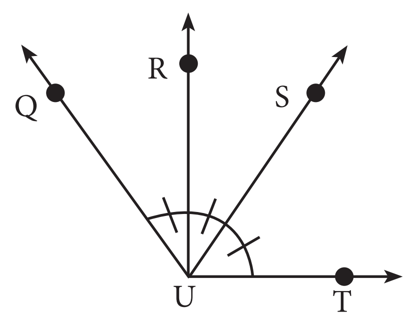
Actividad 3

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le plantean a continuación.

1. Dibuje un ángulo agudo. Copie el mismo ángulo usando un compás y una regla. Finalmente biseque el ángulo empleando los mismos instrumentos.

2. Utilice las figuras para encontrar lo que a continuación se le pide.





a. Identique y nombre todas las bisectrices que aparecen.

b. Para cada bisectriz nombre el ángulo que biseca.

c. Nombre todas las parejas de ángulos congruentes que aparecen.

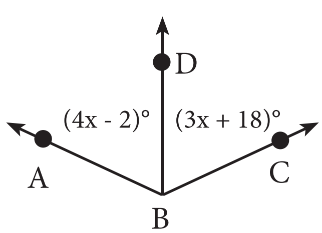
3. Contruya los siguientes ángulos utilzando los instrumentos de medición.

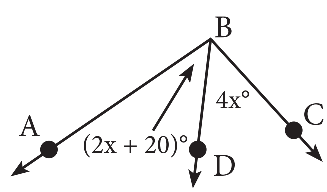
a. 120º

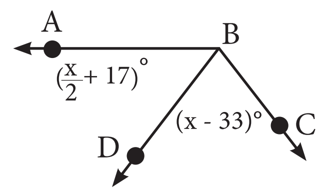
b. 90º

c. 48º

4. En cada diagrama $\overrightarrow{BD}$ biseca a ABC. Encuentre m $\angle$ ABC.







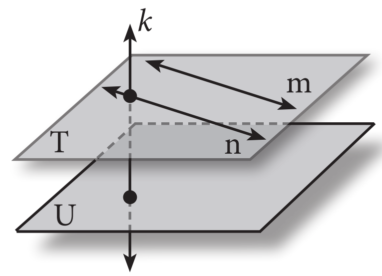
En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Rectas paralelas

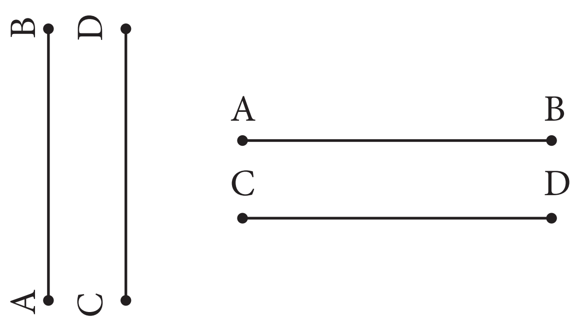
Dos rectas son paralelas cuando equidistan en toda su longitud y no tienen punto de intersección, además son coplanares. Cuando dos líneas rectas poseen la misma dirección, se dice que son paralelas. Dos planos que no tienen punto de intersección también son paralelos.

Los rayos y segmentos son paralelos si y solo si son subconjuntos de rectas paralelas.

m y *n* son rectas paralelas m || n.
Los planos T y U son paralelos T || U.
Las líneas *k* y *n* se intersecan y existe un plano que las contiene.



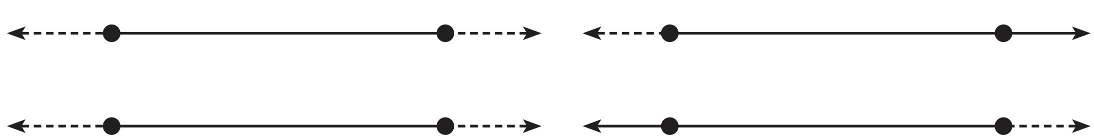
Analice las siguientes figuras:



En las figuras, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset$, lo que significa que no tienen punto de intersección. No importa la posición que tengan (horizontal, oblicua o vertical) y aunque se prolonguen indefinidamente, no tendrán nunca un punto de intersección.

Notación: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Los rayos y segmentos son paralelos si y solo si son subconjuntos de rectas paralelas.



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ AB || CD

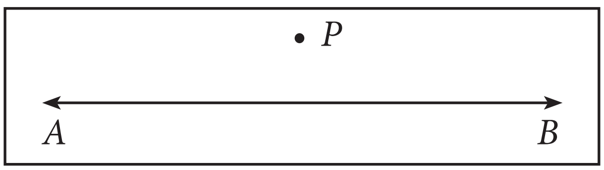
Construcción de rectas paralelas

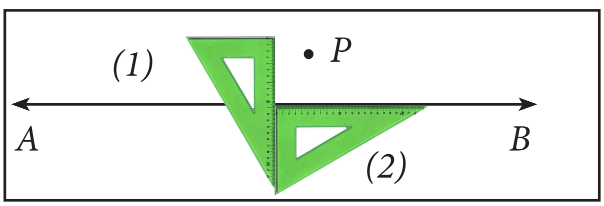
La manera más fácil para trazar rectas paralelas es utilizar dos escuadras.

Ejemplo 15:

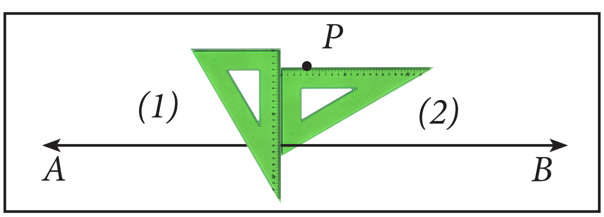
Usar escuadras para trazar una recta $\overline{RQ}$ paralela a $\overline{AB}$ y que pase por el punto P.

Datos dados para la construcción:

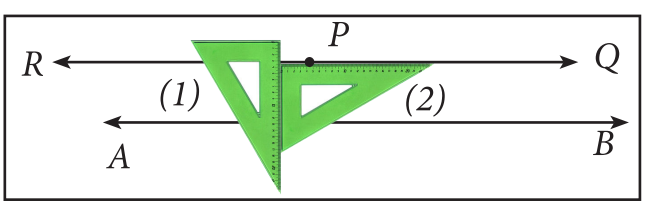




Colocar las escuadras como en la figura: un lado de la escuadra (2) tiene que coincidir con la recta, mientras la escuadra (1) permanece fija.



Deslizar la escuadra (2) hasta el punto P sobre la escuadra (1), sin mover (1).



Sin mover las escuadras colocadas en el paso anterior, trace la recta que pasa por P.

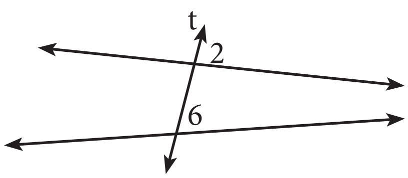
$\overline{RQ} \parallel \overline{AB}$

Rectas paralelas cortadas por una transversal

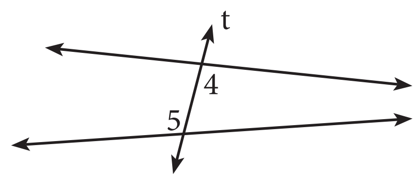
Rectas transversales

Recta transversal es aquella que interseca a dos rectas coplanares en dos puntos distintos.

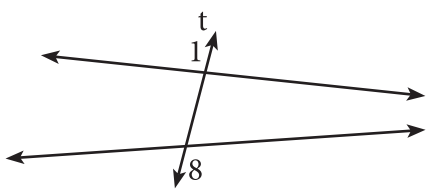
Ángulos formados por una transversal:



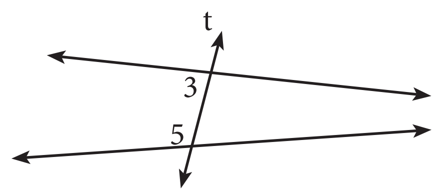
Dos ángulos son **correspondientes** si tienen una posición correspondiente. Por ejemplo, $\angle 2$ y $\angle 6$ están sobre las rectas y a la derecha de la transversal t.



Dos ángulos son alternos internos si estos se encuentran entre las dos líneas y en lados opuestos a la transversal.



Dos ángulos son **alternos externos** si estos se encuentran fuera de las dos rectas y en lados opuestos a la transversal.

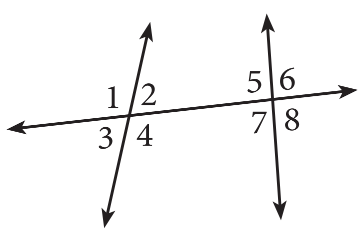


Dos ángulos son **consecutivos interiores** si se encuentran entre las dos rectas y en el mismo lado de la transversal.

Ejemplo 16:

Identifique en la figura todos los pares de ángulos dados de los siguientes tipos:

a. Correspondientes
b. Alternos internos
c. Alternos externos
d. Consecutivos interiores



Solución:

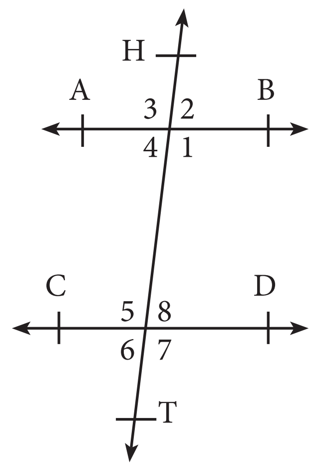
a. $\angle 1$ y $\angle 5$
$\angle 2$ y $\angle 6$
$\angle 3$ y $\angle 7$
$\angle 4$ y $\angle 8$

b. $\angle 2$ y $\angle 7$
$\angle 4$ y $\angle 5$

c. $\angle 1$ y $\angle 8$
$\angle 3$ y $\angle 6$

d. $\angle 2$ y $\angle 5$
$\angle 4$ y $\angle 7$

En la figura de la derecha se tiene que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y son cortadas por una tranversal $\overleftrightarrow{HT}$, se verifica lo siguiente:



- Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes:

  $\angle 1 \cong \angle 3$; $\angle 2 \cong \angle 4$; $\angle 5 \cong \angle 7$; $\angle 6 \cong \angle 8$

- Los ángulos alternos internos son congruentes:

  $\angle 1 \cong \angle 5$; $\angle 4 \cong \angle 8$

- Los ángulos alternos externos son congruentes:

  $\angle 2 \cong \angle 6$; $\angle 3 \cong \angle 7$

- Los ángulos correspondientes son congruentes:

  $\angle 2 \cong \angle 8$; $\angle 3 \cong \angle 5$; $\angle 1 \cong \angle 7$; $4 \cong \angle 6$

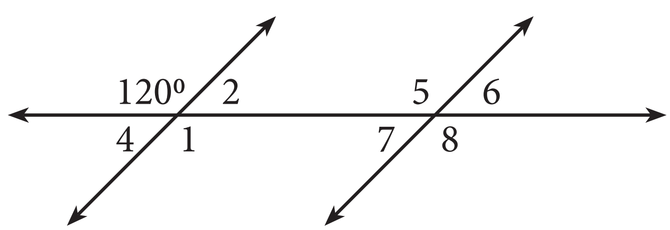
- Los ángulos adyacentes son suplementarios:

$\angle 3 + \angle 5 = 180^o$; $\angle 4 + \angle 1 = 180^o$; $\angle 1 + \angle 2 = 180^o$; $\angle 4 + \angle 3 = 180^o$;
$\angle 5 + \angle 8 = 180^o$; $\angle 8 + \angle 7 = 180^o$; $\angle 7 + \angle 7 = 180^o$; $\angle 5 + \angle 6 = 180^o$

Postulado 2.5. Si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, entonces el par de ángulos correspondientes son congruentes.

Ejemplo 17:

La medida de tres de los ángulos es 120°. Identifique los ángulos y explique su razonamiento.

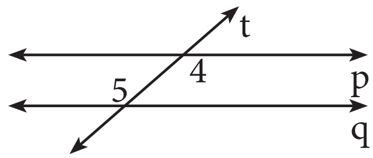


Solución:

Por el postulado 2.5 de los ángulos correspondientes m $\angle 5 = 120°$ y usando el teorema 2.1 de la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice, m $\angle 4 = 120°$, como 4 y 8 son ángulos correspondientes, por el postulado 2.5 de los ángulos correspondientes sabemos que $8 = 120°$.

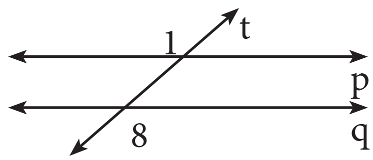
Teoremas

Teorema 2.3. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.



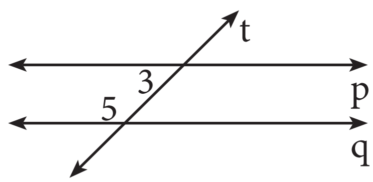
$\angle 4 = \angle 5$

Teorema 2.4. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son congruentes.



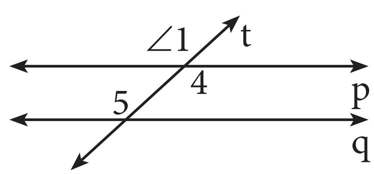
$\angle 1 = \angle 8$

Teorema 2.5. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos consecutivos interiores son suplementarios.



Ejemplo 18:

Probar Teorema 2.3: si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.



$\angle 4 = \angle 5$

Solución:

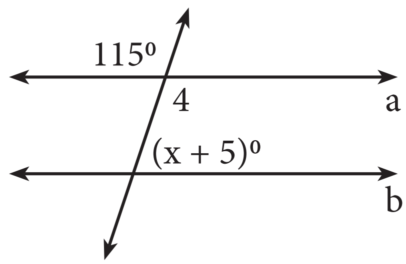
Dado que $\angle 4$ y $\angle 5$ son congruentes, probar que g || h.

Afirmación	Razonamiento
1. $\angle 4$ y $\angle 5$	Dado
2. $\angle 1$ y $\angle 4$	Teorema de la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice
3. $\angle 1 = \angle 5$	Propiedad transitiva de congruencia
4. g II h	Congruencia de ángulos correspondientes

Ejemplo 19:

Encuentre el valor de x.

Por el teorema de que ángulos opuestos por el vértice son congruentes, m $\angle 4 = 115°$.
Las rectas a y b son paralelas, entonces podemos usar los teoremas de rectas paralelas.

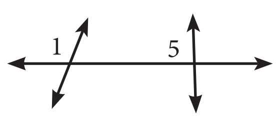


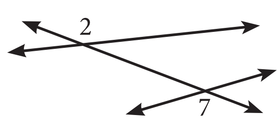
$m\angle 4 + (x + 5)° = 180°$	Teorema 2.5 (ángulo consecutivo interior).
$115° + (x + 5)° = 180°$	Sustituya 115°.
$X + 120 = 180$	Reduzca términos semejantes.
$X = 60$	Reste 120° a ambos lados.

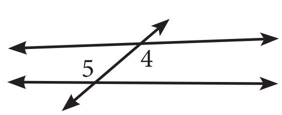
Actividad 4

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le plantean a continuación.

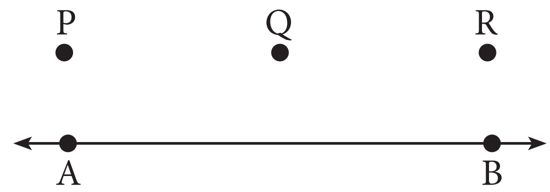
1. Clasifique los pares de ángulos señalados.

a. 

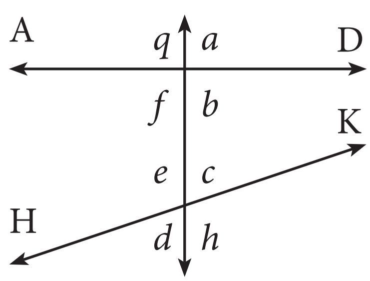
b. 

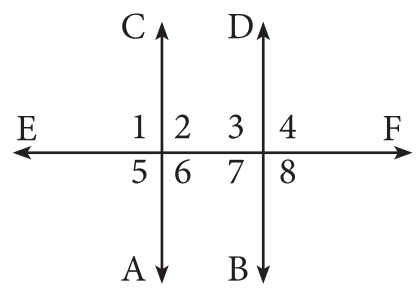
c. 

2. Trace paralelas a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasen por los puntos P, Q, R, utilizando dos escuadras.

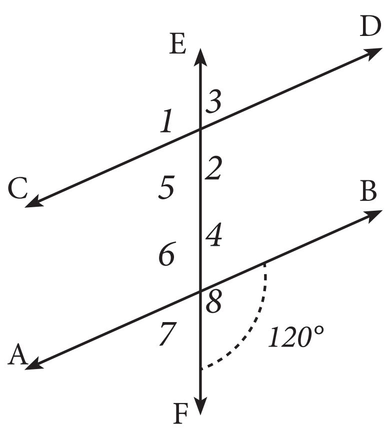


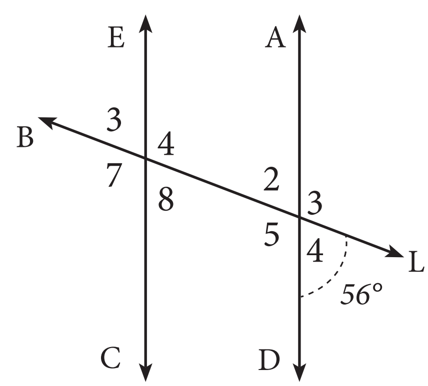
3. Para cada una de las siguientes figuras hay dos rectas intersecadas por una transversal, identifique todas las parejas de ángulos alternos internos y correspondientes.



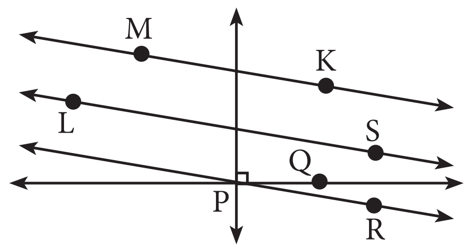


4. Encontrar el valor de todos los ángulos de cada figura.

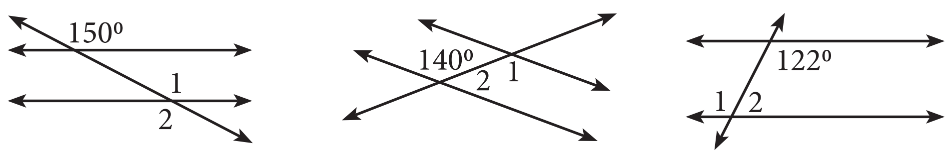




5. Analice la figura y haga lo siguiente:
   a. Nombre un par de líneas paralelas
   b. Nombre un par de perpendiculares
   c. Es $\overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{KM}$
   d. Es $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{NP}$



6. En cada una de las figuras encontrar m ∠ 1 y m ∠ 2. Explique su razonamiento.

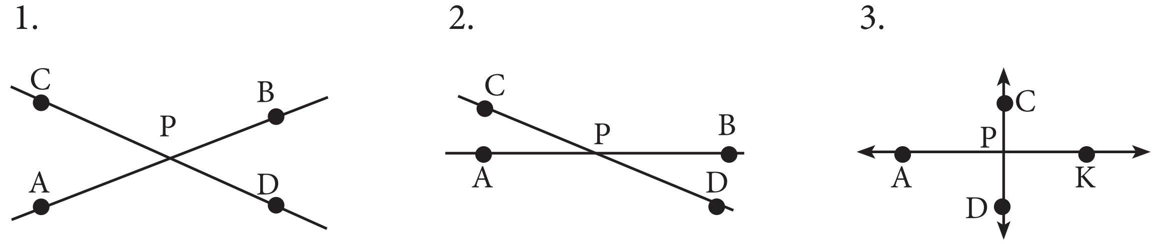


7. Por el postulado de los ángulos correspondientes, el estudiante concluye que ∠ 9 ≅ 10. Describa y corrija el error de este razonamiento.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Perpendicularidad

Dos rectas en el espacio pueden interceptarse en un punto y ser coplanares. Dos rectas son perpendiculares si y solo si se intersecan para formar ángulos rectos.



Si observamos las figuras anteriores $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{Q\}$, lo cual indica que las rectas tienen un punto de intersección que es Q.

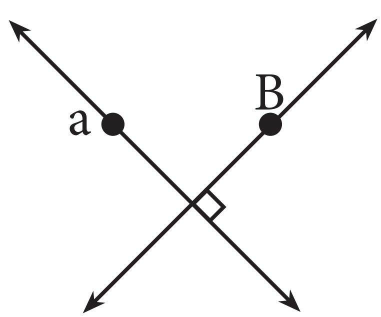
En la figura 3 encontramos que aunque todas se intersectan en un punto, en este caso en particular se forman entre sí ángulos rectos cuya medida es 90°.

Notación: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

Teorema 2.6. Si dos rectas que se intersectan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos.

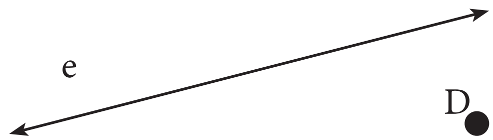
Postulado 2.6. Dada una línea y un punto que pertenece a ella, hay una línea exactamente perpendicular a la línea dada que pasa por el punto dado.

Este postulado es muy parecido al postulado de la línea paralela, pero se trata de líneas perpendiculares. Recuerde que estas líneas perpendiculares se cortan en un ángulo de 90°. De modo que en el siguiente diagrama hay solo una línea que puede pasar a través del punto que sea perpendicular a la línea.

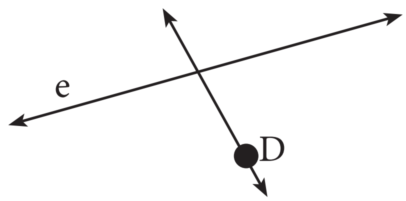


Ejemplo 20:

Dibuje una línea que pase a través del punto *D* que sea perpendicular a la línea *e*.



Solo puede haber una línea perpendicular a *e* que pase a través del punto *D*. Esta línea se muestra en la siguiente figura:



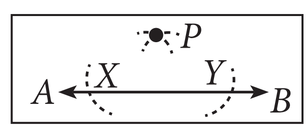
Construcción de rectas perpendiculares

Ejemplo 21:

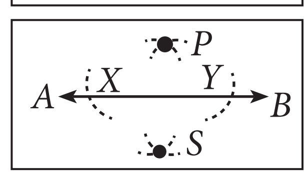
Haciendo uso de regla y compás construya una recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por el punto P.

Solución:

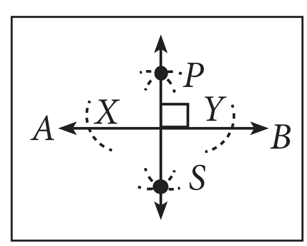
P es un punto exterior de la recta.



Trace un arco de centro P que corte a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en *X* y en Y, intersecándose en S.



Trace la recta PS. Esta recta es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por el punto P.

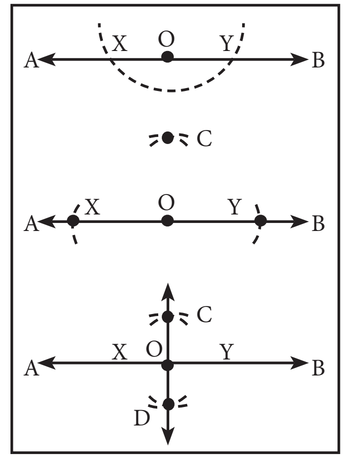


$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PS}$

Ejemplo 22:

Construya una recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y que pase por O, estando este punto en la recta.

Solución:



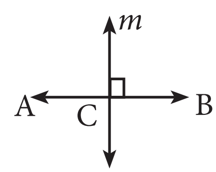
Trace un arco de centro O y que corte a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en *X* y en *Y*.

Con una abertura mayor que la anterior, trace dos arcos con centro en *X* y en *Y* respectivamente, que se corten en c.

Trace la recta $\overleftrightarrow{CO}$ que pasa por D y que es la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

Mediatriz de un segmento



La mediatriz de un segmento es una recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular al segmento.

La recta *m* es la mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$.

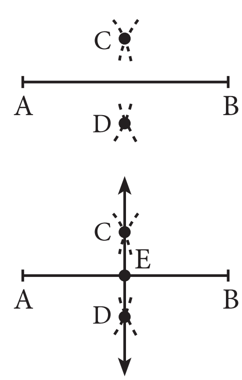
Si *m* es mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$, entonces *m* es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y C es el punto medio del segmento de $\overleftrightarrow{AB}$.

Ejemplo 23:

Construya la mediatriz del segmento $\overleftrightarrow{AB}$ (bisecar) y escriba el punto medio.

Solución:

$\overleftrightarrow{AB}$ es el segmento dado.



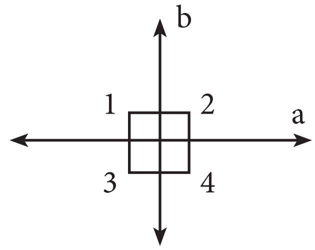
Trace dos arcos con centro en A y B respectivamente, del mismo radio o abertura del compás, pero mayores que la mitad de la longitud del segmento.

Los arcos se cortan en los puntos que llamaremos C y D.

Trace la recta $\overleftrightarrow{CD}$ que es la mediatriz del segmento.

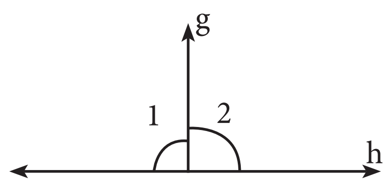
El punto E es el punto medio del segmento AB y d(A, E) = D (E, B)

Teorema 2.7. Si dos rectas son perpendiculares, entonces estas se intercectan para formar 4 ángulos rectos.

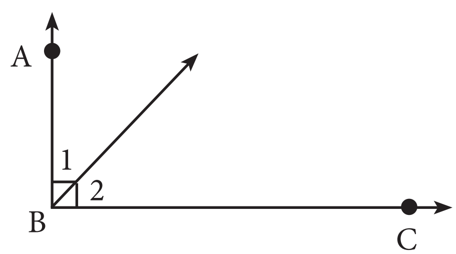


Si a $\perp$ b, entonces $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$ son ángulos rectos.

Teorema 2.8. Si dos rectas se intersectan y forman un par lineal de ángulos congruentes, entonces las rectas son perpendiculares.

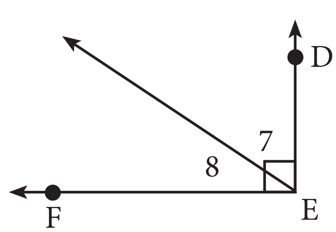


Teorema 2.9. Si dos lados de dos ángulos agudos adyacentes son perpendiculares, entonces los ángulos son complementarios.



Ejemplo 24:

Probar el teorema 2.9: dos lados de dos ángulos agudos adyacentes son perpendiculares, entonces los ángulos son complementarios.



Solución:

$\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{EF}$

Probar $\angle 7$ y $\angle 8$ son complementarios.

Afirmaciones	Razonamiento
1. $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{EF}$	Dado
2. DEF $\angle$ es un ángulo recto	Rectas $\perp$ se interceptan y forman 4 ángulos rectos
3. m $\angle$ DEF = 90°	Definición de ángulo recto
4. m $\angle$ 7 y m $\angle$ 8 = $\angle$ DEF	Postulado de la adición de ángulos
5. m $\angle$ 7 y m $\angle$ 8 = 90°	Sustitución. Propiedad de igualdad
6. $\angle$ 7 y $\angle$ 8 son complementarios	Definición de ángulos complementarios

Actividad 5

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le plantean a continuación.

1. Trace un segmento $\overleftrightarrow{AB}$ de cualquier longitud y biséquelo.

2. En un segmento $\overleftrightarrow{CD}$ de cualquier longitud, encuentre el punto N, de manera que $\overleftrightarrow{CN}$ = 1/2 de $\overleftrightarrow{CD}$.

3. Probar el teorema 2.8: si dos rectas se intersectan y forman un par lineal de ángulos congruentes, entonces las rectas son perpendiculares.

En plenaria, comparta las respuestas con sus compañeros y tutor.

Glosario

Ángulo: es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo. Los rayos se llaman lados y el punto extremo común se llama vértice.

Ángulos adyacentes: son aquellos que tienen el vértice y un lado en común.

Ángulo agudo: es el ángulo que tiene menos de 90°.

Ángulo complementario: dos ángulos son complementarios si suman 90°.

Ángulo llano: es aquel cuyos lados son dos semirrectas que tienen la misma dirección aunque sentidos opuestos. Posee una amplitud de 180°.

Ángulo obtuso: si tiene más de 90° pero menos de 180°.

Ángulo recto: es el que mide 90°.

Ángulo suplementario: dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

Cateto: en geometría, es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo, los que conforman el ángulo recto.

Grado: unidad de medida de ángulos.

Mediatriz: recta perpendicular a un segmento que lo divide en dos partes congruentes. Se utiliza, por ejemplo, para encontrar el punto medio de un segmento.

Rectas paralelas: son aquellas que equidistan en toda su longitud y no tienen puntos de intersección.

Rectas perpendiculares: son aquellas que se intersecan para formar ángulos rectos.

Recta transversal: es aquella que interseca a dos rectas coplanares en dos puntos distintos.

Transportador de ángulos: círculo graduado que sirve para medir o trazar los ángulos de un dibujo geométrico.

Vértice: Es el punto de intersección entre dos lados consecutivos de un polígono.

Actividad metacognitiva

Instrucciones: con base en lo aprendido, responda lo que a continuación se le pide.

1. ¿Por qué un ángulo debe estar contenido en un plano?

2. ¿Cuántos ángulos distintos forman tres rayos no coplanares que tienen un extremo en común?

3. Si traza varias rectas perpendiculares a otra dada, ¿cómo son entre sí las rectas que ha dibujado? Dibújelas.

4. Si dos rectas son paralelas, ¿cuántos puntos tienen en común?

5. ¿Cuál es la importancia de la geometría en la arquitectura y el arte en general?

Autoevaluación

Instrucciones generales: a continuación se le presentan una serie de ejercicios de evaluación de los aprendizajes de esta unidad. Su trabajo consiste en desarrollarlos con la mayor honestidad posible, sin copiar del libro. Recuerde que esta actividad le dará información sobre su progreso educativo. Al terminar, confronte sus respuestas con las soluciones que se encuentran en la guía didáctica de este libro y vuelva a estudiar aquellas preguntas o temas cuyas respuestas no acertó.

I. Verdadero o falso

Instrucciones: escriba en el paréntesis de la derecha una V o una F según sea la proposición verdadera o falsa.

1. Dos ángulos adyacentes cualesquiera tienen un lado en común .... (   )

2. Dos ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida .... (   )

3. Las rectas paralelas se encuentran en planos diferentes y nunca se intersectan .... (   )

4. Para calcular la medida del ángulo utilizamos una escuadra .... (   )

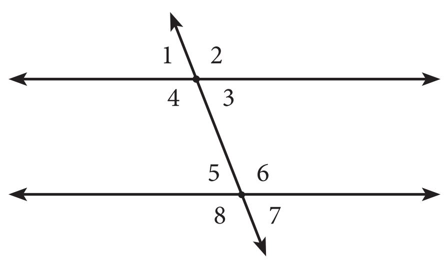
5. La suma de las medidas de dos ángulos agudos es igual a la medida de un ángulo obtuso .... (   )

II. Selección única

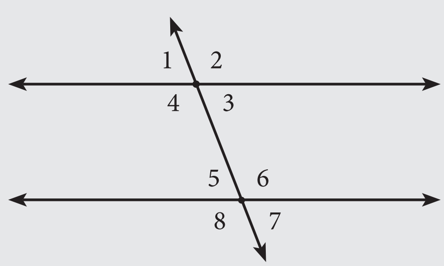
Instrucciones: a continuación encontrará proposiciones de selección única. Léalas y encierre con un círculo la letra que contenga la respuesta correcta para cada proposición.

1. Cuando se forma un ángulo de 0 grados entre la aguja minutero y la horaria, y estas hacen un ángulo con la horizontal de 90 grados, se puede afirmar lo siguiente:
   a. Es la una
   b. Son las doce en punto
   c. Son las seis en punto
   d. Son las doce y quince minutos

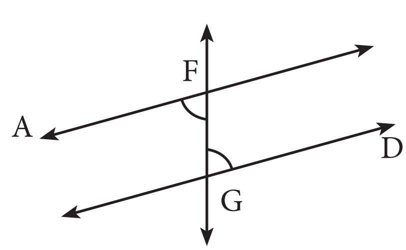
2. ¿Qué término describe mejor la relación que existe entre los ángulos ∠ 1 y ∠ 5?
   a. Internos consecutivos
   b. Alternos externos
   c. Alternos internos
   d. Correspondientes



3. ¿Qué término describe mejor los ángulos ∠ 7 y ∠ 8?
   a. Adyacentes
   b. Alternos externos
   c. Alternos Internos
   d. Correspondientes



4. ¿Qué término describe mejor la relación entre ∠ FGD y ∠ AFG?
   a. Ángulos alternos externos
   b. Ángulos internos consecutivos
   c. Complementarios
   d. Ángulos alternos internos



5. Elija la opción correcta en cada caso según los datos ofrecidos en el esquema.

El ángulo AOC mide 110º.

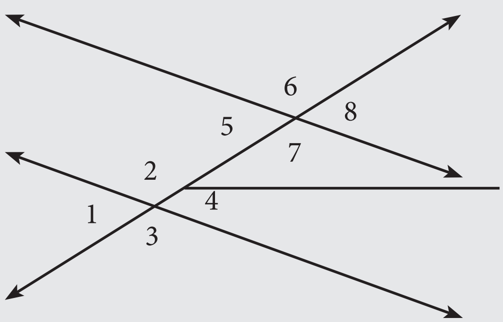
Los ángulos AOC y COD son:

a. Opuestos por el vértice
b. Adyacentes
c. Complementarios
d. Cóncavos

III. Parte práctica

Instrucciones: resuelva los ejercicios que se le presentan a continuación.

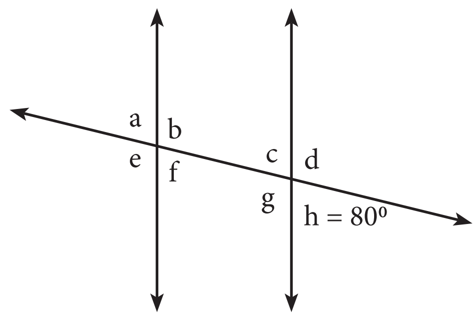
1. Dada la siguiente figura, escriba sobre la línea que relación corresponde en cada par de ángulos, guíese por el ejemplo.



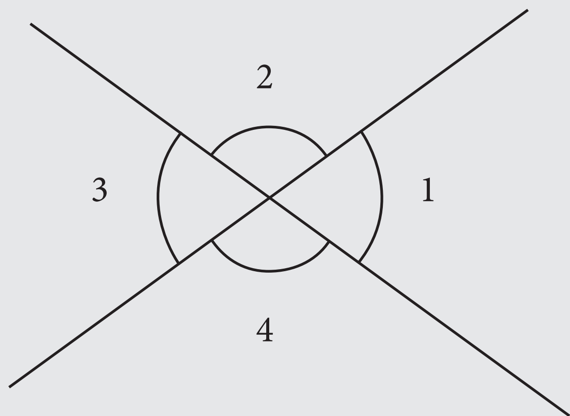
a. $\angle 1 \cong \angle 5$ Congruentes
b. $\angle 2 \cong \angle 7$ ____________
c. $\angle 3 \cong \angle 6$ ____________
d. $\angle 1 \cong \angle 8$
e. $\angle 4 \cong \angle 5$ ____________
f. Son $\angle 2 \cong \angle 5$ ____________
g. $\angle 3 \cong \angle 4$ ____________
h. Son $\angle 4 \cong \angle 7$

2. Si se traza una secante a dos rectas paralelas y se conoce la medida de uno de los ángulos, es posible determinar la medida de los otros. Encuentre la medidas

   m∠a =
   m∠b =
   m∠c =
   m∠d =
   m∠e =
   m∠f =
   m∠g =



3. Analice la figura y complete los espacios en blanco con lo que corresponda:



   a. Los ángulos 1 y 2 son_______________ y ______________________.

   b. Los ángulos opuestos por el vértice son_________________________.

   c. Los ángulos 3 y 4 forman un ángulo_____________________________.

   d. Los ángulos________________, __________________, ____________

   y _______________forman un ángulo completo.

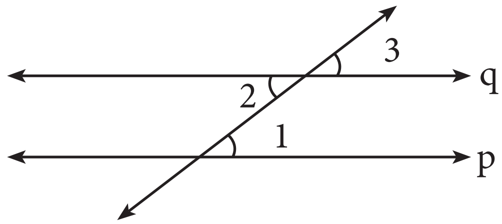
   e. Si dos ángulos suman 90°, son________________________.

   f. Ángulos consecutivos son aquellos que tienen el _______________ y un

   ____________________común.

4. Complete el cuadro utilizando el teorema 2.5:

Dado $\angle 1 \cong \angle 2$
Pruebe $p \parallel q$



Afirmaciones	Razonamiento
1. $\angle 1 \cong \angle 2$	1.
2. $\angle 2 \cong \angle 3$	2.
3. $\angle 1 \cong \angle 3$	3. Propiedad transitiva
4. $p \parallel q$	4.

5. Encuentre $m\angle 1$, $m\angle 2$ y $m\angle 3$. Explique su razonamiento.