Introducción

Los conocimientos que adquiera en esta unidad I podrá aplicarlos durante el desarrollo del curso, en otras asignaturas y en situaciones de la vida cotidiana. Pero, considere que el libro por sí mismo no es suficiente para que avance en el conocimiento y aplicación de las matemáticas, es necesario que tenga una actitud positiva, participe, razone, reflexione y que busque siempre la manera más adecuada para disipar sus dudas.

En esta unidad se le plantean muchos problemas y se dará cuenta que para resolver cada uno de ellos existen varios caminos o varias alternativas de solución. Si adquiere el hábito de buscar varias alternativas de solución para cada problema que se le presenta y a seleccionar la mejor, le será útil no solamente para sus estudios, sino que aprenderá a tomar las mejores decisiones en todas las etapas de su vida.

El contenido de esta unidad está integrado con temas referentes a dos ramas de las matemáticas, que son el álgebra y la trigonometría.

¿Qué vamos a aprender?

Competencia	Objetivos	Contenido
1. Resuelven problemas, ecuaciones e inecuaciones de grado mayor o igual a dos.	1. Operar ecuaciones polinómicas de grado mayor o igual a dos. 2. Operar inecuaciones polinómicas de grado mayor o igual a dos.	1. Ecuaciones polinómicas de grado mayor o igual que dos. 2. Establecimiento de la solución de ecuaciones cuadráticas o de grado mayor a dos. 3. Resolución de ecuaciones con valor absoluto. 4. Inecuaciones de grado mayor o igual que dos. 5. Inecuaciones con valor absoluto.
2. Identifican las características de las funciones polinómicas, racionales, irracionales y especiales para establecer su definición. 3. Grafican funciones polinómicas, racionales, irracionales y especiales. 4. Aplican las funciones polinómicas, racionales, irracionales y especiales para resolver problemas en situaciones científicas y tecnológicas.	3. Caracterizar las funciones polinómicas, racionales, irracionales y especiales para establecer sus definiciones. 4. Graficar las funciones de grado mayor o igual a dos. 5. Resolver situaciones científicas y tecnológicas de la vida cotidiana aplicando las funciones racionales, irracionales, valor absoluto, mayor entero y seccionada.	6. Funciones polinómicas de funciones de grado mayor que dos. 7. Funciones racionales. 8. Función valor absoluto. 9. Función seccionada.

Mis conocimientos previos

Antes de empezar la primera unidad se presentan algunos ejercicios que le servirán para recordar conocimientos fundamentales que en algún momento de su vida escolar aprendió. Esto le servirá para comprender con facilidad los nuevos contenidos, tales como la igualdad y sus propiedades.

Instrucciones

1) Analice cada uno de los conceptos escritos en cada recuadro y conecte con una línea el concepto con el nombre de la propiedad que corresponde.

Toda cantidad o expresión es igual a sí misma: $x = x$	Propiedad simétrica
El primer miembro es igual al segundo y el segundo miembro es igual al primero: si $x= y$ entonces $y= x$	Propiedad uniforme
Si una expresión es igual a otra y ésta es igual a una tercera, la primera es igual a la tercera: si m $= n$ y $n = p$, entonces m $= p$	Propiedad reflexiva
Si a los dos miembros de la igualdad se les aumenta, disminuye, multiplica o divide entre la misma cantidad, la igualdad permanece: si $a = b$, entonces $a + x = b + x$	Propiedad transitiva

2) Escriba a la par de cada definición, la propiedad de igualdad que corresponda:

a) Si dos igualdades tienen un miembro en común, los otros dos son iguales:

____

b) Si se aumenta o disminuye la misma cantidad en ambos miembros, la igualdad se conserva:

____

c) Todo número es igual a sí mismo:______________________

____

d) En una igualdad se pueden suprimir dos elementos iguales en ambos miembros y la igualdad no se altera:

____

3) Escriba a la par de cada expresión la propiedad aplicada:

a) $a = a$ ______________________________________

b) $a + b = c + b$, entonces, $a = c$ ______________________

c) $a = b$, entonces, $b = a$ ____________________________

d) $a = b$, entonces, $x + a = y + a$ ______________________

e) $a = b$ y $b = c$, entonces, $a = c$ ______________________

4) Escriba un ejemplo de cada una de las propiedades

a) Reflexiva

b) Simétrica

c) Transitiva

d) Uniforme

e) Cancelativa

5) Analice las siguientes expresiones y anote la propiedad de igualdad que se podría aplicar en cada caso:

a) De dos quintales de maíz, cuyos pesos están equilibrados, se quita la cuarta parte de cada uno:

____

____

____

b) Al iniciar el año, el cuaderno de Gloria es igual al cuaderno de Luis y el cuaderno de Luis es igual al cuaderno de María, por lo tanto, el cuaderno de María es igual al de Gloria:

____

____

____

c) Juanita tiene la foto de su gato y después de buscar fotos de gatos entre sus amigas, descubrió que la única foto igual a la de ella, es la de su hermana, que es del mismo gato:

____

____

____

Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Una ecuación cuadrática es un tipo de ecuación particular en la cual la variable o incógnita está elevada al cuadrado, es decir, a la potencia dos, por lo que también se le denomina ecuación de segundo grado.

Definición

Una ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, y c números reales y $a \neq 0$.

Ejemplo: $x^2 + 4x + 3 = 0$

Las ecuaciones cuadráticas pueden ser de dos tipos:

- Ecuaciones completas: son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, tiene tres términos; un término en x^2, otro en x y un término independiente de x.

  Ejemplo: $x^2 + 8x + 12 = 0$

- Ecuaciones incompletas: pueden ser de la forma $ax^2 + c = 0$ que carece del término en x, o de la forma $ax^2 + bx = 0$ que carece del término independiente.

  Ejemplo: $x^2 + 12 = 0$, $x^2 + 8x = 0$

Soluciones o raíces de una ecuación cuadrática o de segundo grado

La solución o raíz de una ecuación son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación, también son llamados ceros del polinomio.

Toda ecuación cuadrática tiene dos soluciones o raíces (x_1, x_2), por ejemplo, las soluciones o raíces de $x^2 + 4x + 3 = 0$ son $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, ambos valores satisfacen la ecuación, observe:

Para $x_1 = -3$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(-3)^2 + 4(-3) + 3 = 0 \longrightarrow$ Sustituyendo el valor de x

$9 + 4(-3) + 3 = 0 \longrightarrow$ Resolviendo la potencia

$9 - 12 + 3 = 0 \longrightarrow$ Resolviendo la multiplicación

$0 = 0$

Para $x_2 = -1$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0 \longrightarrow$ Sustituyendo el valor de x

$1 + 4(-1) + 3 = 0 \longrightarrow$ Resolviendo la potencia

$1 - 4 + 3 = 0 \longrightarrow$ Resolviendo la multiplicación

$0 = 0$

El conjunto solución de $x^2 + 4x + 3 = 0$ es C.S.= $\{-3, -1\}$

Resolver una ecuación cuadrática es hallar las raíces o conjunto solución de la ecuación.

Actividad 1

Verifique si cada una de las soluciones o raíces que se presentan a la derecha de cada ecuación cuadrática la satisfacen:

a) $a^2 - 2a + 1 = 0$, para $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

b) $x + 1 + 2x^2 = 0$, para $x_1=-3$, $x_2 = -1$

c) $x^2 - 10x + 25 = 0$, para $x_1 = -3$, $x_2 = -1$

d) $9 - 6x + x^2 = 0$, para $x_1 = -3$, $x_2 = -1$

e) $2a^2 + 3a - 2 =0$, para $x_1 = -2$,$x_2 = {}^{-1}/_2$

f) $3n^2 - 5n - 2 = 0$, para $x_1 = 2$, $x_2 = {}^{-1}/_2$

g) $5x^2 - 8x + 3 = 0$, para $x_1 = 1$, $x^2 = {}^{-3}/_5$

h) $4x^2 + 8x + 3 = 0$, para $x_1 = {}^{-3}/_2$, $x_2 = {}^{-1}/_2$

i) $x^2 + 5x + 6 = 0$, para $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

Conjunto solución de una ecuación cuadrática

Para resolver las ecuaciones cuadráticas se utilizan varios procedimientos: factorización, completación de cuadrados y fórmula general.

Resolución por factorización

El método de factorización se usa para resolver una ecuación cuadrática, si el polinomio que la define se puede factorizar. Pero, antes de resolver estas ecuaciones, recuerde la propiedad que dice: si se tiene un producto de dos factores iguales a cero, al menos uno de ellos debe ser cero; es decir:

$a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$

Ejemplos: hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones mediante factorización:

a) $x^2 - 25 = 0$

$(x - 5)(x + 5) = 0 \longrightarrow$ Factorizando una diferencia de cuadrados

$(x - 5) = 0, (x + 5) = 0 \longrightarrow$ Aplicando la propiedad

$a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$

$x = 5, x = -5 \longrightarrow$ Resolviendo la ecuación lineal

C. S. = $\{5, -5\}$

b) $x^2 + 3x = 0$

$x(x + 3) = 0 \longrightarrow$ Aplicando factor común

$x = 0,\ x + 3 = 0 \longrightarrow$ Aplicando la propiedad

$a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$

$x = 0, x = -3 \longrightarrow$ Resolviendo la ecuación lineal

C. S. = $\{0, -3\}$

c) $x^2 + 6 = -5x$

$x^2 + 5x + 6 = 0 \longrightarrow$ Transposición de términos para igualar con cero

$(x + 3)(x + 2) = 0 \longrightarrow$ Factorizando

$x + 3 = 0,\ x + 2 = 0 \longrightarrow$ Aplicando la propiedad

$a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$

$x = -3, x = -2 \longrightarrow$ Resolviendo la ecuación lineal

C. S. = $\{-3, -2\}$

d) $2x^2 - 13x + 6 = 0$

$(x - 6)(2x - 1) = 0 \longrightarrow$ Factorizando

$x - 6 = 0,\ 2x - 1 = 0 \longrightarrow$ Aplicando la propiedad

$a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$

$x = 6, x = {}^1/_2 \longrightarrow$ Resolviendo la ecuación lineal

C.S. = $\left\{6, {}^1/_2\right\}$

Actividad 2

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 13x = 0$

b) $x^2 - 49 = 0$

c) $3x^2 - 3x - 18 = 0$

d) $x^2 + 5x + 6 = 0$

e) $x^2 - x = 0$

f) $^1/_4\,x^2 - 4 = 0$

g) $x^2 + 4x + 3 = 0$

h) $x^2 + 9x + 20 = 0$

i) $x^2 - x - 20 = 0$

Solución ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados

Cuando una ecuación cuadrática no puede ser factorizada fácilmente, es posible encontrar las raíces completando el cuadrado.

Este método consiste en construir un trinomio cuadrado perfecto a partir de una ecuación de segundo grado.

Propiedad: dada una ecuación de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con a, b y c números reales y $a = 1$, se completa el cuadrado perfecto sumando el término $\left(b/2\right)^2$ en ambos lados de la igualdad. Ejemplos:

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 4x + 3 + \left(4/2\right)^2 = \left(4/2\right)^2$ Sumando el término $\left(b/2\right)^2$ en ambos lados de la ecuación

$x^2 + 4x + \left(4/2\right)^2 = \left(4/2\right)^2 - 3$ Transposición del término independiente

$x^2 + 4x + 4 = 1$ Efectuando las operaciones

$(x + 2)^2 = 1$ Factorizando el trinomio cuadrado perfecto de la izquierda

$x + 2 = \pm\sqrt{1}$ Aplicando la propiedad (si $x^2 = n$ con $n > 0$, entonces $x = \pm\sqrt{n}$)

$x + 2 = \pm 1$ Calculando la raíz

$x = \pm 1 - 2$ Transposición del término independiente

$x_1 = +1 - 2,\ x_2 = -1 - 2$ Distribución del signo positivo (+) y el signo negativo (-)

$x_1 = -1,\ x_2 = -3$ Efectuando las operaciones

C.S. = {-1, -3}

b) $x^2 - 6x = 0$

$x^2 - 6x + \left({}^{6}/_{2}\right)^2 = \left({}^{6}/_{2}\right)^2$ Sumando el término $\left({}^{6}/_{2}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación

$x^2 - 6x + 9 = 9$ Efectuando las operaciones

$(x + 3)^2 = 9$ Factorizando el trinomio cuadrado perfecto de la izquierda

$x + 3 = \pm\sqrt{9}$ Aplicando la propiedad (si $x^2 = n$ con $n > 0$,entonces $x = \pm\sqrt{n}$)

$x + 3 = \pm 3$ Calculando la raíz

$x = \pm 3 - 3$ Transposición del término independiente

$x_1 = +3 - 3,\ x_2 = -3 -3$ Distribución del signo más (+) y el signo menos (-)

$x_1 = 0,\ x_2 = -6$ Efectuando las operaciones

C. S. = {-0, -6}

c) $-2x^2 + 4x - 1 = 0$

$\dfrac{-2x^2 + 4x - 1}{-2} = \dfrac{0}{-2}$ Dividiendo ambos lados de la igualdad por el valor de a, para transformarlo en un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a = 1

$x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ Simplificando

$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{2}\right)^2$ Sumando el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación y transposición del término independiente

$x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{2} + 1$ Efectuando las operaciones

$(x - 1)^2 = \frac{1}{2}$ Factorizando el trinomio cuadrado perfecto de la izquierda

$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ Aplicando la propiedad ($si\ x^2 = n\ con\ n>0,\ entonces\ x = \pm\sqrt{n}$)

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} + 1$ Transposición del término independiente

$x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} + 1,\ \ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} + 1$ Distribución del signo más (+) y el signo menos (-)

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1,\ \ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ Racionalizando $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2},\ \ x_2 = \frac{-\sqrt{2}+2}{2}$ Efectuando las operaciones

$\text{C. S.} = \left\{\frac{\sqrt{2}+2}{2}, \frac{-\sqrt{2}+2}{2}\right\}$

Actividad 3

En grupo, resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la completación de cuadrados:

a) $x^2 - 13x = 0$

b) $3x^2 - 3x - 18 = 0$

c) $x^2 + 5x + 6 = 0$

d) $x^2 - 13x = 0$

e) $x^2 - 49 = 0$

f) $x^2 + 4x + 3=0$

g) $x^2 + 9x + 20 = 0$

h) $x^2 - x - 20 = 0$

Componentes de una ecuación cuadrática o de segundo grado

Una ecuación cuadrática es una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. En la expresión anterior, se tiene que:

a es el coeficiente del término cuadrático

b es el coeficiente del término lineal

c es el término independiente

Observe las siguientes ecuaciones cuadráticas y sus coeficientes:

1) $x^2 - 2x + 1 = 0$

a = 1 b= -2 c= 1

2) $25x^2 + 4 = 0$

a= 25 b= 0 c= 4

3) $3x^2 + 2x = 0$

a= 3 b= 2 c= 0

Fórmula general para resolver las ecuaciones cuadráticas

Para resolver cualquier ecuación cuadrática o de segundo grado, se puede obtener una fórmula general, a partir de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$; donde a≠o, utilizando el método de completación de cuadrados, así:

$ax^2 + bx = -c$ Transposición del término independiente

$$\frac{ax^2 + bx}{a} = \frac{c}{a}$$

Dividiendo ambos lados de la igualdad por el valor de *a*, para transformarlo en un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a= 1

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x = -\frac{c}{a}$$

Simplificando

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right) - \frac{c}{a}$$

Sumando el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Simplificando $\left(\frac{\frac{b}{a}}{\frac{2}{1}}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Factorizando el trinomio cuadrado perfecto de la izquierda y simplificando el término de la derecha

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Aplicando la propiedad (si $x^2 = n$ con n>0, entonces $x = \pm\sqrt{n}$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\,\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Simplificando $\sqrt{4}a^2 = 2a$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

Transposición del término independiente

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Simplificando

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b2 - 4ac}}{2a} \quad , x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$C.\,S. = \left\{\frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

La expresión $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es la fórmula general para resolver cualquier ecuación cuadrática, siempre que a $\neq 0$.

Recuerde que una ecuación cuadrática no tiene más de dos soluciones o raíces, una con signo más (+) y otra con signo menos (-) y para saber el tipo de soluciones y cuántas tendrá dicha ecuación, se utiliza la expresión: b^2 - 4ac, que se denomina discriminante, conforme al siguiente cuadro:

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales e iguales (se repite dos veces)

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene solución vacía en los reales, pero tiene dos soluciones complejas

Ejemplos

Para verificar qué tipo de soluciones tienen las siguientes ecuaciones, utilizando el discriminante, se hace lo siguiente:

a) $x^2 + 5x = -6$, al trasladar el término independiente se obtiene
$x^2 + 5x + 6 = 0$
a = 1, b= 5, c = 6

$b^2 - 4ac = 5^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$

Observe que el discriminante es 1, y mayor que cero, por tanto la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$ tiene dos raíces reales y diferentes.

b) $2x^2 - x + 3 = 0$
$a = 2$, $b = -1$, c = 3
$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23$

Observe que el discriminante es -23, menor que cero, por tanto la ecuación $2x^2 - x + 3 = 0$ no tiene soluciones reales.

c) $4x^2 - 20x + 25 = 0$
a = 4, b= -20, c= 25
$b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(4)(25) = 400 - 400 = 0$

Observe que el discriminante es 0, por tanto la ecuación $4x^2 - 20x + 25 = 0$ tiene dos raíces reales e iguales.

d) $x^2 - 4 = 0$
$a= 1, b= 0, c= -4$
$b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-4)= 0 + 16= 16$

$16 > 0$, la ecuación $x^2 - 4= 0$ tiene dos raíces reales y diferentes.

Actividad 4

Investigue qué tipo de soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 1 = 2x$

b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

c) $9 - 6x + x^2 = 0$

d) $2x^2 + 3x = 2$

e) $10x^2 + 5x = 0$

f) $x^2 - 1= 0$

g) $x^2 - 13x = 0$

h) $x^2 - 49 = 0$

i) $x^2 + 4x + 3 = 0$

j) $x^2 + 9x + 20 = 0$

k) $x^2 - x = 20$

¡Atrévase!

Deduzca por completación de cuadrado la fórmula que genera la siguiente ecuación: $ax^2 + bx = 0$.

Solución de una ecuación cuadrática utilizando la fórmula general

Ejemplos

Para encontrar el conjunto solución de cada ecuación mediante la fórmula general, se siguen estos pasos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1,\ b = -2,\ c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} =$$

$$\frac{2 \pm 0}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+0}{2} = 1 \\[2ex] x_2 = \dfrac{2-0}{2} = 1 \end{cases}$$

$C.\ S. = \{1\}$

b) $2x^2 = -11x - 5$ Se trasladan los términos al lado izquierdo de la ecuación

$2x^2 + 11x + 5 = 0$

a= 2, b= 11, c= 5

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} =$$

$$\frac{-11 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-11 \pm 9}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-11+9}{4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-11-9}{4} = \dfrac{-20}{4} = -5 \end{cases}$$

$$C.\ S. = \left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$$

c) $-2x^2 + 4x = 0$

$a= -2$, $b= 4$, $c=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(-2)(0)}}{2(-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 0}}{-4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{-4} =$$

$$\frac{-4 \pm 4}{-4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+4}{-4} = \dfrac{0}{-4} = 0 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-4-4}{-4} = \dfrac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$$

$C.\ S. = \{0, 2\}$

d) $x^2 = 25$ Se traslada el término independiente al lado izquierdo de la ecuación

$x^2 - 25 = 0$

$a = 1,\ b = 0,\ c = 25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-25)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 100}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{100}}{2} =$$

$$\frac{0 \pm 10}{2} =$$

$$x_1 = \frac{0 + 10}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{0 - 10}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$C.\ S. = \{5, -5\}$

Actividad 5

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general:

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 + 3x - 10 = 0$

c) $x^2 - x - 30 = 0$

d) $9x^2=1$

e) $3x^2 + 12x = 0$

f) $10x^2 - x - 2 = 0$

g) $9x^2 + 12x + 8 = 0$

h) $2x^2 + 3x = 2$

i) $10x^2 + 5x = 0$

j) $x^2 - 1 = 0$

k) $x^2 - 13x = 0$

l) $x^2 - 49 = 0$

m) $x^2 + 4x + 3 = 0$

Aplicación de las ecuaciones cuadráticas

La ecuación cuadrática es de gran importancia en las matemáticas aplicadas y en general, puesto que se utiliza muy frecuentemente en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Si el planteamiento de un problema da origen a una ecuación cuadrática, lógicamente al resolverla se obtienen dos valores para la incógnita, pero solo se aceptan como soluciones los valores que satisfagan las condiciones del problema y se rechazan las que no se cumplan. Ejemplos:

a) Encontrar dos enteros positivos consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 61:

Planteamiento

x Representa un número

$x+1$ Representa al siguiente número

$x^2, (x+1)^2$ Representa el cuadrado de cada número

Proceso

$x^2 + (x+1)^2 = 61$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 61$ Desarrollando la potencia

$2x^2 + 2x + 1 - 61 = 0$ Simplificando y trasladando el término independiente

$2x^2 + 2x - 60 = 0$ Simplificando

$\dfrac{2x^2 + 2x - 60}{2} = 0/2$ Dividiendo entre dos

$x^2 + x - 30 = 0$ Simplificando

$(x+6)(x-5) = 0$ Factorizando

$x + 6 = 0,\ x - 5 = 0$ Aplicando la propiedad $a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ *o* $b = 0$

$x = -6, \ x = 5$

Se rechaza la solución $x = -6$ porque el problema expresa que los números deben de ser positivos.

si $x = 5$ entonces $x + 1 = 6$

Comprobación

$5^2 + 6^2 = 61$

$25 + 36 = 61$

$61 = 61$

Respuesta

El número 5.

b) Si al triple de un número se suma su cuadrado se obtiene 88, calcular el número:

Planteamiento

$3x + x^2 = 88$

Proceso

$3x + x^2 = 88$

$x^2 + 3x - 88 = 0$ Traslado del término independiente y ordenamiento del polinomio

$a = 1, \ b = 3, \ c = -88$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-88)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 352}}{2} =$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-3 \pm 19}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 + 19}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ x_2 = \dfrac{-3 - 19}{2} = \dfrac{-22}{2} = -11 \end{cases}$$

Se obtienen dos raíces 8 y -11, en este caso no se menciona ninguna restricción en el enunciado del problema y los dos números satisfacen la ecuación.

Comprobación

Para $x = 8$

$$\begin{aligned} 3x + x^2 &= 88 \\ 3(8) + 8^2 &= 88 \\ 3(8) + 64 &= 88 \\ 24 + 64 &= 88 \\ 88 &= 88 \end{aligned}$$

Para $x = -11$

$$\begin{aligned} 3x + x^2 &= 88 \\ 3(-11) + (-11)^2 &= 88 \\ 3(-11) + 12 &= 88 \\ -33 + 121 &= 88 \\ 88 &= 88 \end{aligned}$$

Respuesta

El número puede ser 8 o -11.

c) Calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos:

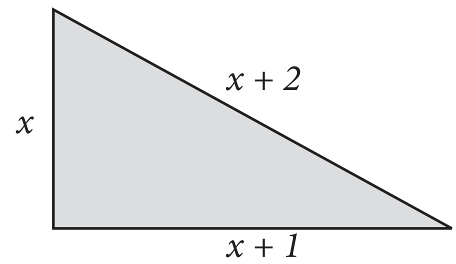
Planteamiento

Para tener una mejor visión de lo que se pide, observe la figura que se le presenta. Un lado del triángulo se designa con la letra x y al otro con $x + 1$, porque es el consecutivo de x, recuerde que la hipotenusa es el lado del triángulo que está frente al ángulo recto y siempre es el lado mayor del triángulo rectángulo, en este caso $(x + 2)$:

x la medida de un lado

$x + 1$ la medida de otro lado

$x + 2$ la medida de la hipotenusa



Proceso

Teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras, se cumple:

$(x + 2)^2 = (x + 1)^2 + x^2$

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 1 + x^2$ Resolviendo el binomio a cada lado de la ecuación

$x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 2x + 1$ Simplificando

$x^2 + 4x + 4 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$ Trasladando los términos al lado izquierdo de la igualdad

$-x^2 + 2x + 3 = 0$ Simplificando

$\frac{-x^2 + 2x + 3}{-1} = \frac{0}{-1}$ Dividiendo ambos lados de la ecuación entre -1 para convertir el término cuadrático a positivo

$x^2 - 2x - 3 = 0$ Simplificando

$(x - 3)(x + 1) = 0$ Factorizando

$x - 3 = 0, \quad x + 1 = 0$ Aplicando la propiedad $a \cdot b = 0$ si y solo

$x = 3 \; ; \; x = -1$ si $a = 0$ o $b = 0$

Se rechaza la solución $x = -1$ porque la longitud se expresa con números positivos.

si $x = 3$ entonces $x + 1 = 4$ y $x + 2 = 5$

Respuesta

La longitud de la hipotenusa es de 5 unidades.

Actividad 6

Resuelva los siguientes problemas:

a) Hallar dos enteros positivos consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 5:

b) Hallar dos enteros positivos consecutivos cuyo producto sea 56:

c) Si el cuadrado de un número positivo disminuido en seis veces el número, el resultado es cuarenta, hallar los números:

d) ¿Cuál es la longitud del lado más corto de un terreno que tiene un área de $450m^2$,si el lado más largo es el doble del más corto?

Ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos

Ecuación cúbica

Una ecuación de tercer grado con una incógnita, es una ecuación que se puede poner bajo la forma canónica: $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Donde a, b, c y d, ($a\neq 0$) son números que pertenecen a los reales.

Para resolver este tipo de ecuaciones hay que hacer cálculos numéricos, se necesita encontrar una solución p tal que al dividir $ax^3 + bx^2 + cx + d$ por x - p, utilizando regla de Ruffini, se obtiene una ecuación cuadrática o de segundo grado de la cual se extraen dos soluciones o raíces más. Por ejemplo, para determinar el conjunto solución de $x^3 + 3x^2 - x - 3$:

Se obtienen los divisores de -3, para verificar cuál de ellos es un cero del polinomio:

D(3)= {±1, ±3}

$P(1)= 1^3 + 3(1)^2 - 1-3= 1+3 - 1-3 = 0$

Se observa que 1 es un cero de la ecuación.

Se obtienen los coeficientes del polinomio en su forma canónica y se escriben horizontalmente separados por espacios para realizar la división sintética:

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & -1 & -3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 3 & \\
\hline
1 & 4 & 3 & \multicolumn{1}{|c|}{0} &
\end{array}
$$

Por lo tanto, la ecuación cúbica se puede expresar como el siguiente producto:

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x^2 + 4x + 3)(x - 1) = 0$

Luego, por factorización, se resuelve la ecuación cuadrática:

$(x^2 + 4x + 3) = (x + 3)(x + 1)$

Por lo tanto, la ecuación cúbica se puede expresar como el siguiente producto:

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$

Se determina el conjunto solución de la ecuación cúbica:

$(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$

- $x + 3 = 0$
  $x = -3$
- $x + 1 = 0$
  $x = -1$
- $x - 1 = 0$
  $x = 1$

$C.\ S. = \{-3, -1, 1\}$

Actividad 7

Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones cúbicas:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^3 - 7x^2 + 6 = 0$

c) $9x^3 - 3x = 0$

d) $2x^3 + 50x = 0$

e) $x^3 + x^2 = 0$

f) $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$

g) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

h) $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$

i) $8x^3 - 16x^2 = 0$

j) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver ecuaciones con valor absoluto es útil pensar en distancias sobre una recta numérica. Por ejemplo: determinar el *C.S.* de $|x|= 3$.

La solución de la ecuación son los números cuya distancia a partir del 0 es 3. El conjunto solución es {-3 y 3}.

Formalmente el valor absoluto de un número real x, se define de la siguiente manera:

$$|x| \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por definición, el valor absoluto de $|x|$ siempre será mayor o igual que cero, es decir, positivo y nunca negativo.

Si entre las barras de valor absoluto se encuentra una expresión algebraica, la definición puede resumirse. Por ejemplo, si se tiene $|x + 4|$, en este caso $(x + 4)$ puede ser: mayor o igual a cero o menor que cero:

$$|x + 4| \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \geq 0 \\ -(x + 4) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es muy importante efectuar previamente la comprobación de soluciones antes de determinar el conjunto solución. Por ejemplo, al determinar el *C.S.* de las siguientes ecuaciones:

1) $|2x - 2|= 4$

Solución

Hay dos posibilidades:

Que $2x - 2= 4$ o bien $2x - 2= -4$

Por definición

$2x = 6$ o bien $2x = -2$

$x = 3$ o bien $x = -1$ Resolviendo ambas ecuaciones

Comprobación

Para $x = 3$

$|2x - 2| = 4$

$|2(3) - 2| = 4$

$|6-2| = 4$

$|4| = 4$

Para $x = -1$

$|2x - 2| = 4$

$|2(-1) -2| = 4$

$|-2-2| = 4$

$|-4| = 4$

El conjunto solución es la unión de los resultados de las ecuaciones.

C. S. = {3, -1}

2) $|4x-2|=12x-10$

Solución

$4x - 2 = 12x - 10$ o bien $4x - 2= -(12x -10)$

$4x-12x = -10 + 2$ o bien $4x - 2 = -12x + 10$

$-8x = -8$ o bien $4x + 12x = 2 + 10$

$-8x = -8$ o bien $16x = 12$

$x = \frac{-8}{-8}$ o bien $x = \frac{12}{16}$

$x = 1$ o bien $x = \frac{3}{4}$

Comprobación

Para $x = 1$

$|4(1) - 2| = 12(1) - 10$

$|4 - 2| = 12 - 10$

$|2| = 2$

Para $x = \frac{3}{4}$

$|4\left(\frac{3}{4}\right) - 2| = 12\left(\frac{3}{4}\right) - 10$

$|3 - 2| = 9 - 10$

$|1| \neq -1$

Observe que el valor de $\frac{3}{4}$ presenta una contradicción, por lo tanto: $C.S. = \{1\}$

3) $|3x - 1| + 4 = 0$

Solución

$|3x - 1| = -4$

$3x - 1 = -4$ o bien $3x - 1 = -(-4)$

$3x = -4 + 1$ o bien $3x = 4 + 1$

$3x = -3$ o bien $3x = 5$

$x = -1$ o bien $x = \frac{5}{3}$

Comprobación

Para $x = -1$

$|3(-1) - 1| = -4$

$|-3 - 1| = -4$

$|-4| = -4$

$4 \neq -4$

Para $x = \frac{5}{3}$

$|3\left(\frac{5}{3}\right) - 1| = -4$

$\left|\frac{15}{3} - 1\right| = -4$

$|5 - 1| = -4$

$|4| = -4$

$4 \neq -4$

Por lo tanto: $C.S. = ø$

Actividad 8

Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

1) $|x| = 23$

2) $|x - 3 . 1| = 6$

3) $|5x - 3| = 22$

4) $\left|\frac{7}{2}x + 3\right| = -5$

5) $|4x - 1| = 5$

6) $\left|2 - \frac{x}{3}\right| = 2$

7) $\left|\frac{x + 1}{x - 5}\right| = 1$

8) $|2x - 1| = 3$

Inecuaciones cuadráticas en una variable

Una inecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, la desigualdad puede ser $<$, $\geq$ o $\leq$, donde a, b y c, son números reales y $a \neq 0$.

Por ejemplo: $2x^2 + 5x > -5$.

La inecuación cuadrática se encuentra en su forma general cuando el número cero está a un lado de la inecuación, de manera que la forma general de la inecuación del ejemplo anterior será: $2x^2 + 5x + 5 > 0$.

Observe que una inecuación cuadrática siempre puede escribirse en forma general, sumando o restando el término independiente a ambos lados de la inecuación.

Para determinar el conjunto solución de una inecuación de este tipo, se empleará un procedimiento en el que se incluirá una idea geométrica, pero eficaz. Se le llama método de tabla de variación de signos.

A continuación se presentan los pasos para resolver inecuaciones cuadráticas:

a) Determine el C.S. de la siguiente inecuación cuadrática:

$x^2 + x > 6$

Solución:

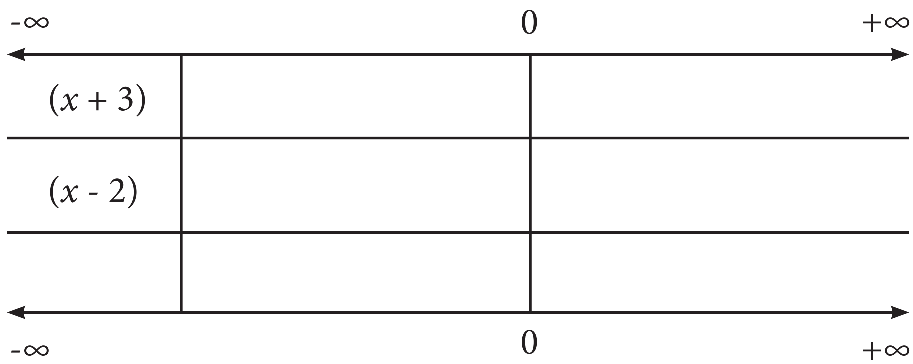
1. Se escribe la ecuación en su forma general:

   $x^2 + x - 6 > 0$

2. Se factoriza la ecuación asociada a la inecuación:

   $(x + 3)(x - 2) > 0$

3. Trazar una tabla, como la de abajo, en la cual se escribe cada factor en la primera columna. Observe que la primera y última línea de la tabla son rectas numéricas:



4. Se iguala a cero cada factor y se resuelve la ecuación lineal que corresponde. Los valores de x encontrados son los puntos críticos que hacen que la inecuación se haga cero:

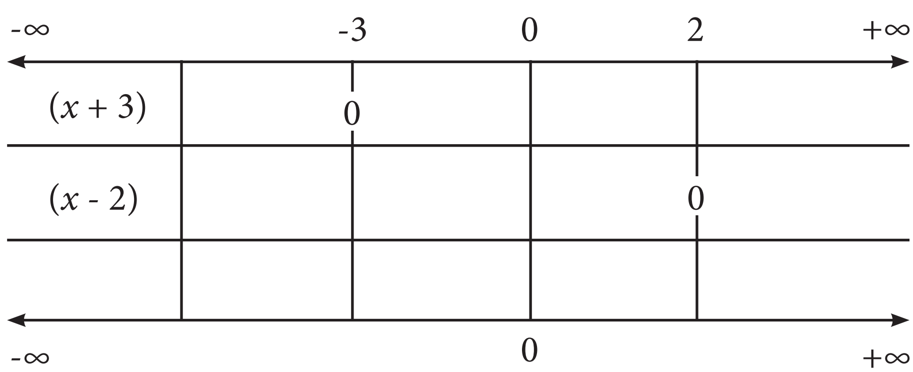
$x + 3 = 0$

$x = -3$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

5. Los puntos críticos que hacen cero la inecuación se colocan sobre la recta numérica de arriba, siguiendo su orden natural y debajo de ellos se coloca el 0:



6. Se analizan los signos a la izquierda y derecha de cada punto crítico (-3), a la izquierda de -3 se encuentran: -4, -5, -6, etcétera, y al sustituirlos por la incognita x el resultado siempre es negativo. Por ejemplo: -4 +3 = -1, -5 + 3 = -2, por tanto, se colocan signos negativos a la izquierda de él. A la derecha de -3 se encuentran -2, -1, 0, etcétera ,y al sustituirlos por la incognita x el resultado siempre es positivo. Por ejemplo: -2 + 3 = 1, -1 + 3 = 2, por tanto, se colocan signos positivos a la derecha de él:

$-\infty$		-3		0	2	$+\infty$
$(x + 3)$	-	0	+	+		+
$(x - 2)$					0	
$-\infty$				0		$+\infty$

7. Se analizan los signos a la izquierda y derecha de cada punto crítico (2), a la izquierda de 2 se encuentran: 1, 0, -1 etcétera y al sustituirlos por la incógnita *x* el resultado siempre es negativo. Por ejemplo: 1 - 2 = -1, 0 - 2 = -2, por tanto, se colocan signos negativos a la izquierda de él. A la derecha de 2 se encuentran 3, 4, 5, etcétera, y al sustituirlos por la incógnita *x* el resultado siempre es positivo. Por ejemplo: 3 - 2 = 1, 4 - 2 = 2, por tanto, se colocan signos positivos a la derecha de él:

$-\infty$		-3		0	2	$+\infty$
$(x + 3)$	-	0	+	+		+
$(x - 2)$	-		- -	-	0	+ +
$-\infty$				0		$+\infty$

8. Se bajan a la recta numérica inferior los puntos críticos, llamados de ahora en adelante extremos, y se marcan círculos no rellenos, porque la relación de orden es mayor que (>), si la relación fuera menor o igual a (≤) los círculos serían rellenos:

-∞	-3	0	2	+∞
$(x + 3)$	-	0 +	+	+
$(x - 2)$	-	- -	- 0	+ +
-∞	-3	0	2	+∞

9. Observe que la recta inferior quedó dividida en tres intervalos reales]-∞,-3[,] - 3, 2 [,] 2, + ∞[, multiplique los signos de las filas de arriba para obtener el signo correspondiente del intervalo, escribiendolo después en el intervalo respectivo:

-∞	-3	0	2	+∞
$(x + 3)$	-	0 +	+	+
$(x - 2)$	-	- -	- 0	+ +
	+	-	-	+
-∞	-3	0	2	+∞

10. La relación mayor que (>) se identifica con el signo positivo (+). Se dibuja la gráfica marcando el o los intervalos que tiene el signo negativo, no se incluyen los extremos porque la relación es de orden estricto, es decir, solo mayor que.

-∞	-3	0	2	+∞
$(x + 3)$	-	0 +	+	+
$(x - 2)$	-	- -	- 0	+ +
	+	-	-	+
-∞	-3	0	2	+∞

11. Se escribe el intervalo marcado en notación constructiva y de intervalo para determinar el conjunto solución de la inecuación:

C.S. = {x ε R, $x > -3$ o $x > 2$ }=]-∞ -3[U]2 +∞[

b) Determinar el C.S. de $2x^2 \geq 13x - 6$:

$2x^2 - 13x + 6 \geq 0$ ⟶ Escribiendo en su forma general

$(x - 6)(2x - 1) \geq 0$ ⟶ Factorizando

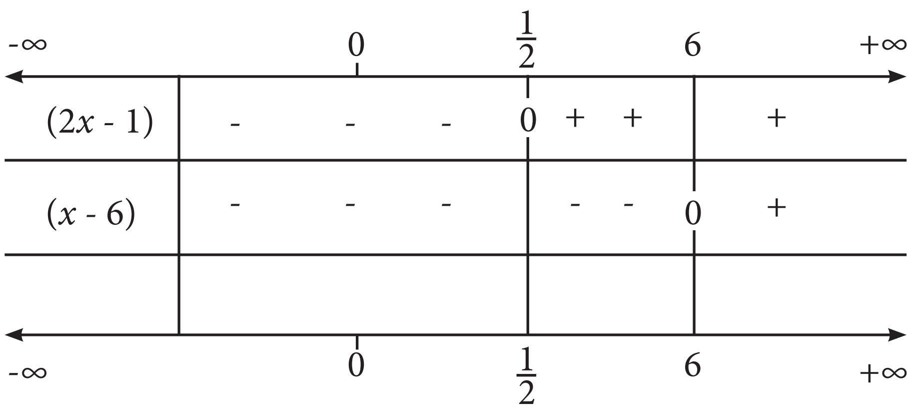
$$\left.\begin{aligned} &x - 6 = 0 \\ &x = 6 \\ &2x - 1 = 0 \\ &x = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$ Calculando mediante despeje los valores que hacen cero o anulan la ecuación

Observe la tabla de variación de signos, se coloca en la primera columna los factores de la inecuación y los valores críticos que hacen cero cada factor:

	-∞	0	$\frac{1}{2}$	6	+∞
$(2x - 1)$			0		
$(x - 6)$				0	
	-∞	0	$\frac{1}{2}$	6	+∞

Se analizan los signos a la izquierda y derecha de cada punto crítico $^1/_2$, a la izquierda de $^1/_2$ se encuentran: 0, -1,-2, etcétera y al sustituirlos por la incógnita x el resultado siempre es negativo, por ejemplo: $2x - 1= 2(0)- 1= -1$, por tanto, se colocan signos negativos a la izquierda de él. A la derecha de 1/2 se encuentran 1, 2, 3, etcétera y al sustituirlos por la incógnita x el resultado siempre es positivo, por ejemplo: : $2x - 1 = 2(1) - 1 = 1$, por tanto, se colocan signos positivos a la derecha de él.

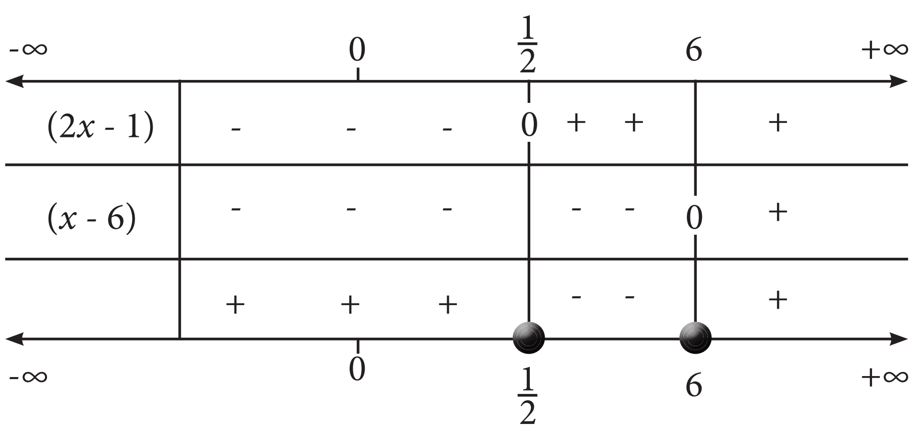
Se realiza el mismo análisis con el punto 6:



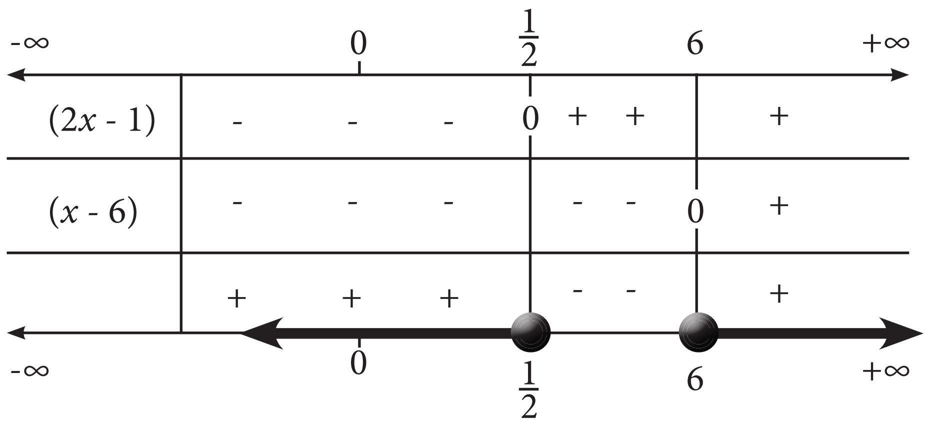
Se bajan a la recta inferior los extremos $^1/_2$ y 6, se marcan con círculos rellenos porque la relación de orden es de doble condición: mayor o igual a (≥).

Se multiplican los signos de las filas de los tres intervalos:

$\left]-\infty,\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 6\right], [6, +\infty[$



La relación mayor o igual a se identifica con el signo positivo + en la tabla. Se determina el conjunto solución marcando en la gráfica de $^1/_2$ hacia la izquierda y de 6 hacia la derecha, luego se escribe en notación constructiva y de intervalo:



$$C.S. = \left\{x \varepsilon R,\ x \leq \frac{1}{2} \text{ ó } x \geq 6\right\} = \left]-\infty,\ \frac{1}{2}\right] u \left[6, +\infty\right[$$

Inecuaciones de grado mayor que dos

Para determinar el C.S. de $(2x - 4)(3 - x)(x - 1) \leq 0$, se realizan los siguientes pasos:

Se calculan los valores que hacen cero o anulan cada factor:

$2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = \dfrac{4}{2}$

$x = 2$

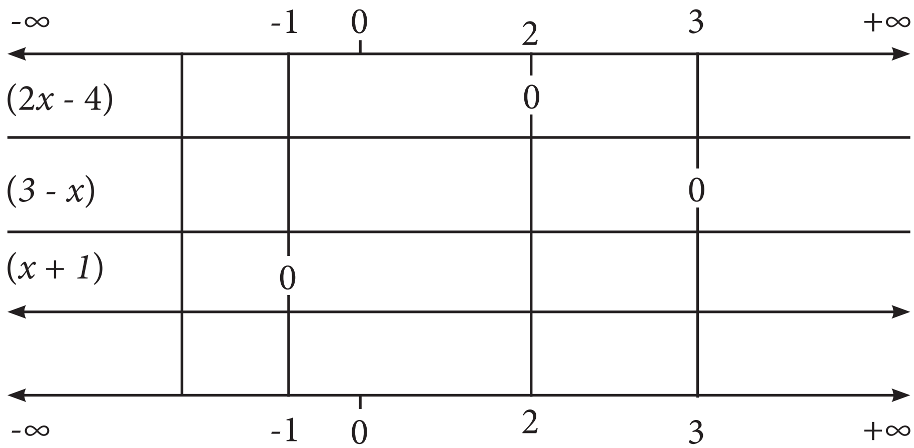
$3 - x$

$x = 3$

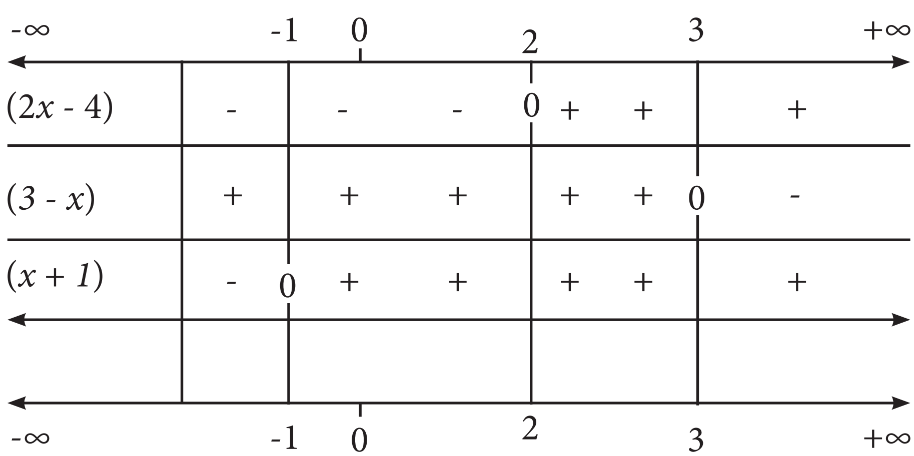
$x - 1$

$x = 1$

Se coloca en la primera columna los factores de la inecuación y los valores críticos que hacen cero cada factor:

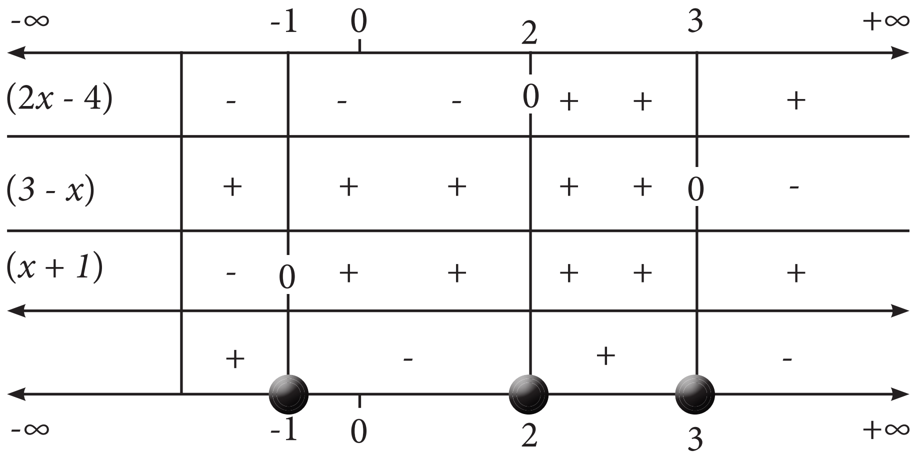


Se analizan los signos a la izquierda y derecha de cada punto crítico, para los valores -1, 2 el signo - queda a la izquierda y el signo + a la derecha.
Observe que para le valor 3 que hace cero el factor 3 - x, los signos quedan invertidos, es decir, que el signo - queda a la derecha y el signo + a la izquierda, porque a la izquierda de 3 se encuentran: -1, 0, 1, 2, etcétera y al sustituirlos por la incógnita x el resultado siempre es positivo. Por ejemplo: $3 - x = 3 -(-1)= 3 + 1 = 4$, por tanto, se colocan signos positivos a la izquierda de él. A la derecha de 3 se encuentran 4, 5, 6, etcétera y al sustituirlos por la incógnita x, el resultado siempre es negativo. Por ejemplo: $3 - x = 3 - 4= -1$, por tanto, se colocan signos negativos a la derecha de él:

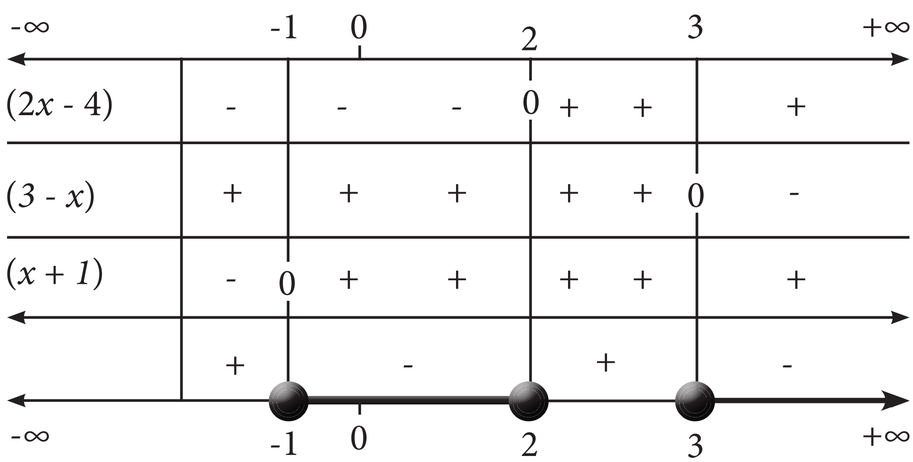


Se bajan a la recta inferior los extremos -1, 2 y 3, se marcan con círculos rellenos porque la relación de orden es de doble condición: menor o igual a (≤). Se multiplican los signos de las filas de los tres intervalos:

$\left]-\infty, -1\right], \left[-1, 2\right], \left[2, 3\right] \left[3, +\infty\right[$



La relación menor o igual a se identifica con el signo negativo (-) en la tabla. Se determina el conjunto solución marcando en la gráfica de 2 hacia la izquierda y de 3 hacia la derecha, luego se escribe en notación constructiva y de intervalo:



C.S. $= \left\{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2 \text{ o } x \geq 3\right\} = \left[-1, 2\right] \cup \left[3, +\infty\right[$

Actividad 9

Determine el C.S. de las siguientes desigualdades:

1. $x^2 + 2x > 8$

2. $4x^2 - 5x - 6 \leq 0$

3. $x^2 \geq 16$

4. $x^2 + 5x > 6$

5. $x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0$

6. $x^3 + 9x^2 + 26x \leq - 24$

7. $a^2 - 2a + 1 > 0$

8. $x + 1 + 2x^2 \leq 0$

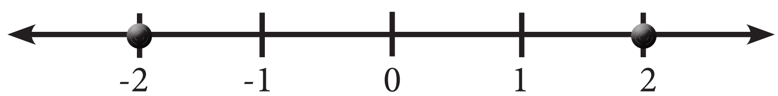
9. $x^2 - 10x + 25 \geq 0$

Inecuaciones con valor absoluto

Analice los siguientes ejemplos:

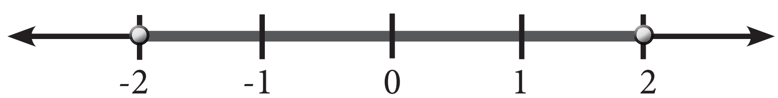
1. Para resolver la ecuación $|x|= 2$ se aplica la definición de valor absoluto, entonces el conjunto solución es {-2, 2}, es decir, los valores cuya distancia a partir de cero es 2, como se observa en la figura 1:

   Figura 1



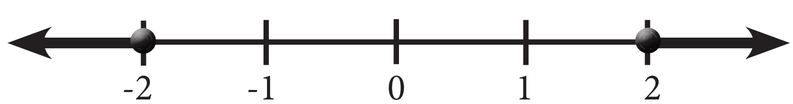
2. Para resolver la inecuación $|x|<2$ también se aplica la definición de valor absoluto, el conjunto solución está compuesto por los números cuya distancia a partir del cero es menor que 2 unidades, es decir, los números menores que 2 y mayores que -2 sin incluirlos, como se observa en la figura

   Figura 2



3. Para resolver la inecuación $|x|\geq 2$ también se aplica la definición de valor absoluto, el conjunto solución está compuesto por los números cuya distancia a partir del cero es mayor que 2 unidades, es decir, los números mayores que 2 y menores que -2, en este caso incluyéndolos, como se observa en la figura 3:

   Figura 3



Propiedades del valor absoluto

Partiendo de los ejemplos anteriores, se pueden comprender las siguientes propiedades que ayudarán a resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

Las soluciones de $|x|<a$ cumplen $-a < x < a$

Las soluciones de $|x|>a$ cumplen $x > a$ o $x < -a$

Las soluciones de $|x|=a$ cumplen $x = a$ o $x = -a$

Ejemplos: determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3|2x - 3| < 15$

Solución

$3|2x - 3| < 15$

$|2x - 3| < \frac{15}{3}$ → Despejando

$|2x - 3| < 5$ → Dividiendo

$|2x - 3| < 5$ cumple $-5 < 2x - 3 < 5$ Aplicando la propiedad 1

$-5 + 3 < 2x - 3 + 3 < 5 + 3$ → Sumando 3 a toda la desigualdad

$-2 < 2x < 8$

$\frac{-2}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$ → Dividiendo por dos a toda la desigualdad

$-1< x < 4$

C.S. = $\{x \varepsilon R, -1 < x < 4\}$

b) $|2-3x| \leq 6$

Solución

$|2 - 3x| \leq 6$ cumple con $-6 < 2 - 3x < 6$

$-6 - 2 < 2 - 3x - 2 < 6 - 2$ Restando 2 a toda la desigualdad

Observe que la variable x esta precedida del 3 negativo, esto hace que los signos se inviertan, es decir, los valores positivos para la incógnita se multiplica por el signo -, entonces cambian a negativos, los valores negativos para la incógnita se multiplican por el signo -, entonces cambian a positivos, por la tanto, la desigualdad también se invierte de menor que a mayor que:

$-8 < -3x < 4$

$\frac{-8}{-3} > \frac{-3x}{-3} > \frac{4}{-3}$ Dividiendo por 3 y cambiando de sentido la desigualdad

$\frac{8}{3} > x > \frac{-4}{3}$

$\frac{-4}{3} < x < \frac{8}{3}$ Invirtiendo para escribir en forma usual la desigualdad

$C.S. = \left\{ x \varepsilon R, \frac{-4}{3} < x < \frac{8}{3} \right\}$

c) $\left| \frac{3x - 5}{-1} \right| \geq \frac{1}{2}$

Solución

$\left| \frac{3x - 5}{-1} \right| \geq \frac{1}{2}$ cumple con $\frac{3x - 5}{-1} \geq \frac{1}{2}$ o $\frac{3x - 5}{-1} \leq -\frac{1}{2}$

$2(3x - 5) \geq -1(1)$ o $2(3x - 5) \leq -1(-1)$

$6x - 10 \geq -1$ o $6x - 10 \leq +1$

$6x - 10 + 10 \geq -1 + 10$ o $6x - 10 + 10 \leq 1 + 10$

$6x \geq 9$ o $6x \leq 11$

$$\frac{6x}{6} \geq \frac{9}{6} \quad \text{o} \quad \frac{6x}{6} \leq \frac{11}{6}$$

$$x \geq \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x \leq \frac{11}{6}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ x \varepsilon R, x \geq \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x \leq \frac{11}{6} \right\}$$

$$\left| \frac{3x - 5}{3} \right| < 3$$

Actividad 10

Determine el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

1. $2x - 1 > 3$

2. $|x - 1| > 0$

3. $\left| \frac{x}{5} - \frac{1}{2} \right| \geq 5$

4. $|x - 3| > -1$

5. $|2x - 1| < -3$

6. $2|x - 2| < 2$

7. $\left| \dfrac{x - 5}{-1} \right| \leq -5$

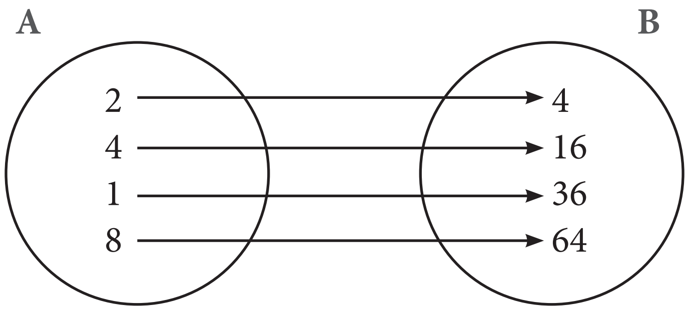
8. $|x + 10| < 20$

9. $3|3x - 3| > 3$

Conceptualización de función

Observe la figura 1, el conjunto A contiene los primero cuatro números pares y el conjunto B, los cuadrados de dichos números.

Figura 1.



Las flechas relacionan cada elemento de A con su respectivo cuadrado en B. A este tipo de relación en la que a un elemento de un conjunto A le corresponde un elemento del otro conjunto B y viceversa, recibe el nombre de función.

Al conjunto A= {2, 4, 6, 8} se le denomina dominio y al conjunto B= {4, 16, 36, 64} se le denomina rango. La función entre dos conjunto A y B se simboliza de esta manera: f: $A \to B$. Lo cual se lee: función de A en B.

El elemento de B correspondiente a un elemento de A, recibe el nombre de imagen de A.

Se puede decir que el elemento y de B que es imagen del elemento x de A, se simboliza de la siguiente manera: $y= f(x)$ y se lee y es imagen de x.

La relación establecida en la figura 1 se puede expresar así: $y= x^2$ o $f(x)= x^2$, entonces para calcular las imágenes de los elementos de A se realiza de la siguiente manera:

$f(2)= 2^2= 4$ se forma el par ordenado (2, 4)

$f(4)= 4^2= 16$ se forma el par ordenado (4, 16)

$f(6)= 6^2= 36$ se forma el par ordenado (6, 36)

$f(8)= 8^2= 64$ se forma el par ordenado (8, 64)

Para que una relación sea una función, se debe cumplir lo siguiente: que cada elemento del conjunto dominio le corresponda una y solo una imagen en el rango, sin embargo, un elemento del rango puede ser imagen de dos o más elementos del dominio.

Una función es un conjunto de pares ordenados en el que no hay dos pares ordenados distintos con el mismo primer componente.[1]

Funciones polinómicas de grado mayor que dos

Las funciones de la forma:

$$f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_1 x + a_0$$

Donde a_n es diferente de cero, se conoce como función polinómica de n-ésimo grado.

Los números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_1 \dots a_0$ se llaman los coeficientes de la función y son números reales.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)= x^3 + 3x^2 - x - 3 \\ \\ f(x)=(x-2)^3 - 3 \end{array}\right\} \text{Funciones cúbicas}$$

$$f(x)= x^4 - 5x^2 - 1 \longrightarrow \text{Función cuartica}$$

El dominio de las funciones polinómicas se toma como el conjunto de los números reales, porque con estos se llega a un valor real de la expresión que sirve como definición, mientras no se indique lo contrario.

[1] Horacio Reyes Núñez. Matemática 10° grado. Honduras.

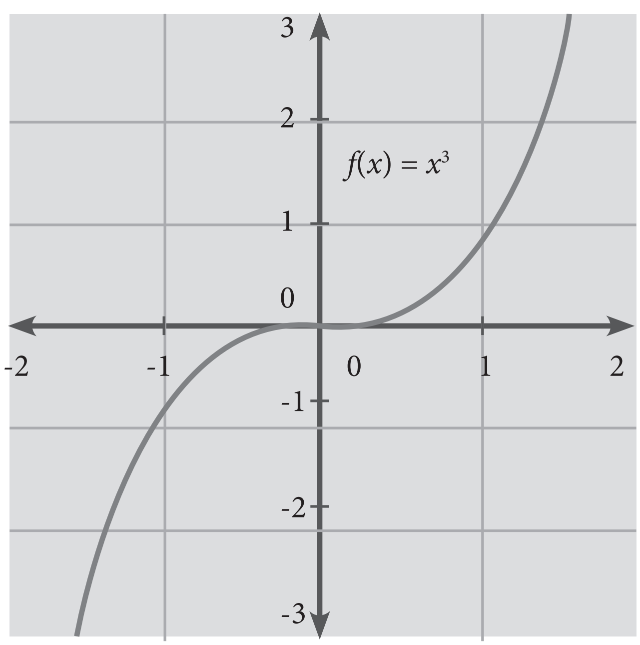
Función cúbica

Es el conjunto de pares ordenados en los que el primer componente es un número real y el segundo componente es el cubo de la primera.

El método más práctico para graficar una función cúbica es elaborar una tabla de valores dentro del dominio dado. Ejemplo:

Dada $f(x)= x^3$, elaborar su gráfica, determinar el dominio, el rango y el intercepto en el eje x:

x	$y= x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8



$Domf(x) = \mathrm{R}$

$Rangf(x) = \mathrm{R}$

$I_y = (0, 0)$

Actividad 11

Elaborar una gráfica de cada una de las siguientes funciones, determinar el dominio, el rango y el intercepto en el eje x de cada una.

1. $y = (x - 1)^3$

2. $y = 2x^3$

3. $y = x^3 + 1$

4. $y = (x + 1)^3 - 1$

5. $y = -x^3$

6. $y= 3x^3$

7. $y= -2x^3$

8. $y= (x - 2)^3$

Operaciones con funciones

Dadas dos funciones f(x) y g(x), con dichas funciones se pueden realizar, entre otras, las siguientes operaciones: suma, resta, multiplicación y división de funciones.

La suma de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es otra función $(f + g)(x)$, cuyas imágenes se obtienen sumando las imágenes de $f(x)$ y $g(x)$. De forma análoga se define la resta de dos funciones, obteniendo $(f - g)(x)$:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Ejemplos:

1. Sean las funciones $f(x) = 3x + 1$, y $g(x) = 2x - 4$. Definir la función $(f + g)(x)$ y. Calcular las imágenes de la función suma de los números 2, -3 y $^1/_5$.

   Solución

   - La función $f + g$ se define como

     $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 + 2x - 4 = 5x - 3$

   - $(f + g)(2) = 5 \bullet 2 - 3 = 7$

     $(f + g)(-3) = 5(-3) - 3 = -18$

     $(f + g)(1/5) = 5 \bullet \frac{1}{5} - 3 = -2$

   Observe que si se calculan las imágenes de f y g por separado y se suman, el resultado es el mismo. Por ejemplo, para la imagen del 2:

   $$\left.\begin{array}{l} f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7 \\ g(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0 \end{array}\right\} (f + g) = (2) = 7 + 0 = 7$$

2. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3$, y $g(x) = x + 3$, definir la función $(f - g)(x)$. Calcular las imágenes de $^1/_3$, -2 y 0 mediante la función $(f - g)(x)$.

   Solución

   $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3 - (x + 3) = x^2 - 3 - x - 3 = x^2 - x - 6$

   $(f - g)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 6 = -\frac{56}{9}$

   $(f - g)(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$

   $(f - g)(0) = (0)^2 - (0) + 6 = 6$

Multiplicación de funciones

La multiplicación de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es otra función $(f{\cdot}g)(x)$, cuyas imágenes se obtienen multiplicando las imágenes de $f(x)$ y g(x). Ejemplo:

Dadas las funciones $f(x)= {}^{x}/_{2} - 3$ y $g(x)= 2x$-1, determinar la función $(f \cdot g)$ (x) y calcular la imagen de -2 mediante la función $(f \cdot g)(x)$.

Solución

$$(f \cdot g)(x)= f(x) \cdot g(x)= \left(\frac{x}{2} - 3\right)(2x - 1)= x^2 - \frac{13}{2}\ x + 3$$

$$f \cdot g(x)= (-2)^2 - \frac{13}{2}\ (-2) + 3= 20$$

Si calcula las imágenes de los números mediante las funciones $f(x)$ y $g(x)$ por separado, y multiplicando después, se obtienen los mismos resultados.

Cociente de funciones

La división de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es otra función $\left({}^{f}/_{g}\right)$(x) , cuyas imágenes se obtienen multiplicando las imágenes de f(x) y g(x).
Dadas las funciones $f(x)$ = -x - 1, y $g(x) = 2x + 3$, definir $\left({}^{f}/_{g}\right)(x)$ y calcular las imágenes de -1 mediante la función.

Solución

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x - 1}{2x + 3}$$

La función $\left({}^{f}/_{g}\right)(x)$ está definida para todos los números reales, excepto para $x= \frac{-3}{2}$, donde la función $g(x)$ se anula:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1)= \frac{0}{1} = 0$$

Al calcular por separado las imágenes de los números mediante las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y después efectuando su cociente, se obtienen los mismos resultados.

Composición de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, f y g, se llama composición de las funciones f y g, y se escribe $g \circ f$, a la función definida de R en R, por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

La función $(g \circ f)(x)$ se lee "f compuesto con g aplicado a x".

$$\mathrm{R} \xrightarrow{f} \mathrm{R} \xrightarrow{g} \mathrm{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g[f(x)]$$

Primero actúa la función f y después la función g, sobre f(x).

Cálculo de la imagen de un elemento mediante una función compuesta

Para obtener la imagen de la función compuesta aplicada a un número x, se siguen estos pasos:

- Se calcula la imagen de x mediante la función f, $f(x)$.
- Se calcula la imagen mediante la función g, de $f(x)$. Es decir, se aplica la función g al resultado obtenido anteriormente.

Ejemplos:

1. Dadas las funciones $f(x)= x + 3$ y $g(x)= x^2$.

   Calcular $g \circ f$ y la imagen mediante esta función de 1, 0 y -3.

   Solución

   $(g \circ f)(x)= g[f(x)]= g[(x + 3)]= (x + 3)^2$

   La imagen de dos números 1, 0, -3, mediante la función $g \circ f$ es:

   $(g \circ f)(1)= g[f(1)]= g[(1 + 3)]= g(4)=(4)^2= 16$

   $(g \circ f)(0)= g[f(0)]= g[(0 + 3)]= g(3)=(3)^2= 9$

   $(g \circ f)(-3)= g[f(-3)]= g[(-3 + 3)]= g(0)=(0)^2= 0$

2. Dadas las funciones $f(x)= x^2 + 1$ y $g(x)= 3x - 2$, calcular:

   $(g \circ f)(x)$

   $(f \circ g)(x)$

   $(g \circ f)(5)$

   $(g \circ f)(5)$

   $(f \circ g)(5)$

Solución

a) La función $g \circ f$ está definida por:

$$(f \circ g)(x)= g[f(x)]= g[(x^2 + 1)]= 3(x^2 + 1) - 2= 3x^2 + 3 - 2= 3x^2 + 1$$

b) La función $f \circ g(x)$ está definida por:

$$(f \circ g)(x)= f[\mathrm{g}(x)]= f[3x - 2]= (3x - 2)^2 + 1= 9x^2 + 4 - 12x + 1= 9x^2 - 12x + 5$$

Observe que $g \circ f \neq f \circ g$

c) $(g \circ f)(5)= 3(5)^2 + 1= 3(25) + 1= 76$

d) $(f \circ g)(5)=9(5)^2 - 12(5) + 5= 9(25) - 60 + 5= 225 - 60 + 5= 170$

3. Dadas las funciones $f(x)= 3x + 2$ y $g(x)= \dfrac{x + 3}{2x + 1}$, calcular:

   $(g \circ f)(x)$, $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x)=g[f(x)]= g(3x + 2)= \frac{3x + 2 + 3}{2(3x + 2) + 1} = \frac{3x + 5}{6x + 5}$$

$$(f \circ g)(x)= f[g(x)]= f\left(\frac{x+3}{2x + 1}\right)= 3\,\frac{x + 3}{2x + 1} + 2 = \frac{3x + 9}{2x + 1} + 2 = \frac{3x + 9 + 4x + 2}{2x + 1}$$

$$= \frac{7x + 11}{2x + 1}$$

Actividad 12

En los siguientes problemas, para las funciones f y g, determine las funciones y establezca el dominio de cada una:

a. $f + g$

b. $f - g$

c. $f \cdot g$

d. $\dfrac{f}{g}$

1. $f(x) = 3x + 4; \quad g(x) = 2x - 3$

2. $f(x) = \sqrt{x}; \quad g(x) = 3x - 5$

3. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\ ; \quad g(x) = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2}$; $g(x) = \dfrac{4x}{3x - 2}$

Actividad 13

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$, $g(x) = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$ calcule:

- $(g \circ f)(x)$
- $(f \circ g)(x)$
- $(h \circ g)(x)$

- $(f \circ h)(x)$

- $(f \circ g)(-2)$

- $(f \circ h)(0)$

- $(g \circ f)(-1)$

- $(h \circ g)(0)$

Función inversa

Observe los siguientes diagramas:

Diagrama 1

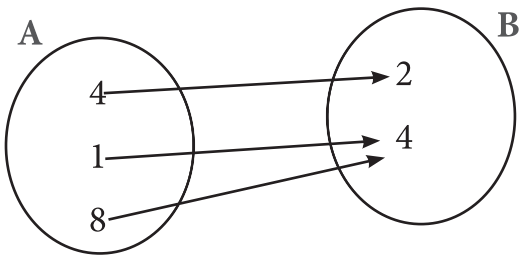


Diagrama 2

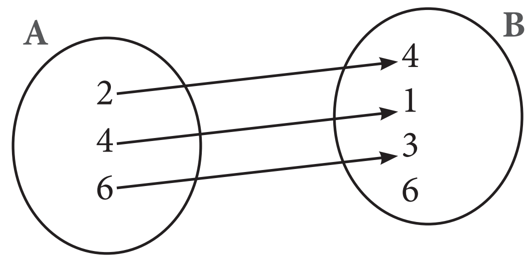
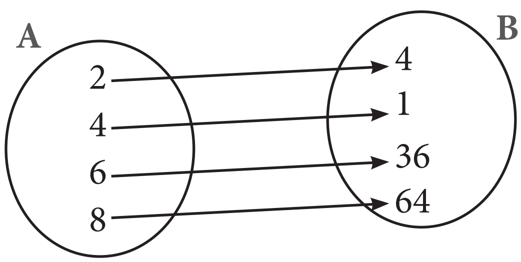


Diagrama 3



Si se invirtiera la regla de la función y se intercambia el dominio con el rango, se obtienen los siguientes diagramas:

Diagrama 4

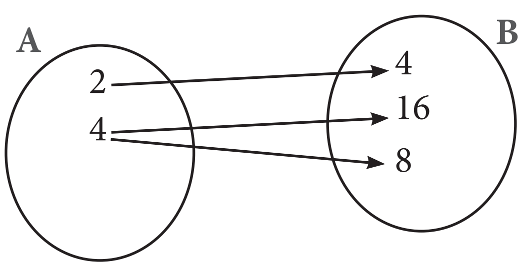


Diagrama 5

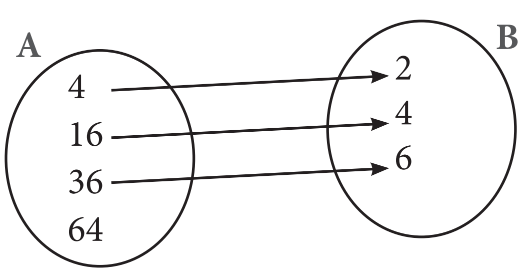
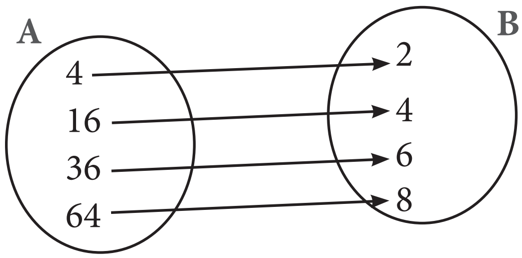


Diagrama 6



En el diagrama 4 se nota que la relación no es función, porque el 4 tiene dos imágenes. En el diagrama 5 la relación no es función, porque el 64 no tiene imagen.

En el diagrama 6 la relación sí es función, porque todo elemento del rango posee solo una imagen, lo que garantiza que la relación del diagrama 3 y 6 representan una función uno a uno.

Para que una función *f* tenga inversa esta debe ser uno a uno.

Recuerde que una función se define como $y= f(x)$ y para que esta tenga una inversa, cada x de su dominio debe poseer una y en su rango, además, a cada y del rango le corresponde una x de su dominio, esto dice que la correspondencia del rango de *f* sobre el dominio de f también es una función que se denomina función inversa de *f*.

Se dice que dos funciones *f* y *g* son funciones inversas si cumplen:

$(f \text{ o } g)(x)= f\,[\,g(x)]=x$

$(g \text{ o } f)(x)= g[f(x)\,]=x$

Para todo x en el domino de *f* y *g*.

Ejemplos:

1. Verifique que las funciones $f(x)=2x + 5$ y $g(x)= \dfrac{x - 5}{2}$ son funciones inversas:

$$(f \text{ o } g)(x)= f\,[g(x)]= f\left(\frac{x - 5}{2}\right)= 2\left(\frac{x - 5}{2}\right)+ 5 = x - 5 + 5 = x$$

$$(g \text{ o } f)(x)= g[f(x)]= g(2x + 5) = \frac{2x + 5 - 5}{2} = x$$

2. Calcule la función inversa de:

$$f(x) = \frac{-2x - 1}{5}$$

Solución

Se cambia la x por y, y se despeja la y :

$$x = \frac{-2y - 1}{5} \Longrightarrow 5x = -2y - 1 \Longrightarrow 2y = -5x - 1 \Longrightarrow y = \frac{-5x - 1}{2}$$

Por tanto:

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x - 1}{2}$$

Actividad 14

Obtenga la función inversa de y, compruébela determinando $(f^{1} \circ f)(x)$. Determine el dominio y el rango para la función f y la función inversa f^{1}:

1. $f(x) = 3x$

2. $f(x) = 4x + 2$

3. $f(x) = x^3 - 1$

4. $f(x)= x^2 + 4;\ x \geq 4$

5. $f(x)= \frac{4}{x}$

6. $f(x)= \frac{1}{x - 2}$

7. $f(x)= \frac{2x - 3}{4}$

8. $f(x)= 2x^2 - 2$

9. $f(x)=(2x+3)/(x-1)$

10. $f(x)= \sqrt{x}$

Actividad 15

En los siguientes problemas determine si f y g son inversas una de la otra, demostrando que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$:

1. $f(x) = 3x + 4$; $\quad g(x) = \frac{1}{3}(x - 4)$

2. $f(x) = 4x - 8$; $\quad g(x) = \frac{x}{4} + 2$

3. $f(x) = x^3 - 8$; $\quad g(x) = \sqrt[3]{x + 8}$

4. $f(x) = \frac{2x}{3x - 1}$; $\quad g(x) = \frac{3x + 4}{2x - 3}$

5. $f(x) = \frac{2x + 3}{4}$; $\quad g(x) = \frac{4x - 3}{2}$

6. $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$; $g(x)=\frac{x+3}{x-2}$

7. $f(x)=x^2$; $g(x)=\sqrt{x}$

8. $f(x)=\frac{1}{x}$; $g(x)=\frac{1}{x}$

9. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; $g(x)=x^3-1$

Funciones racionales

Una función racional está formada por la división de dos funciones polinómicas:

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Ejemplo 1

$$f\left(x\right)=\frac{x^2+3}{x-2}$$

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los números que hacen cero al denominador.

Para calcular el dominio de una función racional se iguala a cero el denominador y se despeja para la incógnita.

En $f\left(x\right)=\frac{x^2+3}{x-2}$

x-2= 0

x= 2

Entonces:

El Dom $f(x)$={xεR, x≠2}

Gráfica de una función racional propia

Una función racional propia puede presentar intersección con el eje *y* (ordenada al origen) e intersecciones con el eje *x* (raíces).

Para encontrar la ordenada al origen se le da a *x* el valor de cero y se obtiene el valor de $f(x)$.

Las raíces se buscan dando a $f(x)$ el valor de cero y despejando *x*.

Ejemplo 2

Sea la función: $f\left(x\right)=\frac{3x+4}{2x^2+3x+2}$

Se evalúa en cero para obtener la ordenada al origen:

$$f(0) = \frac{3(0) + 4}{2(0) + 3(0) + 2} = 2$$

Se iguala la función a cero para obtener la raíz:

$$0 = \frac{3x + 4}{2x^2 + 3x + 2}$$

$$0 = 3x + 4$$

$$0 = -\frac{4}{3}$$

Ejemplo 3

Considere la función:

$$f(x) = \frac{3x}{(2x + 1)^2}$$

Se evalúa en cero para obtener la ordenada al origen:

$$f(0) = \frac{3(0)}{(2(0) + 1)^2} = 0$$

Se iguala la función a cero para obtener la raíz:

$$0 = \frac{3x}{(2x + 1)^2}$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

Ejemplo 4

Sea la función:

$$f(x) = \frac{3x}{x + 1}$$

Se evalúa en cero para obtener la ordenada al origen:

$$f(0) = \frac{3}{1} = 3$$

Se iguala la función a cero para obtener la raíz:

$$0 = \frac{3}{x + 1}$$

$$0 \cdot (x + 1) = 3$$

Observe que se llega a una contradicción. Esto implica que no hay ningún valor de x tal que la función valga cero, es decir, no tiene raíces.

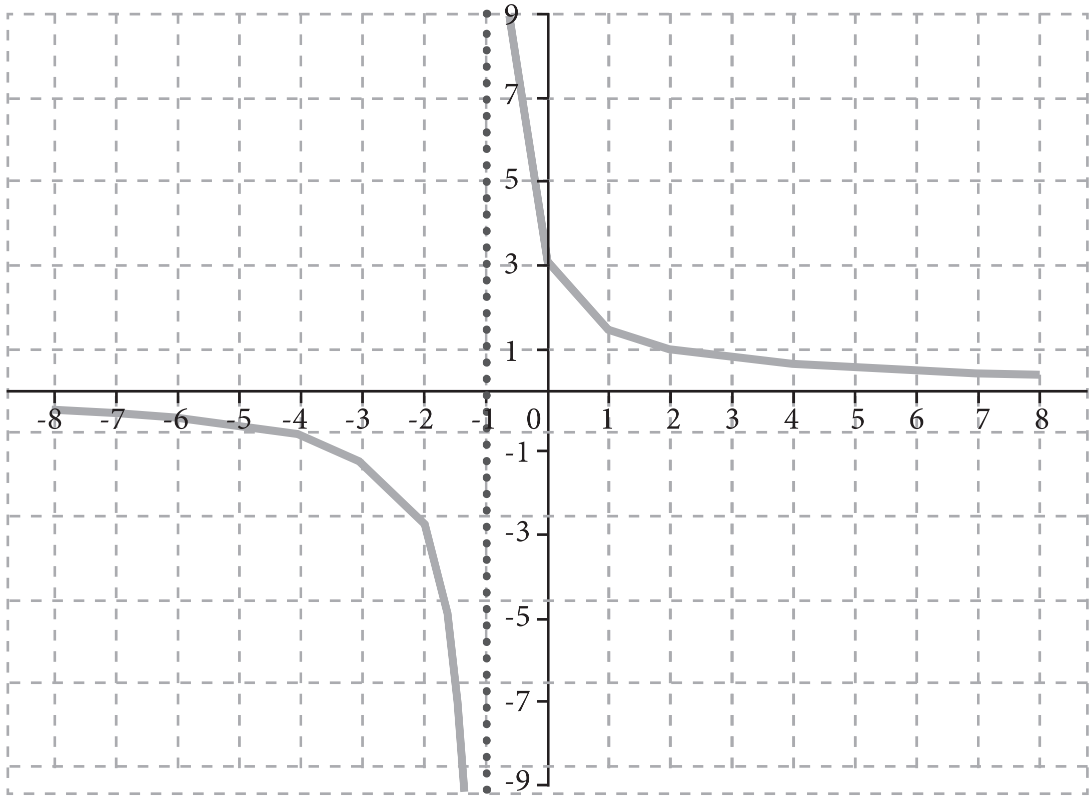
Por inspección se ve que la función no está definida cuando $x= -1$.
Para aclarar el comportamiento de la función analice la representación tabular:

x	$f(x)$
-100	-0.0303
-10	-0.3333
-1.01	-300
-1	$\frac{3}{0}$
-0.99	300
0	3
10	0.2727
100	0.0297

En la tabla se ve que para valores de x cada vez más grandes, es decir, que tiende al infinito ($x \to \infty$), los valores de $f(x)$ son cada vez menores acercándose a cero, o sea que tiende a cero ($x \to -\infty$). Para valores de x negativos, que tienden al infinito negativo, los valores de $f(x)$ también se acercan a cero. Este comportamiento de la función se dice que es asintótico al eje x.

También se observa que si se acerca a $x= -1$, los valores de $f(x)$ son cada vez mayores, ya sea positivos (por la derecha) o negativos (por la izquierda). Otra vez, el comportamiento de la función es asintótico a $x= -1$. La línea $x= -1$se llama asíntota vertical. La representación gráfica es la siguiente:

Gráfica de $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$



El dominio de esta función es el conjunto de todos los reales, excepto x= -1, y el rango es el conjunto de todos los reales, excepto y= 0.

Ejemplo 5

Determinar el dominio, rango, asíntota vertical, asíntota horizontal y gráfica de $f(x)= \dfrac{1}{x - 2}$:

a) El dominio de $f(x)$ se determina igualando a cero el denominador y despejando para x. Este valor también determina la ecuación de la asíntota vertical, se utiliza una línea punteada para representarla en la gráfica:

$x - 2= 0$

$x= 2$

Dom $f(x)=\{x \in R, x\neq 2\}$

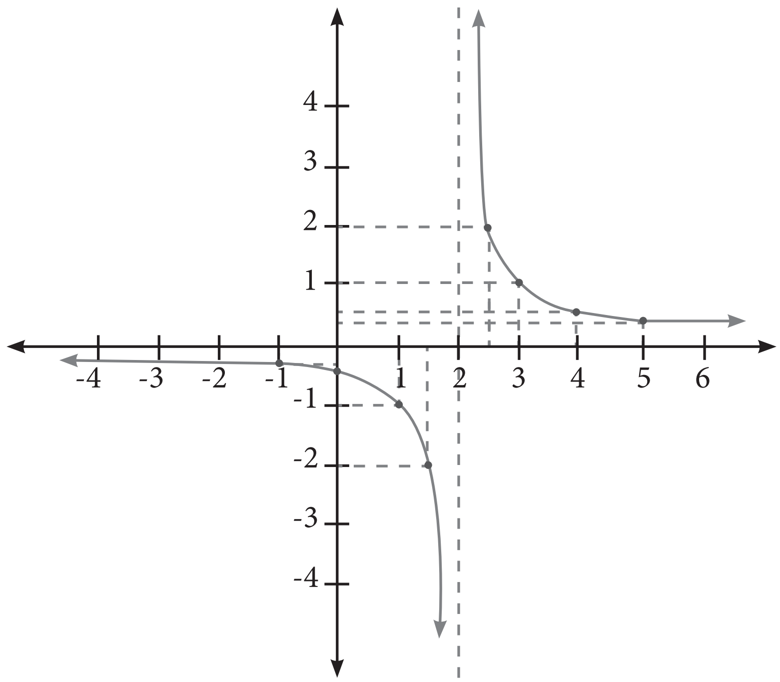
A.V. : $x= 2$

b) La ecuación de la asíntota horizontal en este caso es $y= 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador:

A.H. : $y= 0$

c) Para determinar la gráfica se elabora una tabla de valores:

x	y
-1	$-\frac{1}{3}$
0	$-\frac{1}{2}$
1	-1
3	1
4	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{3}$



Rang $f(x)) = \{y \in R,\ y \neq 0\}$

Gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

Ejemplo 6

Determinar el dominio, rango, asíntota vertical, asíntota horizontal y gráfica de $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$:

$x - 1 = 0$

$x = 1$

Dom $f(x)=\{x \in R, x\neq 1\}$

A.V. : $x= 1$

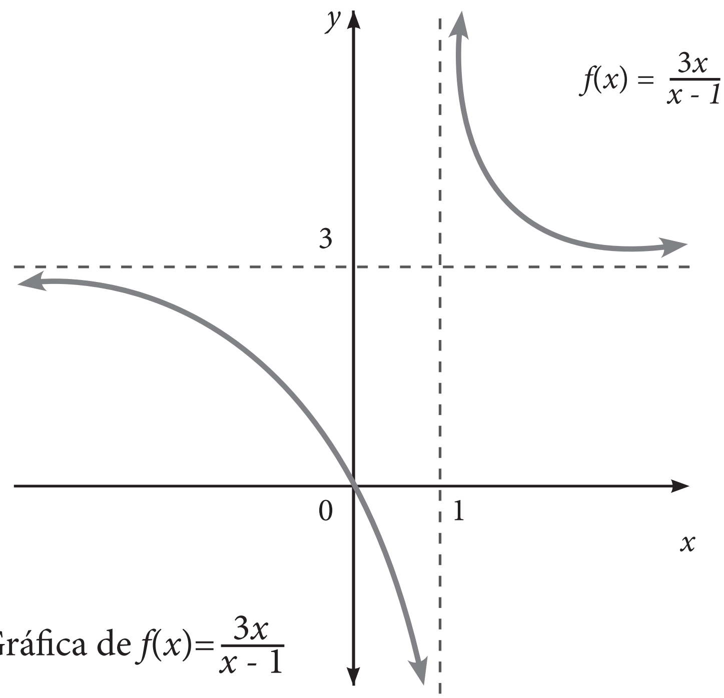
La ecuación de la asíntota horizontal en este caso es $y=3$, aquí el grado del numerador y del denominador son iguales, entonces la ecuación de la asíntota vertical se calcula dividiendo los coeficientes principales del dividendo *y* del divisor:

$\frac{3}{1} = 3$

A.H. : y= 3

Rang $f(x)=\{y \in R, y\neq 3\}$

x	y
-2	2
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$
-1	$\frac{3}{2}$
0	0
$-\frac{1}{2}$	1



Gráfica de $f(x)=\frac{3x}{x-1}$

Hasta ahora se han desarrollado funciones en los que el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador. En el siguiente ejemplo se introduce un concepto de asíntota oblicua para la gráfica de una función, en la que el grado del dividendo es mayor que el grado divisor.

Ejemplo 7

Determinar el dominio, asíntota vertical, asíntota oblicua y gráfica de $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$:

$x - 1= 0$

$x = 1$

Dom $f(x)= \{x \in R, x\neq 1\}$

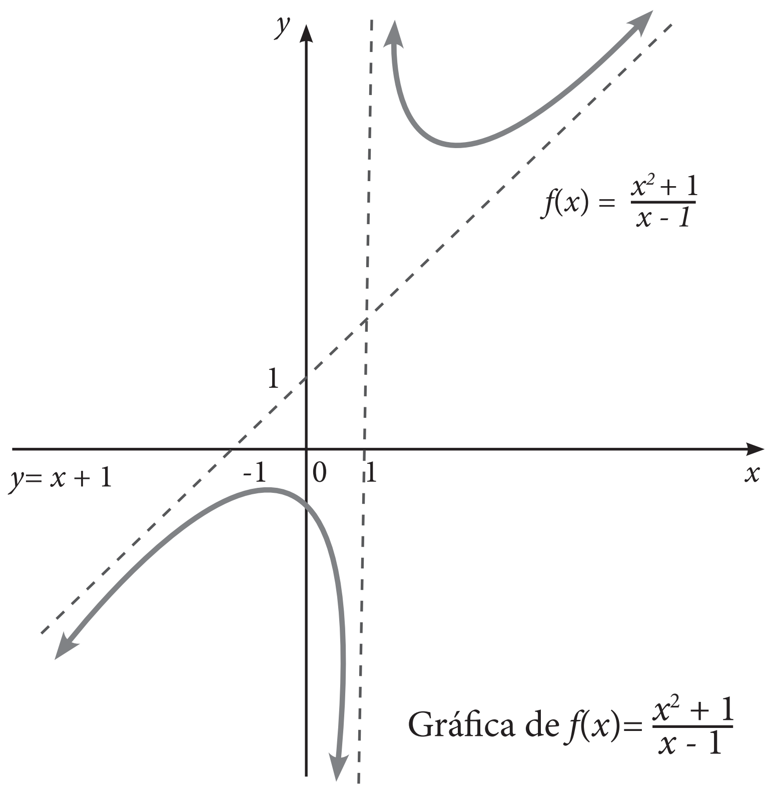
A.V. : $x = 1$

Puesto que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se utiliza la división para escribir la función $f(x)$ de la forma:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{x + 1 + 2}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{x + 1 + 2}{x - 1}$$

Observe que cuando los valores de x tienden a ser muy grandes, es decir, que se inclinan al infinito ($x \rightarrow \infty$), la expresión $2/_{x - 1}$ tiende a cero, lo mismo pasa cuando estos valores tienden al infinito negativo ($x \rightarrow -\infty$), por tanto:
$f(x) = x + 1 + 0$, que es lo mismo que $y = x + 1$ y esta ecuación determina la asíntota oblicua.
A.O.: $y = x + 1$



Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

Actividad 16

Determine el dominio, rango, asíntota vertical, asíntota horizontal y gráfica de:

a) $f(x)= \frac{3}{x - 1}$

b) $f(x)= \frac{2x}{x + 1}$

c) $f(x)= \frac{1}{x}$

d) $f(x)= \frac{4x}{x + 2}$

e) $f(x)= \frac{1}{x^2}$

Actividad 17

Determine el dominio, asíntota vertical, asíntota oblicua y gráfica de:

a) $f(x)= \frac{x^2+1}{x+1}$

b) $f(x)= \frac{x^2-2}{x+3}$

c) $f(x)= \frac{x^2-\mathrm{x}-6}{x-4}$

d) $f(x)= \frac{x^9-9}{x}$

e) $f(x)= \frac{x+3}{x-1}$

Función valor absoluto

La función de valor absoluto tiene por ecuación $f(x) = |x|$, se asocia con distancias, por lo tanto, siempre será positiva o nula.

El valor absoluto de un número real x, se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x \quad si \quad x \geq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \\ -x \quad si \quad x < 0 \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales, a menos que este se restrinja inicialmente y el rango, por lo general, será el conjunto de los números reales positivos.

Las funciones en valor absoluto siempre representan una distancia o intervalos (tramos o trozos) y se pueden resolver o calcular siguiendo los siguientes pasos:

a) Se iguala a cero la función, sin el valor absoluto y se calculan sus raíces.

b) Se evalúan los valores de x que están a la izquierda y derecha de la raíz. Se elabora una tabla.

c) Se define la función a intervalos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función.

d) Se representa la función resultante.

Ejemplo 1

Determinar el dominio, el rango y la gráfica de $f(x) = |x - 2|$:

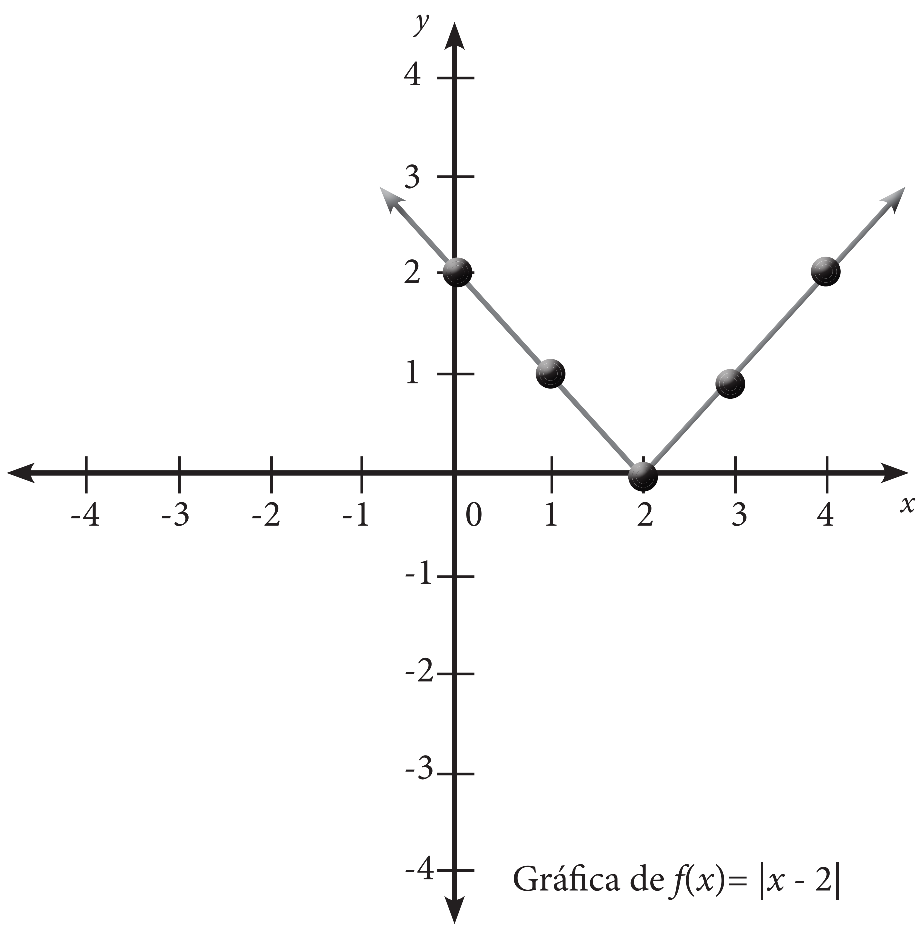
1) $x - 2 = 0$

$x = 2$ cero es raíz de la función

2) Se elabora una tabla de valores para evaluar los valores de x:

x	y
0	2
1	1
2	0
3	1
4	2

3. Se elabora la gráfica:



Gráfica de $f(x)= |x - 2|$

Dom $f(x)= R$

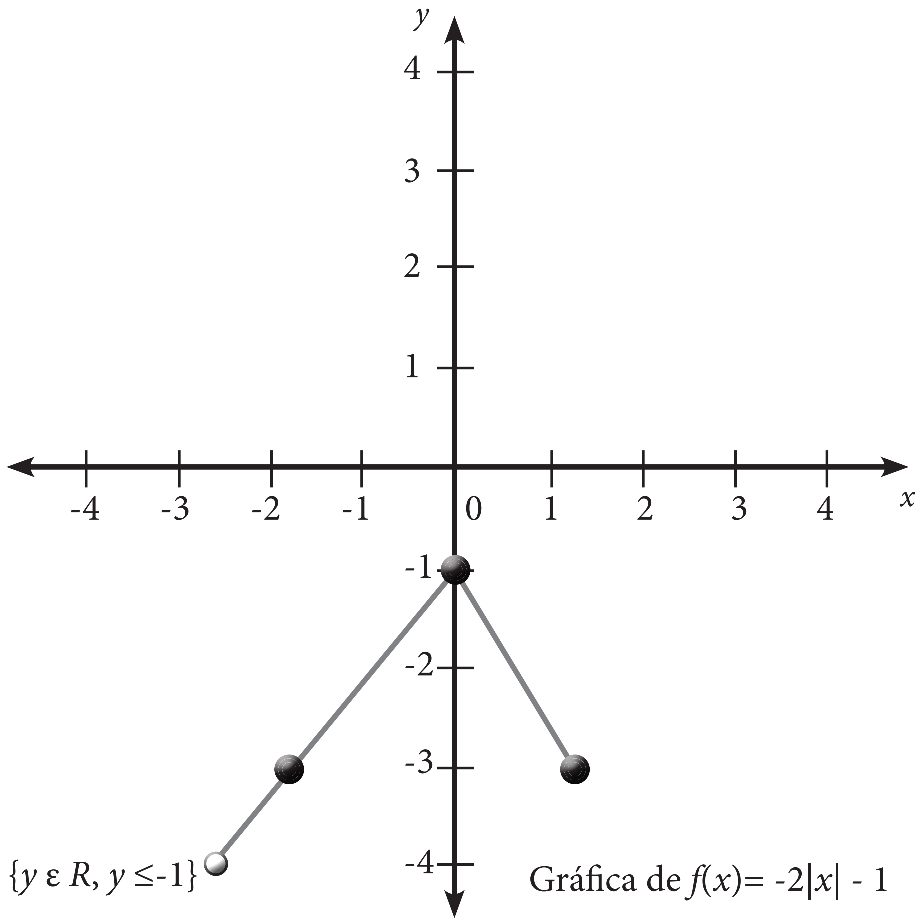
Rang $f(x)=\{y \in R, y \geq 0\}$

Ejemplo 2

Determinar el rango y la gráfica de $f(x)$=-2|x|-1, con Dom $f(x)$=] - 2, 1].

De una vez se elabora la tabla de valores, porque el argumento del valor absoluto es x:

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	-3



Rang $f(x)$= $\{y \; \varepsilon \; R, y \leq -1\}$

Gráfica de $f(x)$= -2|x| - 1

Actividad 18

Determinar el dominio, el rango y la gráfica de:

1) $f(x)$= $|x - 1| - 1$

2) $f(x)= 2|x - 2| - 2$

3) $f(x)= |x - 1| - 1$

4) $f(x)= 2|x| + 1$

5) $f(x)= -2|x|+3$

6) $f(x)= |x + 1| - 1$, con Dom $f(x)=]\ -2, 2]$

7) $f(x) = -|x+2| - 1$, con Dom $f(x) = [-3, 1[$

8) $f(x) = |x| - 2$

Función seccionada

Existe un tipo especial de funciones que combinan en algunos intervalos relaciones o las funciones estudiadas anteriormente, a este tipo de funciones se les llama seccionadas.

Ejemplo 1

Determinar el dominio, el rango y representar gráficamente la siguiente función:

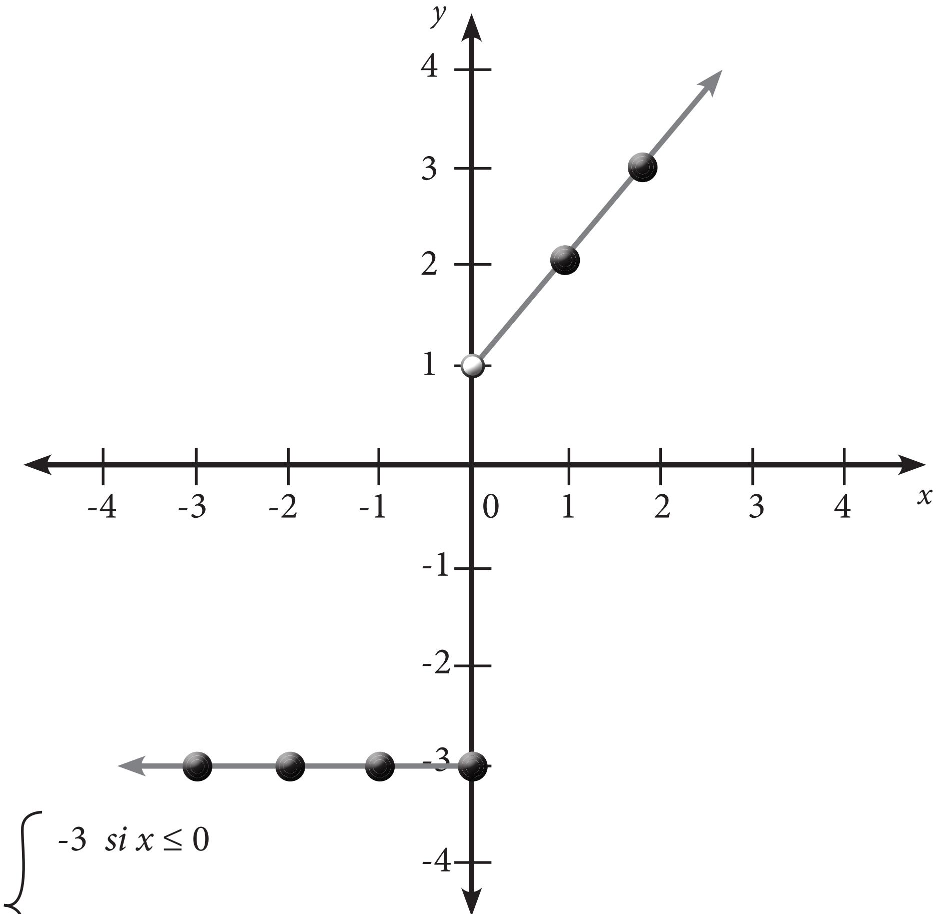
$$f(x) = \begin{cases} -3 & si\ x \leq 0 \\ x+1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Observe que la función está formada por dos condiciones, la primera dice que el valor de la función es -3 para todos los valores de x menores o iguales a cero y la segunda indica que el valor de la función esta dado por el valor de la recta $f(x) = x + 1$ para todos los valores de x mayores que cero.

Se elaboran tablas de valores para las dos relaciones y la respectiva gráfica:

x	y
0	-3 cerrado
-1	-3
-2	-3
-3	-3

X	y
0	1 abierto
1	2
2	3
3	4



$$\text{Gráfica de } f(x)=\begin{cases} -3 \;\; si\ x \leq 0 \\ x+1 \;\; si\ x>0 \end{cases}$$

De la gráfica de la función se puede deducir con mayor facilidad el dominio y rango de la misma:

Dom $f(x)= R$

Rang $f(x)= \{y\ \varepsilon\ R, y > -1\}\ \cup \{-3\}$

Ejemplo 2

Determine el dominio, el rango y representar gráficamente la siguiente función:

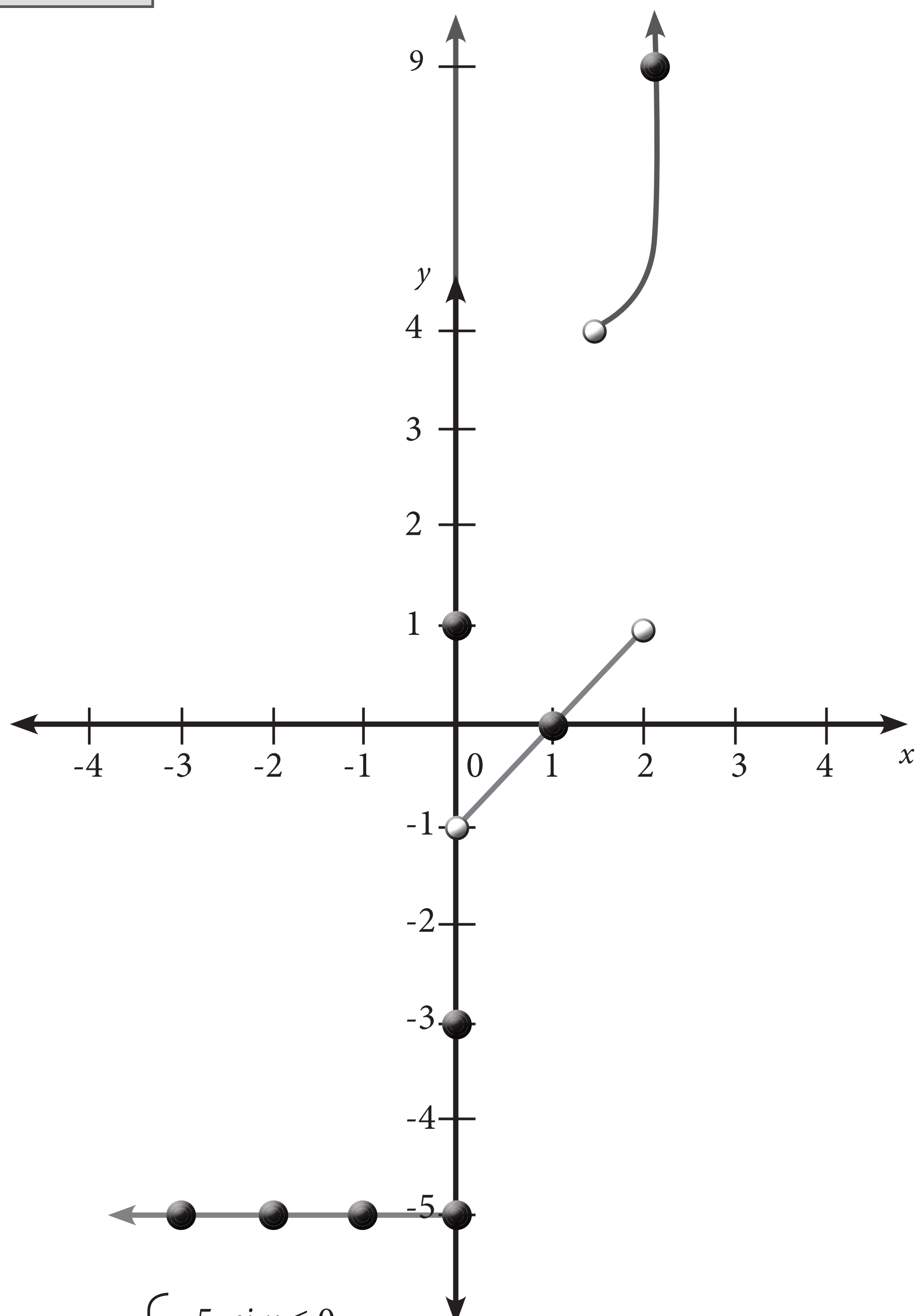
$$\text{Gráfica de } f(x)=\begin{cases} -5 \;\; si\ x \leq 0 \\ x-1 \;\; si\ 0 < x < 2 \\ x^2 \;\; si\ x > 2 \end{cases}$$

Solución

x	y
0	-5 Cerrado
-1	-5
-2	-5
-3	-5

x	$y = x^2$
2	4 Abierto
3	9

x	$y = x - 1$
0	-1 Abierto
1	0
2	1



Gráfica de $f(x) = \begin{cases} -5 \quad si\ x \leq 0 \\ x - 1 \quad si\ 0 < x > 2 \\ x^2 \quad si\ 0 \ \ x > 2 \end{cases}$

Dom $f(x) = R$ - {2}
Rang f(x)=]-1, 2[∪] 4, -∞[∪{-5}

Actividad 19

Determine el dominio, el rango y represente gráficamente las siguientes funciones:

1. $f(x)=\begin{cases} -5 & si\ x \leq 0 \\ x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} -1 & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x > 2 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} -1 & si\ x < -2 \\ |x| & si\ -2 < x < 2 \\ 1 & si\ x > 2 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} -3 & si\ x \leq -3 \\ x - 1 & si\ -3 < x < -1 \\ x^2 & si\ x > -1 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 2x & si\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & si\ x > 1 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ x \leq 0 \\ -1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Glosario

Discriminante: es una cierta expresión de los coeficientes de un polinomio, indica que el polinomio tiene raíces múltiples en el plano.

Inecuación: es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas en los miembros de la desigualdad.

Factorizar: es el proceso mediante el cual se convierte una expresión algebraica en un producto de dos o más factores.

Actividad metacognitiva

Con base a lo que ha aprendido, responda lo siguiente:

1. ¿Por qué es importante poder plantear y resolver una ecuación?

____
____
____
____
____

2. ¿Considera que adquirió nuevos aprendizajes al estudiar los temas de esta unidad? ¿Puede mencionar cuáles?

____
____
____
____
____

3. ¿Qué contenidos de los estudiados considera importantes para su aplicación en su vida habitual? ¿Por qué?

____
____
____
____
____

Autoevaluación

I Encierre con una circunferencia la letra que corresponda a la respuesta correcta a lo que se le pregunta:

1. El conjunto solución de: $x^2 - 4x = 0$ es:
   a) {2, -2}
   b) {0, -2}
   c) {2, -4}
   d) {2, 4}

2. El conjunto solución de $x^2 - 5x - 6 = 0$: es:
   a) {- 1, 5 }
   b) {3, -2}
   c) {-5, 6}
   d) {3, 2}

3. El conjunto solución de $x^2 - x = 0$ es:
   a) {0, -1}
   b) {-, -1i}
   c) {0, 0}
   d) {0, 1}

4. El conjunto solución de $x^2 - 10x + 25 = 0$ es:
   a) {5, 5}
   b) {10, 25}
   c) {5, 2}
   d) {10, 1}

5. El cuadrado de un número disminuido en seis veces el número , el resultado es cuarenta. ¿Qué números cumplen con esta condición?
   a) {6, -4}
   b) {6, 40}
   c) {10, -4}
   d) {-6, 40}

6. El conjunto solución de $y= -x^3$ es:
   a)]-1 + ∞]
   b) [-1 + ∞[
   c) Los números reales
   d) Los números reales positivos

II Desarrolle los ejercicios que a continuación se le presentan:

1. Determine el C.S. de las siguientes desigualdades:
   - $x^2 + 3x > -4$
   - $x^3 + 9x^2 + 26x \leq -24$
   - $|3x - 1| + 1 < 5$

2. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, + $(x)=\dfrac{1}{x}$, calcule:
   - $(g \circ f)(x)$
   - $(f \circ g)(x)$
   - $(h \circ g)(x)$
   - $(f \circ h)(x)$
   - $(f \circ g)(1)$
   - $(f \circ h)(0)$
   - $(g \circ f)(2)$

3. Obtenga la función inversa de y, compruébela determinando $(f^{1} \circ f)(x)$. Determine el dominio y el rango para la función f y la función inversa f^{1}:
   - $f(x)=\dfrac{2x-3}{4}$
   - $f(x)= 4x + 2$

4. Determine el dominio, rango, asíntota vertical, asíntota horizontal y gráfica de:
   - $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$

5. Determine el dominio, asíntota vertical, asíntota oblicua y gráfica de:
   - $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$

6. Determine dominio, rango y gráfica de:
   - $f(x)=|x - 2|-1$
   - $f(x)= 2|x - 3|-2$

7. Determine dominio, rango y representar gráficamente las siguientes funciones:

$$y=\begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 2 \\ 3 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Bibliografía

Allen R., Ángel. (1990). *Intermediate Algebra for College students*. New Jersey: Prentice Hall.

Reyes Núñez, Horacio y León Tejeda, Denia. (2006). *Matemática 10° grado*. Tegucigalpa: Equipo Editorial.

Londoño, Nelson y Hernando, Bedoya. (1991). *Geometría analítica y trigonometría*. Colombia: Grupo Editorial Norma Educativa.

Sullivan, Michael. (1997). *Trigonometría y geometría analítica*. México: Editorial Prentice Hall.

O´Daffer, Phares. (1998). *Introducción al álgebra*. México: Editorial Addison Wesley.

Ortiz Campos. (1992). *Matemáticas 2, geometría y trigonometría*. México: Editorial Publicaciones Cultural.

Ortiz Campos (1992). *Matemáticas 1, álgebra*. México: Editorial Publicaciones Cultural.

Smith, Estanley. (1998). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. México: Editorial Prentice Hall.

Goodman, Arthur y Hirsch, Lewis. (1996). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Editorial Person Educación.