Introducción

Estructura paraboloide mirador con una escalera de caracol en su interior diseñada por Shujoy.[1]

La presente unidad está dedicada al estudio de las derivadas y sus aplicaciones, para lo cual partiremos de lo aprendido en la unidad anterior "límites y continuidad".

Iniciaremos definiendo la recta tangente y la relación de esta con la derivada. Se le proporcionará al estudiante una serie de ejemplos y ejercicios resueltos del cálculo de la derivada de una función. Estos le servirán como pauta para que aplique la regla de la constante, regla de las potencias, regla del múltiplo constante, regla de la suma y la diferencia, regla del producto, regla del cociente, derivada de las funciones trigonométrica y la regla de la cadena.

Finalmente, se pretende que el estudiante aplique la derivada para resolver problemas científicos y tecnológicos de cálculo de velocidad, ritmos, ondas, ángulos de elevación, volúmenes y superficies.

[1] Tomado de: EPSO-MATEMATICAS: epsomat.blogspot.com

¿Qué vamos a aprender?

Competencias	Objetivos	Contenido
1. Establecer la diferencia de una recta tangente con una curva.	1. Establecer la definición de una recta tangente con pendiente m.	1. Definición de la recta tangente con pendiente m a una función 2. Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto
2. Establecer la definición de derivada de una función.	2. Desarrollar el concepto de derivada.	3. La derivada 4. Uso de la derivada para calcular la recta tangente en un punto de una función
3. Aplicar las reglas básicas de derivación.	3. Calcular la derivada de una función usando las reglas básicas de derivación.	5. Cálculo de la derivada de una función utilizando las reglas de derivación 6. Regla de la constante
		7. Regla de las potencias 8. Regla del múltiplo constante 9. Regla de la suma y la diferencia 10. Regla del producto 11. Regla del cociente 12. Derivada de las funciones trigonométricas 13. La regla de la cadena

Competencias	Objetivos	Contenido
4. Aplicar la derivada para resolver problemas científicos y tecnológicos.	4. Resolver problemas de velocidad, ritmos y ángulos de evaluacón derivando.	14. Aplicación de la derivada para resolver problemas de velocidad y ritmos
		15. Ángulos de elevación
		16. Volúmenes y superficies

Mis conocimientos previos

A continuación se le proporcionará una serie de ejercicios para poner en práctica los conocimientos adquiridos de matemáticas en los dos semestres anteriores, estos son básicos para el desarrollo de la presente unidad.

1. Identifique las propiedades de los límites estudiados en la unidad anterior. Escriba el número de la columna A correspondiente a la propiedad que representa cada expresión de la columna B.

Columna A	Columna B
1. Suma de límites	( ) $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\bullet\lim_{x\to a} g(x)$
2. Diferencia de límites	( ) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
3. Producto de límites	( ) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$
4. Cociente de límites	( ) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$
5. Potencia de límites	( ) $\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$
6. Raíz de límites	( ) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$

2. Dibuje la gráfica de la función tangente:

3. Determine de la siguiente ecuación de la parábola, el valor del parámetro, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz:
   $6y^2 - 12x = 0$

4. Convierta a potencias las siguientes raíces, siguiendo el ejemplo mostrado:

Inciso	Raíz	Potencia
a	$\sqrt[3]{9^2}$	$9^{2/3}$
b	$\sqrt[3]{9^4}$	
c	$\sqrt[5]{9^2}$	
d	$\sqrt[n]{9^x}$	

5. Simplifique: $\dfrac{10b^2c^2}{c\sqrt[3]{8b^4}}$

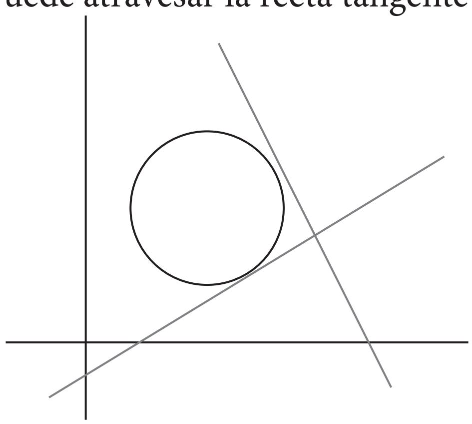
Definición de la recta tangente con pendiente *m* a una función[2]

Todo el mundo tiene una idea clara de lo que es la recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos, pero si tratamos de generalizar esa idea a otras curvas nos encontramos con que esa idea no está clara para todo el mundo.

Para saber que tan claro tiene el concepto de tangente, conteste en su cuaderno las siguientes preguntas:

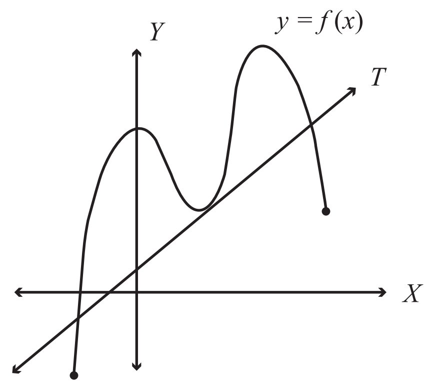
a. ¿Puede la recta tangente cortar a la curva en más de un punto?

b. ¿Puede atravesar la recta tangente a la curva por el punto de tangencia?



Rectas tangentes a una circunferencia

Figura 1



Recta tangente a una curva

Figura 2

Se llama tangente a una curva en un punto P, a la recta que pasa por P con la misma dirección que la curva.

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en dicho punto.

En un punto de inflexión la tangente atraviesa la curva, pudiéndose distinguir tres tipos de puntos de inflexión: vertical, horizontal y oblicua.

[2] Camargo y Arenas A. Calculo diferencial. Recuperado de: http://www.aves.edu.co/ovaunicor/recursos/1/index_3_Derivada_y_continuidad.pdf

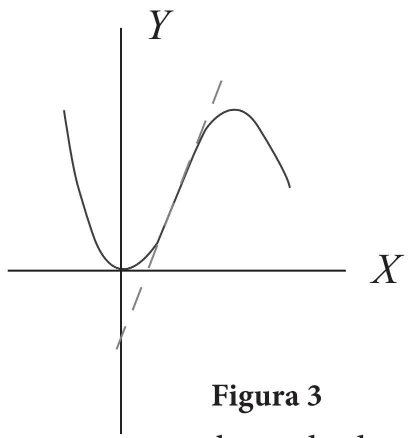


Figura 3

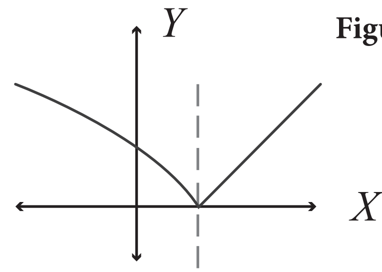
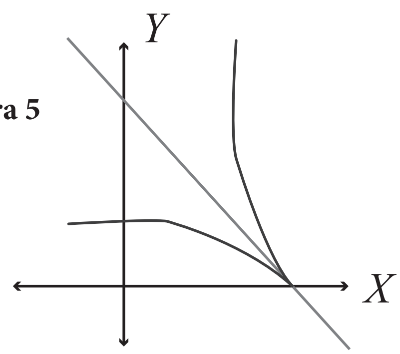


Figura 4

Tangente vertical

En un punto anguloso, de desvío brusco o de retroceso, la curva o bien no tiene tangente o la tangente es vertical (ver figura 4). La tangente no puede ser oblicua, ya que en este caso la correspondencia no sería función.

Figura 5



No es función

En los puntos de discontinuidad no se define la recta tangente.

La pendiente de la recta tangente

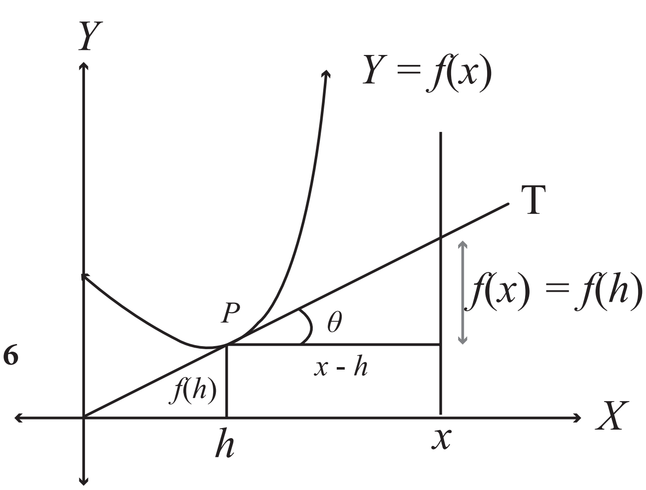
El valor aproximado de la pendiente de la recta tangente sería:

$$tan \cong \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Y su valor exacto:

$$tan \cong \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Figura 6



Significado geométrico de la recta tangente

La derivada de la función ***f(x)*** en el punto **P** es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Coordenadas del punto ***P*** $(x_0\ f(x_0))$

La pendiente m es igual a la tangente del ángulo que forma la función ***f(x)*** y la recta tangente: $f'(x_0) = \boldsymbol{m} = \tan\alpha$

Ecuación de la recta tangente en el punto ***P***

$y - f(x_0) = m\,(x - x_0)$

Sustituimos la pendiente por el valor de la primera derivada en ese punto:

$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$

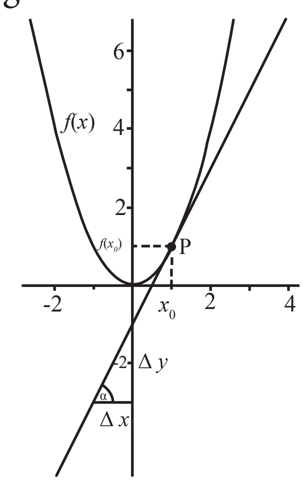
f' se lee *f* prima

Si despejamos la ***y*** nos queda:

$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$

Observe en la siguiente figura que el punto ***P*** forma parte de la función ***f(x)***, de la ecuación de la recta tangente.

Figura 7



Ahora que ya conoce algunas definiciones para entender la derivada, definiremos derivada.

La derivada y sus aplicaciones

En matemáticas, la derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente.

La derivada se calcula como el límite de la rapidez media de la función en un cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Por ello, se habla del valor de la derivada de una cierta función en un punto dado.

Un ejemplo habitual aparece al estudiar el movimiento: si una función representa la posición de un objeto con respecto al tiempo, su derivada es la velocidad de dicho objeto.

Un avión que realice un vuelo transatlántico de 4,500 km entre las 12:00 y las 18:00 horas, viaja a una velocidad media de 750 km/h. Sin embargo, puede estar viajando a velocidades mayores o menores en distintos tramos de la ruta. En particular, si entre las 15:00 y las 15:30 recorre 400 km, su velocidad media en ese tramo es de 800 km/h. Para conocer su velocidad instantánea a las 15:20, por ejemplo, es necesario calcular la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez menores alrededor de esta hora: entre las 15:15 y las 15:25, entre las 15:19 y las 15:21, etc.

El valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente, ya que corresponde a la pendiente de la recta tangente de la gráfica de la función en dicho punto. La recta tangente es a su vez la gráfica de la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto.

La noción de derivada puede generalizarse para el caso de funciones de más de una variable con la derivada parcial y el diferencial.

La derivada de una función ***f*** en un punto ***x*** se denota como ***f´(x)***. La función cuyo valor en cada punto x es esta derivada es la llamada función derivada de ***f***, denotada por ***f´***. El proceso de encontrar la derivada de una función se denomina diferenciación y es una de las herramientas principales en el área de las matemáticas conocida como cálculo infinitesimal. Concretamente, el que trata de asuntos vinculados con la derivada se denomina cálculo diferencial.

¡Bien¡ y que tiene claro lo que es una derivada, continuaremos con cálculos para reforzar sus conocimientos recién adquiridos.

Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas.

Se denota con la letra ***m***.

En matemáticas se denomina **pendiente** a la inclinación de un elemento ideal, natural o constructivo respecto de la horizontal.

En geometría, puede referirse a la pendiente de la ecuación de una recta como caso particular de la tangente a una curva, en cuyo caso representa la derivada de la función en el punto considerado y es un parámetro relevante, por ejemplo, en el trazado de carreteras, vías férreas o canales.

Como lo mencionamos anteriormente, la pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de las abscisas.

Si el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas es agudo, la pendiente es positiva y crece al crecer el ángulo.

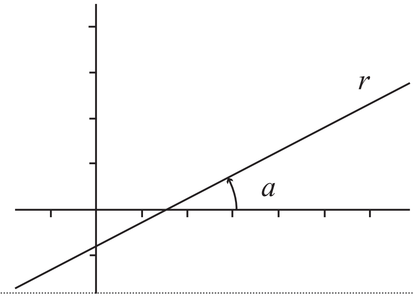


Figura 8

Si el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas es obtuso, la pendiente es negativa y decrece al crecer el ángulo.

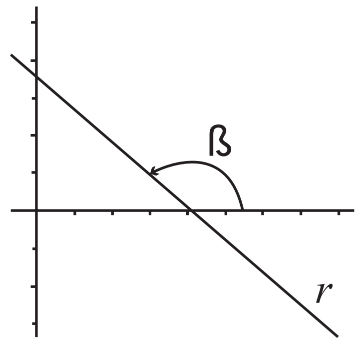


Figura 9

Fórmulas para el cálculo de las pendientes:

Caso	Fórmula
1. Pendiente dado el ángulo	$m = tan\ a$
2. Pendiente dado el vector de una recta	$m = \frac{v_2}{v_1}$
3. Pendiente dada por dos puntos	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
4. Pendiente dada la ecuación de la recta	$m = \frac{A}{B}$

A continuación proporcionaremos un ejemplo para calcular la pendiente de una recta en un punto:

Ejemplo 1

Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2,1)$, $B(4,7)$:

Solución

Para resolver este ejercicio necesitamos aplicar la fórmula del caso 3:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo $m = \frac{7-1}{4-2} = 3$, $m = 3$

Actividad 1

En su cuaderno calcule la pendiente de los siguientes ejercicios aplicando la fórmula de acuerdo a los casos estudiados:

1. A(-1,4) y B(3,2)

2. A(2,5) y B(-2,-1)

3. $3x + y - 2 = 0$

4. $y = -4x + 9$

5. Encuentre la pendiente de la recta que forma un ángulo de 45° con la abscisa.

6. Encuentre la pendiente de la recta que forma un ángulo de 20° con la abscisa.

Uso de la derivada para calcular la recta tangente en un punto de una función

Iniciaremos este tema partiendo de un ejemplo de representación gráfica de la recta tangente.

Pendiente de la recta tangente

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en dicho punto:

$$tan\ \beta = lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

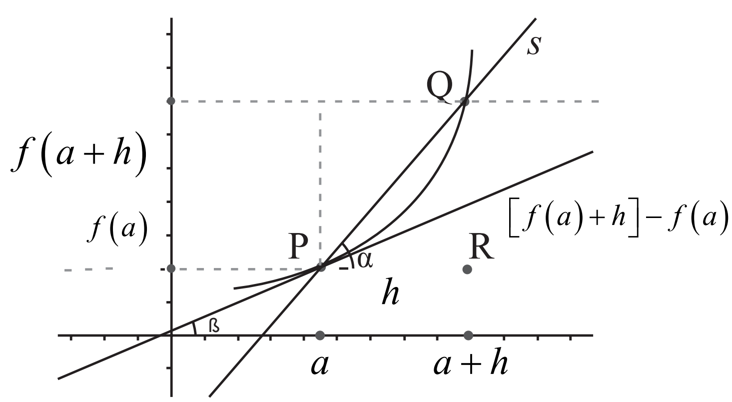


Figura 10

Recta tangente a una curva en un punto

La recta tangente a una curva en un punto es aquella que pasa por el punto **$(a, f(a))$** y cuya pendiente es igual a **$f'(a)$**.

La ecuación de la recta normal a una curva en el punto (a, f(a)) será:
$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Partiendo de estas definiciones, le proporcionaremos unas series de ejemplos de aplicación para calcular la derivada de una función.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$

Despejando ***y*** en la ecuación de la recta $3x + y - 2 = 0$ obtenemos

$$Y = -3x + 2$$

La pendiente de la recta es el coeficiente de x, por lo tanto $m = -3$, las dos tienen la misma pendiente.

Derivamos para encontrar la pendiente de la ecuación parabólica:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$f'(x) = 2x - 5$ igualamos al valor de la pendiente encontrada en la ecuación de la recta $3x + y -2 = 0$ y despejamos para encontrar x en la ecuación de la parábola despues de derivar asi:

$2x - 5 = -3 \rightarrow 2x = -3 + 5 \rightarrow x = (-3 + 5)/2 = 2/2 = 1$

$X = 1$

$Y = -3x + 2$ despejamos para encontrar "y" dándole el valor de $x = 1$

$Y = -3(1) + 2 = -3 + 5 = 2$ tenemos $y = 2$ por lo tanto $P\,(1, 2)$

$y - 2 = -3\,(x - 1)$ $y = -3x + 3 + 2$ $\boxed{\text{R/ } y = 3x + 5}$

Ejemplo 2

Dada la parábola $f(x) = x^2$, hallar los puntos en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante:

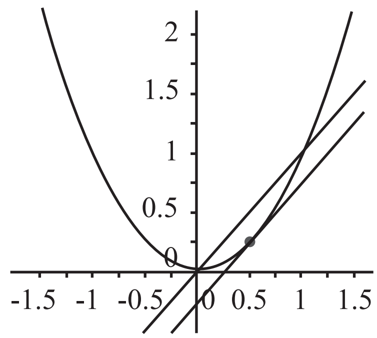


Figura 11

Solución

La bisectriz del primer cuadrante tiene como ecuación $y = x$ el coeficiente de x es 1, por lo tanto $m = 1$

Derivamos la ecuación $f(x) = x^2$, obteniendo

$f'(x)= 2x$

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(xh+h)^2 - x^2}{h} =$$ Aplicando la fórmula

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - ax^2}{h} =$$ Resolviendo el trinomio cuadrado perfecto $(x + \mathrm{h})^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} =$$ Simplificando términos semejantes $x^2 - x^2$

$\lim_{h\to 0} 2xh + h =$ Simplificando términos semejantes $\frac{h^2}{h} = h$

$\lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$ Calculando el límite

En conclusión

$2x = 1 \qquad x = \frac{1}{2}$ Para encontrar el valor de y sustituimos $x = \frac{1}{2}$ en $Y = x^2$

$Y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ el valor de $y = \frac{1}{4}$ $\therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Ejemplo 3

Dada la curva de ecuación $f(x) = x^2 - 3x - 1$, halle las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje x un ángulo de 45°.

Solución

$f'(x) = tan\ 45° = 1$ Aplicando la fórmula calculando la tangente del ángulo:

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h)^2 - 1 - (x^2 - 3x - 1)}{h}$$

Aplicando la fórmula y sustituyendo los valores:

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4x + 2h^2 - 3x - 3h - 1 - x^2 - 3x - 1}{h}$$

Resolviendo los productos:

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h - 3)}{h}$$ Simplificando los términos comunes:

$1 = 4x - 3$

$x = 1$

$f(1) = 2 * 1^2 - 3 * 1 - 1 \quad \rightarrow \quad y = -2$

$p\ (1, -2)$

Pendiente de la recta normal

La pendiente de la recta normal a una curva en un punto es la opuesta de la inversa de la pendiente de la recta tangente, por ser rectas perpendiculares entre sí.

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

Es decir, es la opuesta de la inversa de la derivada de la función en dicho punto:

$$m_n = \frac{\quad}{f'(a)}$$

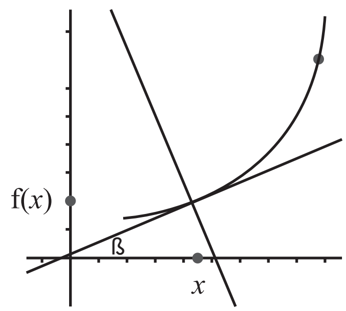


Figura 12

Ecuación de la recta normal

La recta normal a una curva en un punto a es aquella que pasa por el punto $(a, f(a))$ y cuya pendiente es igual a la inversa de la opuesta de $f'(a)$:

$$y - f'(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la parábola $y = x^2 + x + 1$ paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

La bisectriz del primer cuadrante tiene como ecuación $y = x$, por tanto $m = 1$.

$f(a) = 2x + 1 = 1, \qquad x = 0$

Punto de tangencia: (0, 1)

Recta tangente:

$y - 1 = x$ despejando "y"
$y = x + 1$

Recta normal:

$m = 1 \qquad P\,(0, 1)$

$y - 1 = -x$ despejando "y"
$y = -x + 1$

Actividad 2

Desarrolle los siguientes ejercicios en su cuaderno:

1. Determine los valores del parámetro b, para que las tangentes a la curva de la función $f(x) = b^2x^3 + bx^2 + 3x + 9$ en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 2$ sean paralelas.

2. Calcular los puntos en que la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje de las x.

3. Se ha trazado una recta tangente a la curva $y = x^3$, cuya pendiente es 3 y pasa por el punto $(0, -2)$. Hallar el punto de tangencia.

4. Buscar los puntos de la curva $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$, para los cuales la tangente forma un ángulo de 45º con el eje de las x.

5. Dada la función $f(x) = \tan x$, hallar el ángulo que forma la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el origen, con el eje de las abscisas.

Reglas para calcular la derivada de una función

Las reglas de derivación son los métodos que se emplean para el cálculo de la derivada de una función y estas se aplican dependiendo del tipo de función.

Como lo hemos estudiado anteriormente, la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado, lo anterior implica que la función debe existir en ese punto para poder trazar una recta tangente en él.

Existen los conocidos monomios y polinomios, los primeros contiene solamente una expresión de la variable y los segundos corresponden a una suma finita de monomios.

La forma de la derivada de una función es la siguiente:

Sea $y = f(x)$ una función de x, si el límite:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Existe y es infinito por lo que diremos que el límite de la derivada de f respecto a x, si f es derivable x.

A continuación se estudiarán algunas reglas para derivación:

1. Regla de la constante[3]

La derivada de una constante es cero

$$\boxed{f(x) = C, \text{ siendo } C \text{ una constante} \rightarrow f(x) = 0}$$

El significado geométrico de esta afirmación es el hecho que la pendiente de la recta $y = c$, para cualquier valor de x, es cero, lo cual se representa de la siguiente forma:

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

A continuación se le proporcionará una serie de ejemplos de aplicación de esta regla.

Ejemplo 1	**Solución**
Calcule la derivada de $f(x) = 5$	$f'(x) = 0$

Ejemplo 2	**Solución**
Calcule la derivada de $f(x) = -6$	$f'(x) = 0$

[3] Tomado de: Leythold, Louis. (2001). *Cálculo.* México: Editorial Oxford.

Actividad 3

En su cuaderno calcule la derivada de los siguientes ejercicios aplicando la regla de la constante:

1. $f(x) = -2$

2. $f(x) = 10$

3. $f(x) = 1$

4. $f(x) = 3/4$

5. $f(x) = \sqrt{-3}$

2. Regla de las potencias

Derivada de una potencia entera positiva la denominaremos también potencias enteras positivas de x.

Si n es un número entero positivo, entonces

$$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \quad \forall \ n \ \in \ R}$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Por deducción

$$y = f'(x) = x^n$$

Entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como n es número entero positivo, podemos aplicar lo siguiente:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Donde $a = x + \Delta x$, $b = x$, a - $b = \Delta x$, que reemplazado en la ecuación anterior da:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x) + (x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} x\ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}\ldots + (x+\Delta x)^{n-2} + x^{n-1})$$

Resolviendo que Δ x $\rightarrow 0$ tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = ((x+0)^{n-1} + (x+0)^{n-2} x + \ldots + (x+0)x^{n-2} + x^{n-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots x^{n-1} + x^{n-1})$$

En conclusión

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Ejemplo 1
Derivar la expresión $y = x^5$

Solución
Aplicando la fórmula $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$f'(x) = 5x^4$

Ejemplo 2

Derivar la expresión $y = x^3$

Solución

Aplicando la fórmula $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2 \qquad f'(x) = 3x^2$$

El siguente ejemplo es un caso donde podemos demostrar que n es irracional.

n irracional, exponente fraccionario se aplica $a^{m/n}$ es igual a racional $\sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo 3

$g(x) = \sqrt[3]{x}$, pasar la raíz cuadrada a potencia $x^{1/3}$

Solución

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

Actividad 4

En su cuaderno calcule la derivada de los siguientes ejercicios aplicando la regla de las potencias:

1. $y = x^2 + x$
2. $y = x^3 + 5x$
3. $y = \sqrt{x}$
4. $y = 3x^3 + 2x^2 + x$
5. $y = \sqrt[4]{x}$

3. Regla del múltiplo constante

En este caso aplicaremos el siguiente teorema: cuando f es una función derivable y c un número real, entonces cf también es derivable:

$$\frac{dy}{dx} = cf'(x)$$

$$\boxed{f(x) = cf(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = cf'(x)}$$

Observe los siguientes ejemplos de aplicación de la regla del múltiplo constante:

Ejemplo 1

Derive $y = \dfrac{2}{x}$

Solución

$$y = \frac{d}{dx}[2x^{-1}]$$

$$2dx[x^{-1}]$$

$$2(-1)x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

Ejemplo 2

Derive $f(t) = \dfrac{4t^2}{5}$

Solución

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{5}t^2\right] = \frac{4d}{5dt}[t^2]$$

$$f'(t) = \frac{4}{5}(2t) = \frac{8}{5}t$$

Ejemplo 3

Derive $y = \dfrac{5}{(2x)^3}$

Solución

$$y = \frac{d}{dx}\left[\frac{5}{2^3}(x)^{-3}\right]$$

$$y = \frac{d}{dx}\left[\frac{5}{8}(x)^{-3}\right]$$

$$y' = \frac{5}{8}(-3x^{-4})$$

$$y' = \frac{-15}{8x^4}$$

Actividad 5

En su cuaderno resuelva los siguientes ejercicios de derivación aplicando la regla del múltiplo constante:

1. $y = 2\sqrt{x}$
2. $y = \dfrac{3x}{2}$
3. $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$
4. $y = \dfrac{5}{x^3}$
5. $y = \dfrac{7}{3x^{-2}}$
6. $y = \dfrac{1}{3x^2}$
7. $f(x) = -2x^2$

4. Regla de la suma y diferencia

a. Para calcular le derivada de la suma aplicaremos el siguiente teorema:

Si u y v son funciones diferenciales de x, entonces la suma de $u + v$ es una función diferenciable de x, y.

$$\boxed{t(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \quad t'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Análogamente, la derivada de la suma de cualquier número finito de funciones diferenciales es la suma de sus derivadas.

b. Para calcular le derivada de la diferencia aplicaremos el siguiente teorema:

Si u y v son funciones diferenciales de x, entonces la resta de u - v es una función diferenciable de x, y.

$$\boxed{t(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow \quad t'(x) = f'(x) - g'(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

Análogamente, la derivada de la resta de cualquier número finito de funciones diferenciales es la resta de sus derivadas.

A continuación desarrollaremos varios ejemplos de aplicación de esta regla de derivación:

Ejemplo 1
Derivar y = $x^3 + 7x^2 - 5x + 4$

Solución
Primero derivaremos cada término así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(7x^2) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(4)$$

Obtendremos: $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 14x - 5 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 14x - 5$$

Ejemplo 2
Derivar $f(x) = x^3 + c$

Solución
Primero derivaremos cada término así: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(c)$

Obtendremos: $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Actividad 6

Resuelva en su cuaderno los siguientes ejercicios aplicando la regla de la suma y diferencia de derivadas:

1. $f(x) = 3x^4 - 9$
2. $f(x) = 2x^5 + 5x - 1$
3. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 6$
4. $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 2x$
5. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 7$
6. $f(x) = x^5 - c$
7. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x$

5. Regla del producto[4]

La derivada de un producto es la derivada del primero por el segundo, más el primero por la derivada del segundo.

$$\boxed{t(x) = f(x) \bullet g(x) \Rightarrow \quad t'(x) = f'(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet g'(x)}$$

Para calcular la derivada de un producto se aplicará el siguiente teorema:

$$\frac{dy}{dx}uv = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

En donde u representa a uno de los factores y v representa al otro factor.

[4] Tomado de: Fórmulas del producto y el cociente de las derivadas. Recuperado de: http://www.fic.umich.mx/~lcastro/5%20 derivada%20producto%20y%20cociente.pdf

A continuación desarrollaremos ejemplos de aplicación de la regla del producto en la derivación:

Ejemplo 1

Hallar la derivada de $y = (x^2 + 5x + 11)(x^3 - 7x^2 - 9)$

Solución

Identificaremos los factores para aplicar el teorema:

$u = x^2 + 5x + 11$

$v = x^3 - 7x^2 - 9$

Aplicaremos la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}(u \bullet v) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

Sustituiremos los valores

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 5x + 11)(x^3 - 7x^2 - 9) + (x^2 + 5x + 11)\frac{d}{dx}(x^3 - 7x^2 - 9)$$

$$\frac{d}{dx} \qquad v \qquad u \qquad \frac{dv}{dx}$$

Resolviendo

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 5)(x^3 - 7x^2 - 9) + (x^2 + 5x + 11)(3x^2 - 14x)$$

$$= \left(2x^4 - 14x^3 - 18x + 5x^3 - 35x^2 - 45\right) + \left(3x^4 - 14x^3 - 15x^3 - 70x^2 + 33x^2 - 154x\right)$$

$$\begin{array}{rl} & 2x^4 - 9x^3 - 35x^2 - 18x - 45 \\ + & 3x^4 + x^3 + 103x^2 - 154x \\ \hline \dfrac{dy}{dx} = & 5x^4 - 8x^3 + 68x^2 - 172x - 45 \end{array}$$

Ejemplo 2
Calcular la derivada de: $y = (x^2 - 5x - 9)(\sqrt{5x+4})$

Solución
En este caso los dos factores son:

$u = x^2 - 5x - 9$

$v = \sqrt{5x+4}$ ó $(5x+4)^{\frac{1}{2}}$

Sustituiremos los valores:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 - 5x - 9)}_{\frac{du}{dx}}\underbrace{(5x+4)^{\frac{1}{2}}}_{v} + \underbrace{(x^2 - 5x - 9)}_{u}\underbrace{\frac{d}{dx}(5x+4)^{\frac{1}{2}}}_{\frac{dv}{dx}}$$

Resolviendo

Para derivar $(5x+4)^{\frac{1}{2}}$ debemos aplicar el teorema del las potencias:

$$\frac{dy}{dx} = (2x-5)(5x+4)^{1/2} + (x^2 - 5x - 9)\frac{1}{2}(5x-4)^{-1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x-5)(5x+4)^{1/2} + \frac{x^2 - 5x - 9}{2(5x-4)^{1/2}}$$

Ejemplo 3
Calcular la derivada de $y = (7x^2 - 3)^8\,(9 - 3x)^5$

Solución
En este caso los dos factores son:

$u = (7x^2 - 3)^8$

$v = (9 - 3x)^5$

Sustituiremos los valores:

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\underset{\frac{du}{dx}}{\Uparrow}}{\frac{d}{dx}(7x^2-3)^8}\ \underset{\underset{v}{\Uparrow}}{(9-3x)^5} + \underset{\underset{u}{\Uparrow}}{(7x^2-3)^8}\ \underset{\underset{\frac{dv}{dx}}{\Uparrow}}{\frac{d}{dx}(9-3x)^5}$$

Resolviendo

Para calcular las derivadas de $(7x - 3)^8$ y $(9 - 3x)^5$ debemos aplicar el teorema de la potencia de funciones:

$$\frac{dy}{dx} = 8\left(7x^2-3\right)^7\left(9-3x\right)^5 + \left(7x^2-3\right)^8\left[5\left(9-3x\right)^4\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 8\left(7x^2-3\right)^7\left(9-3x\right)^5 + 5\left(7x^2-3\right)^8\left(9-3x\right)^4$$

Actividad 7

Aplique el teorema del producto de las derivadas resolviendo en su cuaderno los siguientes ejercicios:

1. $y = (6x^2 + 11x - 9)\ (5x^2 - 13x + 21)$

2. $y = (7x^5 + 7x^4)\ (4x^2 - 4x + 17)$

3. $y = (6 - 18x - x^2)\ (x^2 + 19x - 5)$

4. $y = (3x^2 + 6x^2 + 6)\sqrt{4x + 11}$

5. $y = x^5\sqrt{4x + 7}$

6. $y = (1 - 2x)^5\sqrt[7]{(1 + x^2)^4}$

7. $y = 4x^2\sqrt{(x^2 + 2x - 7)^5}$

6. Regla del cociente

La derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador, menos el numerador por la derivada del denominador, dividido entre el denominador al cuadrado.

El teorema del cociente de las derivadas se expresa con la siguiente fórmula en donde u representa al numerador y v representa al denominador:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

A continuación desarrollaremos ejemplos para la aplicación de la regla del cociente en la derivación:

Ejemplo 1
Hallar la derivada de $y = \frac{6x+7}{8x-9}$

Solución
Determinamos los valores de *u* y *v*:

$u = 6x + 7$

$v = 8x - 9$

Sustituyendo los valores en la fórmula

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(6x+7)\,(8x-9) - (6x+7)\frac{d}{dx}(8x-9)}{(8x-9)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(6)(8x-9) - (6x+7)(8)}{(8x-9)^2}$$

En este caso, aunque no es indispensable, conviene realizar las multiplicaciones indicadas en el numerador, pues así habrá reducción de términos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{48x - 54 - 48x + 56}{(8x-9)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-110}{(8x-9)^2}$$

Ejemplo 2

Hallar la derivada de $y = \dfrac{(5x^2 - 7x - 9)^2}{9x - 1}$

Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$u = (5x^2 - 7x - 9)^2$

$v = 9x - 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d}{dx}\left(5x^2 - 7x - 9\right)^2 (9x - 1)\right] - \left[\left(5x^2 - 7x - 9\right)^2 \frac{d}{dx}(9x - 1)\right]}{(9x - 1)^2}$$

$$= \frac{2\left(5x^2 - 7x - 9\right)(9x - 1) - \left(5x^2 - 7x - 9\right)^2 (9)}{(9x - 1)^2}$$

$$= \frac{2\left(5x^2 - 7x - 9\right)(9x - 1) - 9\left(5x^2 - 7x - 9\right)^2}{(9x - 1)^2}$$

Actividad 8

En su cuaderno encuentre las derivadas de las siguientes expresiones.

1. $y = \dfrac{7x + 11}{x^5 - x}$
2. $y = \dfrac{5x + 11}{5x - 11}$
3. $y = \dfrac{9 - x^2}{5x^3 + x}$
4. $y = \dfrac{x}{7x^5 - 6}$
5. $y = \dfrac{3x^4 + x - 7}{x}$
6. $y = \dfrac{6}{(6x - 7)^8}$
7. $y = \dfrac{(2x + 3)^4}{5x^2}$

7. Derivada de las funciones trigonométrica o funciones trascendentes[5]

El logaritmo y la función exponencial son ejemplos de funciones trascendentes. El término *función trascendente* a menudo es utilizado para describir a las funciones trigonométricas, o sea, seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Una función que no es trascendente se dice que es algebraica. Ejemplos de funciones algebraicas son las funciones racionales y la función raíz cuadrada.

Las funciones trascendentes se caracterizan por tener lo que se llama *argumento*. Un argumento es el número o letras que lo simbolizan que hacen que una función adquiera un valor, es decir, que se convierta en un número. Sin él, la función es vacía, o sea, no tiene valor.

Por ejemplo, la función seno es vacía, no tiene ningún valor porque le falta el argumento, le falta ese número que la transforme en una cantidad concreta. Si a la función anterior se le agrega el número 26 para tener *sen* 26, entonces esto ya adquiere un valor, el cual es *sen* 26 = 0.4383711. A este número 26 que hizo que seno adquiriera un valor se le llama *argumento*.

Otro ejemplo: la función logaritmo es vacía, no tiene asociado ningún valor, pero si se le agrega 107 para tener *log* 107, entonces así ya adquiere el valor *log* 107 = 2.029383. En este caso el 107 es el argumento de la función logaritmo:

a. Trigonométricas
b. Trigonométricas inversas
c. Logarítmicas y exponenciales

En este curso estudiáremos las funciones trascendentales arriba descritas.

Dos características interesantes en todas las fórmulas de derivación de las funciones trascendentes son que el argumento está representado siempre por la letra u y la segunda es que todas las fórmulas terminan multiplicando por la derivada del argumento, o sea por $\frac{du}{dx}$.

[5]Tomado de: Derivadas de las funciones trigonométricas. Recuperado de: http://www.fic.umich.mx/~lcastro/6%20derivada%20funciones%20trigonometricas.pdf

Es conveniente tener presentes las reglas de escritura matemática para identificar el argumento en una función trascendente, en las que el símbolo de la función se refiere a la escritura con la que se invoca la función correspondiente.

Por ejemplo, *sen* es el símbolo de la función *seno*; *cos* es el símbolo de la función *coseno*; *log* es el símbolo de la función *logaritmo*, etc.

Estas reglas son:

Regla 7 - A

El argumento comienza con el símbolo escrito inmediatamente después del símbolo de la función.

Ejemplos

a. $cos\ (3x + 1)$

El argumento comienza con el paréntesis por ser lo que está escrito inmediatamente después del símbolo de la función *cos*.
Por razones obvias, termina donde cierra el paréntesis.

b. $tan\sqrt{x^2 - 7x}$

El argumento comienza con la raíz cuadrada por ser lo que está escrito inmediatamente después del símbolo de la función *tan*.

c. $arsec\ 2x^2y$

El argumento comienza con el número 2 por ser lo que está escrito inmediatamente después del símbolo de la función *arc sec*.

d. $\tan \cos 4x$

El argumento comienza con la función coseno por ser lo que está escrito inmediatamente después del símbolo de la función tan, es decir, el argumento de la tangente es $\cos 4x$.

Regla 7 - B

Todos los factores monomios pertenecen al argumento. En el caso de que alguno no sea parte del argumento, este debe escribirse antes de la función trascendente.

Ejemplo

$sen\ 3ab^3\ xy^5$

Todos estos son factores monomios, por lo tanto, el argumento de la función seno es $3ab^3$ xy^5. En caso de que, por ejemplo, y^5 no fuera parte del argumento, debe escribirse así: $y^5\ sen\ 3ab^3\ x$.

Regla 7 - C

Solamente el primer término pertenece al argumento. En caso de que otros términos sean parte del argumento, deben encerrarse entre paréntesis. O en caso de que no lo sean, deben escribirse antes de la función trascendente.

Ejemplo

$\csc 2x^4 + 6x - 3$ Una escritura así provoca la duda sobre los términos.
¿El factor $6x - 3$ es parte del argumento?

Conforme a esta regla, partiendo de que el término $6x - 3$ no es parte del argumento debería escribirse como $6x - 3 + \csc 2x^4$.

En el caso de que si es parte del argumento, su escritura correcta sería $\csc (2x^4 + 6x - 3)$.

Regla 7 - D

Solamente el primer factor polinomio es parte del argumento. En caso de que un segundo factor polinomio no sea componente del argumento, debe escribirse antes de la función trascendente:

$cot\ (x^2 + 5x - 6)(4x - 1)$

Esta escritura es incorrecta porque se presta a dudas: ¿el factor $(4x - 1)$ es parte del argumento?

Para evitar estas ambigüedades existe la regla anterior que además ordena escribirlo como:

$(4x - 1)\ cot\ (x^2 + 5x - 6)$

Pero en el caso de que fuera parte del argumento, su escritura correcta sería:

$cot\ [(4x - 1)\ (x^2 + 5x - 6)]$

Regla 7 - E

Un exponente escrito sobre el símbolo de la función indica que toda la función está elevada a dicha potencia.

Ejemplo

$cot^3\ (5x - 6)$

Este exponente indica que la función cotangente es la que está elevada al cubo, o sea, que:

$cot^3\ (5x - 6) = cot\ (5x - 6)\ cot\ (5x - 6)\ cot\ (5x - 6)$

Regla 7 - F

Un exponente escrito sobre el argumento indica que es el argumento el que está elevado a dicha potencia.

Ejemplo

$cot\ (5x - 6)^3$

Este exponente indica que el argumento $(5x - 6)$ es el que está elevado al cubo, o sea, que:

$cot\ (5x - 6)^3 = cot\ [(5x - 6)\ (5x - 6)\ (5x - 6)]$

Nótese como se cumplen las reglas de escritura anteriores.

Regla 7 - G

Todo argumento negativo debe escribirse entre paréntesis.

Ejemplo

$sen\ (-2x)$

La razón de esta regla es para evitar confusiones para que no se interprete como resta cuando se escribe $sen\ -2x$, a pesar de que carece de sentido una resta así, pues la función sen estaría vacía (sin argumento), ya que se estaría tomando como un término a sen y como otro término a $-2x$.

Regla 7 - H

Cuando una función trascendente está dividida entre cualquier cantidad, debe escribirse la fracción que indica la división antes de la función trascendente.

En caso de que sea solamente el argumento el que esté dividido, debe encerrarse el argumento entre paréntesis o en caso extremo debe escribirse la línea de fracción claramente a la mitad del símbolo de la función.

Ejemplo

$$sec\left(\frac{sen-1}{3}\right)$$

Las fórmulas de derivación de las seis funciones trigonométricas son:

Fórmula	Detalle
1°	$\frac{d}{dx} sen\, u = cos\ u \frac{du}{dx}$
2°	$\frac{d}{dx} cos\ u = -sen\, u \frac{du}{dx}$
3°	$\frac{d}{dx} tan\, u = sec^2 u \frac{du}{dx}$
4°	$\frac{d}{dx} cot\ u = -csc^2\ u \frac{du}{dx}$
5°	$\frac{d}{dx} sec\ u = tan\ u\ sec\ u \frac{du}{dx}$
6°	$\frac{d}{dx} csc\ u = -cot\ u\ csc\ u \frac{du}{dx}$

Debe notarse que la derivada de una función trigonométrica es otra, u otras, función trigonométrica con el mismo argumento. Esto es muy importante: el argumento nunca cambia. Además todas las fórmulas terminan multiplicando por la derivada del argumento $\left(\frac{d}{dx}\right)$.

Ejemplo 1

Hallar la derivada de $y = sen\ 5x$.

Solución

El argumento es $5x$, o sea que u = $5x$. Aplicando la fórmula 1 se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{cos\ 5x}_{cos\ u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}5x}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5cos5x$$

Nótese que el argumento $5x$ no cambia de la función original al resultado de la derivada.

Ejemplo 2

Hallar la derivada de $y = cosx^2$

Solución

El argumento es x^2, o sea que $u = x^2$. Aplicando la fórmula 2 se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-senx^2}_{-senx^2} \underbrace{\frac{d}{dx}x^2}_{\frac{du}{dx}}$$

Ordenamos conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\frac{dy}{dx} = -2x\ senx^2$$

Ejemplo 3

Hallar la derivada de $y = tan\ (x^2 - 3x + 5)$

Solución

El argumento es $(x^2 - 3x + 5)$ o sea que $u = x^2 - 3x + 5$.

Aplicando la fórmula 3 tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = sec^2\ \underbrace{(x^2 - 3x + 5)}_{sec^2 u} \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 5)}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = sec^2\,(x^2 - 3x + 5)\,(2x - 3)$$

Ordenamos conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 3)\,sec^2\,(x^2 - 3x + 5)$$

Ejemplo 4

Hallar la derivada de $y = cot\,\sqrt{7x}$

Solución

El argumento es $\sqrt{7x}$ o sea que $u = \sqrt{7x}$

Aplicando la fórmula 4: $\frac{dy}{dx} = -csc^2\sqrt{7x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{7x}$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-csc^2\sqrt{7x}}_{-csc^2}\;\underbrace{\frac{d}{dx}7x^{1/2}}_{\frac{du}{dx}}$$

La derivada es de la forma u^n por lo que:

$$\frac{dy}{dx} = -csc^2\underbrace{\sqrt{7x}}_{u}\left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{n}(7x)^{\overbrace{-1/2}^{n-1}}\right]\underbrace{7}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -csc^2\,\sqrt{7x}\left[\frac{7}{2\sqrt{7x}}\right]$$

Ordenamos conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{7}{2\sqrt{7x}}\,csc^2\sqrt{7x}$$

Ejemplo 5

Hallar la derivada de $y = sec\left(\frac{1}{x^4}\right)$

Solución

El argumento es $\frac{1}{x^4}$ o sea que $u = \frac{1}{x^4}$ aplicando la fórmula 5:

$$\frac{dy}{dx} = tan\left(\frac{1}{x^4}\right)sec\left(\frac{1}{x^4}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = tan\left(\frac{1}{x^4}\right)sec\left(\frac{1}{x^4}\right)\frac{d}{dx}(x^{-4})$$

$$\frac{dy}{dx} = tan\left(\frac{1}{x^4}\right)sec\left(\frac{1}{x^4}\right)[-4x^{-5}]$$

Ordenaremos conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^5}tan\left(\frac{1}{x^4}\right)sec\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Ejemplo 6

Hallar la derivada de $y = csc\left(\frac{3}{\sqrt[6]{6x^5 - 1}}\right)$

Solución

El argumento es $\frac{3}{\sqrt[6]{6x^5 - 1}}$ o sea que $u = \frac{3}{\sqrt[6]{6x^5 - 1}}$

Aplicando la fórmula 6:

$$\frac{dy}{dx}=\text{-}cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\text{-}cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{\left(6x^5-1\right)^{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\text{-}cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\frac{d}{dx}\left(3\left(6x^5-1\right)^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\text{-}cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\left(3*\frac{1}{4}\left(6x^5-1\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{4}{4}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\text{-}cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\left(-\frac{3}{4}\left(6x^5-1\right)^{-\frac{5}{4}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\text{-}cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\left(\frac{-3}{4\left(6x^5-1\right)^{\frac{5}{4}}}\right)$$

Ordenamos conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{-3}{4\left(6x^5-1\right)^{\frac{5}{4}}}\right)cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{3}{4\left(6x^5-1\right)^{\frac{5}{4}}}\right)cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)$$

Actividad 9

En su cuaderno encuentre las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas:

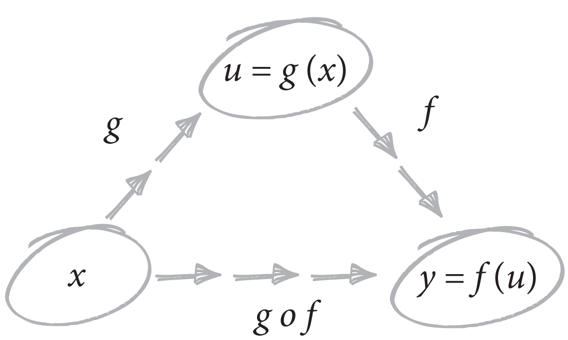
1. $y = sen\ 8x$
2. $y = cos\ (2 - 6x)$
3. $y = sen\ (4x^2 - 4x + 7)^5$
4. $y = Sec\sqrt{3x^5}$
5. $y = Cot\ (x^2 + 6x)^4$
6. $y = csc\left(\frac{1}{x^7}\right)$
7. $y = \sqrt[3]{\tan^5(x^2 - 3)}$

8. La regla de la cadena[6]

En las reglas básicas de derivación se aplican fórmulas apropiadas para calcular las derivadas de las funciones $f + g$ (suma), $f - g$ (diferencia), $f \bullet g$ (producto) y $\frac{f}{g}$ (cociente).

Pero no se presentó en esa sección una regla que nos diga cómo calcular la derivada de una composición de funciones; esto es, no sabemos cómo calcular la derivada de f o g (g compuesta con f o bien g seguida de f).

Es, precisamente, la regla de la cadena la que nos dice cómo obtener la derivada de $y = (f \text{ o } g)\ (x)$:



$y = (f \text{ o } g)\ x = f\,[g(x)]$

[6] Tomado de: Reglas de derivación. Recuperado de: http://canek.uam.mx/Calculo1/Teoria/Reglas/FTDelaCadena.pd

Si $u = g(x)$ es una función derivable en x_0, donde $u_0 = g(x_0)$ y si $y = f(u)$ es una función derivable en u_0, entonces la función $y = (f \text{ o } g)(x)$ es derivable en x_0:

$(x_0) = f'(u_0)\, g'(x_0) = f'\,[\,g(x_0) * g'(x_0)\,]$

Por lo tanto,
$(f \text{ o } g)'(x_0) = f'\,[\,fg(x_0)\,] \bullet g'(x_0)$

Un caso particular de la regla de la cadena es cuando $y = f(u) = u^n$ con $n \in \mathrm{N}$ y $u = g(x)$ situación que se conoce como la regla de la potencia:

$$y = (f \text{ o } g)(x) = f[\,g(x)] = [g(x)]^n$$

y entonces,

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d}{du}u^n\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = (nu^{n-1})\left(\frac{du}{dx}\right) = n[g(x)^{n-1}]\left[\frac{d}{dx}(gx)\right]$$

Es decir,

$$\frac{dy}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} * g'(x)$$

Ejemplos de aplicación de la regla de la cadena:

Ejemplo 1

Para $g(x) = 2x^3 + 5$ y $f(u) = u^{10}$

Se pide:

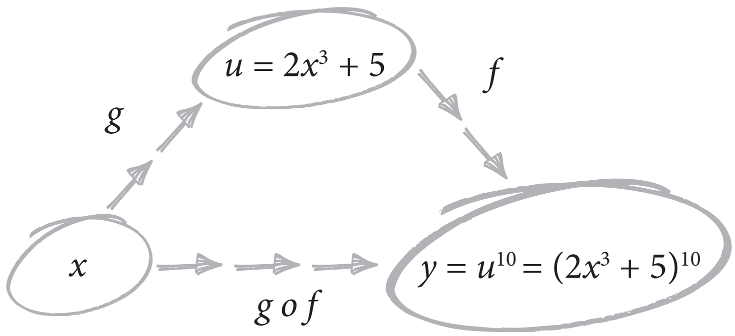
a. Obtener $(f \text{ o } g)(x)$

b. Calcular $\dfrac{d}{dx}\,(f \text{ o } g)(x)$

Solución

Primero calculamos:

$$y = (f \circ g)(x) = f\,(2x^3 + 5) = (2x^3 + 5)^{10}$$



En conclusión la respuesta:

R/ $(f \circ g)(x) = (2x^3 + 5)^{10}$

Seguidamente calcularemos la derivada:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d}{du}u^{10}\right)\left[\left(\frac{d}{dx}(2x^3 + 5\right)\right]$$

$$= (10u^9)\left[2(3x^2 + 0)\right]$$

$$= 10u^9(6x^2)$$

$$= 10(2x^3 + 5)^9 6x^2$$

$$= 60x^2(2x^3 + 5)^9$$

Lo cual es exactamente lo que se obtiene con la regla de la potencia:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + 5)^{10} = 10(2x^3 + 5)^9 \frac{d}{dx}(2x^3 + 5)^9 * 6x^2 = 60x^2(2x^3 + 5)^9$$

Ejemplo 2

Calcule la derivada de $u = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2-y^4}}$

Solución

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2-y^4}}\right) = \frac{d}{dy}\left[\frac{5}{(2-y^4)^{\frac{1}{3}}}\right]$$

$$= \frac{d}{dy}\left[5(2-y^4)^{-1/3}\right]$$

$$= 5\frac{d}{dy}(2-y^4)^{-1/3}$$

$$= 5\left[-\frac{1}{3}(2-y^4)^{-1/3-1}\frac{d}{dy}(2-y^4)\right]$$

$$= -\frac{5}{3}\left(2-y^4\right)^{-4/3}\left(-4y^3\right)$$

$$= \frac{20}{3}y^3\left(2-y^4\right)^{-4/3}$$

$$= \frac{20}{3}y^3 * \frac{1}{\left(2-y^4\right)^{3/4}}$$

$$= \frac{20y^3}{3\left(2-y^4\right)^{4/3}}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{20y^3}{3\sqrt[3]{\left(2-y^4\right)^4}}$$

Ejemplo 3

Calcule la derivada de $z = (u^3 + 1)^5 (u^3 - 2)^8$

Solución

Resolver primero por la regla del producto y luego por la de la potencia:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{du} &= \frac{d}{du}\left[(u^3+1)^5(u^3-2)^8\right] \\
&= (u^3+1)^5\frac{d}{du}(u^3-2)^8 + (u^3-2)^8\frac{d}{du}(u^3+1)^5 \\
&= (u^3+1)^5 8(u^3-2)^{8-1}\frac{d}{du}(u^3-2) + (u^3-2)^8 5(u^3+1)^{5-1}\frac{d}{du}(u^3+1) \\
&= (u^3+1)^5 8(u^3-2)^7(3u^2) + (u^3-2)^8(u^3+1)^4(3u^2) \\
&= 24u^2(u^3+1)^5(u^3-2)^7 + 15u^2(u^3-2)^8(u^3+1)^4
\end{aligned}$$

Ordenamos:

$$= 24u^2(u^3-2)^7\,(u^3+1)^5 + 15u^2(u^3-2)^8(u^3+1)^4$$

Factorizamos y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{du} &= 3u^2(u^3-2)^7(u^3+1)^4\left[8(u^3+1) + 5(u^3-2)\right] \\
&= 3u^2\left(u^3+1\right)^4\left(u^3-2\right)^7\left[8u^3+8+5u^3-10\right] \\
&= 3u^2\left(u^3+1\right)^4\left(u^3-2\right)^7\left(13u^3-2\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcule la derivada de $w = \dfrac{(3t^2-4)^3}{(2-t^2)^4}$

Solución

si

$u = (3t^2 - 4)^3$

$v = (2 - t^2)^4$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\dfrac{du}{dx} - u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Primero por la regla del cociente y luego por la de la potencia:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{(3t^2-4)^3}{(2-t^2)^4}\right] = \frac{(2-t^2)^4\dfrac{d}{dt}(3t^2-4)^3 - (3t^2-4)^3\dfrac{d}{dt}(2-t^2)^4}{\left[(2-t^2)^4\right]^2}$$

$$= \frac{(2-t^2)^4\,3(3t^2-4)^{3-1} - \dfrac{d}{dt}(3t^2-4)^3\,4(2-t^2)^{4-1}\dfrac{d}{dt}(2-t^2)}{(2-t^2)^8}$$

Ordenamos términos y factorizamos:

$$= \frac{3\left(2-t^2\right)^4\left(3t^2-4\right)^2 - 4\left(2-t^2\right)^3\left(3t^2-4\right)^3}{\left(2-t^2\right)^8}$$

$$= \frac{\left(2-t^2\right)^3\left(3t^2-4\right)^2\left[3\left(2-t^2\right)^1 - 4\left(3t^2-4\right)^1\right]}{\left(2-t^2\right)^8}$$

$$= \frac{\left(3t^2-4\right)^2\left[3\left(2-t^2\right)^1 - 4\left(3t^2-4\right)^1\right]}{\left(2-t^2\right)^5}$$

$$= \frac{\left(3t^2-4\right)^2\left[\left(6-3t^2\right) - 4\left(12t^2-16\right)\right]}{\left(2-t^2\right)^5}$$

$$= \frac{\left(3t^2-4\right)^2\left[\left(6-3t^2\right) - 4\left(12t^2-16\right)\right]}{\left(2-t^2\right)^5}$$

Ejemplo 5

Calcule la derivada de $f(x) = \sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{x+1}}$

Solución

Puesto que $f(x)=[(1 - x)^2 + (x + 1)^{1/2}]^{1/2}$

$$f' = \frac{1}{2}\left[(1-x)^2 + (x+1)^{1/2}\right]^{-1/2} \quad 2 \; 1 \qquad (\; 1) \qquad 1$$

$$= \frac{1}{2\left[(1-x)^2 + (x+1)^{1/2}\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{x+1}}}$$

Actividad 10

En su cuaderno calcule las siguientes derivadas aplicando la regla de la cadena de:

1. $y = (3x^4 - 2)^5$
2. $u = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)^{10}$
3. $u = \sqrt{2t^3 + 4}$
4. $w = \dfrac{5}{(3u^2 + 1)^2}$
5. $y = \left(\dfrac{1 - 2x^3}{1 + 2x^3}\right)^5$
6. $y = \sqrt{x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}$
7. $y = \sqrt{\dfrac{3x^2 - 1}{3x^2 - 1}}$

Ahora que nos hemos ejercitado resolviendo ejemplos y ejercicios de derivada aplicaremos la derivada para resolver problemas de:

a. Velocidad
b. Ritmos
  b.1 Producción y productividad
  b.2 Oferta y demanda
  b.3 Costos
c. Ángulos de elevación

Iniciaremos con:

a. Velocidad

Existen varias formas distintas de representar la operación matemática derivada de una función en un punto o función derivada.

Una de las formas más cómodas de representar esta operación es haciendo uso de la **notación de Leibniz**

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Filósofo, lógico, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán, contemporáneo de Newton.

Las contribuciones de Leibniz en el campo del cálculo infinitesimal, efectuadas con independencia de los trabajos de Newton, así como en el ámbito del análisis combinatorio, fueron de enorme valor. Introdujo la notación actualmente utilizada en el cálculo diferencial e integral. Los trabajos que inició en su juventud, la búsqueda de un lenguaje perfecto que reformara toda la ciencia y permitiese convertir la lógica en un cálculo, acabaron por desempeñar un papel decisivo en la fundación de la moderna lógica simbólica.

Leibniz fue un matemático muy serio que además aportó el lenguaje binario, utilizó la noción de función para manejar conceptos geométricos derivados de una curva, como abscisa, ordenada, tangente, cuerda, perpendicular y otros.

Partiendo del trabajo de Leibniz aplicaremos la siguiente nomenclatura para la derivada de las velocidades:

La velocidad de un intervalo: $[t_0, t_0 + h]$

$$v_m = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

La velocidad instantánea

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

En física es común usar la siguiente nomenclatura para la derivada:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

La aceleración

$$a = s''(t) = v'(t) \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

En física es común usar la siguiente nomenclatura para la derivada:

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{d^2 t}$$

A continuación se desarrollará una serie de ejemplos resueltos aplicando las derivadas para resolver problemas de velocidades:

Ejemplo: 1

La ecuación del espacio recorrido por un móvil en función del tiempo es $s(t) = 3t^2 - t + 3$, donde t se mide en segundos.

Se pide

1. Hallar la velocidad media en el intervalo [2 ,3] .

$$v_m = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \frac{s(3)-s(2)}{3-2}$$

$t_o=2$; $t_o + h = 3 \rightarrow$ Despejando h:
$h = 3 - t_o$
$h = 3 - 2 = 1$
Sustituyendo valores en la ecuación $s(t)$.
$s(t) = 3t^2 - t + 3$

$$v_m = \frac{\left[3(3)^2-3+3\right]-\left[3(3)^2-2+3\right]}{1}$$

$$v_m = \frac{[27-3+3]-[12-2+3]}{1} = 27-13$$

$$v_m = 14$$

2. Halla la velocidad para $t = 3$ segundos:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(3+h)-s(3)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3(3+h)^2-(3+h)+3\left[3*3^2-3+3\right]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{27+18h+h^2-3-h+3-27+3-3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{17h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(17+h)}{h}\lim_{h\to 0}(17+h) = 17$$

También podríamos haber hallado la velocidad en t = 3 aplicando las reglas de derivación:
$v(t_0) = s'(t_0) = 3 * 2 (t_0) - 1 = 6 (t_0) - 1$ y sustituyendo en $t = 3$:
$v(3) = v'(3) = 6 * 3 - 1 = 17$

3. Demuestra que la aceleración es constante para cualquier intervalo.
   Para calcular la aceleración tenemos que hallar:

   $a = s''(t)$

   $s'(t) = 6t - 1$

   $s''(t) = 6$

   La segunda derivada es constante igual a 6 , por lo que podemos afirmar que la aceleración es constante para cualquier intervalo $a = s''(t)$

Ejemplo 2

Un móvil se desplaza de forma que su movimiento se rige por la ecuación:

$s = t^3 + 3t^2 - 2t - 10$

Hallar su posición, velocidad y aceleración iniciales y después de 8 segundos.

Dando el espacio en metros y el tiempo en segundos.

Posición, velocidad y aceleración en $t = 0$:

$s(0) = 0^3 + 3 * 0^2 - 10 = -10$

$v(t) = s'(t) = 3t^2 + 6t - 2 \rightarrow v(0) = s'(0) = -2m/s$

$v(t) = v'(t) = s''(t) = 6t + 6 \rightarrow a(0) = 6m/s$

Posición, velocidad y aceleración en $t = 8$:

$s(8) = 8^3 + 3 * 8^2 - 2 * 8 - 10 = 678m$

$v(t) = v'(t) = 3t^2 + 6t - 2 \rightarrow v(8) = s'(8) = 238m/s$

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t + 6 \rightarrow a(8) = s''(8) = 54m/s$

b. Ritmos

La derivada es el ritmo de cambio de cualquier función en un determinado instante, pero que también puede representar el ritmo o velocidad de cambio de cualquier cosa, la densidad o aumento de la población de delfines en relación con el aumento o disminución de la temperatura del agua, el ritmo de cambio de volumen de un globo respecto al área de su superficie o el ritmo de cambio del precio de una pizza con respecto a su tamaño.

A continuación desarrollaremos una serie de ejemplos de la aplicación de ritmos de cambio de una derivada a problemas propios de la economía y la administración.

b.1 Producción y productividad

Un estudio de productividad en el turno matinal en una cierta fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8.00 a.m. habrá ensamblado $Q(t) = t^3 + 6t^2 + 15t$ radio transistores x horas después.

¿En qué momento de la mañana está actuando el trabajador con máxima eficacia?

Solución

Cantidad de radios producida por hora= $Q(t) = t^3 + 6t^2 + 15t$

Para hallar el momento en que es más eficiente, encontraremos en que hora el trabajador alcanza su mayor nivel de producción, para ello derivaremos la función de producción e igualaremos la primera derivada a cero, mientras que para demostrar que realmente es la máxima producción calcularemos la segunda derivada, la cual debe ser negativa para demostrar el máximo nivel de producción:

$$\frac{aQ(t)}{at} = t^3 + 6t + 15t$$

$t^3 + 6t^2 + 15t = 0 \rightarrow (t - 5)(t + 1) = 0 \rightarrow t = 5$

t no puede ser -1 ya que el tiempo no se puede expresar en unidades negativas.

Ahora comprobaremos que es la máxima productividad:

$$\frac{a^2(Q(t))}{a^2t} = -6 + 12 \text{ y como } t = 5 \Rightarrow -6(5) + 12 = -18 < 0$$

b.2 Oferta y demanda

Las funciones de oferta y demanda de un cierto artículo son: $s(p) = 4p + 200$ y $Q(p) = -3p + 480$ respectivamente. Halle el punto de equilibrio y el correspondiente número de unidades ofertadas y demandadas y dibuje las curvas de oferta y demanda en el mismo conjunto de ejes:

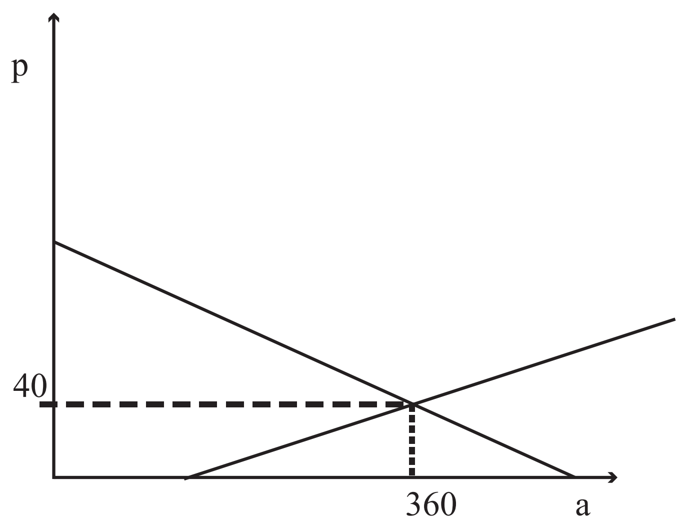
$s(p) = 4p + 200$ y $Q(p) = -3p + 480$

En punto de equilibrio: $S(p) = Q(p)$

$4p + 200 = -3p + 480 \rightarrow 7p = 280 \rightarrow p = 40$

$s(40) = 4(40) + 200 = 360$

$Q(40) = -3(40) + 480 = 360$



b.3 Costos

Una empresa de artículos electrónicos utiliza 600 cajas de transistores cada año. El costo de almacenamiento de una caja durante un año es de Lps. 0.90 y los gastos de envío son Lps. 30.00 por pedido. ¿Cuántas cajas debe solicitar la empresa en cada envío para mantener el costo total en un mínimo?

Solución

En 600 cajas a x cajas por pedido el número de pedidos es $= \dfrac{600}{x}$

Costo de solicitud a Lps. 30 cada uno = $(30)\dfrac{600}{x} = \dfrac{18{,}000}{x}$

El costo de almacenamiento = $\dfrac{x}{2}(0.90) = 0.45x$

El costo total es $C = 0.45x + \dfrac{18{,}000}{x}$

Su derivada es $C = .045 - \dfrac{18{,}000}{x^2}$

$45x^2 = 1800$

$x = sqr\ \dfrac{18{,}000}{0.45} = 200$ cajas

Probaremos que este valor hace un mínimo en C:

La segunda derivada es $C'' = 36{,}000/x^3$ y si hacemos $x = 200$, resulta $C'' > 0$ que es la condición necesaria y suficiente para hacer un mínimo.

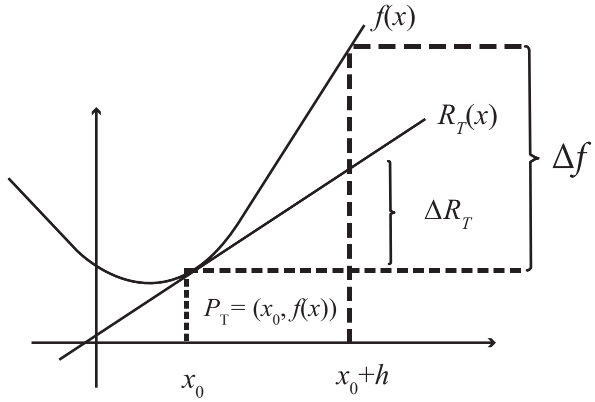
c. Ángulos de elevación

El concepto del diferencial[7]

Existen muchas situaciones, dentro y fuera de las matemáticas, en que necesitamos estimar una diferencia, como por ejemplo en las aproximaciones de valores de funciones, en el cálculo de errores al efectuar mediciones (valor real menos valor aproximado) o simplemente al calcular variaciones de la variable dependiente cuando la variable independiente varía "un poco", etc.

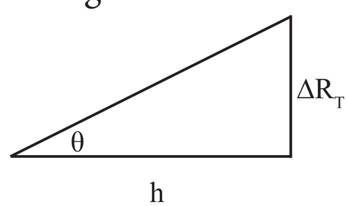
Utilizando a la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la función en las cercanías del punto de tangencia, aproximaremos esta diferencia sobre la recta tangente, a la que llamaremos el diferencial de la función en el punto.

[7] Tomado de: El concepto de diferencial. Recuperado de: http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/soldifer/soldiferHTML/diferencial.htm



Considerando que la recta tangente es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia, P_T si le llamamos $\Delta f = f(x_0 + h)$-$f(x_0)$ a la variación de f cuando x varía de x_0 $ax_0 + h$ y ΔR_T la variación de la recta tangente en el mismo rango de variación en x, podemos afirmar que para valores de h "cercanos" a 0, estas dos variaciones son muy parecidas.

Podemos expresar a ΔR_T en términos de h y el ángulo θ que forma la recta tangente con el eje de las abscisas. En el triángulo de la figura, que extraemos a continuación, se observa lo siguiente:



$$tan\theta = \frac{\Delta R_T}{h} \Rightarrow \Delta R_T = (tan\theta) \Rightarrow \Delta R_T = f'(x_0)h$$

En virtud de que ΔR_T es un aproximado de la diferencia Δf, lo definiremos como el diferencial $\Delta E\, f$ en el punto $x_{0'}$, con respecto al incremento h y lo denotaremos por df, es decir,

$$df = f'(x_0)h$$

Observación: el diferencial, en general depende de h y del punto x_0:

Por ejemplo el diferencial de $f(x) = x^2$ es

$$df =$$
$$d(x^2) = (2x_0)h$$

Si especificamos el punto x_0, el diferencial dependerá únicamente de h, como se aprecia en los siguientes ejemplos:

a. El diferencial de $f(x) = x^2$ en $x_0 = 3$ es $d(x^2) = 6h$

b. El diferencial de $f(x) = x^2$ en $x_0 = 7$ es $d(x^2) = 14h$

c. El diferencial de $f(x) = x^3$ en $x_0 = 2$ es $d(x^3) = 12h$

En el caso de la función identidad $f(x) = x$ como $f'(x_0) = 1$ para todo x_0, su diferencial nos queda como $df = f'(x_0)h$ o bien $df = h$

Como h es el diferencial de la función identidad, podemos rescribir el diferencial de una función f derivable en x_0, como:

$$df = f'(x_0)dx$$

Esta expresión nos dice que la variación de una función f es aproximadamente proporcional a la variación de su variable independiente, donde la constante de proporcionalidad es la derivada en el punto en cuestión.

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos de aplicación práctica en los que, por medio del diferencial, estimaremos un aumento o una disminución en alguna función.

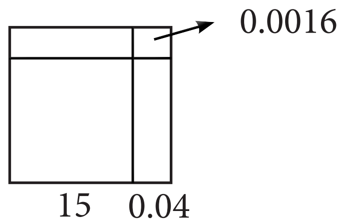
Ejemplo 1

Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de longitud, su lado aumenta 0.04 cm. ¿Cuánto aumentó aproximadamente su área?

Solución

Con el fin de ilustrar una situación que se presentará en todos los demás problemas y por la simplicidad de este en particular, solo en este caso calcularemos la diferencia de áreas ΔA y la compararemos con dA.

Nótese que originalmente teníamos una placa de 15 x 15, después de calentarla tenemos la placa de 15.04 x 15.04, como se muestra en la figura:



En este caso la función $A(L) = L^2$ y por tanto Δ A en $L = 15$ y $h = 0.04$ es:

$A(15.004) - A(15) = 226.2016 - 225 = 1.2016$

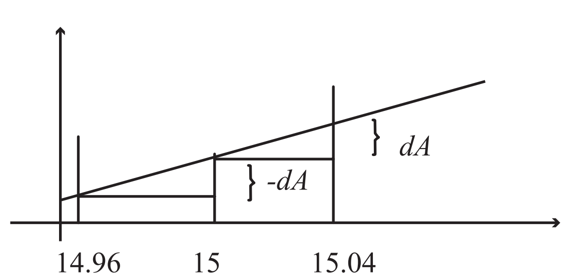
Si ahora calculamos el diferencial de área para $A(L) = L^2$ en $L = 15$ y $dL = 0.04$, obtenemos:

$dA = A'(L)dL = (2L)dL = (2L_{L15})(30)(0.004) = 1.2$

En consecuencia, cuando el lado se incrementa en 0.4 cm, el área aumenta aproximadamente 1.2 cm^2 (el valor exacto del incremento es 1.2016).

Generalmente este tipo de variaciones se miden en porcentajes, es decir, como 0.04 es el 0.2666% de 15 y 1.2 es el 0.5333% de 225 = (15)2, decimos que si el lado de la placa se incrementa en un 0.266%, el área se incrementará aproximadamente en un 0.5333%.

Observación: si el problema es de una placa metálica del mismo tamaño que se enfría entonces h = -0.04 y el diferencial resultaría el mismo solo que con signo contrario, es decir, dA = -1.2. Como estamos usando la recta tangente para estimar la diferencia, la linealidad hace que el cateto opuesto en ambos triángulos de la figura sean iguales.



Ejemplo 2

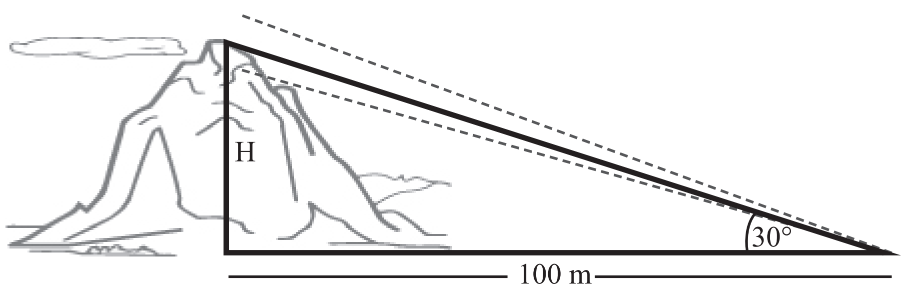
Al calcular la altura de un cerro se encuentra que desde un punto situado a $100m$ de la proyección en el suelo de la parte más alta del cerro, esta última se ve con un ángulo de elevación de 30°. Encuentre aproximadamente el mayor error que se comete al calcular la altura, sabiendo que la medición del ángulo se hace con un posible error de 0.3°.

Solución

Llamémosle H a la altura del cerro.

En la figura de abajo, $tan\ 30° \ \frac{H}{100}$ por lo que $H = 100\ (tan\ 30°)$

Nótese que si el ángulo se mide con un posible error de 0.3° estamos diciendo que el valor real del ángulo estará entre 29.7° y 30.3°, es decir, el error en la medición del ángulo sería de ± 0.3°.



En este caso consideraríamos a H como función de θ, es decir:

$H(\theta) = (100) tan\theta$ con θ variando entre 29.7° y 30.3°

Para estimar el error $\Delta H = H(dH) - H(30°)$, calcularemos $|dH|$, pues θ puede tomar valores menores o mayores que 30°.

En este caso $\theta = \pi/6$ y $d\theta = \pi\,(0.3)/180 = 0.005235987$ (convertimos grados a radianes)

$\Delta H \cong dH = (100)H'(\theta)d\theta = (100)sec^{2\theta}\ d\theta = (100)\ (1.3333)\ (0.005235987)$
$= 0.6981317$

En consecuencia, si se comete un error máximo de 0.3° en la medición del ángulo, la altura se obtendría con un error máximo de 0.666 m.

Volúmenes y superficies[8]

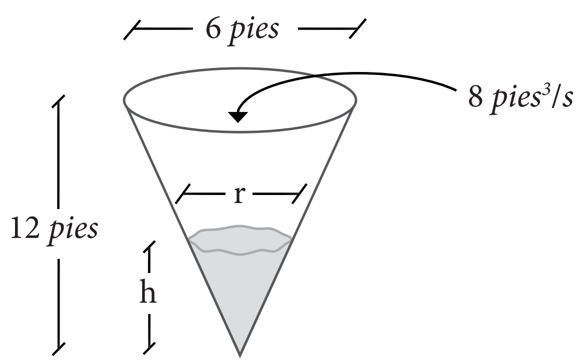
La derivada expresa el cambio instantáneo que experimenta una variable con respecto a otra variable, para una función, $y = f(x)$se podría obtener la derivada o razón de cambio de las variables "x " y " con respecto al tiempo "t ", es decir $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$. Lo cual nos va a permitir resolver problemas de aplicación.

Ejemplo1

Hacia un tanque cónico fluye agua a razón de 8 $\frac{pies^3}{s}$. Si la altura del tanque es de 12 pies y el radio de la base es de 6 pies. ¿qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando tiene 4 pies de altura?

Solución

Esquematizando en un gráfico, la información dada, tenemos:



Llamemos:

M = Cantidad de agua que entra en pie^3

Q = Cantidad de agua que sale en pie^3

v = Cantidad de agua alojada en pie^3

Para este tipo de problema, de manera general se puede proponer:

$M - Q = T$

[8]Moisés Villena Muñoz. Recuperado de: http://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/4800/5/7418.pdf marzo 2014

Derivando con respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{dM}{dT}-\frac{dQ}{dt}=\frac{dV}{dt}$$

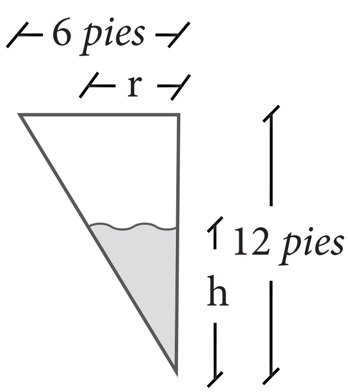
Ahora de acuerdo a la información proporcionada, tenemos:

$$\frac{dM}{dT}=8\frac{pie^3}{s}$$

$$\frac{dQ}{dT}=0\frac{pie^3}{s}$$

El volumen del agua arrojada depende del recipiente. En este caso aplicaremos la fórmula del volumen del cono $v=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Ahora hay que tener la función volumen en término de una variable, que en este caso, lo más indicado es que sea en función de h (¿por qué?). La forma geométrica del recipiente y la forma geométrica de la masa de agua que se va alojando en el recipiente nos permiten hacer lo indicado. Las secciones transversales son triángulos semejantes, esto nos permite relacionar *r* con *h*.



$\frac{h}{12}=\frac{r}{6}$ Entonces $r=\frac{h}{2}$

Reemplazando en la fórmula para el volumen del agua alojada, resulta:

$$v=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{12}\right)^2\frac{h}{12}h^3$$

Por lo tanto: $\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$

Entonces:

$$\frac{dM}{dt}=\frac{dQ}{dt}=\frac{dV}{dt}$$
$$8-0=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt}=\frac{32}{\pi(4)^2}=\frac{32}{\pi h^2}\frac{p}{s}$$

En $h = 4$ resulta:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{32}{\pi(4)^2}=\frac{32}{\pi 16}\frac{2}{\pi}\frac{p}{s}$$

Ejemplo 2

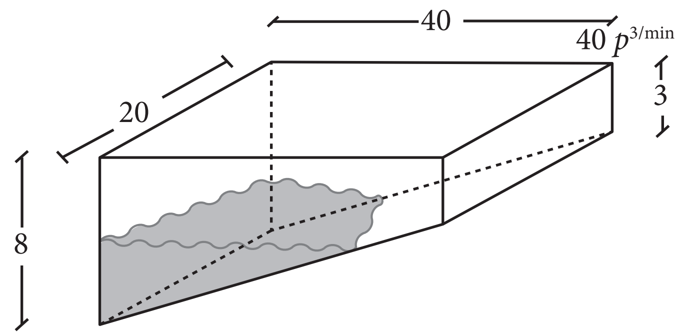
Una piscina tiene 40 *pies* de largo y 20 *pies* de ancho, 8 *pies* de profundidad en el extremo más hondo y 3 *pies* en el extremo menos profundo. El fondo es rectangular, se está bombeando agua a razón de 40 p^3/min. Con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando tiene:

a. 3 *pies*

b. 6 *pies*

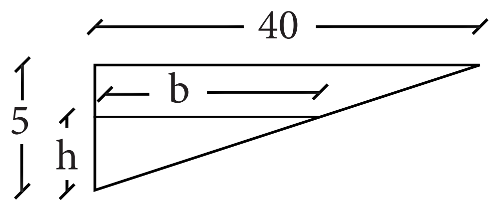
Solución

Esquematizando en un gráfico, la información dada, tenemos:



Note que aquí tenemos un recipiente de doble geometría, por tanto, antes que el nivel del agua sea 5 *pies* es una situación y otra situación después de los 5 *pies.*

a. $0 < h \leq 5$



De manera análoga al problema anterior:

$$\frac{pie^3}{\min}\text{ entra} - \frac{pie^3}{\min}\text{ sale} = \frac{dV}{\min}\text{ Alojada}$$

El volumen de agua alojada en el recipiente se calcula con la fórmula para un prisma de base triangular, es decir:

$$v = \frac{1}{2}bh(20) = 10bh$$

La relación entre b y h se la obtiene considerando los triángulos semejantes, entonces:

$\dfrac{b}{40} = \dfrac{h}{5}$ resulta que $b = 8h$

Por tanto, el volumen queda: $v = 10(8h)(h) = 80h^2$

De aquí resulta $\dfrac{dV}{dt} = 160h\dfrac{dh}{dt}$

Reemplazando, se obtiene:

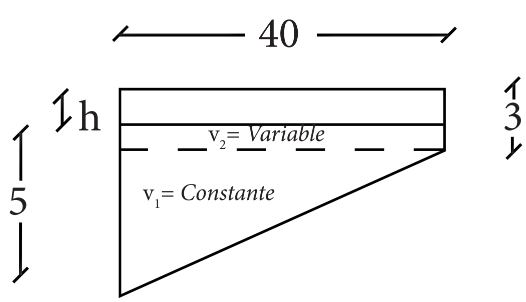
$$\frac{pie^3}{\min}\text{ entra } - \frac{pie^3}{\min}\text{ sale } = \frac{dV}{\min}\text{ Alojada}$$

$$40 - 60 = 160h\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4h}\frac{pie^3}{\min}$$

En h = 3 resulta $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{4(3)} = \dfrac{1}{12}\dfrac{pie^3}{\min} = 1\dfrac{pu\lg}{\min}$

b. Si $5 \leq h \leq 8$



El volumen de agua alojada en el recipiente se puede calcular de la siguiente manera:

$$v = v_1 + v_2$$

$$v = \frac{1}{2}(5)(40)(20) + 40h(20)$$

$$v = 2000 + 800h$$

Entonces

$$\frac{dV}{dt} = 800\frac{dh}{dt}$$ remplazándolo resulta:

$$\frac{pie^3}{\min} \text{ entra } - \frac{pie^3}{\min} \text{ sale } = \frac{dV}{\min} \text{ Alojada}$$

$$40 - 0 = 800\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{20}\frac{p^3}{\min}$$

Note que es independiente de *h*.

Note también que como el volumen de la parte inferior del recipiente es constante, entonces su rapidez de cambio es "0"; por tanto, no existiría ningún inconveniente si solo trabajáramos con la parte superior de recipiente, pero con un nuevo nivel de referencia.

Ejemplo 3

Un aeroplano que vuela hacia el norte a 640 *millas/h* pasa sobre cierta ciudad al medio día (12m). Un segundo aeroplano que va hacia el este a 600 *millas/h*, esta directamente encima de la misma ciudad 15 min. más tarde.

Si los aeroplanos están volando a la misma altitud, que tan rápido se están separando a la 1:15 p.m.

Solución

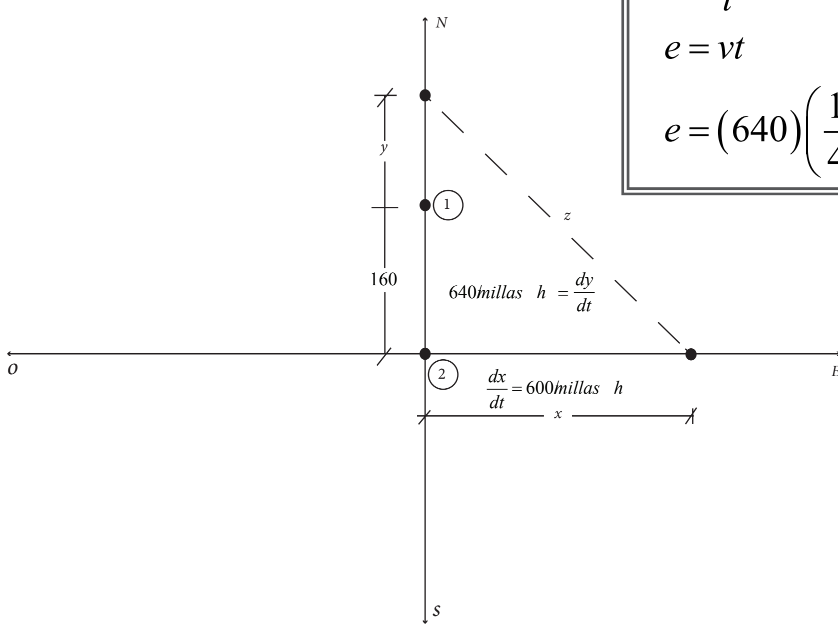
Esquematizando en un gráfico la información dada, tenemos:

Referencia: 12*h*15

$$v = \frac{e}{t}$$

$$e = vt$$

$$e = (640)\left(\frac{1}{4}\right) = 160$$



$$z = x^2 + (160 + y)^2$$

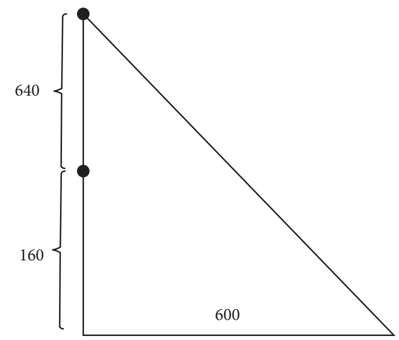
derivando con respecto al tiempo:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(160 + y)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + (160 + y)\frac{dy}{dt}}{z}$$

En 1 hora:

$$x = 600 millas$$
$$y = 640 millas$$
$$z = \sqrt{(600)^2 + (640+160)^2}$$
$$= 1000 millas$$



Por tanto:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(600)(600) + (160+640)(640)}{1000} = 872 \frac{millas}{horas}$$

Actividad 11

En su cuaderno resuelva los siguientes problemas de aplicación de las derivadas:

1. La relación entre la distancia recorrida en metro por un móvil y el tiempo en segundos es $e(t) = et^2$
   Calcule:
   a. La velocidad medida entre $t = 1$ y $t = 4$
   b. La velocidad instantanea en $t = 1$

2. ¿Cual es la velocidad que lleva un vehículo que se mueve según la ecuación $e(t) = 2 - 3t^2$ en el quinto segundo de su recorrido? Calcule el espacio en metros y el tiempo en segundos.

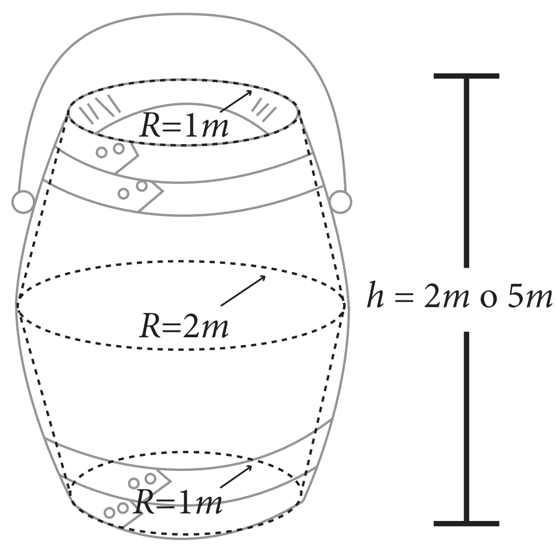
3. Un productor de cítricos estima que si se plantan 60 naranjos, la producción media por árbol será de 400 naranjas. La producción media decrecerá en 4 naranjas por árbol adicional plantado en la misma extensión. ¿Cuántos árboles debería plantar el cultivador para maximizar la producción total?

4. La demanda de consumo para un cierto artículo es $D(p) = -200p + 12.000$ unidades por mes cuando el precio de mercado es de p en lempiras por unidad:
   a. Dibuje esta función de demanda.
   b. Exprese el gasto total mensual de los consumidores para el artículo como una función de p (el gasto total mensual es la cantidad total de dinero gastado por los consumidores cada mes en el artículo).
   c. Dibuje la función gasto total mensual.
   d. Use el gráfico del inciso C para estimar el precio de mercado que genera el mayor gasto de consumo.

5. Por medio de sus estaciones autorizadas, una compañía petrolera distribuye 16,000 mapas de carreteras cada año. El costo de poner en marcha una impresora para editar los mapas es Lps. 100.00 por cada jornada de producción. Además, los costos de producción son 6 centavos por mapa y los costos de almacenamiento son 20 centavos por mapa al año.
   Los mapas se distribuyen a un ritmo uniforme durante el año y se imprimen en lotes iguales, espaciados, de manera que cada uno llega justo cuando el anterior se ha agotado. ¿Cuántos mapas debe imprimir la compañía petrolera en cada lote para minimizar el costo?

6. Un peluquero atiende un promedio de 100 clientes a la semana y les cobra Lps. 50 por corte. Con el incremento de Lps. 7.50 en una tarifa, el peluquero perdería 10 clientes. ¿ Que precio deberá fijar de modo que los ingresos semanales no sean menores que los que se obtienen cobrando la tarifa de Lps. 50?

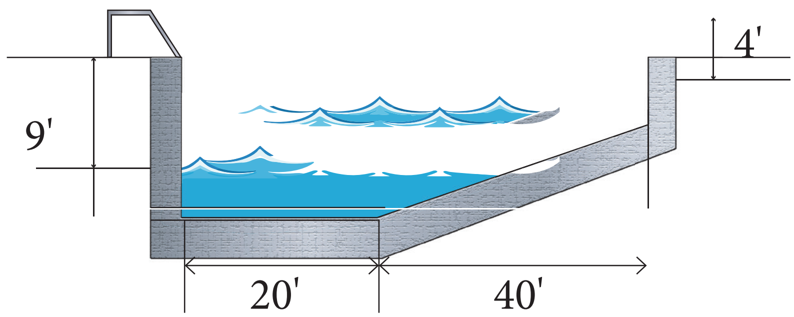
7. Considere el reservorio de la figura adjunta, al cual se está vertiendo agua a razón de 50 $m^{3/min}$. Determine con qué rapidez sube el nivel del agua, cuando éste tiene una altura de:
   a. 2 m
   b. 5 m



8. La orilla de una piscina es un rectángulo de 60 pies de largo y 30 pies de ancho. Su profundidad aumenta uniformemente de 4 a 9 pies en un tramo horizontal de 40 pies y después continúa al mismo nivel los 20 pies restantes, como se ilustra en la figura. La piscina se está llenando a razón de 50 pie$^{3/min}$ de agua. Calcule aproximadamente la RAPIDEZ DE CAMBIO del nivel de agua en el momento que la profundidad es:

a. 4 pies

b. 6 pies



Actividad metacognitiva

Con base a lo aprendido anteriormente, conteste lo siguiente:

1. Valore qué conocimientos previos han contribuido para poder asimilar de la mejor manera los contenidos de esta unidad:

____

____

____

____

2. ¿Considera que adquirió nuevos aprendizajes al estudiar los temas de esta unidad? ¿Puede mencionar cuáles?

____

____

____

____

3. ¿Qué contenidos de los que estudió considera importantes para su aplicación en la vida habitual? ¿Por qué?

____

____

____

____

4. ¿Qué contenidos de la presente unidad generaron mayor dificultad? ¿Por qué?

____

____

____

Autoevaluación

Tipo selección única

Instrucciones: a continuación encontrará proposiciones de selección única. Lea cada una y encierre con un círculo la letra que considere correcta para cada proposición.

1. Es el punto en que la recta tangente es paralela al eje de las abscisas:
   a) Punto crítico
   b) Punto estacionario
   c) Punto medio
   d) Punto de inflexión

2. Qué calculamos mediante la aplicación de la fórmula m= $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
   a) Pendiente dado el ángulo
   b) Pendiente dado el vector de una recta
   c) Pendiente dada por dos puntos
   d) Pendiente dada por ecuación recta

3. ¿Qué calculamos mediante la aplicación del siguiente teorema:

$$\frac{dy}{dx}uv = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

   a) Potencia de derivadas
   b) Suma de derivadas
   c) Producto de derivadas
   d) Cociente de derivadas

4. ¿Cuál de las siguientes opciones es el número o letras que lo simbolizan y hacen que una función adquiera un valor?
   a) Argumento
   b) Grado
   c) Módulo
   d) Logaritmo

5. Dada la función con dominio los números reales no nulos $f(x) = \frac{4}{x}$
Los puntos M y N de la gráfica de $f(x)$ para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto (4 ,– 8) son:
a) $M(1,4); N(-2,-2)$
b) $M(-1,-4); N(2,2)$
c) $M(1,-4); N(-2,2)$
d) No hay solución porque (4,–8) no pertenece a la gráfica de $f(x)$

6. ¿Cuánta distancia habrá recorrido durante 87 minutos un avión que viaja a una velocidad de 300*km/h*?
a) 174 km
b) 206 km
c) 315 km
d) 435 km

7. ¿Cuál de las siguientes opciones es la derivada de $f(x) = 100$?
a) $f'(x) = 0$
b) $f'(x) = 1$
c) $f'(x) = 10$
d) $f'(x) = -10$

8. ¿Cuál de las siguientes opciones es una situación en la que aplicamos el ritmo de una derivada?
a) Para calcular la aceleración de un móvil
b) Para medir el volumen y superficie de uno cilindro
c) Para determinar la oferta y la demanda de un producto
d) Para calcular el calentamiento de una placa metálica

9. ¿Cuál de las siguientes opciones es la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
b) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$
c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
d) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

10. ¿Cuál de las siguientes opciones es la derivada de $f(x) = -2x^2 - 5x + 2$?
   a) $-2x + 5$
   b) $-4x - 5$
   c) $-3x^2 - 3$
   d) $-2x^{3/2} - 5$

Tipo práctico

Instrucciones: resuelva cada ejercicio en forma clara y ordenada.

1. Calcule la pendiente de los puntos (3,4) y (2,5):

2. Encuentre la derivada de $y = x^5\sqrt{4x+7}$:

3. Calcule la derivada de $y = \dfrac{x+1}{x^2-1}$:

4. Encuentre la derivada de $y = tan(x^2 - x)$:

5. Derive $y = sen\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$:

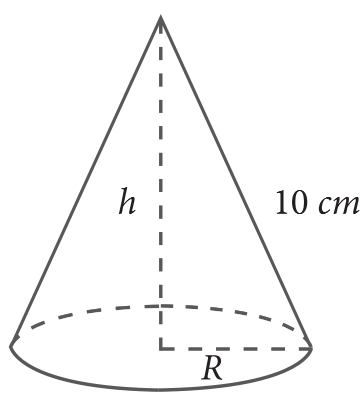
6. Calcule la derivada de $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$:

7. Si el desplazamineto de un móvil hasta el tiempo *t* está dado por la ecuación $d(t) = 64 + 4t^2$ *metros,* donde *t se* mide en minutos. Determine la velocidad en el tiempo $t = 2$:

8. Un fabricante ha estado vendiendo bombillas a Lps. 6.00 cada una y, a este precio, los consumidores han estado comprando 6,000 bombillas por mes. El fabricante desearía elevar el precio y estima que por cada lempira de incremento en el precio se venderán 1,000 bombillas menos cada mes. El fabricante puede producir las bombillas a un costo de Lps. 4.00 por bombilla. ¿A qué precio debería vender el fabricante las bombillas para generar el mayor beneficio posible?

9. Con una Lámina cuadrada de 10 *cm* de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados. Calcule el lado del cuadrado recortado hasta que el volumen de la caja sea máximo.
   La altura de la caja no debe pasar de 2 *cm*. ¿Cuál será la medida del cuadrado que debemos recortar?

10. Se quiere construir un recipiente cónico generatríz de 10 *cm* y de capacidad maxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?



Glosario

Abscisa: coordenada x de un punto en un sistema de coordenadas Cartesianas. Es la distancia horizontal de un punto al eje vertical, o y.

Adyacente: se refiere a los ángulos que disponen de un lado y el vértice en común, y cuando sus otros lados resultan semirrectas opuestas, se conocen como ángulos adyacentes.

Amplitud: es el rango de la función, el período es cada cuanto se repite la porción principal de la gráfica y el desfase el punto desde donde inicia la gráfica de la porción que siempre se repite.

Ángulo: es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen o vértice.

Argumento: el ingreso de una función: una variable que afecta al resultado de una función.

Asíntota: es una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de una función; es decir que la distancia entre las dos variables tiende a ser cero (0), a medida que se extienden indefinidamente.

Capital: es toda suma de dinero, que no ha sido consumido por su propietario, sino que ha sido ahorrada y trasladada a un mercado financiero con el fin de obtener una renta al capital.

Cateto: es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo los que conforman el ángulo recto.

Constante: es un valor de tipo permanente, que no puede modificarse, al menos no dentro del contexto o situación para el cual está: geometría aritmética.

Coordenada: son un conjunto de valores que muestran una posición exacta. Cuadrante:cuarta parte de un círculo o una circunferencia comprendida entre dos radios que forma un ángulo de 90 .

Diferencial: herramienta matemática que nos permite trabajar sobre espacios tangentes de diferentes variedades diferenciables aprovechado las buenas propiedades de unos bien conocidos sobre otros que casi no conocemos.

Estándar: que sirve como tipo, modelo, norma, patrón o referencia por ser común.

Hipotenusa: es el lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo, y el lado opuesto al ángulo recto. La medida de la hipotenusa puede ser hallada mediante el teorema de Pitágoras, si se conoce la longitud de los otros dos lados, denominados catetos.

Identidad: es una igualdad entre dos expresiones que es cierta sean cuales sean los valores de las distintas variables empleadas. Las identidades suelen utilizarse para transformar una expresión matemática en otra equivalente, particularmente para resolver una ecuación.

Interés: en economía y finanzas, es un índice utilizado para medir la rentabilidad de los ahorros e inversiones así también el costo de un crédito bancario -por ejemplo crédito hipotecario para la compra de la vivienda. Se expresa como un porcentaje referido al total de la inversión o crédito.

Intervalo: es un espacio métrico comprendido entre dos valores.

Monto: cantidad de dinero que consiste en suma del capital y los intereses.

Oblicuo: se aplica a la línea o el plano que no forma ángulo recto con relación a otro.

Parábola: es la sección cónica resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz. El plano resultará por lo tanto paralelo a dicha recta.

Pendiente: en matemáticas y ciencias aplicadas se denomina pendiente a la inclinación de un elemento ideal, natural o constructivo respecto de la horizontal.

Productividad: es la relación entre la cantidad de productos obtenida por un sistema productivo y los recursos utilizados para obtener dicha producción. También puede ser definida como la relación entre los resultados y el tiempo utilizado para obtenerlos: cuanto menor sea el tiempo que lleve obtener el resultado deseado, más productivo es el sistema.

Razón: es una relación binaria entre magnitudes (es decir, objetos, personas, estudiantes, cucharadas, unidades del SI, etc.), generalmente se expresa como "a es a b" o a:b. En el caso de números toda razón se puede expresar como una fracción y eventualmente como un decimal.

Bibliografía

Carmargo, Amuray y Arenas, A. Favian. Cálculo direfencial. Universidad de Cordova, Facultad de Ciencias Básicas e Ingenierías, Departamento de Matemáticas. Recuperado de: http://www.aves.edu.col/ovanicur/recursos/1/index/_3_Derivada_y_continuidad.pdf

Derivadas de las funciones trigonométricas. Recuperado de: http://www.fic.umich.mx/~lcastro/6%20derivada%20funciones%20trigonometricas.pdf marzo 2014

El concepto del diferencial. Recuperado de: http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/soldifer/soldiferHTML/diferencial.htm

Fórmulas del producto y el cociente de una derivada. Recuperado de: http://www.fic.umich.mx/~lcastro/5%20derivada%20producto%20y%20cociente.pdf

Leythold, Lois. (2001). *El Cálculo*. México: Editorial Oxford.

Michael Spivak. (2012). *Calculus*. Barcelona: Reverte.

Muñoz, Moisés Villena. *Aplicaciones de la derivada*. Recuperado de: http://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/4800/5/7418.pdf marzo 2014

Reglas de derivación. Recuperado de: http://canek.uam.mx/Calculo1/Teoria/Reglas/FTDelaCadena.pd marzo 2014