Introducción

El trabajo que se desarrolla para obtener la solución de un problema tiene gran utilidad en la formación de una persona, ya que debe buscar alternativas de solución y tomar una decisión con respecto al camino que debe seguir para solucionar el problema.

Cuando una persona adquiere el hábito de razonar ante cualquier situación problemática que se le presenta, así como analizar las posibles soluciones y seleccionar la más adecuada para llevarla a la práctica, sus posibilidades de alcanzar éxito en la actividad a la que dedique su vida, aumentan considerablemente.

Así, este texto no solo se propone enseñar contenidos informativos, procedimientos, habilidades y destrezas intelectuales para resolver problemas, también se fomentan principios de identidad, democracia y trabajo para generar estrategias de solución de problemas, vinculando los contenidos matemáticos al mundo cotidiano. En esta unidad particularmente se definirán y estudiarán las propiedades de tres nuevas clases de funciones: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

¿Qué vamos a aprender?

Competencias	Objetivos	Contenido
1. Identifican las características de las funciones exponenciales para establecer su definición. 2. Identifican las propiedades de la función exponencial. 3. Grafican funciones exponenciales. 4. Aplican las funciones exponenciales de la resolución de problemas de la vida real.	1. Reconocer las características de las funciones exponenciales para establecer su definición. 2. Establecer las propiedades de la función exponencial. 3. Graficar funciones exponenciales. 4. Resolver problemas de la vida diaria por medio de funciones exponenciales.	1. Función exponencial. 2. Propiedades de las funciones exponenciales de la forma $f(x)= a^x$. 3. Análisis de las gráficas. 4. Función logarítmica.
5. Identifican las características de las funciones logarítmicas para establecer su definición. 6. Identifican las propiedades de la función logarítmica. 7. Grafican funciones logarítmicas. 8. Aplican las funciones logarítmicas en la resolución de problemas de la vida real.	5. Caracterizar las funciones logarítmicas para establecer su definición. 6. Reconocer las propiedades de la función logarítmica. 7. Graficar funciones logarítmicas. 8. Utilizar las funciones logarítmicas en la resolución de problemas de la vida diaria.	5. Propiedades de las funciones logarítmicas de la forma $f(x)=log_a x$. 6. Graficar funciones logarítmicas. 7. Logaritmos comunes y naturales.

9. Identifican las propiedades de la función seno y coseno. 10. Grafican funciones seno y coseno.	9. Detallar las propiedades de la función seno y coseno. 10. Graficar funciones seno y coseno.	8. Cálculo de logaritmos comunes y naturales con la calculadora. 9. Gráfica de funciones seno y coseno. 10. Determinación de anti-logaritmos. 11. Razones y funciones trigonométricas. 12. Medidas de un ángulo. 13. Círculo trigonométrico unitario. 14. Valores notables de funciones trigonométricas. 15. Concepto de función trigonométrica. 16. Función arrollamiento. 17. La función seno. 18. La función coseno. 19. Forma general de la funciones seno y coseno.

Mis conocimientos previos

Instrucciones

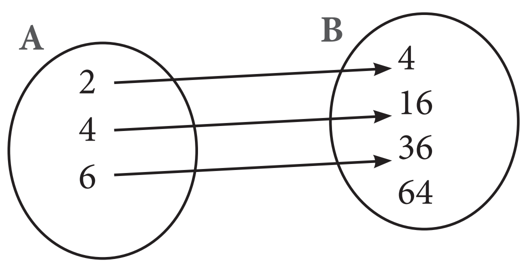
Lea la siguiente definición y después conteste las preguntas que se le presentan:

Una función es un conjunto de pares ordenados en el que no hay dos pares ordenados distintos con el mismo primer componente.[1]

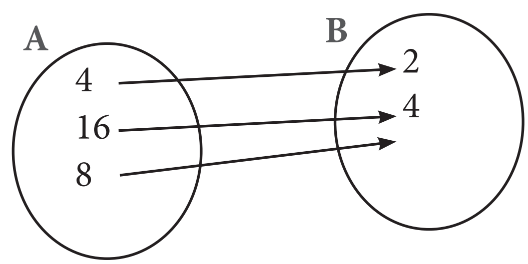
En el antiguo Egipto aparecen ejemplos de usos de funciones particulares. Una tabla con la descomposición de 2/n en fracciones unitarias para los impares n desde 5 hasta 101, aparece en el papiro Rhind o papiro Ahmes, de unos 4000 años de antigüedad, considerado como el primer tratado de matemáticas que se conserva.

1. ¿Cuál de los siguientes diagramas representa una función? ¿Por qué?

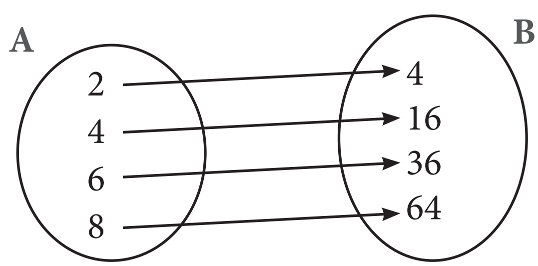
A)



B)



2. ¿A cuál de las siguientes funciones: $f(x) = x^3$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = x^2$ le corresponde el diagrama que se le presenta a continuación?



[1] Reyes Núñez, Horacio. Matemática 10° grado. Honduras.

3. ¿Por qué cree que la función que escogió es la correcta?

4. Realice lo siguiente:

   a. Dada $f(x)= x^3$, elabore su gráfica y determine el dominio, el rango y el intercepto en el eje x.

   b. Calcule la función inversa de:

$$f(x)= \frac{-2x-1}{5}$$

Función exponencial

Imagine que un cultivo de bacterias crece con tal rapidez que, a cada hora, el número de bacterias se duplica. En estas condiciones, si habían 10,000 bacterias cuando el cultivo empezó a crecer, el número habría aumentado a 20,000 después de una hora, habría 40,000 después de 2 horas y así sucesivamente. Es decir, que la bacteria crece de esta forma:

$20{,}000 = (10{,}000)2^1$
$40{,}000 = (10{,}000)2^2$
$80{,}000 = (10{,}000)2^3$

Por tanto, es razonable decir que:

$y = f(x) = (10{,}000)2^x$

Esta función describe el número de bacterias presentes después de x horas. Esta ecuación define una función exponencial con la variable independiente x y la variable dependiente (o función) y.

La función exponencial es de la forma $f(x)= a^x$, donde a es un número real positivo mayor que cero y diferente de 1, y x es la variable independiente que puede recibir cualquier valor.

En una función exponencial se tiene que:

Se define para todos los valores reales de x. Cuando x es negativa, se puede aplicar la definición de los exponentes negativos. Así, para $x = -2$:

$$2^x = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales.

Para todos los valores de x, la función adquiere un valor positivo. Es decir, que 2^x no puede representar jamás un número negativo y tampoco es posible que 2^x se haga igual a cero.

El rango de la función es el conjunto de los números reales positivos.

La base a es un número real positivo mayor que cero y diferente de 1, lo que indica que se desarrolla en los siguientes dos intervalos:

- $0<a<1$
- $a>1$

Si $a > 1$ la función es creciente.

Si $0 < a < 1$ la función es decreciente.

La función $f(x)= a^x$ corta al eje y en el punto (0,1) y el eje x es una asíntota horizontal.

Para entender mejor el concepto de función exponencial, analice las siguientes funciones: $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$.

Como se puede observar, las funciones f y g no son iguales.

La función $f(x) = x^2$ es una función que tiene una variable elevada a un exponente constante. Es una función cuadrática que ya fue estudiada anteriormente.

La función $g(x) = 2^x$ es una función con una base constante elevada a una variable.

La mejor forma de entender las funciones exponenciales es utilizando su gráfica, así:

<u>Ejemplo 1</u>

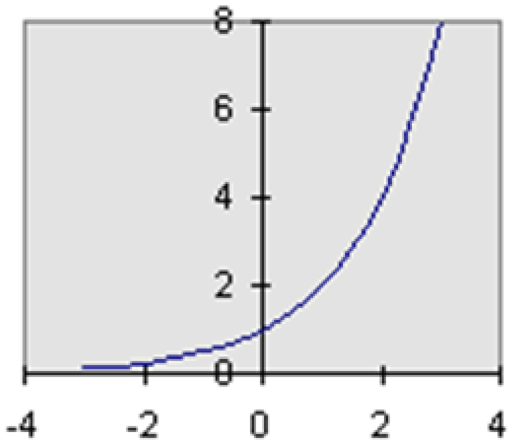
Trazar la gráfica de $f(x) = 2^x$

Solución:

a. Se elabora una tabla para los valores de x, hay que recordar que el dominio de una función exponencial son los números reales:

x	$f(x)=2^x$	(x,y)
-2	$(2)^{-2}=\frac{1}{4}$	$(-2,\frac{1}{4})$
-1	$(2)^{-1}=\frac{1}{2}$	$(-1,\frac{1}{2})$
0	$2^0=1$	$(0,1)$
1	$2^1=2$	$(1,2)$
2	$2^2=4$	$(2,4)$

b. Se traza la gráfica con los valores anteriores:



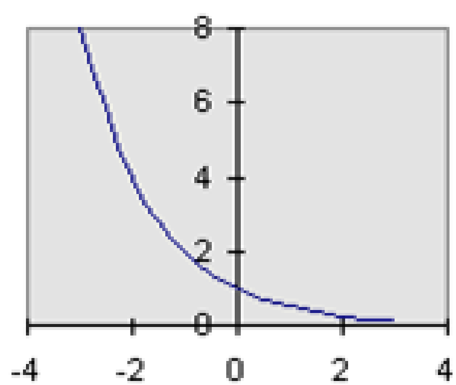
Gráfica de $f(x) = 2^x$

<u>Ejemplo 2</u>

Trazar la gráfica de $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, se debe observar que $\frac{1}{2}$ se encuentra entre 0 y 1.

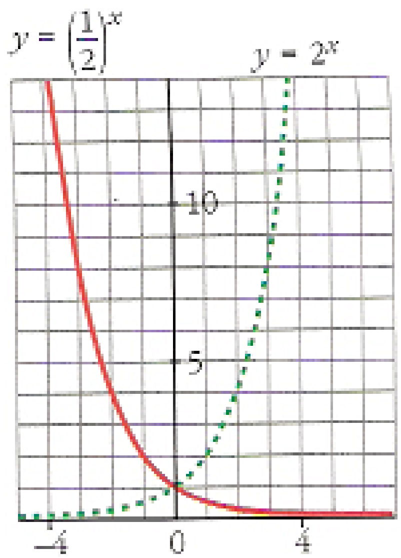
Tabla de valores:

x	$f(x)=(\frac{1}{2})^x$	(x,y)
-2	$(\frac{1}{2})^{-2}=2^2=4$	$(-2,4)$
-1	$(\frac{1}{2})^{-1}=2^1=2$	$(-1,2)$
0	$(\frac{1}{2})^0=2^0=1$	$(0,1)$
1	$(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{2}$	$(1,\frac{1}{2})$
2	$(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$	$(2,\frac{1}{4})$



Gráfica de $f(x)=(\frac{1}{2})^x$

Compare las dos gráficas en el siguiente gráfico:



Gráfica de $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ y de $f(x)= 2^x$

Propiedades de las funciones exponenciales de la forma f(x)= a^x

1. Todas las gráficas para cualquier valor de a dentro de la restricción establecida en los ejemplos anteriores, se intersecan en el punto (0,1).
2. Todas las gráficas son continuas, sin huecos o saltos.
3. El eje de x es la asíntota horizontal, es decir, que la función nunca toca el eje x, por tanto, no tiene ceros.
4. Toda función exponencial es positiva.
5. Si $a > 1$ (a= base), entonces $f(x)= a^x$ aumenta conforme aumenta x, o sea que es creciente.
6. Si $0 < a < 1$, entonces $f(x)= a^x$ disminuye conforme aumenta x, es decir, que es decreciente.
7. La función f es una función uno a uno, por lo tanto admite inversa.

También se pueden encontrar funciones exponenciales en las que el exponente es una expresión algébrica en x.

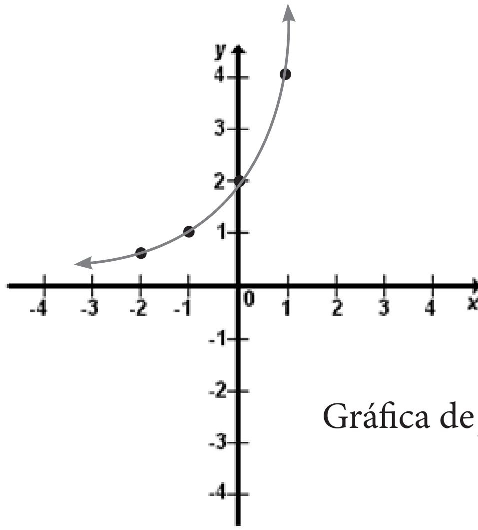
<u>Ejemplos</u>

a. Trazar la gráfica de $f(x)= 2^{x+1}$

Solución:

Se elabora una tabla para los valores de x, recuerde que el dominio de una función exponencial son los números reales.

x	$f(x)= 2^{x+1}$	(x,y)
-2	$(2)^{-1}= \frac{1}{2}$	$(-2, \frac{1}{2})$
-1	$(2)^{0}=1$	$(-1,1)$
0	$2^{1}=2$	$(0,2)$
1	$2^{2}=4$	$(1,4)$



Gráfica de $f(x) = 2^{x+1}$

Análisis de la gráfica:

Observe que la gráfica se desplazó hacia la izquierda con relación a la gráfica de $f(x) = 2^{x}$, este desplazamiento lo indica el término 1 del exponente. El desplazamiento sería hacia la derecha si el exponente es -1.

El intercepto en el eje y es (0,2) y se puede calcular así:
I_y, $x = 0$ entonces $y= 2^{0+1} = 2^{1} = 2$

Por tanto:

$I_y \ (0,2)$

$Domf(x)=R$

$Rango\ f(x)=]0,+\infty[$

b. Trazar la gráfica de $f(x)= (\frac{1}{2})^{x-1}$:

Tabla de valores

x	$f(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}$	(x,y)
-2	$(\frac{1}{2})^{-3} = 2^{3} = 8$	$(-2,8)$
-1	$(\frac{1}{2})^{-2} = 2^{2} = 4$	$(-1,4)$
0	$(\frac{1}{2})^{-1} = 2^{1} = 2$	$(0,2)$
1	$(\frac{1}{2})^{0} = 1$	$(1,1)$
2	$(\frac{1}{2})^{1} = \frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$

Gráfica de $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-1}$

Análisis de la gráfica

Observe que la gráfica se desplazó hacia la izquierda con relación a la gráfica de $f(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}$, este desplazamiento lo indica el término -1 del exponente. El desplazamiento sería hacia la derecha si el exponente es 1. Recuerde que la función es decreciente cuando la base está entre 0 y 1.

El intercepto en el eje y es (0,2) y se puede calcular así:

$I_y, x = 0$ entonces $y = (\frac{1}{2})^{0-1} = 2^1 = 2$

Por tanto:

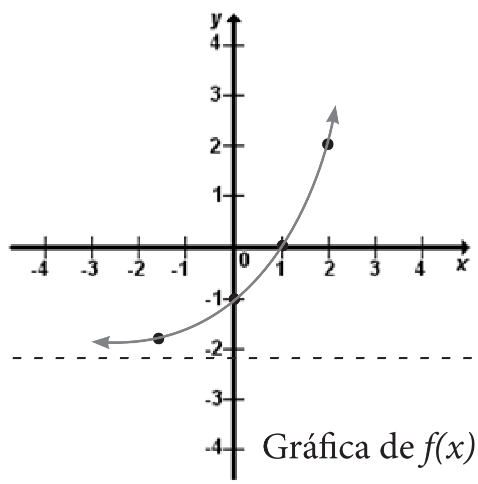
$I_y \ (0,2)$

$Domf(x) = R$

$Rango\ f(x) =]0,+\infty[$

c. Trazar la gráfica de $f(x)= 2^x -2$:

x	$f(x)= 2^x - 2$	(x,y)
-2	$(2)^{-2} - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$	$(-2,-\frac{7}{4})$
-1	$(2)^{-1} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$	$(-1,-\frac{3}{2})$
0	$2^0 - 2 = 1 - 2 = -1$	$(0,-1)$
1	$2^1 - 2 = 0$	$(1,0)$
2	$2^2 - 2 = 2$	$(2,2)$



Gráfica de $f(x) = 2^x -2$

Análisis de la gráfica:

Observe que la gráfica se desplazó hacia abajo con relación a la gráfica de $f(x) = 2^x$, este desplazamiento lo indica el término constante -2 de la función. El desplazamiento sería hacia arriba si el término constante es 2.

El intercepto en el eje y es (0,-1) y se puede calcular así:

I_y, $x = 0$ entonces $y= 2^0 - 2 = 1 - 2 = -1$

Por tanto:

$I_y \ (0,-1)$

El intercepto en x es (1, 0) y se puede calcular así:

I_x, $y=0$ entonces

$0 = 2^x - 2$

$2 = 2^x$ despejando

$2^1 = 2^x$ entonces $1 = x$

Por tanto:

$I_x \ (1,0)$

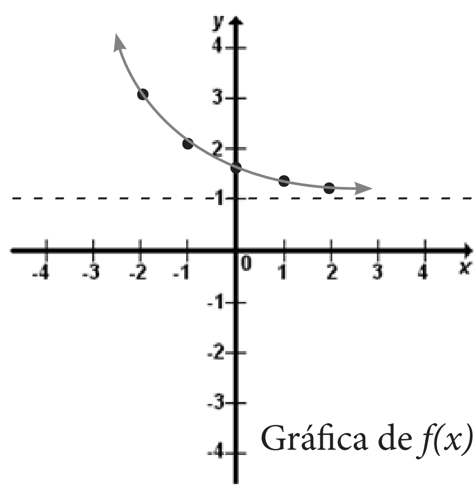
$Dom\ f(x)=R$

$Rango\ f(x) = \,]-2,+\infty[$

d. Trazar la gráfica de $f(x)= (\frac{1}{2})^{x+1}+1$:

Tabla de valores

x	$f(x)=(\frac{1}{2})^{x+1}+1$	(x,y)
-2	$(\frac{1}{2})^{-1} + 1 = 2 + 1 = 3$	$(-2,3)$
-1	$(\frac{1}{2})^{0} + 1 = 1 + 1 = 2$	$(-1,2)$
0	$(\frac{1}{2})^{1} + 1 = \frac{3}{2}$	$(0,\frac{3}{2})$
1	$(\frac{1}{2})^{2} + 1 = \frac{5}{4}$	$(1,\frac{5}{4})$
2	$(\frac{1}{2})^{3} +1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$	$(2,\frac{9}{8})$



Gráfica de $f(x) = (\frac{1}{2})^{x+1} + 1$

Análisis de la gráfica:

Observe que la gráfica se desplazó hacia la izquierda una unidad con relación a la gráfica de $f(x)=2^x$, este desplazamiento lo indica el término 1 del exponente y luego se desplaza una unidad hacia arriba con respecto al eje x, este desplazamiento lo indica el 1 de la función.

El intercepto en el eje y es $(0, \frac{3}{2})$ y se puede calcular así:

I_y, $x = 0$ entonces $y = (\frac{1}{2})^{0+1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Por tanto:

I_y $(0, \frac{3}{2})$

Dom f(x)=R

Rango f(x) = $]1, +\infty[$

No existe intercepto en el eje *x*.

Actividad 1

Elabore la gráfica y determine los interceptos I_x, I_y , el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x)= 3^{-x}$
2. $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$
3. $f(x)= \left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 1$
4. $f(x)= 3^{x} + 1$
5. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} +2$
6. $f(x) = \frac{1}{5}^{x}$
7. $f(x) = \frac{1}{2^{x}}$
8. $f(x) = 4.2^{x}$

Función logarítmica

La función exponencial admite inversa y se denomina función logarítmica, es decir que la función inversa de $y = a^x$ es $y = log_a x$ y se lee: logaritmo de x con base a, donde a > 0, a ≠ 1.

El logaritmo de un número x es el exponente al cual hay que elevar la base a para obtenerlo, esto es si a > 0 y a ≠ 1, entonces:

$$log_a x = y \text{ si y solo si } x = a^y$$

Recuerde que el dominio de una función exponencial son los números reales y el rango los reales positivos, entonces, siendo la función exponencial la inversa de la función logarítmica, el dominio de esta son los números reales positivos y el rango el conjunto de los números reales.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica, determinar el dominio y rango de la siguiente función:
$y = log2x$

Solución:

Cambiar la función logarítmica a función exponencial:

$$y = log2x \text{ si y solo si } 2y = x$$

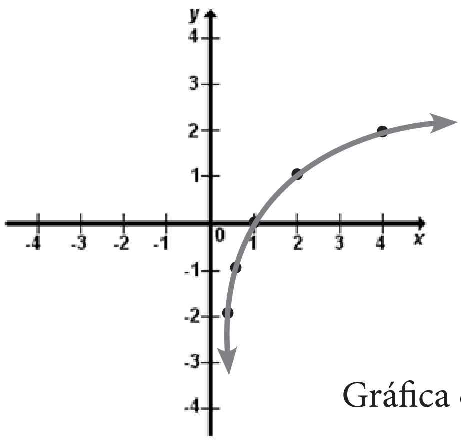
Se elabora una tabla de valores con la función exponencial. Se necesita cambiar el orden de los elementos de la función $2^y = x$ a $2^x = y$ para evitar equivocaciones:

x	y
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

Como las funciones son inversas se intercambian los valores de la tabla anterior, obteniendo los valores de la función $y = log_2 x$:

x	$y = log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

Se traza la gráfica con los valores de la segunda tabla:



Gráfica de $f(x) = log_2 x$

Ejemplo 2

Trazar la gráfica, determinar el dominio y rango de la siguiente función $y=\log_{1/2}x$:

Solución:

Cambiar la función logarítmica a función exponencial:

$$y = log_{1/2}x \text{ si y solo si } (\tfrac{1}{2})^y = x$$

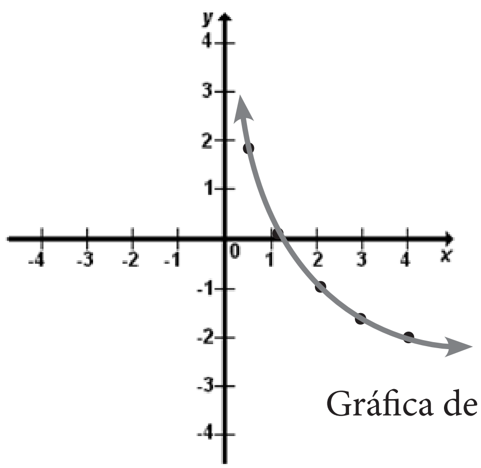
Se elabora una tabla de valores con la función exponencial. Se necesita cambiar el orden de los elementos de la función $(\frac{1}{2})^y = x$ a $(\frac{1}{2})^x = y$ para evitar equivocaciones:

x	$\frac{1}{2}^2$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

Como las funciones son inversas se intercambian los valores de la tabla anterior, obteniendo los valores de la función $y = log_{1/2}x$:

x	$y = log_{1/2}x$
4	-2
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2

Se traza la gráfica con los valores de la segunda tabla:



Gráfica de $f(x) = log_{(1/2)}x$

Actividad 2

Elabore la gráfica y determine los interceptos I_x, I_y si los hay, el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

1. $y = log_3x$
2. $y = log_{1/4}x$
3. $y = log_{1/3}x$
4. $y = log_{10}x$
5. $y = log_2x$
6. $y = log_8x$
7. $y = log_2x + 3$
8. $y = log_2x - 2$

Propiedades de las funciones logarítmicas de la forma $f(x)=\log_a x$

1. Todas las gráficas para cualquier valor de a dentro de la restricción establecida en los ejemplos anteriores, se intersecan en el punto (*1,0*).
2. Todas las gráficas son continuas, sin huecos o saltos.
3. El eje de *y* es la asíntota vertical, es decir, que la función nunca toca el eje *y*, por tanto, no tiene ceros.
4. Toda función exponencial es positiva.
5. Si $a > 1$ (a= base), entonces $f(x)=\log_a x$ aumenta conforme aumenta x, o sea que es creciente.
6. Si $0 < a < 1$, entonces $f(x)=\log_a x$ disminuye conforme aumenta x, es decir, es decreciente.
7. La función f es una función uno a uno, por lo tanto, admite inversa.

Cambio de la función logarítmica a función exponencial:

$$\log_a x = y \text{ si y solo si } x = a^y$$

¿A qué exponente hay que elevar la base 5 para obtener 25?
Al exponente 2, ya que $5^2 = 25$.

También se dice que el logaritmo de 25 en la base 5 es 2 y simbólicamente se expresa de la forma: $\log_5 25 = 2$.

De manera que, $\log_5 25 = 2$ es equivalente a $5^2 = 25$
(observe que un logaritmo es un exponente.)

<u>Ejemplos</u>

Exprese los siguientes logaritmos en forma exponencial:

a) $\log_3 9 = 2$

$$3^2 = 9$$

b) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Exprese de la forma exponencial a la forma logarítmica:

a) $36 = 6^2$

$$log_6 36 = 2$$

b) $81^{1/2} = 9$

$$log_{81} 9 = \frac{1}{2}$$

Propiedades de la función logarítmica

Si x, y, p, b, M y N son números reales positivos y $b \neq 1$, entonces:

1. El logaritmo de 1 en cualquier base es cero:

$$log_b 1 = 0$$

2. El logaritmo de un número igual a la base es 1:

$$log_b b = 1$$

3. El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de la base multiplicada por el exponente:

$$log_b y^x = x \, log_b y$$

4. El logaritmo de una multiplicación es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$log_b MN = log_b M + log_b N$$

5. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$log_b \frac{M}{N} = log_b M - log_b N$$

6. $log_b M = log_b N$ *si y solo si* $M=N$

7. $log_b b^x = x$

8. $log_a M = log_b M$ *si y solo si* $a = b$

Si el logaritmo de una expresión de un número no lleva subíndice, se sobreentiende que se trata de un logaritmo de base 10.[2]

[2] Reyes Núñez… op cit.

Ejemplos

Use las propiedades para simplificar los siguientes logaritmos:

1. $log_4 1 = 0$

2. $log_5 5 = 1$

3. $log_3 9 = log_3 3^2 = 2\ log_3\ 3 = 2(1) = 2$

4. $\frac{ab^2}{c^4 d^5}$

$log\ ab^2 - log\ c^4\ d^5$	logaritmo de un cociente
$log\ a + log\ b^2 - (log\ c^4 + log\ d^5)$	logaritmo de una multiplicación
$log\ a + 2log\ b - 4log\ c - 5log\ d$	logaritmo de una potencia

5. $log\ \frac{(x-1)^3}{\sqrt{b}}$

$log\frac{(x-1)^3}{\sqrt{b}} = log(x-1)^3 - log\ \sqrt{b}$	logaritmo de un cociente
$3\ log\ (x-1) - log\ (b)^{1/2}$	logaritmo de una potencia y es cribiendo el radical como potencia
$3\ log(x-1) - \frac{1}{2}\ log\ b$	logaritmo de una potencia

6. Escribir las siguientes proposiciones solo en logaritmo:

$3\ log\ x + log\ y - \frac{1}{3}\ log\ n$

$logx^3 + log\ y - log\ n^{1/3}$	logaritmo de una potencia
$logx^3\ y - log\ n^{1/3}$	la suma de dos logaritmos corresponde al logaritmo de un producto
$logx^3\ y - log\ \sqrt[3]{n}$	cambiando el exponente a forma radical
$log\ \frac{x^3 y}{\sqrt[3]{n}}$	la diferencia de logaritmos corresponde al logaritmo de un cociente

Actividad 3

Exprese los siguientes logaritmos en forma exponencial:

1. $log_3 27 = 3$
2. $log_{36} 6 = \frac{1}{2}$
3. $log_3 \frac{1}{9} = -2$
4. $log_{10} 1000 = 3$
5. $log_3 243 = 5$
6. $log_4 \frac{1}{64} = -3$
7. $log_7 1 = 0$
8. $log_2 \frac{1}{8} = -3$

Actividad 4

Exprese las siguientes potencias en forma logarítmica:

1. $64 = 4^3$
2. $2 = \sqrt[3]{8}$
3. $\frac{1}{16} = 4^{-2}$
4. $25 = 5^2$
5. $9 = 3^2$
6. $\frac{1}{64} = 2^{-6}$
7. $\frac{1}{25}^{-3/2} = 125$
8. $100 = 10^2$

Actividad 5

Use las propiedades para simplificar:

1. $log_5\ 1 =$
2. $log_{10}\ 10 =$
3. $log_{10}\ 1 =$
4. $log_5\ 25 =$
5. $log_{10} 10^{-5} =$
6. $log_7 49 =$
7. $log_{1/2} \frac{1}{16} =$
8. $log_3 \frac{1}{9} =$

Actividad 6

Use las propiedades para expandir cada expresión:

1. $log_b uv =$
2. $log_b\ uv^3 =$
3. $log_b \frac{r}{xy} =$
4. $log_b \frac{u^{(1/5)}}{v^3} =$
5. $log_b 3x^2$
6. $log5\ \sqrt{xy}$
7. $log \frac{1}{3}$
8. $log \frac{x^2m^5}{b}$
9. $log \sqrt[3]{x^7}$

Actividad 7

Use las propiedades para escribir cada expresión como un solo logaritmo:

1. $log_3 (x) + log_3 (6) =$
2. $log_3 (24) - log_3 (4) =$

3. $\log_{10}(x-1)+\log_{10}(3)-3\log_{10}(x)=$
4. $\log_{10}(5)+\log_{10}(3)=$
5. $\log_{3}(x+2)-\log_{3}(x-1)=$
6. $2\log_{10}(x)+\log_{10}(y)+\log_{10}(3)=$
7. $5\log m+2\log y-\frac{1}{2}\log b$
8. $\log_{0.5}=$
9. $\log_a\frac{4x}{y^2}=$

Logaritmos comunes y naturales

Los logaritmos comunes son los de base 10. Son muy útiles en virtud de que su base es la misma que la del sistema de numeración decimal.

si $x=a^y$ *entonces* $\log_{10}x=y$

Los logaritmos naturales son los de base *e*:

Si $x=e^y$ *entonces* $y=\log_e x=\ln x$

El logaritmo natural tiene todas las propiedades para los logaritmos con base 10.

1. $\ln e=1$
2. $\ln 1=0$
3. $\ln(uv)=\ln u+\ln v$
4. $\ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v$
5. $\ln u^n=n\ln u$

Cálculo de logaritmos comunes y naturales con la calculadora

Las calculadoras poseen la tecla [log] para los logaritmos comunes y la tecla [ln] para los logaritmos naturales.

Notación:

Logaritmo común: $\log x=\log_{10}x$

Logaritmo natural: $\ln x=\log_e x$

Ejemplos

Determinar los siguientes logaritmos con su calculadora científica:

1. Log 3

log 3 = 0.47712

Log 3= 0.47712

2. Log 0.342

log 0.342 = - 0.46597

Log 0.342= -0.46597

3. ln2.3

ln 2.3 = 0.83290

ln2.3 = 0.83290

El Procedimiento anterior se hace al utilizar una calculadora marca Casio, al utilizar una calculadora marca Sharp el procedimiento debe hacerse al inverso.
Primero marcar el número y después el log.

Determinación de antilogaritmos

Cuando se obtiene el logaritmo común de un número x, se encuentra un exponente *y* tal que $x= a^y$ y cuando se requiere obtener el antilogaritmo se invierte el proceso.

En las calculadoras no hay ninguna tecla marcada [antilog]. Por lo general algunas no la traen, las calculadoras científicas poseen una tecla inversa o segunda función y si se presiona la tecla $\boxed{\text{inv}}$ seguido de $\boxed{\text{log}}$ se obtiene el antilogaritmo.

Por ejemplo: obtener el antilogaritmo de

1) 0.47712

Se escribe el número 0.47712 y luego se presiona $\boxed{\text{inv}}$ y $\boxed{\text{log}}$, entonces aparece en la pantalla el resultado: 3.

2) – 2.36589

Se escribe el número – 2.36589 y luego se presiona $\boxed{\text{inv}}$ y $\boxed{\text{log}}$, entonces en la pantalla aparece el resultado: 0.0043064.

Otra forma de obtener el antilogaritmo de un número es utilizando la tecla $\boxed{10^x}$ o la tecla $\boxed{x^y}$

Por ejemplo: obtener el antilogaritmo de

1) 0.47712

Se escribe el número 0.47712 y luego se presiona $\boxed{x^y}$ y aparece en la pantalla el resultado: 3.

Actividad 8

Use la calculadora para hallar:

1. $log\ 2 =$
2. $ln\ .0034 =$
3. $log\ (-3.24) =$
4. $log\ 3 =$
5. $ln\ 28.693 =$
6. $log(-0.438) =$
7. $log5 =$
8. $log100 =$

Actividad 9

Use las propiedades para expandir:

1. $ln \frac{2y - 2}{x^2 + 2x} =$
2. $ln5x^3\ m =$
3. $ln \frac{a^2\ v^3}{z^4} =$
4. $ln \sqrt{x} =$
5. $ln \sqrt{y}\ \sqrt{a} =$
6. $lnx^5y^4 =$

Actividad 10

Simplifique como un solo logaritmo:

1. $ln\ y - ln\ (y+2) =$
2. $a\ ln\ x - b\ ln\ y =$
3. $ln\ (x-1) - \frac{1}{2}\ ln\ x =$
4. $\frac{1}{2}\ ln\ x + \frac{1}{3}\ ln\ y + ln\ z =$
5. $\frac{1}{2}\ ln\ x - 2\ ln\ (x-1) - \frac{1}{3}\ ln\ x =$
6. $ln\sqrt{(xy)}\ \sqrt[4]{z} =$

Aplicación de la función exponencial y los logaritmos

Existe una gran variedad de problemas de aplicación relacionados con las funciones exponenciales y logarítmicas. Antes de tomar en consideración estas aplicaciones, será útil aprender a resolver una ecuación exponencial.

Por ejemplo: $2^x = 35$.

$\ln 2^x = \ln 35$ Si $a = b$, entonces $\ln a = \ln b$

$x \ln 2 = \ln 35$ potencia de un logaritmo

$x = \frac{\ln 35}{\ln 2}$ despejando para x

Se puede obtener una aproximación al valor de x usando la calculadora científica.

Se tiene entonces:

$$x = \frac{\ln 35}{\ln 2} = \frac{3.556}{0.693} = 5.13$$

Como verificación, se observa que al redondear 5.13 es 5, que es un valor razonable, ya que $2^5 = 32$.

Ejemplos

1. Al principio de la sección, se desarrolló la fórmula $y = (10{,}000)2^x$, que describe el número de bacterias presentes en un cultivo, después de x horas de proliferación; 10,000 es el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tardará este cultivo de bacterias en llegar a 100,000? Para contestar este pregunta sustituya $y = 100{,}000$ y resuelva la ecuación para x:

   $100{,}000 = (10{,}000)\, 2^x$

   $10 = 2^x$ se divide ambos lados por 10,000

   $\ln 10 = \ln 2^x$ se aplica ln a ambos lados

   $\ln 10 = x \ln 2$ logaritmo de una potencia

   $x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$ despejando x

   $x = \frac{2.303}{0.693} = 3.32$

   Tardará aproximadamente 3.3 horas.

2. También las fórmulas usadas en la evaluación del interés compuesto constituyen aplicaciones del crecimiento exponencial. Cuando una inversión gana un interés compuesto, esto significa que el interés obtenido después de un periodo fijo de tiempo se agrega a la inversión inicial, entonces, el nuevo total gana intereses durante el siguiente periodo de inversión y así sucesivamente. Suponga, por ejemplo, que una inversión de P lempiras gana intereses cada año con el rédito del r por ciento de interés compuesto anual. En estas condiciones, después del primer año, el valor total corresponde a la suma de la inversión inicial P más el interés Pr (r se utiliza en forma de fracción decimal). De este modo, el total después de un año es:

   $$P + Pr = P(1 + r)$$

   Después del segundo año, la cantidad total es $P(1 + r)$ más el interés ganado por esta cantidad, al cual corresponde a $P(1 + r)r$. Entonces, el total después de dos años es:

   $$P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$$

   De modo parecido, después de tres años, el total es:

   $$P(1 + r)^2 + P(1 + r)^2 r = P(1 + r)^2 (1 + r) = P(1 + r)^3$$

   y, después de t años, la cantidad final A está dada por:

   $$A = P(1 + r)^t$$

   Los periodos para señalar el rédito por el interés compuesto son habitualmente menores de un año. Pueden ser trimestrales (4 veces al año), mensuales o diarios, o de cualquier otro intervalo. En casos así, la tasa de interés para el periodo señalado corresponde al rédito r anual dividido entre el número de los periodos de interés que hay en cada año. Así, si el interés compuesto es trimestral, la tasa de interés para cada periodo corresponde a $r/4$. Ahora, de acuerdo con el razonamiento usado para obtener $A = P(1+r)^t$, la cantidad final A, después de un año (4 periodos redituables), es:

   $$A_1 = P\left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$$

   Si hay n periodos redituables por año, el rédito por cada periodo viene a ser r/n y, después de un año, tenemos:

   $$A_1 = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

De manera semejante, después de *t* años, la cantidad final *A*, está dada por:

$$A_t = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Una inversión de L. 5,000 gana intereses con el rédito anual del 8.4 %, compuesto mensualmente. Conteste lo siguiente:

(a) ¿Qué cantidad se tendrá después de un año?

(b) ¿Qué suma de dinero habrá después de 10 años?

(c) ¿Qué interés se habrá ganado en los 10 años?

Solución:

- Como el rédito anual corresponde a r = 8.4% = 0.084 y el interés compuesto se determina mensualmente, la tasa del interés mensual es r/n = 0.084/12 = 0.007. Se sustituye este valor, con P = 5000 y n = 12, en:

  $$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}$$

  $$A = 5000(1 + 0.007)^{12} = 5000(1.007)^{12} = 5436.55$$

  Para determinar el valor de $(1,007)^{12}$, use una calculadora que tenga la tecla exponencial, generalmente señalada con el símbolo x^y. Primero registre 1.007, oprima la tecla x^y, a continuación registre el 12 para obtener 1.08731 (también es posible usar una tabla con las tasas de interés compuesto).

  Al redondear la cantidad de dinero suprimiendo los centavos, la cantidad que permanece en depósito, después de un año, es L. 5,437.

- Use la fórmula: $A_t = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ donde $P = 5000$, $\frac{r}{n} = 0.007$, $n = 12$, y $t = 10$

  $$A = 5000(1.007)^{12(10)} = 5000(1.007)^{120} = 11547.99$$

  Después de 10 años, la cantidad asciende aproximadamente a L. 11,548.

- Después de 10 años, el interés ganado es:

  11548 - 5000 = 6,548 lempiras

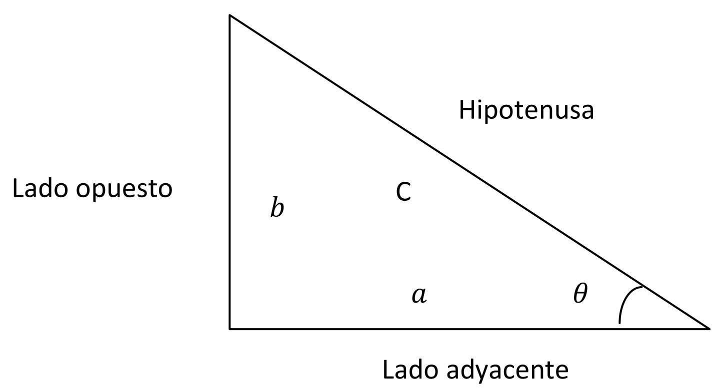
Razones y funciones trigonométricas

Un ángulo es la porción de plano limitada por dos semirrectas con origen en un mismo punto. Las semirrectas se llaman lado inicial y final. Al origen común se le denomina vértice del ángulo. Los ángulos positivos se miden en sentido contrario a las agujas del reloj y los negativos en el mismo sentido.

La trigonometría estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. La palabra trigonometría significa medida del triángulo.

Dado el siguiente triángulo rectángulo:

La razón $\frac{a}{b}$ depende del ángulo θ y es, por lo mismo, una función de él:



Se definen las siguientes razones trigonométricas directas para el ángulo:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

Medidas de un ángulo

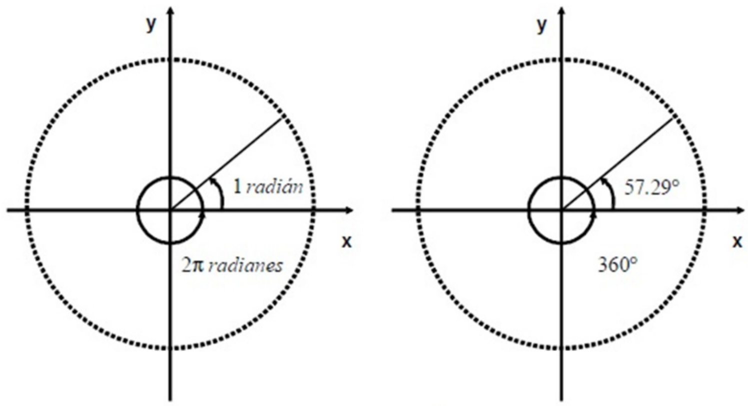
Las unidades de medida de ángulos más conocidas son los grados, minutos y segundos. Este tipo de medidas están basadas en la división en partes iguales de una circunferencia. Las equivalencias son las siguientes:

360° = un giro completo alrededor de una circunferencia

180° = $\frac{1}{2}$ vuelta alrededor de una circunferencia

90° = $\frac{1}{4}$ de vuelta

1° = $\frac{1}{360}$ de vuelta, etc.



360° = 2π *radianes*

También se puede definir otra unidad angular, el radián, que en las aplicaciones físicas es más práctico y directo que trabajar con grados.

La magnitud de un ángulo medido en radianes está dada por la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividido por el valor del radio. El valor de este ángulo es independiente del valor del radio; por ejemplo, al dividir una pizza en diez partes iguales, el ángulo de cada pedazo permanece igual, independiente si la pizza es pequeña, mediana o familiar.

De esta forma, se puede calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia, solo basta con multiplicar el radio por el ángulo en radianes.

Longitud de arco de la circunferencia = (ángulo en radianes)(radio de la circunferencia)

El perímetro de una circunferencia de radio unitario, es decir $r = 1$ es ($2\pi r = 2\pi$), entonces el ángulo de una circunferencia completa, medido en radianes es 2π.

Como además se sabe que este mismo ángulo, medido en grados mide 360°, entonces se puede definir una equivalencia:

un radián$=\dfrac{360°}{2\pi}= 57.29°$

A partir de esta igualdad, se puede determinar que:

Grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	360
Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	2π

Para convertir un ángulo de grados a radianes o viceversa, lo que debe hacerse es una regla de tres, considerando que: 360° = 2π radianes.

<u>Ejemplo 1</u>

Transformar 15° a radianes:

Solución:

360° = 2π radianes

15° = x radianes

Entonces $x=\dfrac{15°\,(2\pi \text{ radianes})}{360°} = \dfrac{\pi}{12}$ radianes

<u>Ejemplo 2</u>

Transformar $\dfrac{2\pi}{3}$ radianes a grados

Solución:

360° = 2π radianes

$x° =\dfrac{2\pi}{3}$ radianes

Entonces $\dfrac{360°\left(\dfrac{2\pi}{3} \text{ radianes}\right)}{2\pi \text{ radianes}} =120°$

Actividad 11

Transformar los siguientes grados a radianes:

1. 30°
2. 15°
3. 270°
4. 360°
5. 90°
6. 45°
7. 680°
8. 48°

Actividad 12

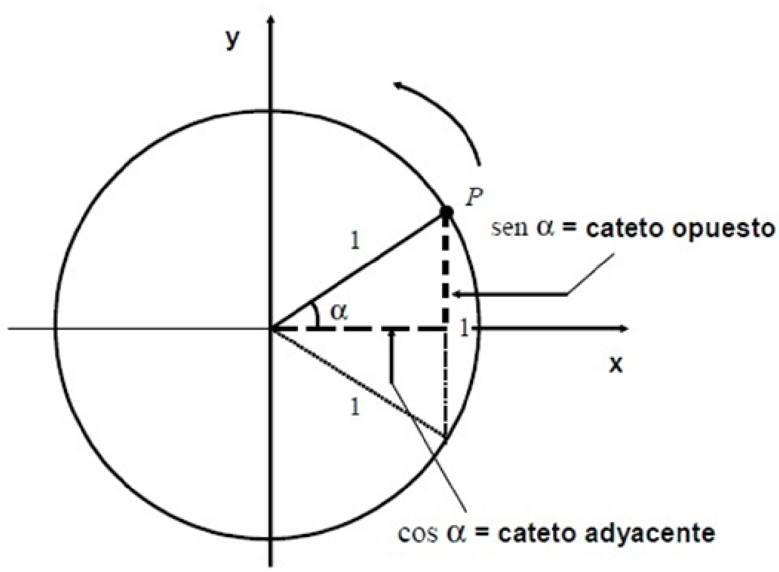
Transformar los siguientes radianes a grados:

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{5\pi}{2}$
3. π
4. $\frac{3\pi}{4}$
5. $\frac{\pi}{3}$
6. 2π
7. $\frac{-8\pi}{10}$
8. $\frac{2\pi}{9}$

Círculo trigonométrico unitario

Se llama así a una circunferencia de radio uno y con el centro en el origen de un sistema coordenado. Se puede considerar que el punto P que se utiliza para calcular las razones trigonométricas es el de intersección de uno de los vértices un triángulo equilátero unitario con el círculo trigonométrico, cuyo centro coincide con otro de los vértices del triángulo. Esta consideración permite determinar el comportamiento de los segmentos en el plano que representan gráficamente las razones seno y coseno, tal como se muestra en la figura 1:

Figura 1.



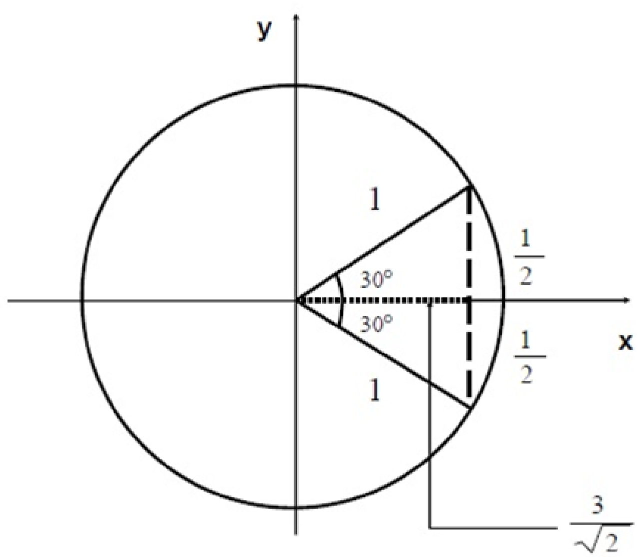
Valores notables de funciones trigonométricas

En la figura 1, al mover el ángulo en la dirección mostrada, los segmentos verticales representan las razones seno y los horizontales las razones coseno. Estos valores dependen de la orientación de los segmentos, por lo que ellos determinan el signo de estas razones.

Además, debido a que la tangente es igual al cociente del seno entre el coseno, que la cotangente, la secante y la cosecante son los recíprocos de la tangente, coseno y seno, respectivamente, con saber la magnitud y signo de estas últimas se pueden obtener los valores de las primeras.

Los valores notables de las funciones trigonométricas se obtienen a partir de sus definiciones considerando los valores de los catetos y de la hipotenusa. Por ejemplo, para calcular los valores para 30° se puede construir la figura 2:

Figura 2.



Teniendo en cuenta que se forma un triángulo equilátero unitario en el triángulo rectángulo, el valor de la hipotenusa es uno, el del cateto opuesto es su mitad y, aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene que el valor del cateto adyacente es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y el valor del cateto opuesto es $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, el valor del seno de 30° es $\frac{1}{2}$ y el valor del coseno de 30° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La tabla 1 resume los valores más notables de las funciones trigonométricas seno y coseno.

Tabla 1.

Función	Grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
	Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π
Sen x		0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	-1	0
Cos x		1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	-1/2	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1	0	1

Concepto de función trigonométrica

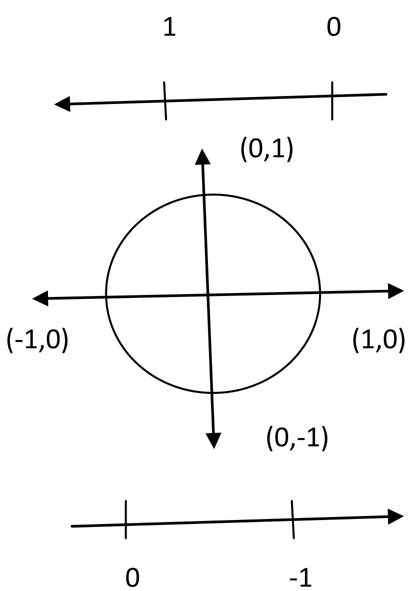
Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes.

Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente, pero en esta unidad solo se estudiarán la función seno y la función coseno.

El estudio de las funciones trigonométricas comienza por la construcción de la función llamada función arrollamiento.

Función arrollamiento

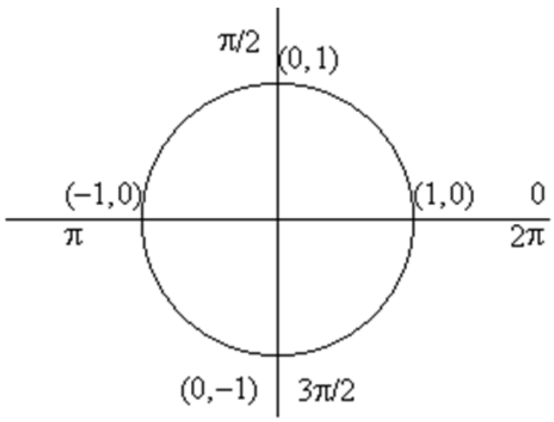
Primero se asocia a cada número real un punto de la recta numérica y se supone la misma escala para el círculo unitario, luego se arrolla la recta numérica alrededor del círculo unitario, utilizando el siguiente esquema:



Gráfica del círculo unitario

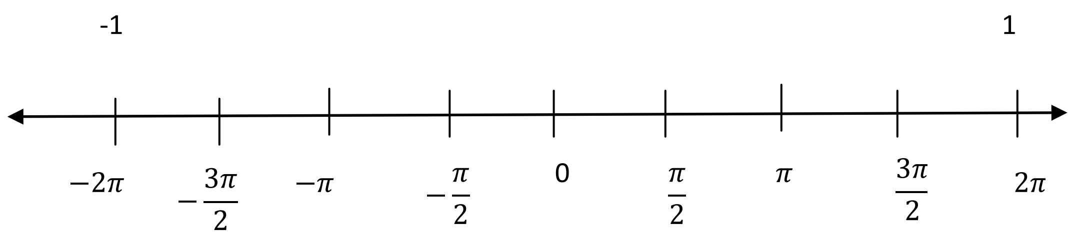
El número 0 de la recta se asocia con el punto (0,1) de la circunferencia, la parte positiva de la recta real se arrolla alrededor de la circunferencia del circulo unitario en el sentido contrario a las agujas del reloj y la parte negativa de la recta se arrolla alrededor de la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj.

Como la longitud C de la circunferencia de radio r es $C=2\pi r$, la longitud de la circunferencia del círculo unitario es 2π. De aquí que, utilizando el esquema de arrollamiento, el punto del círculo unitario que se le asocia el número real $\pi/2$ es (0,1); el punto que se le asocia a π es (-1,0); el que se le asocia a 2π es (1,0) y el asociado a $-\pi$ es (-1,0).



Gráfica del círculo unitario

Por tanto, se puede extender la circunferencia del círculo unitario como una recta con los siguientes valores:



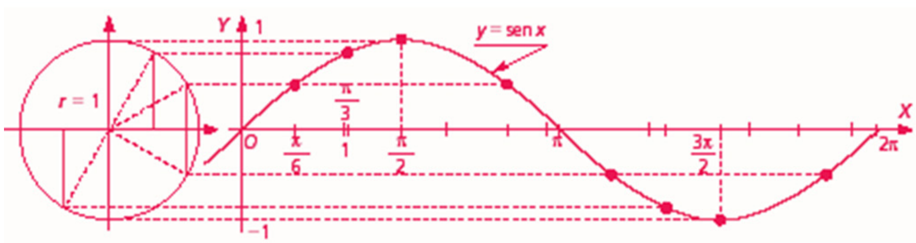
La función seno

Se denomina función seno y se denota por $f(x) = sen\ x$, a la aplicación de la razón trigonométrica seno a una variable independiente x expresada en radianes. La función seno es periódica, acotada y continua, y su dominio de definición es el conjunto de todos los números reales.

A partir del comportamiento del cateto opuesto del círculo trigonométrico unitario, la gráfica de la función seno empieza de cero en 0°, va aumentando paulatinamente hasta llegar a uno en $\frac{\pi}{2}$ (90°). Después va disminuyendo hasta llegar a cero en π (180°). Posteriormente disminuye negativamente hasta llegar a *-1* en $\frac{3\pi}{2}$ (270°). Finalmente, va aumentando hasta regresar a cero en 2π (360°), donde el proceso se repite indefinidamente. Su punto máximo lo alcanza cuando $x=\frac{\pi}{2}$ y su punto mínimo cuando $x=\frac{3\pi}{2}$, tal como se muestra en la tabla y gráfica siguiente:

ángulo en radianes (x)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
seno (y)	0	1	0	1

La siguiente figura muestra su gráfica:



Gráfica de *f(x) = senx*

Análisis de la gráfica:

a. Es creciente en los intervalos $[0,\frac{\pi}{2}]$ y $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$

   Es decreciente en el intervalo $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

b. Dom *f(x)= R*

   Rango *f(x)= [-1,1]*

c. Intersección con el eje X en el origen, en π y en 2π .

   Intersección con el eje Y en el origen.

d. Amplitud: es el valor máximo que alcanza la curva, en este caso es 1.

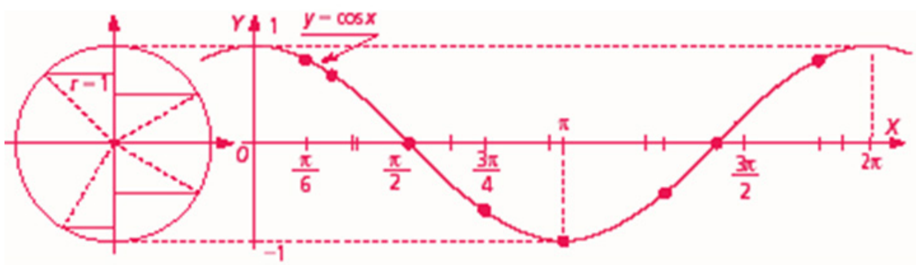
e. Periodo: es la menor zona gráfica o ciclo que comprende el período en este caso es 2π.

La función coseno

La función coseno, que se denota por $f(x) = \cos x$, es la que resulta de aplicar la razón trigonométrica coseno a una variable independiente x expresada en radianes. Esta función es periódica, acotada y continua, y existe para todo el conjunto de los números reales.

De forma similar, el comportamiento del cateto adyacente del círculo trigonométrico unitario, la gráfica de la función coseno empieza en uno en 0°, va disminuyendo paulatinamente hasta llegar a cero en $\frac{\pi}{2}$ (90°). Después sigue disminuyendo hasta llegar a -1 en π (180°). Posteriormente crece hasta llegar a cero en $\frac{3\pi}{2}$ (270°). Finalmente, sigue aumentando hasta regresar a 1 en 2π (360°). Esto se repite indefinidamente. Su punto máximo lo alcanza cuando x=0 y su punto mínimo cuando $x=\pi$ y también cuando $x=\pi$. Como muestra en la tabla y gráfica siguiente:

ángulo en radianes (x)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
seno (y)	1	0	-1	1



Gráfica de $f(x) = \cos x$

Análisis de la gráfica:

a. Es creciente en el intervalo $[\pi, 2\pi]$

   Es decreciente en el intervalo $[0,\pi]$

b. Dom $f(x)= R$

   Rango $f(x)= [-1,1]$

c. Intersección con el eje X en el origen, en $\frac{\pi}{2}$ y en $\frac{3\pi}{2}$.

   Intersección con el eje Y en 1.

d. Amplitud: 1

e. Periodo: 2π

Forma general de las funciones seno y el coseno

La función seno se escribe en su forma general con la siguiente ecuación:

$$f(x)= a\ Sen\ (bx+c)$$

Donde: *a, b y c son números reales*

La función $f(x)=Senx$ estudiada en la sección anterior está escrita en su forma básica, en este caso a, b y c tienen el valor de 1, pero al adquirir cualquier otro valor producen un efecto geométrico en la gráfica de $f(x)=Senx$. Así:

1) La amplitud

Recuerde que la amplitud es el valor máximo que alcanza la curva, en el caso de la función *Senx* era 1, porque $f(x)=a\ Senx$, $a=1$.

Por ejemplo, en la función $f(x)=2\ Senx$ la amplitud es *2*, el efecto geométrico que produce la amplitud *2*, es una dilatación vertical, es decir que se expande hacia arriba y hacia abajo dos unidades, debido a que todas sus coordenadas se multiplican por *2*, o sea que su punto máximo para cualquier valor de x estará en la abscisa $y=2$.

Para determinar la amplitud se encuentra:

$|a|=|2|=2$

Lo que también determina el rango de la función, así: $Rango\ f(x)=[-|a|,|a|]$

Suponga ahora que la función es $f(x)=-2\ Senx$, el efecto que produce la amplitud -2 es además de una dilatación vertical es el de reflexión, es decir, que el punto máximo pasa a ser mínimo y viceversa.

2) Desfase

En la función $f(x)=2\ Senx$, x se denomina argumento y cuando este tiene un valor de *0* la gráfica tiene un desplazamiento de 0 a π y de π a 2π.

En la función $f(x)=aSen(bx+c)$, el argumento es $bx+c$ y el desfase con respecto a la gráfica de $f(x)=2\ Senx$, el argumento se calcula cuando $bx+c=0$, si despeja para x se obtiene $x=-\frac{c}{b}$, este valor resultante determina el desplazamiento horizontal de la gráfica desde el origen a un punto del eje x. Si éste es negativo, el desfase es hacia la izquierda y si es positivo el desfase es hacia la derecha.

Ejemplo

Dada la función $f(x)=2Sen\ (2x+\frac{\pi}{4})$, determine:

a. El período, indicando su inicio y final
b. La amplitud
c. El desfase
d. Punto máximo y mínimo
e. Puntos donde corta el eje x
f. La gráfica
g. El rango

a. Período:

Para calcular el período se utiliza la fórmula: $P=\frac{2\pi}{b}$

Entonces $P=\frac{2\pi}{2}=\pi$

El período de la gráfica $f(x)=Senx$, empieza en 0 y termina en 2π, entonces:

$2x+\frac{\pi}{4}=0$ para determinar el inicio

$2x=-\frac{\pi}{4}$

$x=-\frac{\pi}{8}$ inicio del período

$2x+\frac{\pi}{4}=2\pi$ para determinar el final del período

$2x=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

$x=\frac{7\pi}{8}$ final del período

b. La amplitud:

$|2|=$

c. Desfase:

$2x+\frac{\pi}{4}=0$

$2x=-\frac{\pi}{4}$

$x=-\frac{\pi}{8}$

Desfase: $\frac{\pi}{8}$ unidades hacia la izquierda del origen porque es negativo.

d. Punto máximo y mínimo:

El punto máximo de la gráfica *f(x)=Senx*, está en $\frac{\pi}{2}$ y el mínimo esta en $\frac{3\pi}{2}$, entonces:

Punto máximo:

$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$

$2x = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{8}$

Punto mínimo:

$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

$2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}$

$2x = \frac{5\pi}{4}$

$x = \frac{5\pi}{8}$

e. Puntos donde corta el eje x:

Los puntos que cortan el eje x de la gráfica *f(x)=Senx*, está en *0*, *π y 2π*, entonces:

$2x + \frac{\pi}{4} = 0$

$2x = -\frac{\pi}{4}$

$x = -\frac{\pi}{8}$

$2x + \frac{\pi}{4} = 2\pi$

$2x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

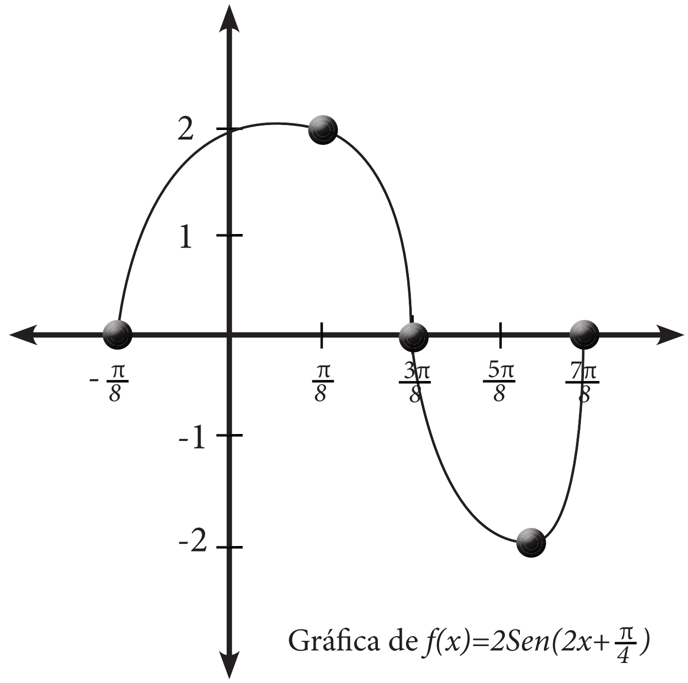
$x = \frac{7\pi}{8}$

$2x + \frac{\pi}{4} = \pi$

$2x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{8}$

f. La gráfica:



Gráfica de $f(x)=2Sen(2x+\frac{\pi}{4})$

g. *Rango f(x)= [-2,2]*

La función coseno se escribe en su forma general con la siguiente ecuación:

$$f(x)= aCos\ (bx+c)$$

Donde: *a, b y c son números reales*

Esta función posee las similares características de la función seno, $|a|$ se denomina amplitud, c es el desfase si $c\neq 0$, $(bx+c)$ es el argumento.

Ejemplo

Dada la función $f(x)=3Cos(x-\frac{\pi}{2})$, determine:

a. El período, indicando su inicio y final
b. La amplitud
c. El desfase
d. Punto máximo y mínimo
e. Puntos donde corta el eje x
f. La gráfica
g. El rango

a. Período:

Para calcular el período se utiliza la fórmula: $P=\frac{2\pi}{b}$

Entonces $P=\frac{2\pi}{1} = 2\pi$

El período de la gráfica $f(x)=Cosx$, empieza en 0 y termina en 2π, entonces:

Se iguala el argumento $x-\frac{\pi}{2}=0$ para determinar el inicio

$x=\frac{\pi}{2}$ es el inicio del período

$x-\frac{\pi}{2}= 2\pi$ para determinar el final del período

$x= 2\pi +\frac{\pi}{2} =\frac{5\pi}{2}$

$x=\frac{5\pi}{2}$ final del período

b. La amplitud:

$|3|=3$

c. Desfase:

$x-\frac{\pi}{2} = 0$

$x =\frac{\pi}{2}$

Desfase: $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha del origen porque es positivo.

d. Punto máximo y mínimo:

El punto máximo de la gráfica $f(x)=Cosx$, está en 0 y 2π y el mínimo está en π, entonces:

Punto máximo:

$x-\frac{\pi}{2} =0$

$x =\frac{\pi}{2}$

$x-\frac{\pi}{2}= 2\pi$

$x = 2\pi +\frac{\pi}{2}$

$x =\frac{5\pi}{2}$

Punto mínimo:

$x -\frac{\pi}{2}= \pi$

$x = \pi +\frac{\pi}{2}$

$x =\frac{3\pi}{2}$

e. Puntos donde corta el eje x:

Los puntos que cortan el eje x de la gráfica *f(x)=Cosx*, está en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ entonces:

$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

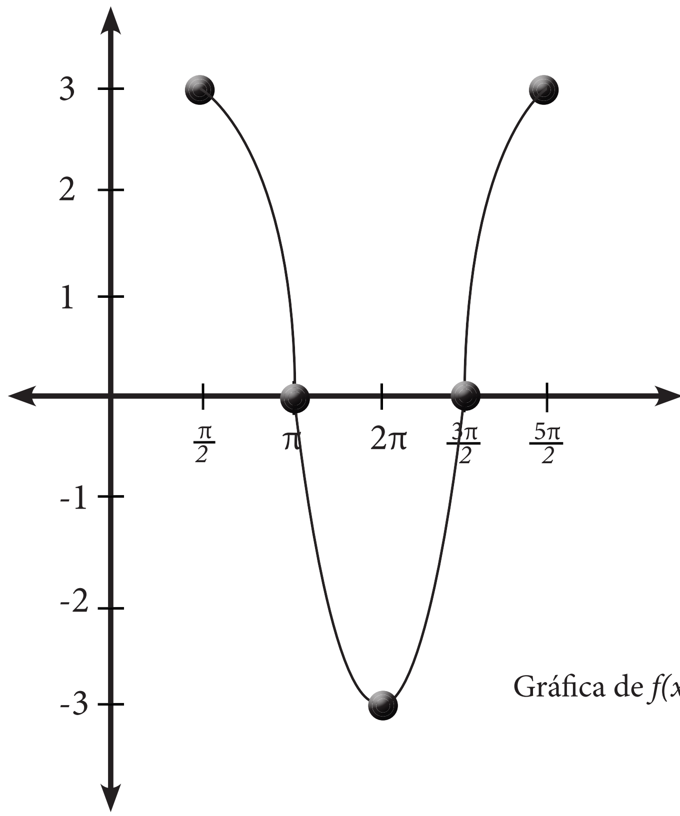
$x = \pi$

$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$

$x = 2\pi$

f. La gráfica:



Gráfica de $f(x)=3Cos(x - \frac{\pi}{2})$

g. *Rango f(x)= [-3,3]*

Actividad 13

Dada las siguientes funciones:

1. $f(x)= -2Cos\ (x)$
2. $f(x)= -Sen\ (x + \pi)$
3. $f(x)= -3Cos\ (x - \frac{\pi}{4})$
4. $f(x)= 2Sen\ (x - \frac{\pi}{6})$

Determine:

a. El período, indicando su inicio y final
b. La amplitud
c. El desfase
d. Punto máximo y mínimo
e. Puntos donde corta el eje x
f. La gráfica
g. El rango

Autoevaluación

Instrucciones: realice en forma clara y ordenada lo que a continuación se le pide:

a. Elabore la gráfica y determine los interceptos I_x, I_y el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x)= 2^x+1$
2. $f(x)= (\frac{1}{3})^x$
3. $f(x)=log_3 x$
4. $f(x) = 5^{-x}$
5. $log_2 x$

b. Exprese los siguientes logaritmos en forma exponencial:

1. $log_2 8 = 3$
2. $log100 = 2$
3. $log_2 \frac{1}{4} = -2$
4. $log_2 128 = 7$
5. $log_{1/28} = -3$

c. Exprese las siguientes potencias en forma logarítmica:

1. $81 = 9^2$
2. $2 = \sqrt[5]{(32)}$
3. $81^{1/2}$
4. $7^{-3} = \frac{1}{343}$
5. $3^x = 14$

d. Use las propiedades para expandir cada expresión:

1. $\log \frac{n^2 a^6}{x^2}$
2. $\log \sqrt[4]{(x^3 y)}$

e. Use las propiedades para escribir cada expresión como un solo logaritmo:

1. $2 \log10 (x) + 4 \log10 (y) - \log10 (c) =$
2. $5 \log m + 2 \log y - \frac{1}{2} \log b$

f. Dada las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{1}{2} Cos(x - \pi)$
2. $f(x) = 4Sen(x + \frac{\pi}{3})$

Determine:

a. El período, indicando su inicio y final
b. La amplitud
c. El desfase
d. Punto máximo y mínimo
e. Puntos donde corta el eje x
f. La gráfica
g. El rango

Actividad metacognitiva

Con base a lo que ha aprendido, responda lo siguiente:

1. ¿Considera que adquirió nuevos aprendizajes al estudiar los temas de esta unidad? ¿Puede mencionar cuáles?

____

____

____

____

2. Ante cualquier función analizada en esta unidad, ¿podría encontrar su gráfica, interceptos en I_x I_y, dominio y rango de la función?

3. ¿Qué contenidos, de los estudiados, considera importantes para su aplicación en su vida habitual? ¿Por qué?

Glosario

Dominio: es el conjunto de valores para los que una determinada función matemática está definida.

Función continua: es aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.

Función creciente: una función es creciente si para cualquier par de números del dominio x_1, x_2 de cualquier intervalo de la función, se cumple: $x_1 < x_2$ *entonces* $f(x_1) < f(x_2)$

Función decreciente: una función es creciente si para cualquier par de números del dominio x_1, x_2 de cualquier intervalo de la función, se cumple: $x_1 > x_2$ *entonces* $f(x_1) > f(x_2)$

Rango: es la imagen de una función al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, es decir, es el conjunto de valores que puede alcanzar la función.

Bibliografía

Allen R., Ángel. (1990). *Intermediate Algebra for College students*. New Jersey: Prentice Hall.

Goodman, Arthur y Hirsch, Lewis. (1996). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Editorial Person Educación.

Londoño, Nelson y Hernando, Bedoya. (1991). *Geometría analítica y trigonometría*. Colombia: Grupo Editorial Norma Educativa.

O´Daffer, Phares. (1998). *Introducción al álgebra*. México: Editorial Addison Wesley.

Ortiz Campos. (1992). *Matemáticas 1, álgebra*. México: Editorial Publicaciones Cultural.

Ortiz Campos. (1992). *Matemáticas 2, Geometría y Trigonometría*. México: Editorial Publicaciones Cultural.

Reyes Núñez, Horacio y León Tejeda, Denia. (2006). *Matemática 10° grado*. Tegucigalpa: Equipo Editorial.

Sullivan, Michael. (1997). *Trigonometría y geometría analítica*. México: Editorial Prentice Hall.

Smith, Estanley. (1998). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. México: Editorial Prentice Hall.