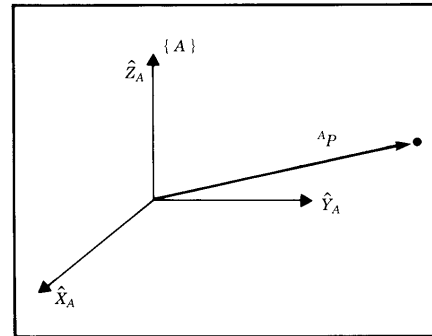


RS02 VORWÄRTSKINEMATIK

2.1 Elementare räumliche Beschreibungsformen

2.1.1 Position

- *Position* ist das Attribut eines Punktes im Raum, wird durch einen *Positionsvektor* repräsentiert und relativ zu einem Referenzkoordinatensystem definiert
- koordinatenfreier Positionsvektor: \vec{p}
- orthogonale Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ bzw. $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (siehe [Craig])
- Koordinatensystem (orthogonal, kartesisch) $\{A\}$ definiert durch Einheitsvektoren $\hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{z}_A$
- Vektor \vec{p} dargestellt im Koordinatensystem $\{A\}$: ${}^A(\vec{p}) = p_x \hat{x}_A + p_y \hat{y}_A + p_z \hat{z}_A$
mit p_x, p_y, p_z als Projektionen von \vec{p} auf die Einheitsvektoren $\hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{z}_A$
- Vektor \vec{p} dargestellt im Koordinatensystem $\{A\}$: ${}^A\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ bzw. ${}^A\underline{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ (Tafel, Hand)

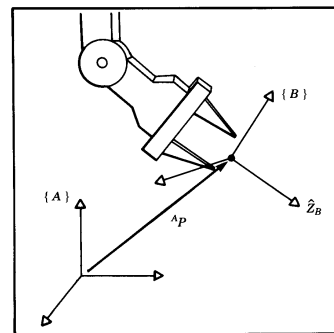


[Craig]

Bild 2-1 Positionsvektor

2.1.2 Orientierung – Rotationsmatrix

- *Orientierung* ist ein Attribut eines (starren) Körpers im Raum
- Die Beschreibung der Orientierung kann durch eine *Rotationsmatrix* erfolgen (3×3 Matrix, 9 Parameter), welche die Orientierung des Körpers relativ zu einem Referenzkoordinatensystem definiert
- Referenzkoordinatensystem $\{A\}$
- Körperfestes Koordinatensystem $\{B\}$



[Craig]

Bild 2-2 Orientierung eines Körpers

- die Rotationsmatrix ${}^A_B\mathbf{R}$ beschreibt die Orientierung von {B} relativ zu {A}
Anmerkung: ${}^A_B\mathbf{R}$ stellt die Koordinatentransformation von {B} zu {A} dar!
- die Spalten von ${}^A_B\mathbf{R}$ enthalten die Einheitsvektoren von {B} dargestellt in Koordinaten von {A}

$${}^A_B\mathbf{R} = ({}^A\hat{x}_B \quad {}^A\hat{y}_B \quad {}^A\hat{z}_B)$$

- die Zeilen von ${}^A_B\mathbf{R}$ enthalten die Einheitsvektoren von {A} dargestellt in Koordinaten von {B}

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{pmatrix} ({}^B\hat{x}_A)^T \\ ({}^B\hat{y}_A)^T \\ ({}^B\hat{z}_A)^T \end{pmatrix}$$

- die Elemente von ${}^A_B\mathbf{R}$ sind gleich dem Kosinus der von den Richtungseinheitsvektoren eingeschlossenen Winkel \rightarrow *Richtungskosinusmatrix*

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{z}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \angle(\hat{x}_B, \hat{x}_A) & \cos \angle(\hat{y}_B, \hat{x}_A) & \cos \angle(\hat{z}_B, \hat{x}_A) \\ \cos \angle(\hat{x}_B, \hat{y}_A) & \cos \angle(\hat{y}_B, \hat{y}_A) & \cos \angle(\hat{z}_B, \hat{y}_A) \\ \cos \angle(\hat{x}_B, \hat{z}_A) & \cos \angle(\hat{y}_B, \hat{z}_A) & \cos \angle(\hat{z}_B, \hat{z}_A) \end{pmatrix}$$

\rightarrow alle Richtungseinheitsvektoren müssen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt werden, d. h. beide in {A} oder beide in {B}

- Besondere Eigenschaften der Richtungskosinusmatrix:

$$\det({}^A_B\mathbf{R}) = 1$$

$${}^A_B\mathbf{R}^{-1} = {}^A_B\mathbf{R}^T = {}^B_A\mathbf{R}$$

2.1.3 Elementare Rotationen um orthogonale Koordinatenachsen

- Rotation um x-Achse: ${}^A_B\mathbf{R}(\hat{x}, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix}$ mit: $s\alpha \triangleq \sin \alpha$
 $c\alpha \triangleq \cos \alpha$
- Rotation um y-Achse: ${}^A_B\mathbf{R}(\hat{y}, \beta) = \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix}$
- Rotation um z-Achse: ${}^A_B\mathbf{R}(\hat{z}, \gamma) = \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.1.4 Konsekutive Rotationen

- Konsekutive Rotation um *raumfeste Achsen*:

$$\{A\} \rightarrow \{B\} \rightarrow \{C\}: \quad {}^A_C\mathbf{R} = {}^B_C\mathbf{R} \cdot {}^A_B\mathbf{R}$$

- Konsekutive Rotation um *konsekutive* (d. h. bereits gedrehte) *Achsen*:

$$\{A\} \rightarrow \{B\} \rightarrow \{C\}: \quad {}^A_C\mathbf{R} = {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B_C\mathbf{R}$$

===== SATZ 2-1:

Eine konsekutive Drehung um raumfeste orthogonale Koordinatenachsen liefert dieselbe Rotationsmatrix wie eine konsekutive Drehung um konsekutive Koordinatenachsen in *umgekehrter Reihenfolge*.

(→ gilt dementsprechend auch für Drehsequenzen)

ALGORITHMUS: KOMPOSITIONSREGEL FÜR KONSEKUTIVE ROTATIONEN

Gegeben: - {A} raumfest
- {B}, ${}^A_B\mathbf{R}$

Fall 1: {C} wird erzeugt durch eine Drehung {B} → {C} mit **R** relativ zu {B} → ${}^A_C\mathbf{R} = {}^A_B\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$

Fall 2: {C} wird erzeugt durch eine Drehung {B} → {C} mit **R** relativ zu {A} → ${}^A_C\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot {}^A_B\mathbf{R}$

===== BEISPIEL 2-1: RAUMFESTE Y-Z - DREHUNG

- Drehung 1 {A} → {B}: drehe {A} um Winkel β um raumfeste \hat{Y}_A -Achse
- Drehung 2 {B} → {C}: drehe {B} um Winkel γ um raumfeste \hat{Z}_A -Achse

$${}^A_C\mathbf{R}_{\text{raumfest}} = {}^B_C\mathbf{R}(\hat{Z}, \gamma) \cdot {}^A_B\mathbf{R}(\hat{Y}, \beta) = \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma c\beta & -s\gamma & c\gamma s\beta \\ s\gamma c\beta & c\gamma & s\gamma s\beta \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix}$$

===== BEISPIEL 2-2: KONSEKUTIVE Y-Z - DREHUNG

- Drehung 1 {A} → {B}: drehe {A} um Winkel β um aktuelle \hat{Y}_A -Achse
- Drehung 2 {B} → {C}: drehe {B} um Winkel γ um aktuelle \hat{Z}_B -Achse

$${}^A_C\mathbf{R}_{\text{konsekutiv}} = {}^A_B\mathbf{R}(\hat{Y}, \beta) \cdot {}^B_C\mathbf{R}(\hat{Z}, \gamma) = \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma c\beta & -s\gamma c\beta & s\beta \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ -c\gamma s\beta & s\gamma s\beta & c\beta \end{pmatrix}$$

→ **Beachte:** ${}^A_C\mathbf{R}_{\text{konsekutiv}}^T = {}^B_C\mathbf{R}(\hat{Z}, \gamma)^T \cdot {}^A_B\mathbf{R}(\hat{Y}, \beta)^T \neq {}^A_C\mathbf{R}_{\text{raumfest}}$

2.1.5 Rotation um konsekutive Achsen – EULER-Winkel

- Beschreibung der Orientierung durch *drei Winkeldrehungen* um *konsekutive* Achsen und deren *Drehsequenz* (3 Parameter + Drehsequenz)
- Achtung:** Die resultierende Rotationsmatrix ist abhängig von der Drehsequenz!

===== BEISPIEL 2-3: Z-Y-X EULER-DREHUNG

- Drehsequenz: $\gamma (\mapsto \hat{Z}_A) - \beta (\mapsto \hat{Y}_{B'}) - \alpha (\mapsto \hat{X}_{B''})$ (siehe Bild 2-3)

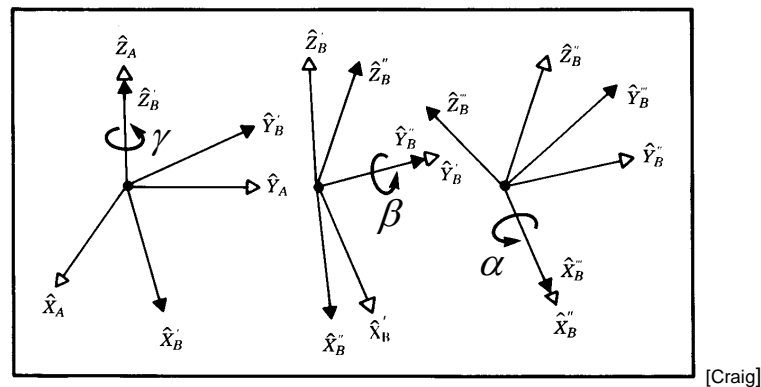


Bild 2-3 Z-Y-X EULER-Drehsequenz

- Rotationsmatrix: → Beachte die Reihenfolge der Matrixmultiplikationen!

$${}^A_B \mathbf{R}(\gamma, \beta, \alpha) = \mathbf{R}({}^A \hat{Z}_A, \gamma) \cdot \mathbf{R}({}^{B'} \hat{Y}_{B'}, \beta) \cdot \mathbf{R}({}^{B''} \hat{X}_{B''}, \alpha)$$

$${}^A_B \mathbf{R}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix}$$

$${}^A_B \mathbf{R}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{pmatrix} c\gamma c\beta & c\gamma s\beta s\alpha - s\gamma c\alpha & c\gamma s\beta c\alpha + s\gamma s\alpha \\ s\gamma c\beta & s\gamma s\beta s\alpha + c\gamma c\alpha & s\gamma s\beta c\alpha - c\gamma s\alpha \\ -s\beta & c\beta s\alpha & c\beta c\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

- Inverses Problem: Berechnung der Drehwinkel aus Rotationsmatrix

$$\alpha = \text{atan2}(r_{32}, r_{33})$$

$$\beta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\gamma = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

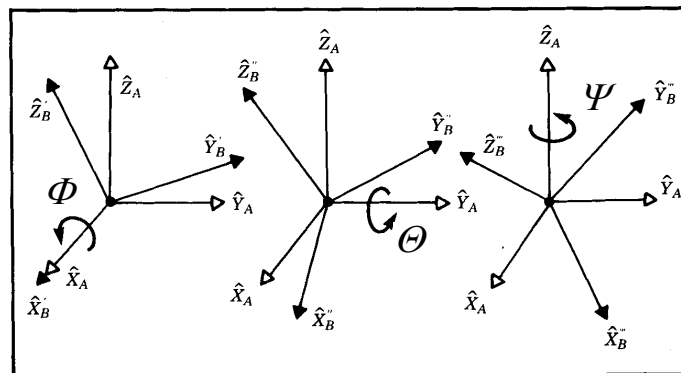
- Beachte:** Singularität bei $\beta = \pm 90^\circ$! ($r_{11} = r_{21} = r_{32} = r_{33} = 0$)

2.1.6 Rotation um raumfeste Achsen - Roll-Pitch-Yaw Winkel

- Beschreibung der Orientierung durch *drei Winkeldrehungen* um *raumfeste* Achsen und deren *Drehsequenz* (3 Parameter + Drehsequenz)
- *Roll* (engl.) = *rollen* = Drehung um x-Achse $\rightarrow \Phi$
- *Pitch* (engl.) = *nicken* = Drehung um y-Achse $\rightarrow \theta$
- *Yaw* (engl.) = *gieren* = Drehung um z-Achse $\rightarrow \Psi$
- **Achtung:** Die resultierende Rotationsmatrix ist abhängig von der Drehsequenz!

===== BEISPIEL 2-4: ROLL(X)-PITCH(Y)-YAW(Z) DREHUNG

- Drehsequenz: $\Phi (\mapsto \hat{X}_A) - \theta (\mapsto \hat{Y}_A) - \Psi (\mapsto \hat{Z}_A)$ (siehe Bild 2-4)



[Craig]

Bild 2-4 Roll(X)-Pitch(Y)-Yaw(Z) - Drehsequenz

- Rotationsmatrix: \rightarrow Beachte die Reihenfolge der Matrixmultiplikationen!

$${}^A_B \mathbf{R}(\Phi, \theta, \Psi) = \mathbf{R}({}^A \hat{Z}_A, \Psi) \cdot \mathbf{R}({}^A \hat{Y}_A, \theta) \cdot \mathbf{R}({}^A \hat{X}_A, \Phi)$$

$${}^A_B \mathbf{R}(\Phi, \theta, \Psi) = \begin{pmatrix} c\Psi & -s\Psi & 0 \\ s\Psi & c\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\Phi & -s\Phi \\ 0 & s\Phi & c\Phi \end{pmatrix}$$

$${}^A_B \mathbf{R}(\Phi, \theta, \Psi) = \begin{pmatrix} c\Psi c\theta & c\Psi s\theta s\Phi - s\Psi c\Phi & c\Psi s\theta c\Phi + s\Psi s\Phi \\ s\Psi c\theta & s\Psi s\theta s\Phi + c\Psi c\Phi & s\Psi s\theta c\Phi - c\Psi s\Phi \\ -s\theta & c\theta s\Phi & c\theta c\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Inverses Problem: Berechnung der Drehwinkel aus Rotationsmatrix

$$\Phi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33})$$

$$\theta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\Psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

- Beachte Singularität bei $\beta = \pm 90^\circ!$ ($r_{11} = r_{21} = r_{32} = r_{33} = 0$)

===== **HINWEIS:** atan2-Funktion

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \text{sgn}(y) \cdot \frac{\pi}{2} & x = 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0, y = 0 \\ \text{sgn}(y) \cdot \left(\arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right) + \frac{\pi}{2}\right) & x < 0, y \neq 0 \\ \pi & x < 0, y = 0 \end{cases}$$

- Die Funktion atan2 liefert Werte zwischen $-\pi$ und π , also in 4 Quadranten.
- Sie ist in vielen höheren Programmiersprachen bereits vorhanden.

2.1.7 Rotation um beliebige Raumachse – EULER-Parameter

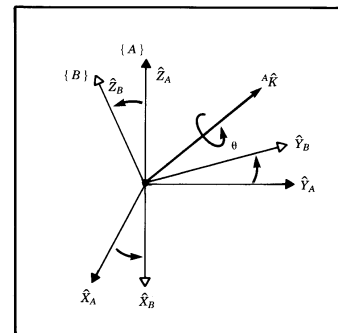
===== **SATZ 2-2: (EULER)**

Jede endliche räumliche Drehung lässt sich durch eine endliche Drehung um eine feste Raumachse \hat{K} mit einem endlichen Winkel θ beschreiben (4 Parameter, siehe Bild 2-5).

- Endliche Drehung beschrieben durch EULER-Parameter:
→ Drehachse charakterisiert durch ihren Richtungsvektor

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, \text{ mit } |\hat{K}| = 1$$

→ und den Drehwinkel θ



[Craig]

Bild 2-5 Euler-Parameter

- Rotationsmatrix:

$${}^A_B\mathbf{R}(\hat{K}, \theta) = \begin{pmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\text{mit: } v\theta = 1 - c\theta$$

- Inverses Problem: Berechnung der Drehwinkel aus Rotationsmatrix

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

$${}^A\hat{K} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} = -{}^B\hat{K} \quad (2.2)$$

===== **HINWEIS: Euler-Parameter**

In der Fachliteratur wird teilweise in Analogie zur Inertialen Winkelgeschwindigkeit nur die Eulerachse \mathbf{k} als Orientierungsparameter angegeben, wobei $|\mathbf{k}| = \theta$.

===== **BEISPIEL 2-5: EULER-PARAMETER**

Das Koordinatensystem $\{B\}$ wird gegenüber $\{A\}$ um die Achse ${}^A\hat{\mathbf{K}} = (0.707 \quad 0.707 \quad 0)^T$ mit dem Winkel $\theta = 30^\circ$ verdreht. Beschreiben Sie die Orientierung von $\{B\}$ gegenüber $\{A\}$.

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 \end{pmatrix}$$

2.1.8 Koordinatenrahmen – Frame

- *Rahmen* bzw. *Frame* (engl.) ist die allgemeine Beschreibung eines Koordinatensystems im Raum. Er wird durch die Position seines Koordinatenursprungs (*Positionsvektor*) und seine Orientierung (*Rotationsmatrix*) repräsentiert und relativ zu einem Referenzkoordinatensystem definiert.

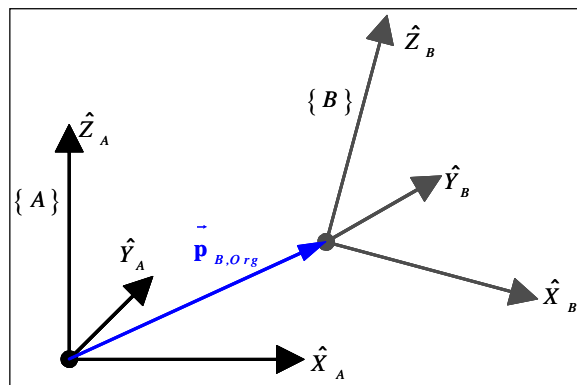


Bild 2-6 Mehrere Koordinatenrahmen

- Rahmen $\{B\} := \{{}^A_B\mathbf{R}, {}^A\mathbf{p}_{B,Org}\}$ mit:
 - ${}^A_B\mathbf{R}$ Rotationsmatrix von $\{B\}$ relativ zu $\{A\}$
 - ${}^A\mathbf{p}_{B,Org}$ Positionsvektor vom Koordinatenursprung $\{A\}$ zum Koordinatenursprung $\{B\}$ ausgedrückt in $\{A\}$ -Koordinaten
- Graphische Repräsentation: die Richtung des Positionsvektors $\vec{p}_{B,Org}$ gibt an, dass $\{B\}$ relativ zu $\{A\}$ bekannt ist und nicht umgekehrt (siehe auch Bild 2-6).

2.1.9 Translationsabbildung – Koordinatentransformation zwischen verschobenen Koordinatensystemen

- Darstellung eines Punktes (Positionsvektor) in unterschiedlichen Koordinatensystemen, mit paralleler Orientierung aber unterschiedlichem Koordinatenursprung.

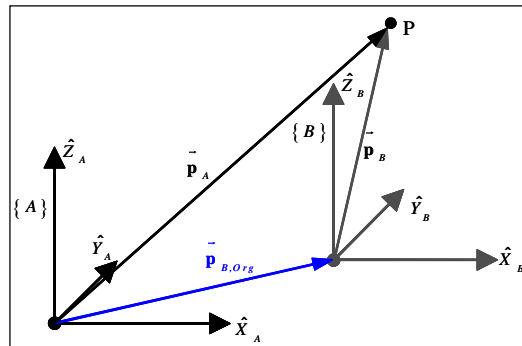


Bild 2-7 reine Translationsabbildung

- ${}^A\mathbf{p}_A = {}^A\mathbf{p}_B + {}^A\mathbf{p}_{B,Org}$
- Beachte:** Der Punkt P bleibt unverändert, lediglich die Koordinatendarstellung ändert sich.

2.1.10 Rotationsabbildung – Koordinatentransformation bei gedrehten Koordinatensystemen

- Darstellung eines Punktes (Positionsvektors) in unterschiedlichen Koordinatensystemen mit unterschiedlicher Orientierung, aber identischem Koordinatenursprung.

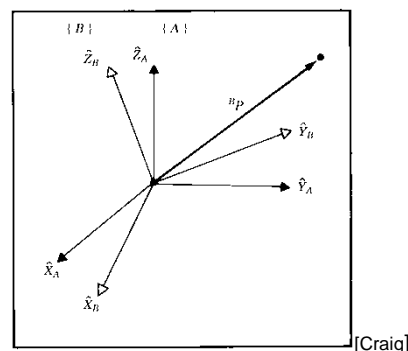


Bild 2-8 Rotationsabbildung [Craig]

- ${}^B\mathbf{p} = {}^B_A\mathbf{R} \cdot {}^A\mathbf{p}$
d. h. der in {A}-Koordinaten bekannte Positionsvektor \vec{p} wird in {B}-Koordinaten ausgedrückt
- ${}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p}$
d. h. der in {B}-Koordinaten bekannte Positionsvektor \vec{p} wird in {A}-Koordinaten ausgedrückt
- Beachte:** Der Punkt P bleibt unverändert, lediglich die Koordinatendarstellung ändert sich.

===== **BEISPIEL 2-6: ROTATIONSABBILDUNG**

Das Koordinatensystem {B} ist gegenüber {A} um einen Winkel von 30° bzgl. der Achse \hat{Z}_A verdreht.

Gegeben: ${}^A\mathbf{p} = (0 \quad 2 \quad 0)^T$

Gesucht: ${}^B\mathbf{p}$

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^B_A\mathbf{R} = {}^A_B\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.500 & 0 \\ -0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^B\mathbf{p} = {}^B_A\mathbf{R} \cdot {}^A\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.732 \\ 0 \end{pmatrix}$$

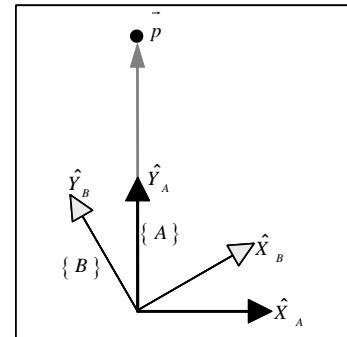


Bild 2-9 {B} ist gegenüber {A} um 30° verdreht

→ vergleiche mit Beispiel 2-8!

2.1.11 Allgemeine Rahmenabbildung – Kombinierte Translation und Rotation

- Darstellung eines Punktes (Positionsvektor) in unterschiedlichen Koordinatensystemen, mit unterschiedlicher Orientierung und unterschiedlichem Koordinatenursprung.

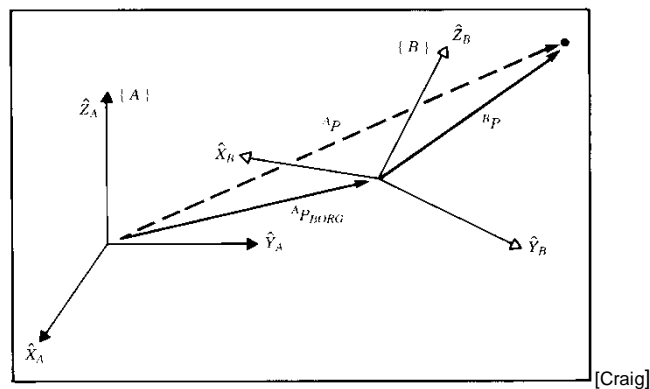


Bild 2-10 Allgemeine Rahmenabbildung

- ${}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{B,Org}$

2.2 Homogene Transformationen

2.2.1 Allgemeine Homogene Transformation für Translation und Rotation

- Kompakte Darstellung einer allgemeinen Rahmenabbildung (kombinierte Translation + Rotation) in Form einer gewöhnlichen Matrix-Vektor-Multiplikation:

$${}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{B,Org} \equiv \left(\begin{pmatrix} {}^A\mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{B,Org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} {}^B\mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- Homogene Koordinaten:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Homogene Transformationsmatrix:

$${}^A_B\mathbf{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{B,Org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \triangleq \left(\begin{array}{c|c} \text{Rotation}_{3 \times 3} & \text{Translation}_{3 \times 1} \\ \hline \text{Perspektive}_{1 \times 3} & \text{Skalierung}_{1 \times 1} \end{array} \right)$$

- Homogene Transformation:

$${}^A\tilde{\mathbf{p}} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B\tilde{\mathbf{p}}$$

- Eigenschaften der Homogene Transformationsmatrix:

$${}^B_A\mathbf{T} = {}^A_B\mathbf{T}^{-1}$$

$${}^A_B\mathbf{T}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} {}^A_B\mathbf{R}^T & -{}^A_B\mathbf{R}^T \cdot {}^A\mathbf{p}_{B,Org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{T}^{-1} \neq \mathbf{T}^T \quad (!!!)$$

===== **BEISPIEL 2-7: KOMBINIerte TRANSLATIONS-ROTATIONS-ABBILDUNG**

Koordinatensystem {B} ist gegenüber {A} um einen Winkel von 30° bzgl. der Achse \hat{Z}_A verdreht sowie um 10 Einheiten entlang \hat{X}_A und um 5 Einheiten entlang \hat{Y}_A verschoben.

Beachte: $\hat{X}_A, \hat{Y}_A, \hat{Z}_A$ sind raumfeste Achsen!

Gegeben: ${}^A\mathbf{p} = (3 \quad 7 \quad 0)^T$

Gesucht: ${}^B\mathbf{p}$

$${}^A\mathbf{T}_B = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 & 10 \\ 0.500 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

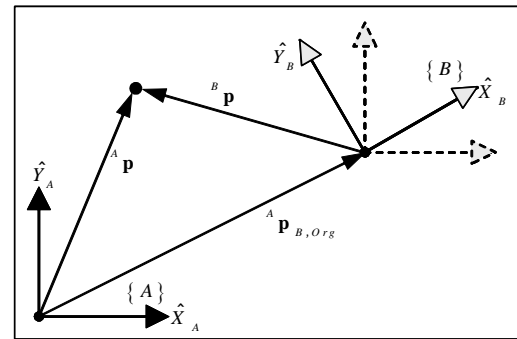


Bild 2-11 {B} ist gegenüber {A} verdreht und verschoben

$${}^B\mathbf{T}_A = {}^A\mathbf{T}_B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} {}^A\mathbf{R}_B^T & -{}^A\mathbf{R}_B^T \cdot {}^A\mathbf{p}_{B,Org} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.500 & 0 & -11.16 \\ -0.500 & 0.866 & 0 & 0.67 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^B\tilde{\mathbf{p}} = {}^B\mathbf{T}_A \cdot {}^A\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -5.06 \\ 5.23 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } {}^B\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -5.06 \\ 5.23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ vergleiche mit Beispiel 2-9!

2.2.2 Translationsoperator

- Translationsoperation:
 - beschreibt die Verschiebung eines Raumpunktes um eine endliche Strecke entlang einer vorgegebenen Vektorrichtung, d. h. Verschiebung um einen Translationsvektor.
 - Da ein Raumpunkt durch einen Positionsvektor dargestellt wird, bedeutet eine Translationsoperation allgemein die Anwendung eines *Translationsoperators* auf einen Vektor.
 - Alle Vektoren werden immer im gleichen Koordinatensystem bzw. -rahmen beschrieben.

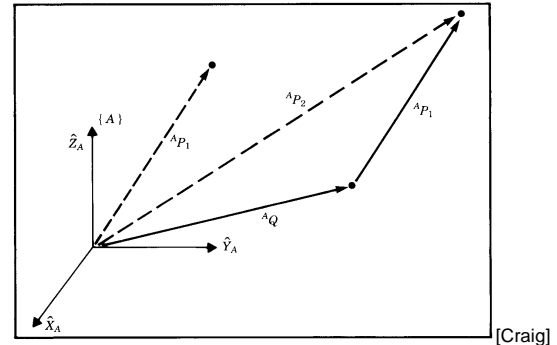


Bild 2-12 Translationsoperator [Craig]

- Translationsvektor:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} |\mathbf{r}| = \hat{\mathbf{r}} |\mathbf{r}| = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

- Translationsoperator:

$$\text{Trans}(\hat{\mathbf{r}}, |\mathbf{r}|)$$

- Translationsoperation:

$${}^A \mathbf{p}_2 = {}^A \mathbf{p}_1 + \mathbf{r} := \text{Trans}(\hat{\mathbf{r}}, |\mathbf{r}|) {}^A \mathbf{p}_1$$

- Translationsoperator für homogene Koordinaten:

$$\text{Trans}(\hat{\mathbf{r}}, |\mathbf{r}|) = \mathbf{T}_{\text{Trans}}$$

- Translationsoperation in homogenen Koordinaten:

$${}^A \tilde{\mathbf{p}}_2 = {}^A \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{r}} := \text{Trans}(\hat{\mathbf{r}}, |\mathbf{r}|) {}^A \tilde{\mathbf{p}}_1$$

- Homogene Translationsmatrix:

$$\mathbf{T}_{\text{Trans}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & r_x \\ 0 & 1 & 0 & r_y \\ 0 & 0 & 1 & r_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Spezialfall: Translation entlang einer Koordinatenhauptachse:

$$\text{Trans}(\hat{x}, a) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{Trans}(\hat{y}, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{Trans}(\hat{z}, c) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2.2.3 Rotationsoperator

- Rotationsoperation:
 - beschreibt eine endliche Drehung eines Vektors um eine Raumachse
 - Die Rotationsoperation ist allgemein die Anwendung eines *Rotationsoperators* auf einen Vektor
 - Alle Vektoren werden immer im gleichen Koordinatensystem (-rahmen) beschrieben
- Endliche Drehung beschrieben durch Euler-Parameter:
 - Drehachse charakterisiert durch ihren Richtungsvektor \hat{K}
 - Drehwinkel θ

- Rotationsoperator:

$$\text{Rot}(\hat{K}, \theta)$$

- Rotationsoperation:

$${}^A\mathbf{p}_2 = \mathbf{R}(\hat{K}, \theta) \cdot {}^A\mathbf{p}_1 := \text{Rot}(\hat{K}, \theta) {}^A\mathbf{p}_1$$

- Rotationsoperator für homogene Koordinaten:

$$\text{Rot}(\hat{K}, \theta) = \mathbf{T}_{\text{Rot}}$$

- Rotationsoperation in homogenen Koordinaten:

$${}^A\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{T}_{\text{Rot}} \cdot {}^A\tilde{\mathbf{p}}_1 := \text{Rot}(\hat{K}, \theta) {}^A\tilde{\mathbf{p}}_1$$

- Homogene Rotationsmatrix:

$$\mathbf{T}_{\text{Rot}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}(\hat{K}, \theta) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Spezialfall: Rotation um eine Koordinatenhauptachse:

$$\text{Rot}(\hat{X}, \alpha) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \text{Rot}(\hat{Y}, \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$\text{Rot}(\hat{Z}, \gamma) = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

===== **BEISPIEL 2-8: ROTATIONSOPERATION**

Der Vektor ${}^A\mathbf{p}_1$ wird um die Achse \hat{Z} um einen Winkel von 30° gedreht.

Gegeben: ${}^A\mathbf{p}_1 = (0 \quad 2 \quad 0)^T$

Gesucht: ${}^A\mathbf{p}_2$

$$\text{Rot}(\hat{Z}, 30^\circ) = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

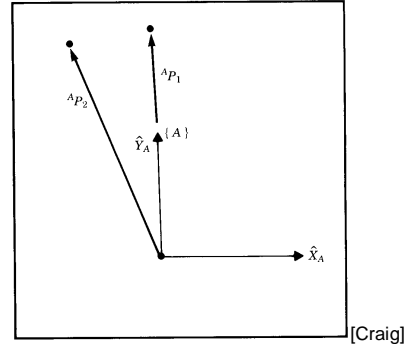


Bild 2-13 Vektor ${}^A\mathbf{p}_1$ um 30° gedreht [Craig]

$${}^A\tilde{\mathbf{p}}_2 = \text{Rot}(\hat{Z}, 30^\circ) \cdot {}^A\tilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} -1.00 \\ 1.73 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } {}^A\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1.00 \\ 1.73 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ vergleiche mit Beispiel 2-6!

===== **BEISPIEL 2-9: TRANSLATIONS- UND ROTATIONSOPERATION**

Der Vektor ${}^A\mathbf{p}_1$ wird um die Achse \hat{Z}_A um einen Winkel von 30° gedreht sowie anschließend um 10 Einheiten entlang \hat{X}_A und 5 Einheiten entlang \hat{Y}_A verschoben.

Gegeben: ${}^A\mathbf{p}_1 = (3 \quad 7 \quad 0)^T$

Gesucht: ${}^A\mathbf{p}_2$

$$\mathbf{T} = \text{Trans}(\hat{Y}_A, 5) \cdot \text{Trans}(\hat{X}_A, 10) \cdot \text{Rot}(\hat{Z}_A, 30^\circ)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 & 10 \\ 0.500 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

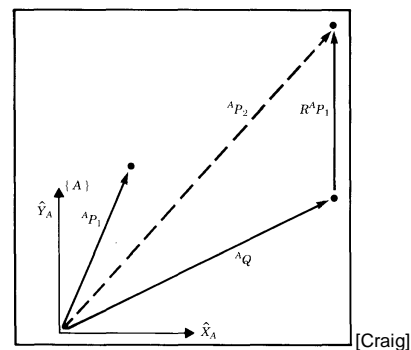


Bild 2-14 Vektor ${}^A\mathbf{p}_1$ gedreht und anschließend verschoben [Craig]

$${}^A\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{T} \cdot {}^A\tilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 9.10 \\ 12.6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } {}^A\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 9.10 \\ 12.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ vergleiche mit Beispiel 2-7!

2.2.4 Konsekutive Transformationen

- Aggregation einer allgemeinen Rahmenabbildung (kombinierte Translation + Rotation) aus aufeinanderfolgenden Rahmenabbildungen
- ${}^A\tilde{\mathbf{p}} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B\tilde{\mathbf{p}}$, d. h. $\{B\}$ ist bekannt relativ zu $\{A\}$
- ${}^B\tilde{\mathbf{p}} = {}^B_C\mathbf{T} \cdot {}^C\tilde{\mathbf{p}}$, d. h. $\{C\}$ ist bekannt relativ zu $\{B\}$
- ${}^A\tilde{\mathbf{p}} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B\tilde{\mathbf{p}} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B_C\mathbf{T} \cdot {}^C\tilde{\mathbf{p}} = {}^A_C\mathbf{T} \cdot {}^C\tilde{\mathbf{p}}$, d.h. $\{C\}$ ist damit auch bekannt relativ zu $\{A\}$
- ${}^A_C\mathbf{T} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B_C\mathbf{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B_C\mathbf{R} & {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B_C\mathbf{p}_{C,Org} + {}^A\mathbf{p}_{B,Org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

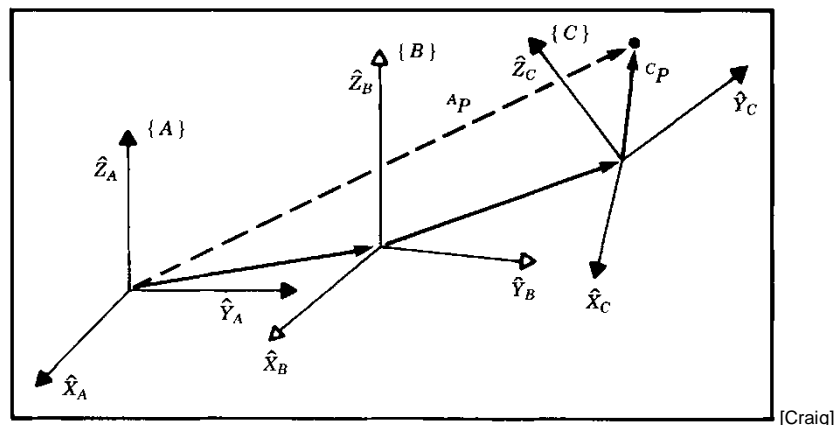


Bild 2-15 Konsekutive Transformationen

- Rechenregeln

$${}^A_C\mathbf{T} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B_C\mathbf{T}$$

$${}^A_B\mathbf{T} = {}^A_C\mathbf{T} \cdot {}^B_C\mathbf{T}^{-1}$$

$${}^B_C\mathbf{T} = {}^A_C\mathbf{T}^{-1} \cdot {}^A_B\mathbf{T}$$

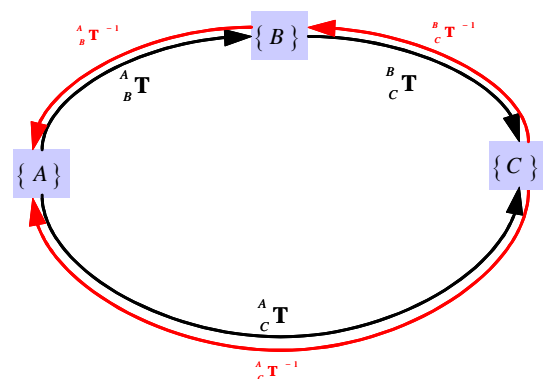


Bild 2-16 Symbolische Darstellung von konsekutiven Transformationen

- Graphentheoretischer Algorithmus zur Bestimmung einer konsekutiven Transformationsmatrix:

ALGORITHMUS

(1) Zeichne einen Graph mit

- Knoten: Frames $\{N\}, \{N + i\}$
- Gerichteten Kanten mit Kantengewichten ${}^N_{N+i}T$

(2) Die gesuchte Transformation ${}^N_{N+1}T$ wird folgendermaßen bestimmt:

- suche einen Pfad ausgehend von Knoten $\{N\}$ zum Knoten $\{N + 1\}$ entlang bekannter Kanten (d.h. ${}^N_{N+i}T$ ist jeweils bekannt)
- die gesuchte Transformationsmatrix ${}^N_{N+1}T$ ergibt sich dann als Rechtsprodukt der Kantengewichte in der Reihenfolge entlang des Pfadweges
- falls eine Kante entgegen der Pfeilrichtung durchlaufen wird, ist das Kantengewicht invertiert, d. h. T^{-1} , einzurechnen.

===== **BEISPIEL 2-10: KONSEKUTIVE TRANSFORMATIONEN**

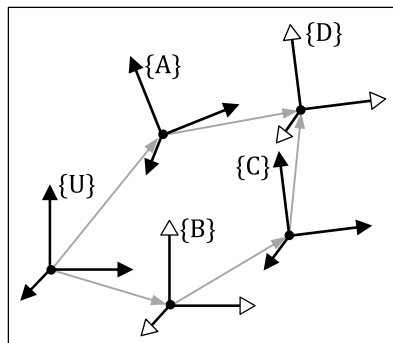
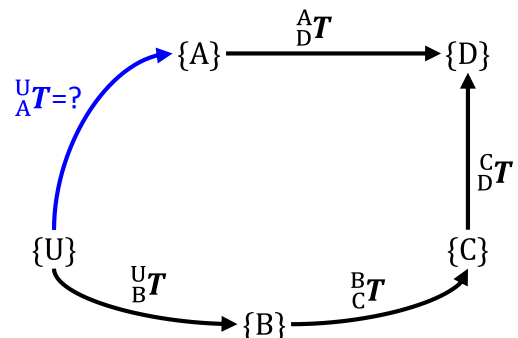


Bild 2-17 Beispielkonfiguration mit 5 Frames

Gegeben: ${}^U_B T, {}^B_C T, {}^C_D T, {}^A_D T$

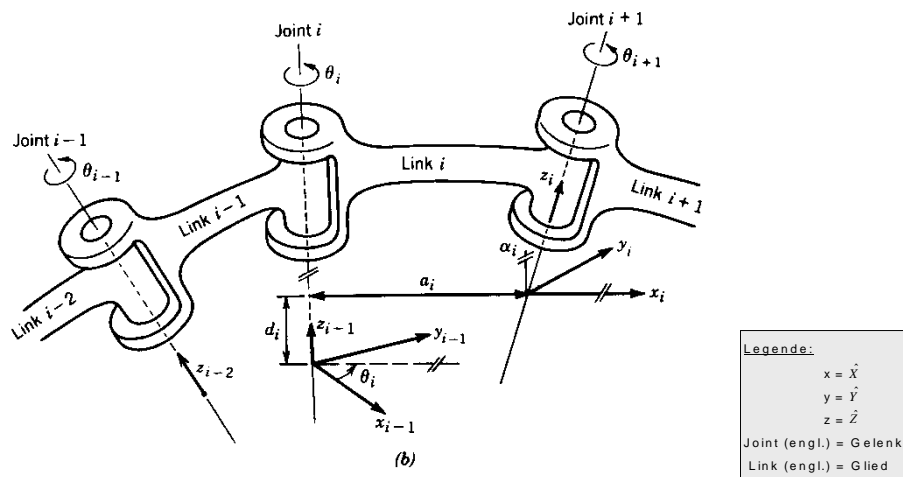
Gesucht: ${}^U_A T$

Lösung: ${}^U_A T = {}^U_B T \cdot {}^B_C T \cdot {}^C_D T \cdot {}^A_D T^{-1}$



2.3 Beschreibung von seriellen Kinematiken nach Denavit-Hartenberg

Um die Position und Lage von benachbarten Gelenken bzw. Gliedern zu beschreiben, wird jedem *Glied* i ein festes orthogonales Koordinatensystem $\{i\}$ zugeordnet. Der betrachtete serielle Roboter weist n Glieder und $n - 1$ Gelenke mit je einem Freiheitsgrad (Rotations- oder Schubgelenke) auf. Die Roboterbasis wird dabei als *Glied* 0 bezeichnet, welches durch das *Gelenk* 1 mit dem *Glied* 1 verbunden ist.



[Koivo]

Bild 2-18 Strukturelle kinematische Parameter für das Gelenk i

Zuordnungsvorschrift für die n orthogonalen Koordinatensysteme nach DENAVIT-HARTENBERG (siehe Bild 2-18):

1. Platzieren und Benennen der Gelenkachsen $\hat{Z}_0, \dots, \hat{Z}_{n-1}$, wobei \hat{Z}_{i-1} in Richtung der Bewegungsachse von Gelenk i zeigt, z. B.: \hat{Z}_0 ist Bewegungsachse von Gelenk 1.
2. Setzen des Basiskoordinatensystems $\{0\}$: Ursprung ist ein beliebiger Punkt von \hat{Z}_0 . \hat{X}_0 und \hat{Y}_0 sind so zu wählen, dass sie zusammen mit \hat{Z}_0 ein Rechtssystem bilden. Eine vorteilhafte Wahl vereinfacht u. U. die Berechnung der direkten Kinematik.

Die Schritt 3 bis 5 sind für jedes Koordinatensystem $i = 1, \dots, n - 1$ zu wiederholen:

3. Platzieren des Koordinatenursprungs i auf \hat{Z}_i im Lotpunkt bzw. Schnittpunkt mit \hat{Z}_{i-1} **oder** falls beide Achsen parallel verlaufen, an beliebiger Stelle auf \hat{Z}_i , oftmals günstig im Gelenk i
4. Ausrichten von \hat{X}_i entlang des Lotes zwischen \hat{Z}_i und \hat{Z}_{i-1} bzw. normal zur aufgespannten Ebene; möglichst in Richtung von Gelenk i nach Gelenk $i + 1$
5. \hat{Y}_i wird so gewählt, dass ein Rechtssystem entsteht

6. Platzieren des Koordinatensystems $\{n\}$ im Zentrum des Endeffektors bzw. so dass die Funktion des Endeffektors möglichst einfach zu beschreiben ist, wobei:
 $\hat{Z}_n \parallel \hat{Z}_{n-1}$ und anschließend Vorgehensweise nach Schritt 3 bis 5
7. Erstellen der Tabelle mit den strukturellen kinematischen Parametern $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$:
 θ_i : Winkel zwischen \hat{X}_{i-1} und \hat{X}_i um \hat{Z}_{i-1}
 Bei Rotationsgelenken ist θ_i variabel!
 d_i : Entfernung vom Ursprung $i - 1$ zum Schnittpunkt von \hat{X}_i und \hat{Z}_{i-1} entlang \hat{Z}_{i-1} ;
 Bei Schubgelenken ist d_i variabel!
 a_i : Entfernung vom Ursprung i zum Schnittpunkt von \hat{X}_i und \hat{Z}_{i-1} entlang \hat{X}_i
 α_i : Winkel zwischen \hat{Z}_{i-1} und \hat{Z}_i um \hat{X}_i

Beachte:

$\alpha_i, \theta_i > 0$ bei mathematisch positiven Drehungen; Drehachse (\hat{X}_i, \hat{Z}_{i-1}) zeigt auf Betrachter!

8. Aufstellen der homogenen Transformationsmatrizen ${}^{i-1}_i\mathbf{T}$ ($i = 1, \dots, n$) nach folgender Formel:

$${}^{i-1}_i\mathbf{T} = \text{Rot}(\hat{Z}_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\hat{Z}_{i-1}, d_i) \cdot \text{Trans}(\hat{X}_i, a_i) \cdot \text{Rot}(\hat{X}_i, \alpha_i)$$

$${}^{i-1}_i\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}_i\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veranschaulichung:

Das Koordinatensystem $\{i - 1\}$ muss durch die folgenden Operationen (in dieser Reihenfolge!) in das System $\{i\}$ überführt werden:

- 1) Drehung um \hat{Z}_{i-1} ($\rightarrow \theta_i$)
- 2) Verschiebung entlang \hat{Z}_{i-1} ($\rightarrow d_i$)
- 3) Verschiebung entlang \hat{X}_i ($\rightarrow a_i$)
- 4) Drehung um \hat{X}_i ($\rightarrow \alpha_i$)

9. Berechnen von ${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot \dots \cdot {}^{n-1}_n\mathbf{T}$

Damit können nun im Endeffektorkoordinatensystem $\{n\}$ bekannte Raumpunkte bzw. Orientierungen in das Basiskoordinatensystem $\{0\}$ transformiert werden. ${}^0_n\mathbf{T}$ stellt die räumliche Verschiebung sowie Verdrehung von $\{n\}$ gegenüber $\{0\}$ dar (in Koordinaten von $\{0\}$).

===== **BEISPIEL 2-11: PLANARER ELLBOGEN MANIPULATOR**

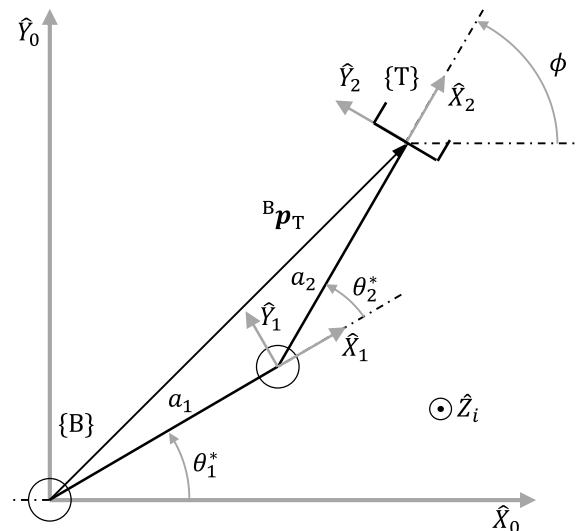


Bild 2-19 Planarer Ellbogenmanipulator

- Platzieren von \hat{Z}_0 und \hat{Z}_1 entlang der Rotationsachsen der Gelenke 1 bzw. 2
- Basiskoordinatensystem {B} im Gelenk 1 platzieren;
→ \hat{X}_0 entspricht der gewünschten Home-Position!
- Festlegen des Koordinatenursprungs von {1} im Gelenk 2
Ausrichten von \hat{X}_1 : $\hat{X}_1 \perp \hat{Z}_1$ sowie $\hat{X}_1 \parallel \hat{X}_0$ wenn Manipulator in Home-Position ($\theta = 0^\circ$)
Ausrichten von \hat{Y}_1 : \hat{Y}_1 mittels Rechte-Hand-Regel bzw. Kreuzprodukt festlegen
- Tool-Koordinatensystem {T} im Zentrum des Endeffektors platzieren, wobei: $\hat{Z}_2 \parallel \hat{Z}_0$
Ausrichten von \hat{X}_2 : $\hat{X}_2 \perp \hat{Z}_2$ sowie $\hat{X}_2 \parallel \hat{X}_0$ wenn Manipulator in Home-Position ($\theta = 0^\circ$)
Ausrichten von \hat{Y}_2 : \hat{Y}_2 mittels Rechte-Hand-Regel bzw. Kreuzprodukt festlegen
- Daraus ergeben sich die folgenden strukturellen kinematischen Parameter (siehe Tabelle 2-1):

Tabelle 2-1 Kinematische Parameter des zweigliedrigen planaren Manipulators

Gelenk	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1 (variabel)	0	a_1	0
2	θ_2 (variabel)	0	a_2	0

sowie die Transformationsmatrizen der direkten Kinematik:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^0_2T = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
c_i &= \cos \theta_i & c_{ij} &= \cos(\theta_i + \theta_j) = \cos \theta_i \cos \theta_j - \sin \theta_i \sin \theta_j \\
s_i &= \sin \theta_i & s_{ij} &= \sin(\theta_i + \theta_j) = \sin \theta_i \cos \theta_j + \cos \theta_i \sin \theta_j
\end{aligned}$$

===== **BEISPIEL 2-12: PLANARER 3-GELENK-MANIPULATOR**

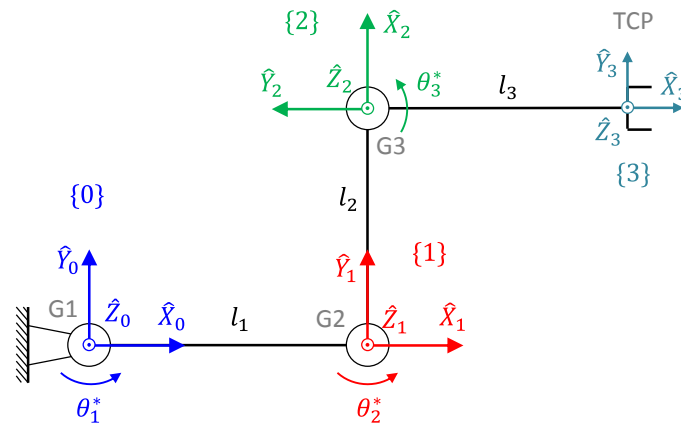


Bild 2-20 Planarer 3-Gelenk-Manipulator (RRR)

- Bild 2-20 zeigt eine mögliche Anordnung der Gelenkkoordinatensysteme nach D-H-Konvention
- Der Manipulator ist in der Home-Position dargestellt (Nullstellung aller Gelenke):
 $\text{Home} := \{\theta_i^* \mid \theta_i^* := 0, i = 1, \dots, n\}$
- Platzieren von \hat{Z}_0 , \hat{Z}_1 und \hat{Z}_2 entlang der Rotationsachsen der Gelenke 1 bis 3
- Basiskoordinatensystem $\{B\} = \{0\}$ wird im Gelenk 1 platziert
- Ausrichtung der übrigen Koordinatensysteme: vgl. Beispiel 2-11
- Es ergeben sich die folgenden strukturellen kinematischen Parameter:

$${}^{i-1}_iT = \text{Rot}(\hat{Z}_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\hat{Z}_{i-1}, d_i) \cdot \text{Trans}(\hat{X}_i, a_i) \cdot \text{Rot}(\hat{X}_i, \alpha_i)$$

Gelenk i	θ_i variabel bei Rotationsgelenken	d_i variabel bei Translationsgelenken	konstant	
			a_i	α_i
1	θ_1^*	0	l_1	0°
2	$\theta_2^* + 90^\circ$	0	l_2	0°
2	$\theta_3^* - 90^\circ$	0	l_3	0°

===== BEISPIEL 2-13: ZYLINDRISCHER ROBOTER MIT 6 AXSEN [SPONG]

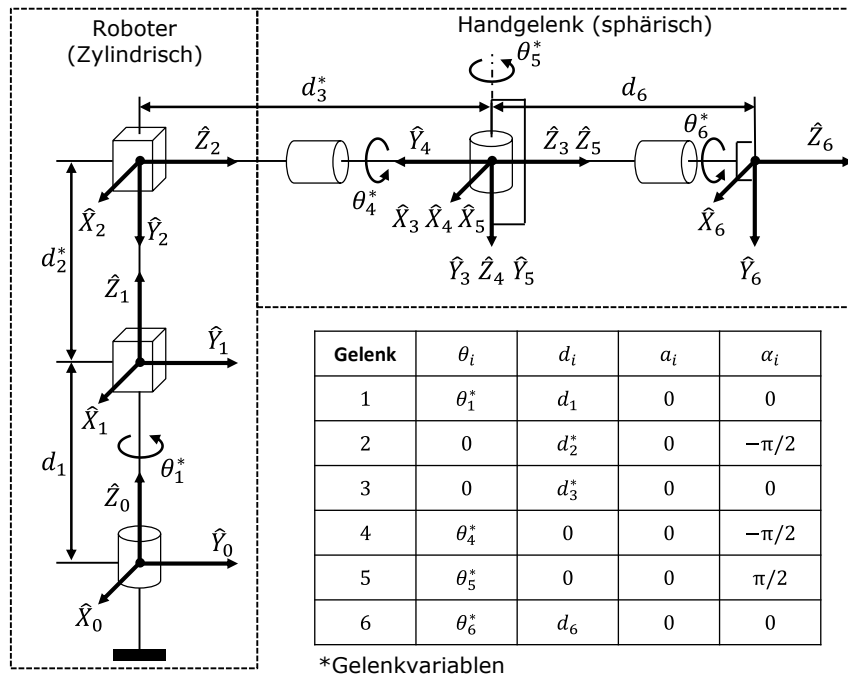


Bild 2-21 Zylindrischer Roboter (RTT) mit sphärischem Handgelenk (RRR)

- Bild 2-21 zeigt eine mögliche Anordnung der sechs Gelenkkoordinatensysteme nach der D-H-Notation
- Die Gelenke 1-3 bilden einen Manipulator mit hohlzylindrischem Arbeitsraum.
- Die Gelenke 4-6 bilden einen sphärischen Manipulator (auch Handgelenk genannt), der an den zylindrischen Arm angeflanscht ist. Konstruktiv werden die drei Gelenke räumlich dicht beieinander platziert und tragen normalerweise nicht signifikant zum Arbeitsraum bei. Sie dienen der Einstellung der Endeffektororientierung.
- Die Rotationsachsen $\hat{Z}_4, \hat{Z}_5, \hat{Z}_6$ schneiden sich in einem Punkt. Der sechsgelenkige Manipulator stellt daher eine entkoppelte Kinematik dar (siehe Vorlesungsskript RS03 „Inverse Kinematik“).
- Die Trennung in Arm und Handgelenk ermöglicht die Berechnung der resultierenden Transformationsmatrix 0_6T durch:

Transformationsmatrix 0_6T durch:

$${}^0_6T = {}^0_3T \cdot {}^3_6T$$

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -d_3s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & d_3c_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 - c_4s_6 & -s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & 0 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ mit:}$$

$$r_{11} = c_1c_4c_5c_6 - c_1s_4s_6 + s_1s_5c_6$$

$$r_{21} = s_1c_4c_5c_6 - s_1s_4s_6 - c_1s_5c_6$$

$$r_{31} = -s_4c_5c_6 - c_4s_6$$

$$r_{12} = -c_1c_4c_5c_6 - c_1s_4c_6 + s_1s_5s_6$$

$$r_{22} = -s_1c_4c_5c_6 - s_1s_4c_6 + c_1s_5s_6$$

$$r_{32} = s_4c_5s_6 - c_4c_6$$

$$r_{13} = c_1c_4s_5 - s_1c_5$$

$$r_{23} = s_1c_4s_5 - c_1c_5$$

$$r_{33} = -s_4s_5$$

$$d_x = c_1c_4s_5d_6 - s_1c_5d_6 - s_1d_3$$

$$d_y = s_1c_4s_5d_6 + c_1c_5d_6 + c_1d_3$$

$$d_z = -s_1s_5d_6 + d_1 + d_2$$