Conteúdos do Capítulo

- Análise de Sensibilidade
 - Interpretação Econômica do Problema Dual
 - **Preço de Sombra** Shadow Price
 - Custo Reduzido Reduced Cost
- Caso Motorela Celulares
- Caso Agropecuária Coelho

Conteúdos do Capítulo Continuação

- Intervalos de validação
 - **Preço Sombra** (Shadow Price ou Dual Price)
 - Custo Reduzido (Reduced Cost)
- Análise de Sensibilidade
 - Análise dos Coeficientes da Função Objetivo
 - A análise do Excel

Conteúdos do Capítulo Continuação

- Analisando todas as respostas do Excel
 - Answer Report
 - Análise Econômica
 - Sensitivity Report
 - Limits Report
 - Solução Degenerada

Interpretação Econômica do Problema Dual

- Cada variável y_i do Dual está diretamente relacionada com a restrição i do problema Primal;
- O valor ótimo desta variável, y_i* recebe diversas denominações, entre elas:
 - Preço-Sombra (Shadow Price);
 - Preço-Dual (Dual Price);
- Portanto, cada restrição i possui um preço-sombra y_i*

Preço de Sombra

- O preço-sombra para o recurso i (y_i*) mede o valor marginal deste recurso em relação ao lucro total;
- ◆ Isto é, a quantidade que o Lucro Total (**Z**) seria melhorado, caso a quantidade do recurso i (b_i) fosse aumentado de uma quantidade igual à unidade.

Interpretação Econômica do Problema Dual Custo Reduzido

- Cada variável de folga/excesso do Dual está diretamente relacionada a uma determinada variável original do problema Primal;
- Esse valor é chamado de Custo Reduzido ou Reduced Cost;
- Portanto, cada variável do problema original possui um determinado custo reduzido.

Custo Reduzido

- O custo reduzido de uma variável é:
 - o total que o seu coeficiente na função-objetivo deve melhorar para que ela deixe de ser zero na solução ótima;
 - quanto a função-objetivo irá piorar para cada unidade que a variável aumente a partir de zero;

• O custo reduzido só se aplica a variáveis que, na solução ótima, assumem o valor zero.

Exemplo

• A tabela abaixo sintetiza o problema de um pecuarista: São três alimentos diferentes que contribuem com alguns nutrientes para a alimentação do gado. Qual é o custo mínimo diário para estabelecer uma dieta com o requerimento mínimo?

Ingrediente	Quilo de	Quilo de	Quilo de	Requerimento mínimo
Nutritivo	milho	ração	alfafa	diário
carboidratos	90mg	20mg	40mg	200mg
proteínas	30mg	80mg	60mg	180mg
vitaminas	10mg	20mg	60mg	150mg
custo (\$/kg)	21	18	15	

Modelagem no Excel

	E6 ▼	<i>f</i> ≈ =S	OMARPRO	DUTO(B6:I	D6;\$B\$3:\$D)\$3)
	А	В	С	D	Е	F
1		X1	X2	Х3		
2	Coef.F-Objetivo	21	18	15		
3	Variáveis					
4	Z=	0				
5					LI√S	RHS
6	Restrição 1	90	20	40	0	200
7	Restrição 2	30	80	60	0	180
8	Restrição 3	10	20	60	0	150

Os Parâmetros do Solver

Parâmetros do Solver			?×
<u>D</u> efinir célula de destino: \$B\$4	Opções do Sol	ver	?፟፟፟፟፟፟፟፟፟፟
Iguala: C <u>M</u> áx ⊙ Mí <u>n</u> (<u>T</u> empo máximo:	100 segundos	ОК
<u>C</u> élulas variáveis:	<u>I</u> terações:	100	Cancelar
\$B\$3:\$D\$3	<u>P</u> recisão:	0,000001	Carregar modeļo
-Su <u>b</u> meter às restrições:	Tol <u>e</u> rância:	5 %	Salvar modelo
\$E\$6:\$E\$8 >= \$F\$6:\$F\$8	Con <u>v</u> ergência:	0,0001	A <u>ju</u> da
	Presumir mod	delo linear 🗀 Us <u>a</u> r escala	automática
	Presumir <u>n</u> ão	negativos 🗆 Most <u>r</u> ar res	ultado de iteração
	Estimativas	Derivadas	Pesquisar
	Tangente		Ne <u>w</u> ton
	© Quadrática	C Central	C Conjugado

Resultado do Excel

	А	В	С	D	Е	F
1		X1	X2	ХЗ		
2	Coef.F-Objetivo	21	18	15		
3	Variáveis	1,142857	0	2,428571		
4	Z=	60,42857				
5					LHS	RHS
6	Restrição 1	90	20	40	200	200
7	Restrição 2	30	80	60	180	180
8	Restrição 3	10	20	60	157,1429	150

A Análise do Excel

Microsoft Excel 10.0 Relatório de sensibilidade

Planilha: [Pasta1]Plan1

Relatório criado: 6/2/2005 11:46:26

Células ajustáveis

Restrições

Os Reduced Costs

		Final	Reduzido	Objetivo	Permissível	Permissível
Célula	Nome	Valor	Custo	Coeficiente	Acréscimo	Decréscimo
\$B\$3	Variáveis X1	1,142857143	0	21	12,75	9,3
\$C\$3	Variáveis X2	0	4,428571429	18	1E+30	4,428571429
\$D\$3	Variáveis X3	2,428571429	0	15	2,818181818	5,666666667

 Os preços de sombra não são negativos

Calle	Marra	Final	Sombra		Permissível	
Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Acréscimo	Decrescimo
\$E\$6	Restrição 1 LHS	200	0,192857143	200	25	80
\$E\$7	Restrição 2 LHS	180	0,121428571	180	120	6
\$E\$8	Restrição 3 LHS	157,1428571	0	150	7,142857143	1E+30

Análise de Sensibilidade Interpretação no Excel

Para o Excel, os conceitos de Preço-Sombra estão relacionados ao valor nominal do efeito na funçãoobjetivo, isto é, quanto a função-objetivo aumenta ou diminui.

Análise de Sensibilidade

- As quantidades informadas pelas grandezas Preço-Sombra e Custo Reduzido refletem as conseqüências de alterações unitárias;
 - Alterações diferentes da unidade provocaram consequências proporcionais.
- Entretanto, estes valores só podem ser garantidos dentro de intervalos apontados nos relatórios, se a solução ótima não for degenerada.

Caso Motorela Celulares

Para produzir 3 tipos de telefones celulares, a fábrica da Motorela utiliza três processos diferentes, o de montagem, a configuração e a verificação. Para fabricar o celular Multi-Tics, são necessárias 0,1 h de montagem, 0,2 h de configuração e 0,1 h de verificação. O mais popular Star Tic Tac requer 0,3 h de montagem, 0,1 h de configuração e 0,1 h de verificação. Já o moderno Vulcano necessita de 0,4 h de montagem, 0,3 h para configuração, porém, em virtude de seu circuito de última geração, não necessita de verificação. A fábrica dispõe de capacidade de 290 hs/mês na linha de montagem, 250 hs/mês na linha de configuração e 110 hs/mês na linha de verificação. Os lucros unitários dos produtos Multi-Tics, Star Tic-Tac e Vulcano são R\$ 100, R\$ 210 e R\$ 250, respectivamente e a Motorela consegue vender tudo o que produz. Sabe-se ainda que o presidente da Motorela exige que cada um dos três modelos tenha produção mínima de 100 unidades e quer lucrar pelo menos R\$ 25.200/mês com o modelo Star Tic-Tac. O presidente também exige que a produção do modelo Vulcano seja pelo menos o dobro do modelo Star Tic-Tac. Resolva utilizando o Solver do Excel:

Caso Motorela Celulares Variáveis de Decisão

- x₁- Número de celulares Multi-Tics produzidos mensalmente.
- x₂- Número de celulares Star Tic-Tacs produzidos mensalmente.
- x₃- Número de celulares Vulcanos produzidos mensalmente.

Caso Motorela Celulares: Função-Objetiva

Maximizar o Lucro da Motorela

$$\text{Max} 100 x_1 + 210 x_2 + 250 x_3$$

Caso Motorela Celulares: Restrições

Produção

Linha de Montagem

$$0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 \le 290$$

■ Linha de Configuração
$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 \le 250$$

Linha de Verificação

$$0,1x_1 + 0,1x_2 \le 110$$

Caso Motorela Celulares: Restrições

Produção Mínima

$$x_1 \ge 100; x_2 \ge 100; x_3 \ge 100$$

Lucro Mínimo Star Tic-Tac

$$210x_2 \ge 25200$$

Produção Vulcano

$$x_3 \ge 2x_2$$

Não Negatividade

$$\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3 \geq \mathbf{0}$$

Caso Motorela Celulares: Modelo

Max 100
$$x_1 + 210 x_2 + 250 x_3$$

st
 $0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 \le 290$
 $0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,3x_3 \le 250$
 $0,1x_1 + 0,1x_2 \le 110$
 $x_1 \ge 100 \; ; x_2 \ge 100 \; ; x_3 \ge 100$
 $210 \; x_2 \ge 25200$
 $x_3 \ge 2x_2$
 $x_1; x_2; x_3 \ge 0$

Caso Motorela Celulares: Modelo no Excel

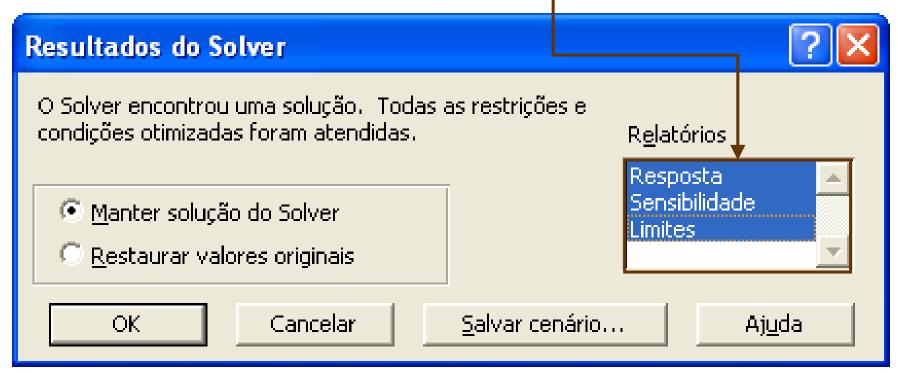
	E6 ▼	& =SOM	ARPRODU	TO(B6:D6;	\$B\$3:\$D\$3)		
	А	В	С	D	Е	F	G
1		X1	X2	ХЗ			
2	Coef. F.Objetiva	100	210	250			
3	Variáveis	0	0	0			
4	Z=	0					
5	Restrições				LHS	RHS	Tipo
6	Montagem	0,1	0,3	0,4	0	4 290	<=
7	Configuração	0,2	0,1	0,3	0	250	<=
8	Verificação	0,1	0,1	0	0	110	<=
9	Prod_min_x1	1	0	0	0	100	>=
10	Prod_min_x2	0	1	0	0	100	>=
11	Prod_min_x3	0	0	1	0	100	>=
12	Lucro_min_x2	0	210	0	0	25200	>=
13	Prod x3	0	-2	1	0	0	>=

Caso Motorela Celulares: Parametrização do Solver

Parâmetros do Solver			? X
<u>D</u> efinir célula de destino: \$B\$4	Opções do Solve	er	? X
Igualia: 💽 <u>M</u> áx 🤘 Mí <u>n</u> 🔘	<u>I</u> empo máximo: Γ	100 segundos	ОК
_⊆élulas variáveis:	<u>I</u> terações:	100	Cancelar
\$B\$3:\$D\$3	Precisão:	0,000001	Carregar modeļo
-Su <u>b</u> meter às restrições:	Tol <u>e</u> rância: [5 %	<u>S</u> alvar modelo
\$E\$6:\$E\$8 <= \$F\$6:\$F\$8	Con <u>v</u> ergência: [i	0,0001	A <u>ju</u> da
\$E\$9:\$E\$13 >= \$F\$9:\$F\$13	Presumir modelo		
	✓ Presumir <u>n</u> ão ne Estimativas	egatīvos Most <u>r</u> ar resi	ultado de iteração Pesquisar
			Newton
	© Quadrática	C Central	C Conjugado

Caso Motorela Celulares: Relatórios

Marcar os Relatórios Desejados



Caso Motorela Celulares: Solução

	А	В	С	D	Е	F	G	
1		X1	X2	Х3				
2	Coef. F.Objetiva	100	210	250				
3	Variáveis	480	220	440				
4	Z=	204200						
5	Restrições				LHS	RHS	Tipo	
6	Montagem	0,1	0,3	0,4	290	290	<=	
7	Configuração	0,2	0,1	0,3	250	250	<=	
8	Verificação	0,1	0,1	0	70	110	<=	
9	Prod_min_x1	1	0	0	480	100	>=	
10	Prod_min_x2	0	1	0	220	100	>=	
11	Prod_min_x3	0	0	1	440	100	>=	
12	Lucro_min_x2	0	210	0	46200	25200	>=	
13	Prod_x3	0	-2	1	0	0	>=	

Relatório de Respostas

De mais simples compreensão.

Três partes distintas:

- 1) Célula de destino (target cell) indica o tipo de problema de Otimização (Max ou Min)
- 2) Variáveis de decisão ou células variáveis (valores iniciais e finais das variáveis de decisão)
- 3) Restrições, indica as células utilizadas para representar o lado esquerdo (left hand side lhs), com as fórmulas utilizadas

Relatório de Limites

Apresenta duas partes:

1) Na parte superior relativa à função-objetivo, e a outra na parte inferior, relativa às variáveis de decisão.

- Na parte inferior, o lado esquerdo apresenta as células utilizadas para representar as variáveis de decisão e seus valores na solução ótima (três colunas).
- O lado direito (quatro últimas colunas) diz respeito a variação possível dos valores das variáveis de decisão e da função objetivo.
- Os limites inferiores (lower limit) significam os menores valores que estas variáveis de decisão podem assumir (mantidas constantes todas as outras) sem que nenhuma restrição deixe de ser satisfeita.

Relatório de Limites

A coluna seguinte indica o valor da função objetivo, caso cada variável de decisão em questão assuma o limite inferior e todas as outras variáveis permaneçam constantes.

Relatório de Sensibilidade

Dividido em duas partes:

A primeira refere-se às mudanças que podem ocorrer nos coeficientes das variáveis de decisão da função objetivo.

A outra mostra as possíveis alterações que as constantes das restrições podem sofrer.

A quarta coluna contém os valores das variáveis de decisão e de folga/excesso do problema dual (custo reduzido e preçosombra)

Preço-Sombra

- A quantidade pela qual a função objetivo é alterada dado um incremento de uma unidade na constante da restrição, assumindo que todos os outros coeficientes e constantes permaneçam inalterados.
- A interpretação econômica seria até quanto estaríamos dispostos a pagar por uma unidade adicional de um recurso, já que além desse valor estaríamos piorando nosso desempenho.

- O excel reporta o valor do preço sombra como um valor positivo, zero ou negativo.
- Se o preço sombra for positivo, um incremento de uma unidade na constante de restrição resultará e um aumento do valor da função objetivo.
- Se o preço sombra for negativo, um incremento resultará na diminuição do valor da função objetivo.

Custo Reduzido

Existem duas interpretações básicas para o custo reduzido:

- A quantidade que o coeficiente da função-objetivo de uma variável original deve melhorar antes de essa variável se tornar básica
- A penalização que deverá ser pagar para tornar uma variável básica.

Custo Reduzido

Os custos reduzidos são as variáveis de folga ou excesso do problema dual.

Se uma variável do problema original for maior do que zero, o valor da variável do dual relacionado será zero.

• Que restrições limitam a solução ótima?

A1	▼ f _k Micro:	soft Excel 10.0 Re	latório de respos	ta	
А В	C D E		Е	F	G
Restrições	i				
Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
\$E\$6	Montagem LHS	290	\$E\$6<=\$F\$6	Agrupar	0
\$E\$7	Configuração LHS	250	\$E\$7<=\$F\$7	Agrupar	0 -
\$E\$8	Verificação LHS	70	\$E\$8<=\$F\$8	Sem agrupar	40
\$E\$9	Prod_min_x1 LHS	480	\$E\$9>=\$F\$9	Sem agrupar	380
\$E\$10	Prod_min_x2 LHS	220	\$E\$10>=\$F\$10	Sem agrupar	120
\$E\$11	Prod_min_x3 LHS		\$E\$11>=\$F\$11	Sem agrupar	340
\$E\$12	Lucro_min_x2 LHS		\$E\$12>=\$F\$12		21000
\$E\$13	Prod_x3 LHS	0	\$E\$13>=\$F\$13	Agrupar	0 •
►►N \Re	latório de resposta	1 / Relatório de s	sensibilidade 1 🔏	Relatório de li	mites 1 / P 🕌

 Quanto deve ser melhorado no lucro unitário para que se produza o modelo Star Tic-Tac?

Microsoft Excel 10.0 Relatório de sensibilidade

Planilha: [Caso Motorela Celulares.xls]Primal

Relatório criado: 6/2/2005 15:53:35

Células ajustáveis

		Final	Reduzido		Objetivo	Permissível	Permissível
Célula	Nome	Valor	Custo	C	oeficiente	Acréscimo	Decréscimo
\$B\$3	Variáveis X1	480	0	1	100	102,8571429	35,45454545
\$C\$3	Variáveis X2	220	0		210	390	60
\$D\$3	Variáveis X3	440	0		250	60	180

ightharpoonup ho Nelatório de resposta 1 χ Nelatório de sensibilidade 1 χ Nelatório de limites 1 χ \parallel

• Até quanto você pagaria por uma hora de verificação terceirizada?

Restrições						
		Final	Sombra	Restrição	Permissível	Permissível
Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Acréscimo	Decréscimo
\$E\$6	Montagem LHS	290	480	290	81,42857143	75
\$E\$7	Configuração LHS	250_	260	250_	60	51,81818182
\$E\$8	Verificação LHS	70	0	110	1E+30	40
\$E\$9	Prod_min_x1 LHS	480	0	100	380	1E+30
\$E\$10	Prod_min_x2 LHS	220	0	100	120	1E+30
\$E\$11	Prod_min_x3 LHS	440	0	100	340	1E+30
\$E\$12	Lucro_min_x2 LHS	46200	0	25200	21000	1E+30
\$E\$13	Prod_x3 LHS	0	-20	0	300	600

Relatório de resposta 1 λ **Relatório de sensibilidade 1** λ Relatório de limites 1 λ $|\cdot|\cdot$

Alterando o Problema Para Verificar Resultado

Problema Alterado - Mesmo Valor Ótimo

	А	В	С	D	Е	F	G
1		X1	X2	Х3			
2	Coef. F.Objetiva	100	210	250			
3	Variáveis	480	220	440			
4	Z=	204200					
5	Restrições				LHS	RHS	Tipo
6	Montagem	0,1	0,3	0,4	290	290	<=
7	Configuração	0,2	0,1	0,3	250	250	<=
8	Verificação	0,1	0,1	0	70	111	<=
9	Prod_min_x1	1	0	0	480	100	>=
10	Prod_min_x2	0	1	0	220	100	>=
11	Prod_min_x3	0	0	1	440	100	>=
12	Lucro_min_x2	0	210	0	46200	25200	>=
13	Prod_x3	0	-2	1	0	0	>=

• Até quanto você pagaria por uma hora de montagem terceirizada?

Restrições						
		Final	Sombra	Restrição	Permissível	Permissível
Célula	Nome	Valor	∡ Preço	Lateral R.H.	Acréscimo	Decréscimo
\$E\$6	Montagem LHS	290	480	290	81,42857143	75
\$E\$7	Configuração LHS	250	260	250	60	51,81818182
\$E\$8	Verificação LHS	70	0	110	1E+30	40
\$E\$9	Prod_min_x1 LHS	480	0	100	380	1E+30
\$E\$10	Prod_min_x2 LHS	220	0	100	120	1E+30
\$E\$11	Prod_min_x3 LHS	440	0	100	340	1E+30
\$E\$12	Lucro_min_x2 LHS	46200	0	25200	21000	1E+30
\$E\$13	Prod_x3 LHS	0	-20	0	300	600

🕨 🔏 Alteração1 🦼 Relatório de resposta 1 🛝 **Relatório de sensibilidade 1** 🔏 Relatório 🚻

Alterando o Problema Para Verificar Resultado

	٥	Б			_	_			
	А	В	С	D	E	F			
1		X1	X2	X3					
2	Coef. F.Objetiva	100	210	250					
3	Variáveis	475,3333333	221,3333	442,6667					
4	Z=	204680	= 204200 +	-480					
5	Restrições				LHS	RHS			
6	Montagem	0,1	0,3	0,4	291	291			
7	Configuração	0,2	0,1	0,3	250	250			
8	Verificação	0,1	0,1	0	69,66667	110			
9	Prod_min_x1	1	0	0	475,3333	100			
10	Prod_min_x2	0	1	0	221,33333	100			
11	Prod_min_x3	0	0	1	442,6667	100			
12	Lucro_min_x2	0	210	0	46480	25200			
13	Prod_x3	0	-2	1	-5,7E-14	0			
I4 4	■ ■ ▶ ▶ \ Answer Report 1 / Sensitivity Report 1 / Limits Report 1 \ Shee \								

• O que significa o shadow price de -20 na última restrição?

13	Constraints							
14			Final	Shadow	Cons	traint	Allowable	Allowable
15	Cell	Name	Value	Price	R.H.	≸ide	Increase	Decrease
16	\$E\$6	Montagem LHS	290	480		290	81,42857143	75
17	\$E\$7	Configuração LHS	250	260		250	60	51,81818182
18	\$E\$8	Verificação LHS	70	0		110	1E+30	40
19	\$E\$9	Prod_min_x1 LHS	480	0		100	380	1E+30
20	\$E\$10	Prod_min_x2 LHS	220	0		100	120	1E+30
21	\$E\$11	Prod_min_x3 LHS	440	0		100	340	1E+30
22	\$E\$12	Lucro_min_x2 LHS	46200	0	*	25200	21000	1E+30
23	\$E\$13	Prod x3 LHS	0	-20		0	300	600

 Cada unidade adicional de Vulcano provoca perda de lucratividade de R\$20,00, isto é, a função-objetivo diminui de 20.

Alterando o Problema Para Verificar Resultado

	Α	В	С	D	Е	F		
1		X1	X2	X3				
2	Coef. F.Objetiva	100	210	250				
3	Variáveis	479,666667	219,6667	440,3333				
4	Z=	204180	=20420	00-20				
5	Restrições				LHS	RHS		
6	Montagem	0,1	0,3	0,4	290	290		
7	Configuração	0,2	0,1	0,3	250	250		
8	Verificação	0,1	0,1	0	69,93333	110		
9	Prod_min_x1	1	0	0	479,6667	100		
10	Prod_min_x2	0	1	0	219,6667	100		
11	Prod_min_x3	0	0	1	440,3333	100		
12	Lucro_min_x2	0	210	0	46130	25200		
13	Prod_x3	0	-2	1	1	1		
4 4	■ ■ ▶ ■ \ Answer Report 1 / Sensitivity Report 1 / Limits Report 1 \ Sheet							