

# Pesquisa Operacional

Professor Msc. Aparecido Vilela Junior  
[aparecido.vilela@unicesumar.edu.br](mailto:aparecido.vilela@unicesumar.edu.br)

# Problema de Rede

# Modelos em Rede

De forma geral, modelos de rede são utilizados em casos especiais de problemas de programação linear, que são mais bem analisados por meio de uma representação gráfica. Importantes problemas de otimização, como os de distribuição logística e de energia, produção e outros, são eficientemente resolvidos se modelados como problemas de rede.

Modelos de rede facilitam a visualização das relações entre os componentes do sistema

# Modelos em Rede

Redes são diagramas compostos por uma coleção de vértices ou nós ligados entre si por um conjunto de arcos.

Os nós são simbolizados por círculos e representam os pontos de junção que conectam os arcos. Os arcos são representados por setas, que conectam os nós e revelam a direção do fluxo de um ponto a outro.

Os problemas modelados como redes geralmente apresentam números associados aos nós e aos

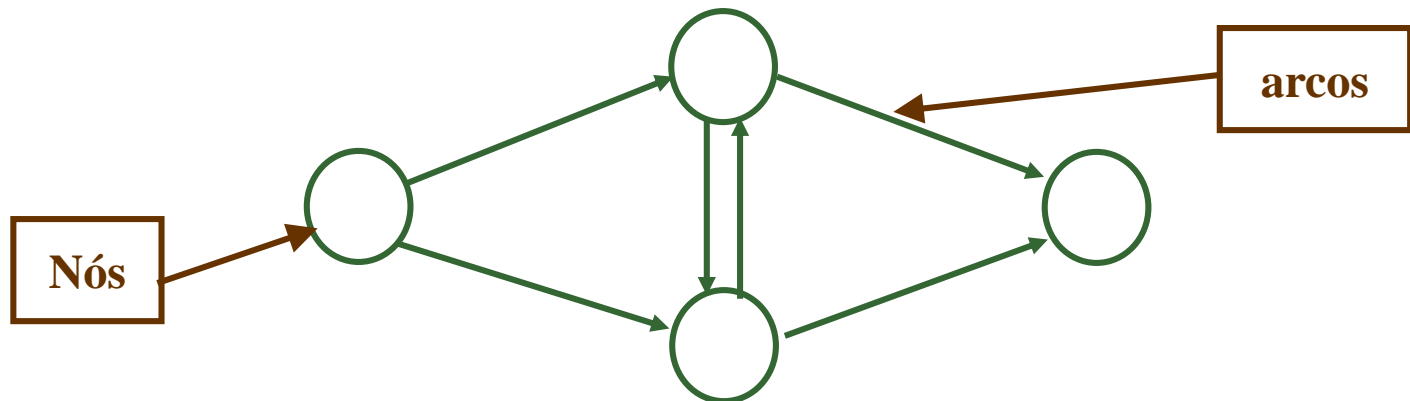
# Modelos em Rede

Em problemas de transportes modelados como redes, por exemplo, os números associados aos nós podem representar a quantidade de produtos ofertada ou demandada pelo nó, ao passo que os valores associados aos arcos podem refletir o custo de transporte, o tempo ou à distância, entre um nó e outro.

# Modelos em Rede

Modelos de rede podem ser utilizados em diversas áreas tais como transportes, energia e comunicações para modelagem de diversos tipos de problemas.

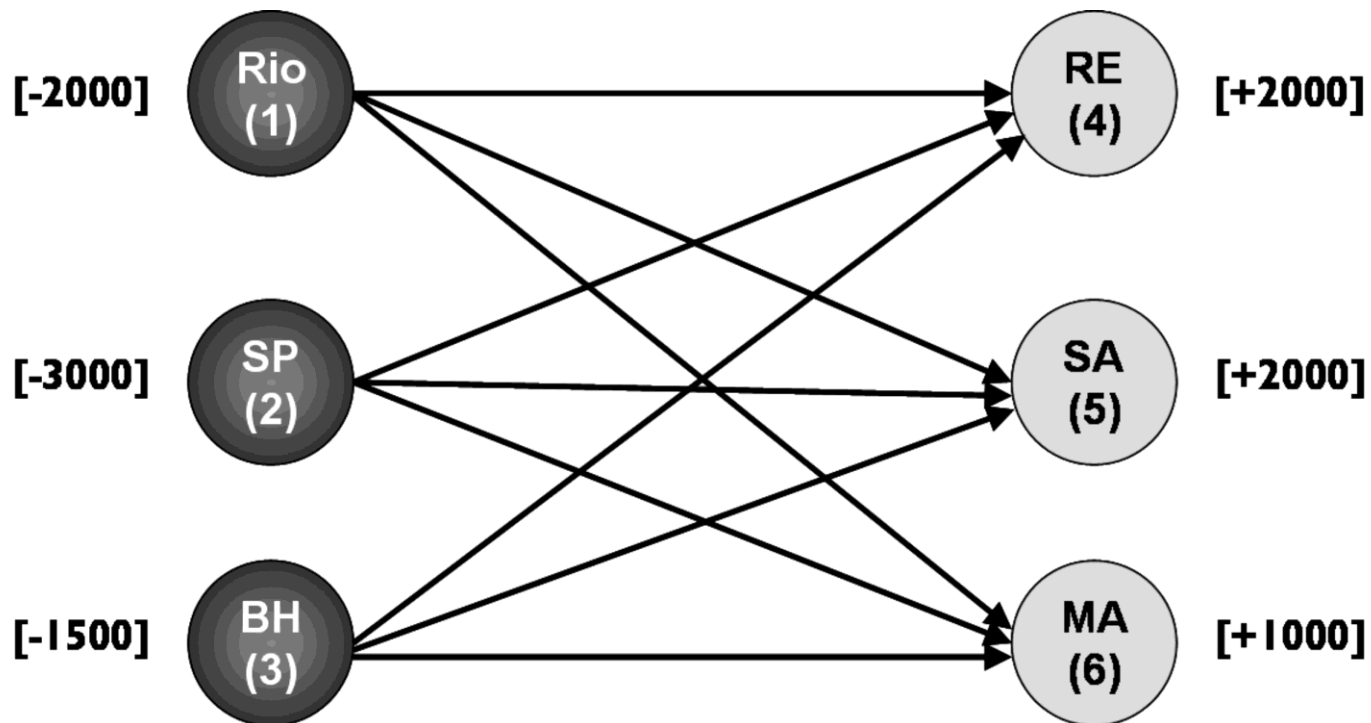
Uma rede é um conjunto de vértices ou nós ligados entre si por um conjunto de arcos.



# Caso LCL Bicicletas

Representação Como Problema de Rede

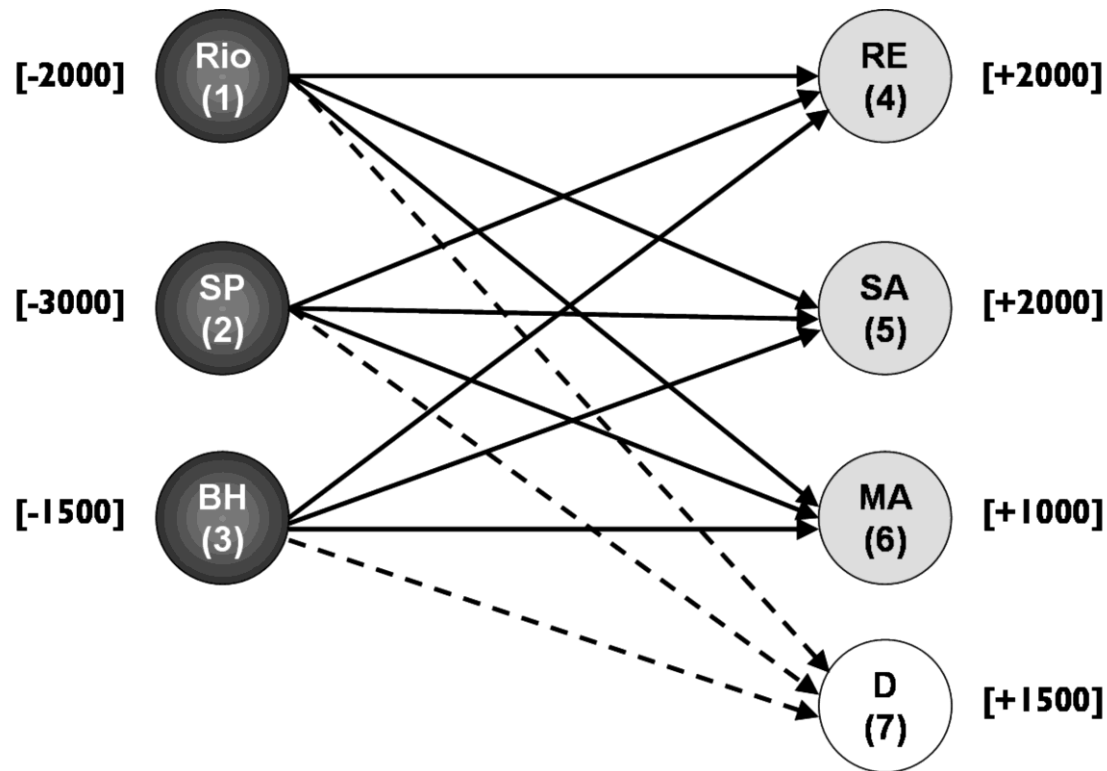
Sem Utilização de Variáveis Dummy



# Caso LCL Bicicletas

Representação Como Problema de Rede

Com Utilização de Variáveis Dummy





# Regra de Fluxo Balanceado

Uma maneira de modelar um problema de rede é seguir a Regra Fluxo Balanceado para cada nó.

No Caso de Oferta Total = Demanda Total

$$\begin{bmatrix} \text{total de entradas} \\ \text{no nó} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{total de saídas} \\ \text{no nó} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Oferta/Demanda} \\ \text{do nó} \end{bmatrix}$$

# Regra de Fluxo Balanceado

Caso a Oferta Total > Demanda Total

$$\begin{bmatrix} \text{total de entradas} \\ \text{no nó} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{total de saídas} \\ \text{no nó} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \text{Oferta/Demanda} \\ \text{do nó} \end{bmatrix}$$

Caso a Oferta Total < Demanda Total



$$\begin{bmatrix} \text{total de entradas} \\ \text{no nó} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{total de saídas} \\ \text{no nó} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \text{Oferta/Demanda} \\ \text{do nó} \end{bmatrix}$$

# Caso LCL Bicicletas

## Representação Como Problema de Rede

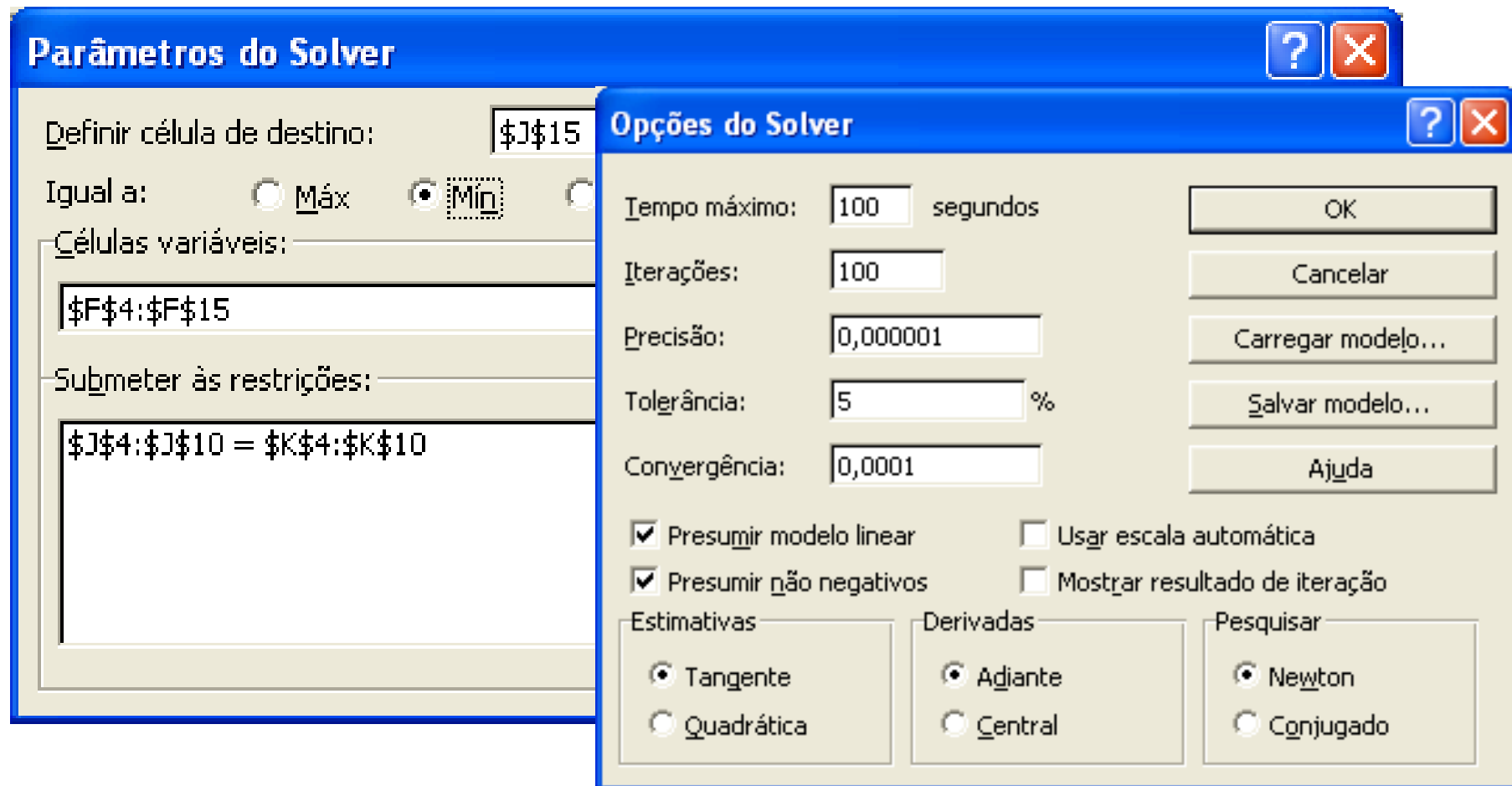
J15    **=SOMARPRODUTO(E4:E15;F4:F15)**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Caso LCL Bicicletas como Problema de Rede</b>										
2	<b>De</b>		<b>Para</b>		<b>Custo</b>	<b>Unidades</b>				<b>Fluxo Líquido</b>	<b>Oferta Demanda</b>
3	<b>Nó</b>	<b>Cidade</b>	<b>Nó</b>	<b>Cidade</b>							
4	1	Rio de Janeiro	4	Recife	25			1	Rio de Janeiro	0	-2000
5	1	Rio de Janeiro	5	Salvador	20			2	São Paulo	0	-3000
6	1	Rio de Janeiro	6	Manaus	30			3	Belo Horizonte	0	-1500
7	1	Rio de Janeiro	7	Dummy	0			4	Recife	0	2000
8	2	São Paulo	4	Recife	30			5	Salvador	0	2000
9	2	São Paulo	5	Salvador	25			6	Manaus	0	1000
10	2	São Paulo	6	Manaus	25			7	Dummy	0	1500
11	2	São Paulo	7	Dummy	0			Oferta + Demanda		0	
12	3	Belo Horizonte	4	Recife	20			<b>=SOMASE(\$C\$4:\$C\$15;H4;\$F\$4:\$F\$15)</b> <b>-SOMASE(\$A\$4:\$A\$15;H4;\$F\$4:\$F\$15)</b>			
13	3	Belo Horizonte	5	Salvador	15						
14	3	Belo Horizonte	6	Manaus	23						
15	3	Belo Horizonte	7	Dummy	0						
	<b>Custo Total</b>									0	

 Sem dummy    **Rede** / 

# Caso LCL Bicicletas

## Representação Como Problema de Rede



The image shows two overlapping Excel Solver dialog boxes. The 'Parâmetros do Solver' (Solver Parameters) box is in the background, and the 'Opções do Solver' (Solver Options) box is in the foreground.

**Parâmetros do Solver**

- Definir célula de destino:
- Igual a: ☐ Máx ☒ Min ☐
- Células variáveis:
- Submeter às restrições:

**Opções do Solver**

- Tempo máximo:  segundos
- Iterações:
- Precisão:
- Tolerância:  %
- Convergência:
- ☒ Presumir modelo linear ☐ Usar escala automática
- ☒ Presumir não negativos ☐ Mostrar resultado de iteração
- Estimativas: ☒ Tangente ☐ Quadrática
- Derivadas: ☒ Adjante ☐ Central
- Pesquisar: ☒ Newton ☐ Conjugado

Buttons: OK, Cancelar, Carregar modelo..., Salvar modelo..., Ajuda

# Representação Como Problema de Rede

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Caso LCL Bicicletas como Problema de Rede</b>										
2	<b>De</b>		<b>Para</b>		<b>Custo</b>	<b>Unidades</b>		<b>Nó</b>	<b>Cidade</b>	<b>Fluxo Líquido</b>	<b>Oferta Demanda</b>
3	<b>Nó</b>	<b>Cidade</b>	<b>Nó</b>	<b>Cidade</b>							
4	1	Rio de Janeiro	4	Recife	25	0		1	Rio de Janeiro	-2000	-2000
5	1	Rio de Janeiro	5	Salvador	20	2000		2	São Paulo	-3000	-3000
6	1	Rio de Janeiro	6	Manaus	30	0		3	Belo Horizonte	-1500	-1500
7	1	Rio de Janeiro	7	Dummy	0	0		4	Recife	2000	2000
8	2	São Paulo	4	Recife	30	500		5	Salvador	2000	2000
9	2	São Paulo	5	Salvador	25	0		6	Manaus	1000	1000
10	2	São Paulo	6	Manaus	25	1000		7	Dummy	1500	1500
11	2	São Paulo	7	Dummy	0	1500		Oferta + Demanda		0	
12	3	Belo Horizonte	4	Recife	20	1500					
13	3	Belo Horizonte	5	Salvador	15	0					
14	3	Belo Horizonte	6	Manaus	23	0					
15	3	Belo Horizonte	7	Dummy	0	0			<b>Custo Total</b>	110000	

# Problema de Transporte

## Aplicações

O problema de transporte não é aplicado apenas a problemas de distribuição de mercadorias das fábricas para centros distribuidores;

O mesmo tipo de formulação pode ser aplicado a outros tipos de problema, tais como:

Problemas de **Escalas de Produção**;

Problemas de *Lay-out* de fábricas;

## Caso Frod Brasil

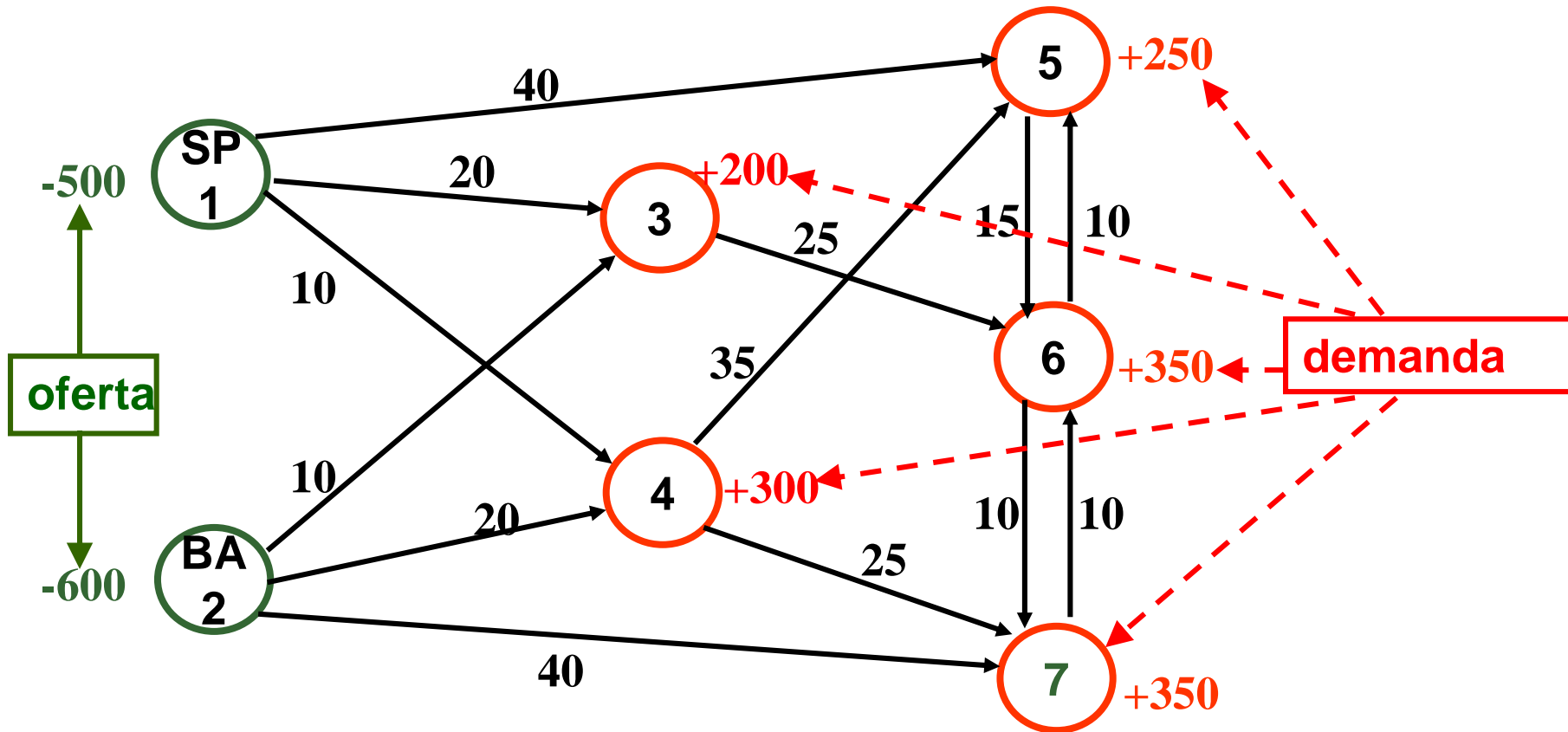
A Frod Brasil terá duas fábricas no Brasil, uma na Bahia e outra em São Paulo, e está estudando a forma de distribuição de seus carros para as diversas revendas de Minas Gerais.

A seguir é apresentada a possível rede de distribuição dos veículos, seus custos de transporte unitários, demandas por revenda e as capacidades das fábricas.

Formule o Problema de LP que resolva as rotas que devem ser seguidas a partir das fábricas para atender as diversas revendas.

# Problemas de Rede de Distribuição

## Caso Frod Brasil





# Problemas de Rede de Distribuição

## Caso Frod Brasil

### Variáveis de Decisão

$x_{ij}$  – N° de Carro remetidos de  $i$  para  $j$

Exemplo:

$x_{14}$  – N° de Carro remetidos de 1 para 4

Função-Objetivo = Minimizar o Custo de Distribuição

$$\begin{aligned} \text{Min } & 10X_{14} + 20X_{13} + 40X_{15} + 10X_{23} + 20X_{24} + 40X_{27} \\ & + 25X_{36} + 35X_{45} + 25X_{47} + 15X_{56} + 10X_{67} + 10X_{65} \\ & + 10X_{76} \end{aligned}$$

# Problemas de Rede de Distribuição

## Caso Frod Brasil

Como a **oferta total** é menor que a **demand total** devemos utilizar a seguinte restrição em todos os nós:

$$\text{Entradas} - \text{Saídas} \leq \text{Oferta} / \text{Demanda no nó}$$

## Problemas de Rede de Distribuição

## Caso Frod Brasil

E16	=SOMARPRODUTO(D3:D15;E3:E15)							
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		<b>Frod Brasil</b>					Fluxo Líquido	Oferta / Demanda
2		De	Para	Custo	Unidades	Nó		
3		1	3	20	0	1	0	-500
4		1	4	10	0	2	0	-600
5		1	5	40	0	3	0	200
6		2	3	10	0	4	0	300
7		2	4	20	0	5	0	250
8		2	7	40	0	6	0	350
9		3	6	25	0	7	0	350
10		4	5	35	0			
11		4	7	25	0			
12		5	6	15	0			
13		6	5	10	0			
14		6	7	10	0			
15		7	6	10	0			
16			Custo Total		0			

## Caso Frod Brasil

G3											
=SOMASE(\$C\$3:\$C\$15;F3;\$E\$3:\$E\$15)-SOMASE(\$B\$3:\$B\$15;F3;\$E\$3:\$E\$15)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1				<b>Frod Brasil</b>			Fluxo Líquido	Oferta / Demanda			
2		De	Para	Custo	Unidades	Nó					
3		1	3	20	0	1	0	-500			
4		1	4	10	0	2	0	-600			
5		1	5	40	0	3	0	200			
6		2	3	10	0	4	0	300			
7		2	4	20	0	5	0	250			
8		2	7	40	0	6	0	350			
9		3	6	25	0	7	0	350			
10		4	5	35	0						
11		4	7	25	0						
12		5	6	15	0						
13		6	5	10	0						
14		6	7	10	0						
15		7	6	10	0						
16				Custo Total	0						

# Problemas de Rede de Distribuição

## Caso Frod Brasil

### Parâmetros do Solver

Definir célula de destino:

Igual a: ☐ Máx ☒ Mín ☐

Células variáveis:

Submeter às restrições:

### Opções do Solver

Tempo máximo:  segundos

Iterações:

Precisão:

Tolerância:  %

Convergência:

☒ Presumir modelo linear ☐ Usar escala automática

☒ Presumir não negativos ☐ Mostrar resultado de iteração

Estimativas	Derivadas	Pesquisar
<input checked="" type="radio"/> Tangente	<input checked="" type="radio"/> Adjante	<input checked="" type="radio"/> Newton
<input type="radio"/> Quadrática	<input type="radio"/> Central	<input type="radio"/> Conjugado

OK Cancelar Carregar modelo... Salvar modelo... Ajuda

# Problemas de Rede de Distribuição

## Caso Frod Brasil

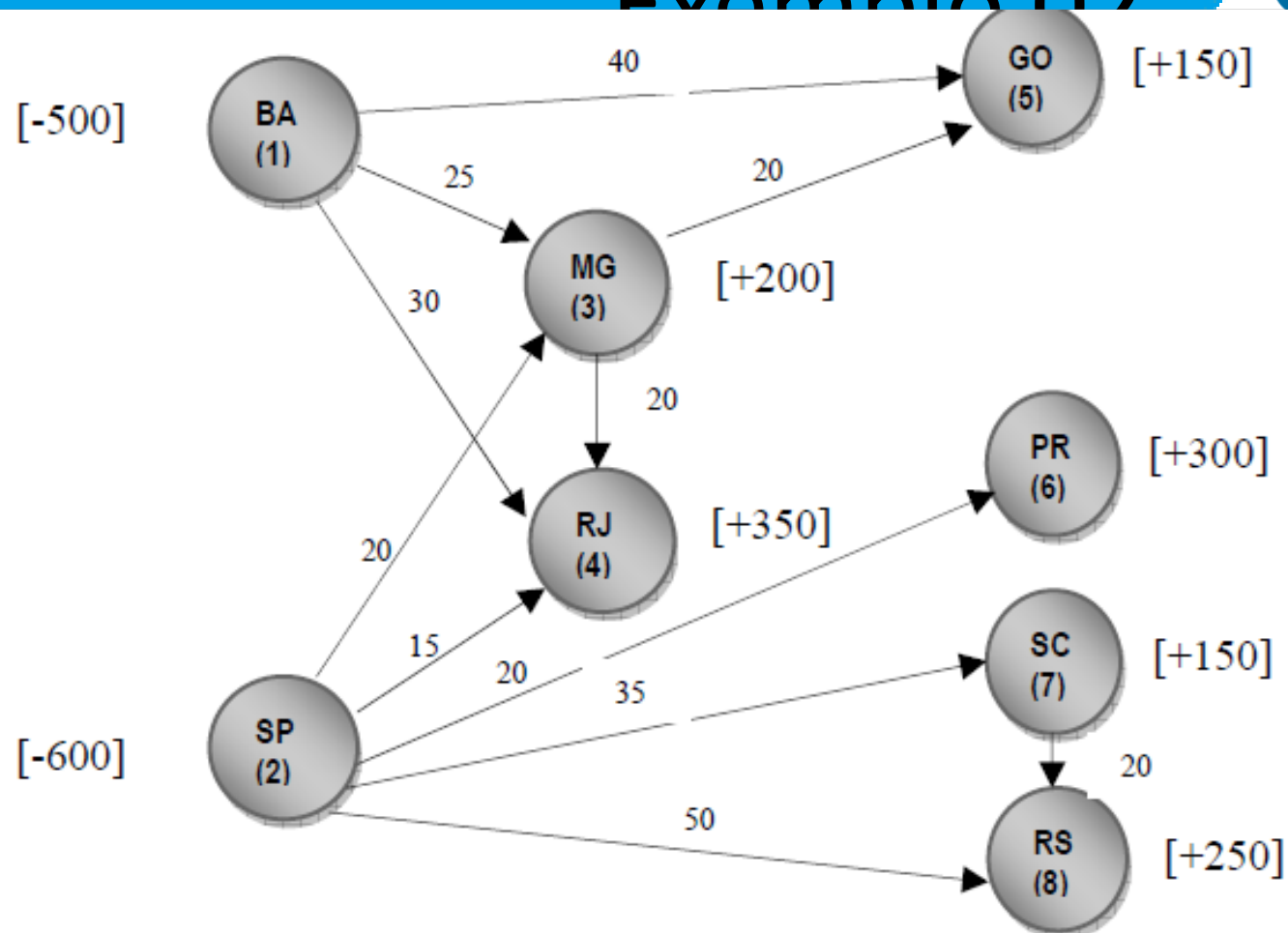
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		<b>Frod Brasil</b>					Fluxo Líquido	Oferta / Demanda
2		De	Para	Custo	Unidades	Nó		
3		1	3	20	0	1	-500	-500
4		1	4	10	500	2	-600	-600
5		1	5	40	0	3	200	200
6		2	3	10	550	4	300	300
7		2	4	20	0	5	0	250
8		2	7	40	50	6	350	350
9		3	6	25	350	7	250	350
10		4	5	35	0			
11		4	7	25	200			
12		5	6	15	0			
13		6	5	10	0			
14		6	7	10	0			
15		7	6	10	0			
16			Custo Total		26250			

## Exemplo 02

A montadora de veículos LCL Carros Brasil Ltda. está iniciando suas operações no país com duas fábricas: uma na Bahia e outra em São Paulo.

A LCL está estudando uma forma de distribuição de seus carros para diversas revendas, localizadas nos estados de Minas Gerais, Rio de Janeiro, Goiás, Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul, de modo a minimizar o custo total de distribuição. As capacidades instaladas de cada uma das fábricas, as demandas das revendas, bem como os custos unitários de

# Exemplo 02



**Variáveis de decisão:** quantidade de veículos enviadas de cada fábrica a cada distribuidor

$$x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{34}, x_{35}, x_{78}$$

**Função-objetivo:**

$$Z = 25x_{13} + 30x_{14} + 40x_{15} + 20x_{23} + 15x_{24} + 20x_{26} + 35x_{27} + 50x_{28} + 20x_{34} + 20x_{35} + 20x_{78}$$



# Restrições de Fluxo

$-x_{13} - x_{14} - x_{15} \leq -500$	Nó 1
$-x_{23} - x_{24} - x_{26} - x_{27} - x_{28} \leq -600$	Nó 2
$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} \leq 200$	Nó 3
$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 350$	Nó 4
$x_{15} + x_{35} \leq 150$	Nó 5
$x_{26} \leq 300$	Nó 6
$x_{27} - x_{78} \leq 150$	Nó 7
$x_{28} + x_{78} \leq 250$	Nó 8

### Carregamento da Planilha do Excel


[illegible]

# Planilha do Excel


Função-objetivo	Célula	Fórmula referente à Função-objetivo
$Z = 25x_{13} + 30x_{14} + 40x_{15} + 20x_{23} + 15x_{24} + 20x_{26} + 35x_{27} + 50x_{28} + 20x_{34} + 20x_{35} + 20x_{78}$	I16	=SOMARPRODUTO(D4:D14;E4:E14)
Restrição	Célula	Fórmula referente ao LHS da restrição
$-x_{13} - x_{14} - x_{15} \leq -500$	H4	=SOMASE(\$C\$4:\$C\$14;G4;\$E\$4:\$E\$14)-SOMASE(\$B\$4:\$C\$14;G4;\$E\$4:J9)
$-x_{23} - x_{24} - x_{26} - x_{27} - x_{28} \leq -600$	H5	=SOMASE(\$C\$4:\$C\$14;G5;\$E\$4:\$E\$14)-SOMASE(\$B\$4:\$C\$14;G5;\$E\$4:J10)
$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} \leq 200$	H6	=SOMASE(\$C\$4:\$C\$14;G6;\$E\$4:\$E\$14)-SOMASE(\$B\$4:\$C\$14;G6;\$E\$4:J11)
$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 350$	H7	=SOMASE(\$C\$4:\$C\$14;G7;\$E\$4:\$E\$14)-SOMASE(\$B\$4:\$C\$14;G7;\$E\$4:J12)
$x_{15} + x_{35} \leq 150$	H8	=SOMASE(\$C\$4:\$C\$14;G8;\$E\$4:\$E\$14)-SOMASE(\$B\$4:\$C\$14;G8;\$E\$4:J13)
$x_{26} \leq 300$	H9	=SOMASE(\$C\$4:\$C\$14;G9;\$E\$4:\$E\$14)-SOMASE(\$B\$4:\$C\$14;G9;\$E\$4:J14)
$x_{27} - x_{78} \leq 150$	H10	=SOMASE(\$C\$4:\$C\$14;G10;\$E\$4:\$E\$14)-SOMASE(\$B\$4:\$C\$14;G10;\$E\$4:J15)
$x_{28} + x_{78} \leq 250$	H11	=SOMASE(\$C\$4:\$C\$14;G11;\$E\$4:\$E\$14)-SOMASE(\$B\$4:\$C\$14;G11;\$E\$4:J16)


# Parâmetros

**Parâmetros do Solver**

Definir célula de destino:  

Igual a: ☐ Máx ☒ Min ☐ Valor de:

Células variáveis:  

Submeter às restrições:  

**Opções do Solver**

Tempo máximo:  segundos

Iterações:

Pressão:

Tolerância:  %

Convergência:

☒ Presumir modelo linear ☐ Usar escala automática

☒ Presumir não negativos ☐ Mostrar resultado de iteração

Estimativas: ☒ Tangente ☐ Quadrática

Derivadas: ☒ Adiante ☐ Central

Pesquisar: ☒ Newton ☐ Conjugado

## Resultados da otimização do caso rede de distribuição

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Rede de distribuição - LCT Carros Brasil - Modelagem em rede sem dummy								
2									
3		De	Para	Custo	Unidades		Nó	Fluxo Líquido	Oferta/Demanda
4		1	3	25	200		1	-500	-500
5		1	4	30	150		2	-600	-600
6		1	5	40	150		3	200	200
7		2	3	20	0		4	350	350
8		2	4	15	200		5	150	150
9		2	6	20	300		6	300	300
10		2	7	35	100		7	100	150
11		2	8	50	0		8	0	250
12		3	4	20	0				
13		3	5	20	0				
14		7	8	20	0				
15									
16								Custo Total	28000

# Escala de Produção

A forma de modelagem de problemas de transporte não se aplica somente a esse tipo de problema. Pode também ser utilizada em problemas de escala de produção e designação. O importante aqui é a forma de visualizar o problema. O caso LCL Fórmula 1 Ltda, de cada escala de produção retrata bem como um problema diferente do de transporte pode ser visto da mesma forma.

# Caso LCL Fórmula 1 Ltda.

A LCL Fórmula 1 Ltda. fornece motores para grande número de equipes de Fórmula 1. A companhia detém uma série de contratos de entregas futuras programadas para o próximo ano. As entregas deverão ocorrer trimestralmente, de acordo com as necessidades das equipes. A tabela a seguir resume, por trimestre, as entregas programadas, a capacidade máxima de produção e o custo unitário de produção. As entregas são feitas no final do trimestre, e os motores podem ser armazenados por quantos trimestres forem necessários ao custo de 0,015 milhão por trimestre. A diretoria deseja minimizar os custos totais de produção (produção mais armazenagem)

# Tabela

## Dados relevantes do caso escala de produção

Trimestre	Pedidos Contratados	Capacidade de Produção	Custo Unitário de produção (em milhões R\$)
1	10	25	1,08
2	15	35	1,11
3	25	30	1,10
4	20	10	1,13



# Caso LCL Eletrodomésticos Ltda.

A LCL Eletrodomésticos Ltda. deseja realizar o escalonamento de sua produção para os próximos 4 meses. Sua fábrica pode produzir mensalmente em horário normal 150 ferros de passar a um custo de R\$5, e em horário extra, 50 unidades a um custo de R\$ 7. Considere que é possível armazenar durante um mês a um custo unitário de R\$1. Suponha que as demandas para os próximos quatro meses são de 120, 200, 120 e 180.

## Caso Frod Brasil

A Frod Brasil terá duas fábricas no Brasil, uma na Bahia e outra em São Paulo, e está estudando a forma de distribuição de seus carros para as diversas revendas de Minas Gerais.

A seguir é apresentada a possível rede de distribuição dos veículos, seus custos de transporte unitários, demandas por revenda e as capacidades das fábricas.

Formule o Problema de LP que resolva as rotas que devem ser seguidas a partir das fábricas para atender as diversas revendas.