GRADUAÇÃO

UniCesumar

Pesquisa Operacional

Programação Inteira

Professor Msc. Aparecido Vilela Junior

aparecido.vilela@unicesumar.edu.br

Conteúdos da Aula

- Programação Inteira
  - Problema Relaxado
  - Solução por Enumeração
  - Solução Excel
- Caso LCL Tecnologia S.A.
- Variáveis Binárias e Condições Lógicas
- Caso LCL Equipamentos S.A.

Programação Inteira

São problemas de programação matemática em que a função objetivo, bem como as restrições, são lineares, porém uma ou mais variáveis de decisão podem apenas assumir valores inteiros.

Esse problema pode apresentar dois tipos básicos:

Programação Inteira Total - onde todas as variáveis de decisão são do tipo inteiro.

Programação Inteira Mista - onde apenas uma parte das variáveis são do tipo inteiro, enquanto outras são do tipo real

Programação Inteira

A primeira idéia que pode vir à mente é resolver o problema como se fosse um problema de programação linear e arredondar os valores ótimos encontrados para cada uma das variáveis de decisão inteiras.

Para problemas de grande porte, isto geralmente gerará uma solução aceitável (próxima do ótimo real) sem a violação de nenhuma das restrições.

Para problemas menores, esse tipo de procedimento poderá nos levar a soluções inviáveis ou não ótimas.

Programação Inteira

Problema Relaxado

A todo problema de programação inteira está associado um problema com a mesma função-objetivo e as mesmas restrições, com exceção da condição de variáveis inteiras. A esse problema se dá o nome de **Problema Relaxado**

Programação Inteira

LP Relaxado

Em um problema de **MAXIMIZAÇÃO**, o valor ótimo da função-objetivo, do **Problema Relaxado,** sempre representa um limite superior ao respectivo **Problema Inteiro**.

Em um problema de **MINIMIZAÇÃO**, o valor ótimo da função-objetivo, do **Problema Relaxado,** sempre representa um limite inferior ao respectivo **Problema Inteiro**.

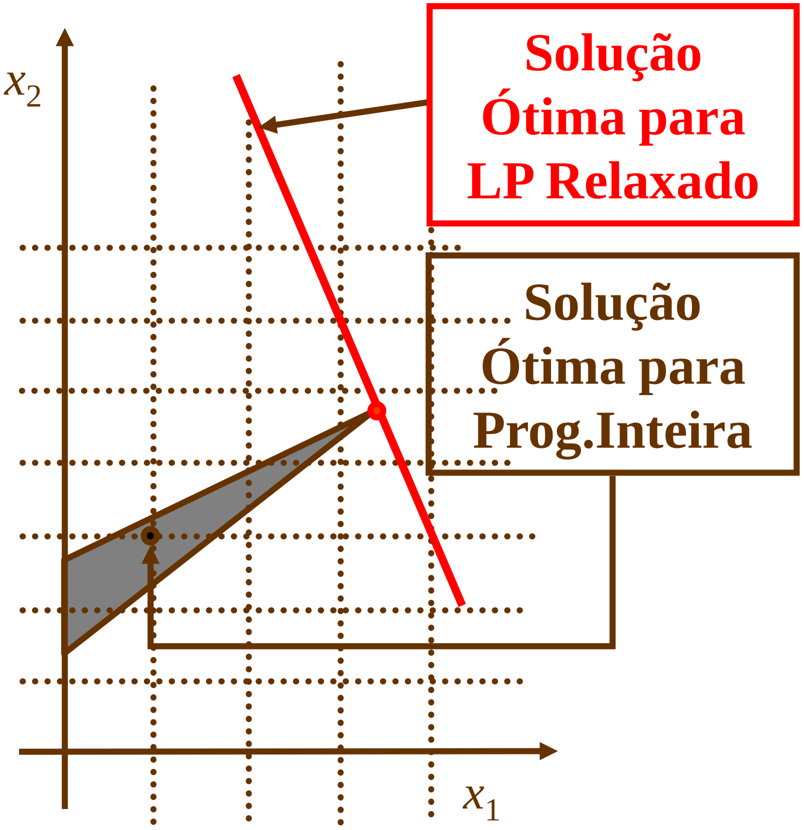
Programação Inteira

LP Relaxado

Nenhum ponto inteiro vizinho ao ponto ótimo do problema relaxado é necessariamente viável.

Mesmo que um dos vizinhos seja viável.

- Não é necessariamente o ponto ótimo inteiro.
- Não é obrigatoriamente uma solução aceitável.



Programação Inteira

Solução por Enumeração

Uma idéia que pode resultar em uma solução para um problema de programação inteira é a de se enumerar todas as possíveis soluções.

De forma exaustiva, o valor da função-objetivo é calculado para todas as soluções viáveis e é escolhido aquele que apresente o maior valor (no caso de maximização) ou o menor valor (no caso de minimização).

Programação Inteira

Solução por Enumeração

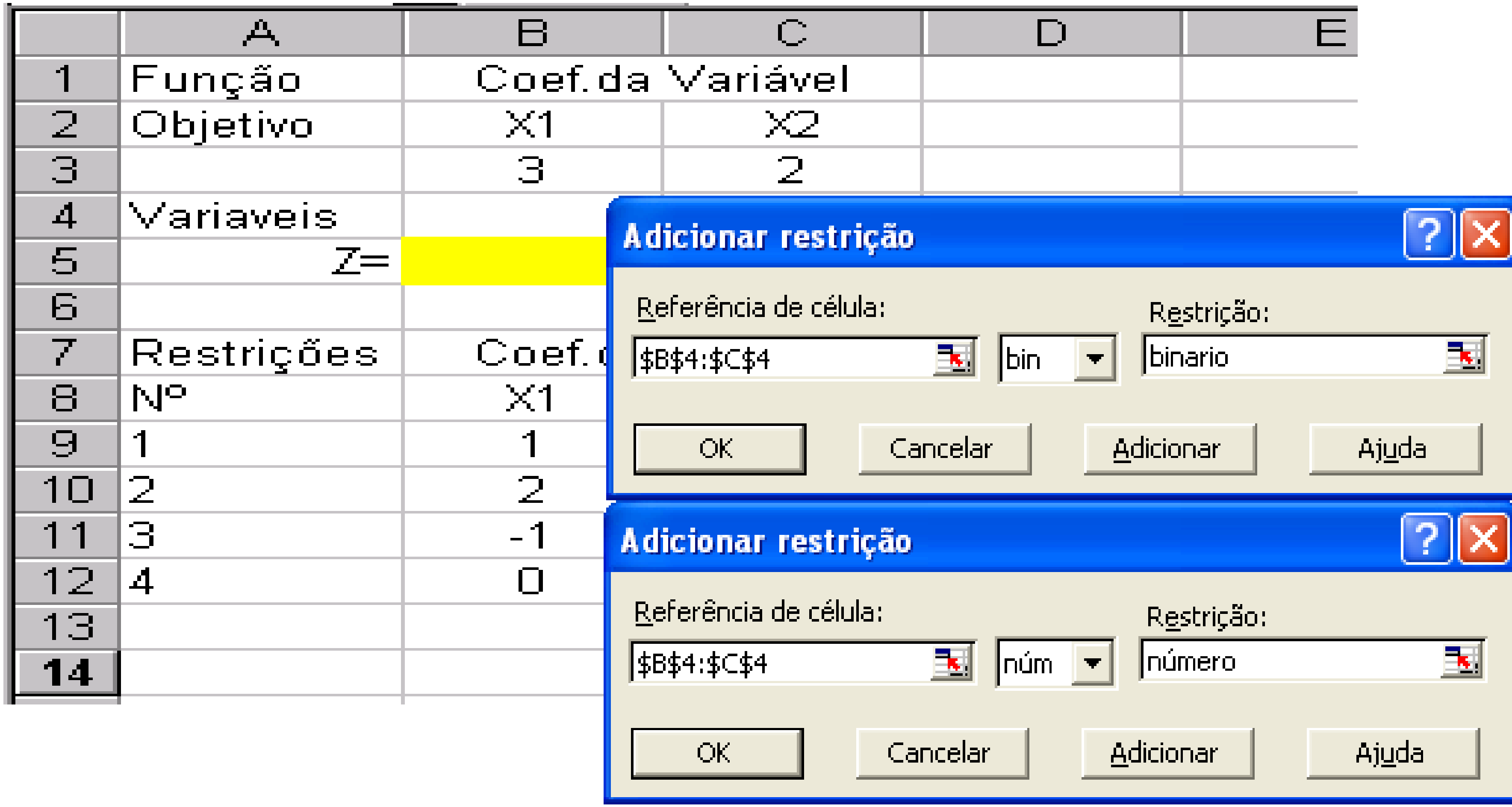
O problema com essa tática de solução está no fato de que ela só consegue ser aplicada a problemas pequenos.

O número de combinações possíveis de soluções cresce de forma exponencial, isto é de forma muito rápida.

Ex.: Um ILP com 100 variáveis de decisão do tipo binárias (assumem 0 ou 1) terá até 2^{100} soluções viáveis, isto é, $1{,}27 \times 10^{30}$ soluções possíveis.

Usando Solver do Excel

Definindo Variáveis Inteiras e Binárias



Problema de Orçamento de Capital
Caso LCL Tecnologia S/A

A LCL Tecnologia S/A tem que planejar seus gastos em P&D. A empresa pré-selecionou 4 projetos e deve escolher dentre esses quais deve priorizar em função de restrições orçamentárias. Os dados relevantes encontram-se na tabela abaixo.

		Capital Requerido em mil R$				
Proj.	**NPV(8%) (mil R$)**	**Ano 1**	**Ano 2**	**Ano 3**	**Ano 4**	**Ano 5**
1	$105.99	70	15	0	20	20
2	$128.90	80	20	25	15	10
3	$136.14	90	20	0	30	20
4	$117.38	50	30	40	0	20
Capital Disponível		200	70	70	70	70

Caso LCL Tecnologia S/A

Variáveis de Decisão

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ se o projeto i for selecionado} \\ 0, \text{ se o projeto i não for selecionado} \end{cases} \quad i = 1,2,3,4$$

Função Objetivo = Maximizar o somatório NPV

$$Max \ 105.99X_1 + 128.90X_2 + 136.14X_3 + 117.38X_4$$

Caso LCL Tecnologia S/A

Restrições Orçamentárias

$$70X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 50X_4 \leq 200 \qquad \text{- Ano 1}$$

$$15X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 30X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 2}$$

$$25X_2 + 40X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 3}$$

$$20X_1 + 15X_2 + 30X_3 \leq 70 \qquad \text{- Ano 4}$$

$$20X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 20X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 5}$$

Caso LCL Tecnologia S/A

O Modelo

$$Max\ 105.99X_1 + 128.90X_2 + 136.14X_3 + 117.38X_4$$

$$st$$

$$70X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 50X_4 \leq 200 \qquad \text{- Ano 1}$$

$$15X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 30X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 2}$$

$$25X_2 + 40X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 3}$$

$$20X_1 + 15X_2 + 30X_3 \leq 70 \qquad \text{- Ano 4}$$

$$20X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 20X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 5}$$

$$X_1; X_2; X_3; X_4 \geq 0$$

Caso LCL Tecnologia S/A

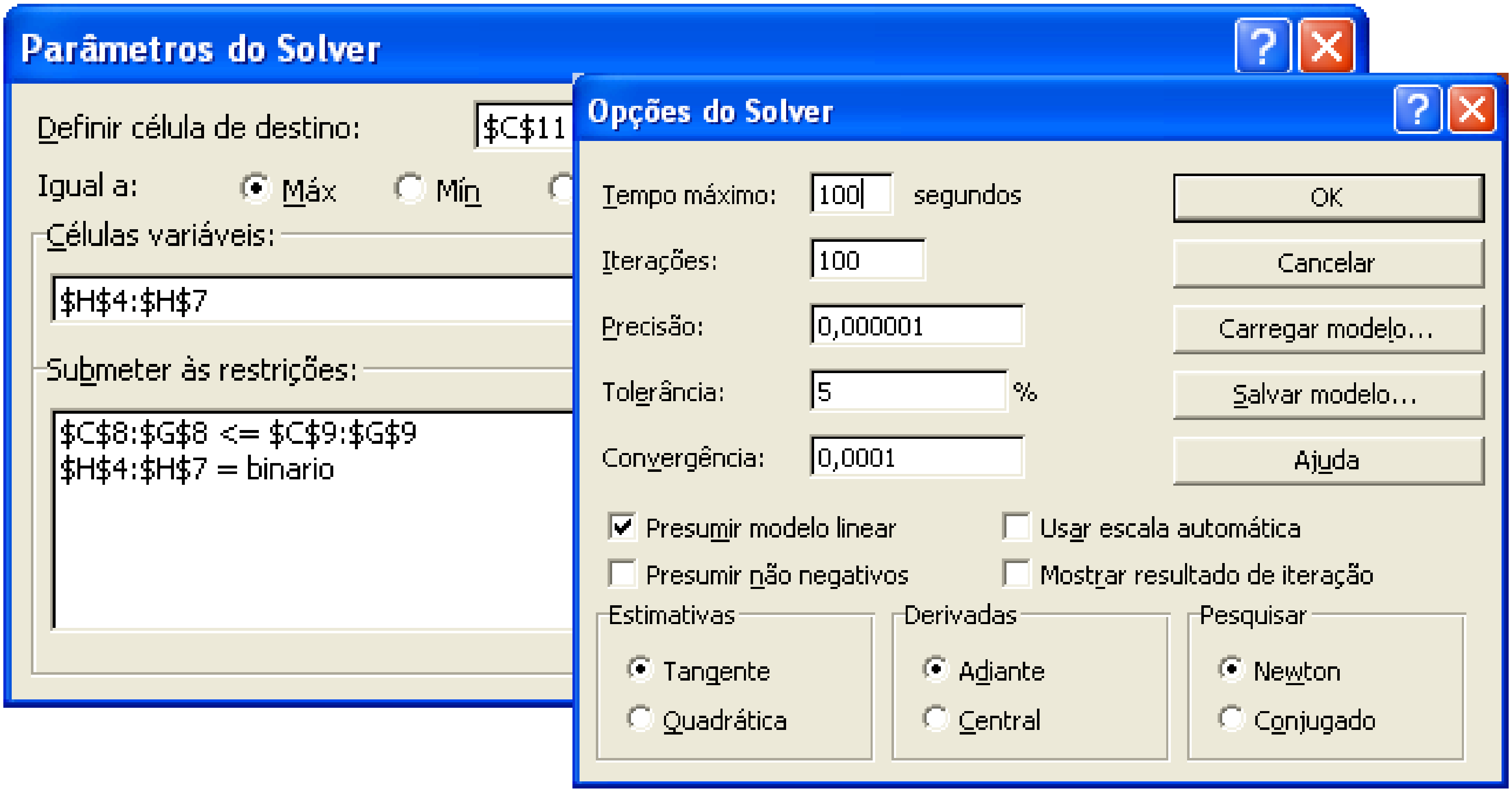
Solver do Excel

C11 =SOMARPRODUTO(B4:B7;H4:H7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Caso LCL Tecnologia					
2								Seleciona
3	Projeto	NPV (8%)	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	0-Não / 1 - Sim
4	1	$105,99	70	15	0	20	20	0
5	2	$128,90	80	20	25	15	10	0
6	3	$136,14	90	20	0	30	20	0
7	4	$117,38	50	30	40	0	20	0
8	Capital Necessário		0	0	0	0	0	
9	Capital Disponivel		200	70	70	70	70	
10								
11		NPV Total =	0					

Caso LCL Tecnologia S/A

Solver do Excel



Caso LCL Tecnologia S/A

Solver do Excel

C11 | f_x =SOMARPRODUTO(B4:B7;H4:H7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Caso LCL Tecnologia				
2								Seleciona
3	Projeto	NPV (8%)	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	0-Não / 1 - Sim
4	1	$105,99	70	15	0	20	20	1
5	2	$128,90	80	20	25	15	10	1
6	3	$136,14	90	20	0	30	20	0
7	4	$117,38	50	30	40	0	20	1
8	Capital Necessário		200	65	65	35	50	
9	Capital Disponivel		200	70	70	70	70	
10								
11		NPV Total =	352,2665					

Variáveis Binárias e Condições Lógicas

As variáveis binárias também se prestam a selecionar alternativas que sejam condicionais.

No exemplo anterior imagine que não mais de um dos projetos 1, 3 e 4 pudesse ser selecionado. Deveríamos então adicionar:

$$X_1 + X_3 + X_4 \leq 1$$

Se apenas um dos projetos e apenas um dos projetos 1, 2 e 4 tivesse que ser escolhido obrigatoriamente, deveríamos incluir:

$$X_1 + X_2 + X_4 = 1$$

Variáveis Binárias e Condições Lógicas

Imagine agora que o projeto 1 dependa de uma tecnologia que deve ser desenvolvida pelo projeto 2, isto é, o projeto 1 só pode ser aprovado se e somente se o projeto 2 for aceito. Deveríamos então incluir:

$$\boxed{X_1 - X_2 \leq 0}\begin{cases} X_1 = 0, X_2 = 0 \Rightarrow \text{nenhum dos projetos aceitos} \\ X_1 = 1, X_2 = 1 \Rightarrow \text{ambos os projetos aceitos} \\ X_1 = 0, X_2 = 1 \Rightarrow \text{apenas o projeto 2 foi aceito} \\ X_1 = 1, X_2 = 0 \Rightarrow \text{inviável} \end{cases}$$

Exemplo: Problema da Mochila

Imagine que os alunos da disciplina sejam contemplados com um cruzeiro marítimo após o término do curso, patrocinado pelo programa de mestrado;

- Em alto mar o navio começa a afundar ...
- Só existe um barco salva-vidas, que, no entanto, só pode levar c quilos

Exemplo: Problema da Mochila

- Cada pessoa no navio tem um certo peso p_i
- Cada pessoa i proporciona um benefício b_i se for levada para o barco salva-vidas
- O problema consiste em escolher as pessoas que trarão o maior benefício possível <u>sem</u> <u>ultrapassar</u> a capacidade do barco

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
Professor	140	0

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
Professor	140	0
Recém-graduado	60	1

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	**Peso (Kg)**	**Benefício**
Professor	140	0
Recém-graduado	60	1
Bombeiro	100	3

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
Professor	140	0
Recém-graduado	60	1
Bombeiro	100	3
Cozinheiro	80	4

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
Professor	140	0
Recém-graduado	60	1
Bombeiro	100	3
Cozinheiro	80	4
Morena "olhos verdes"	75	3

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
Professor	140	0
Recém-graduado	60	1
Bombeiro	100	3
Cozinheiro	80	4
Morena "olhos verdes"	75	3
Enfermeira	60	2

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
Professor	140	0
Recém-graduado	60	1
Bombeiro	100	3
Cozinheiro	80	4
Morena “olhos verdes”	75	3
Enfermeira	60	2
Médico	90	10

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.
- ✓ Solução 1: M + E + B (250 Kg) Benefício = 15

Exemplo: Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
Professor	140	0
Recém-graduado	60	1
Bombeiro	100	3
Cozinheiro	80	4
Morena "olhos verdes"	75	3
Enfermeira	60	2
Médico	90	10

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg.
- ✓ Solução 1: M + E + B (250 Kg) Benefício = 15
- ✓ Solução 2: M + MOV + C (245 Kg) Benefício = 17

Complexidade do Problema da mochila

Para n pessoas há 2^n configurações possíveis

Exemplo: Para $n = 50$ há 10^{15} soluções para serem testadas

Um computador que realiza uma avaliação em 10^{-8} segundos gastaria cerca de 130 dias para encontrar a melhor solução por enumeração completa!

Conclusão: O barco afundaria antes que fosse tomada a decisão de quem seriam os escolhidos

Problema da Mochila: observações

GRADUAÇÃO UniCesumar

- Problema NP-difícil
- Ainda não existem algoritmos que o resolva em tempo polinomial
- Abordado por métodos heurísticos

Exercício 01

A Capitania S.A., localizada em Pedra Lascada, aluga 3 tipos de barcos para passeios marítimos: jangadas, supercanoas e arcas com cabine. A companhia fornece juntamente com o barco um capitão para navegá-lo e uma tripulação que varia de acordo com a embarcação: uma para jangadas, duas para supercanoas e três para arcas.

A companhia tem 4 jangadas, 8 supercanoas e 3 arcas e em seu corpo de funcionários: 10 capitães e 18 tripulantes.

O aluguel é por diárias e a Capitania lucra \$50 por jangada, \$70 por supercanoa e \$100 por arca.

Faça um modelo de programação matemática que determine o esquema de aluguel que maximiza o lucro.

Problema da Mochila

Um excursionista planeja fazer uma viagem acampando. Há 5 itens que ele deseja levar consigo, mas estes, juntos, excedem o limite de 60 quilos que ele supõe ser capaz de carregar. Para ajudar a si próprio no processo de seleção, ele atribui valores, por ordem crescente de importância a cada um dos itens conforme a tabela a seguir:

Item	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Peso(Kg)	52	23	35	15	7
Valor	100	60	70	15	8

Supondo a existência de uma unidade de cada item, faça um modelo de programação inteira que maximize o valor total sem exceder as restrições de peso.

Alocação de Pessoal

Um hospital trabalha com atendimento variável em demanda durante as 24 horas do dia. As necessidades distribuem-se segundo a tabela:

Turno	Horário	Número requerido de enfermeiros
1	08 às 12h	51
2	12 às 16h	58
3	16 às 20h	62
4	20 às 24h	41
5	24 às 04h	32
6	04 às 08h	19

O horário de trabalho de um enfermeiro é de 8 horas seguidas e só pode ser iniciado no começo de cada turno, isto é, às 8 ou 12 ou 16 ou 20 ou 24 ou 04 horas. Elabore um modelo de PLI que minimize o gasto com a mão-de-obra. Considere que cada enfermeiro recebe $100 por hora de trabalho no período diurno (08 às 20 h) e $125 no período noturno (20 às 08 h)