

## PROJET ACTUARIAT VIE

---

# Influence du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère

---

### *Groupe 7*

*Élaboré par :*

Faydi MARIEM  
Guemira MARWA  
Smari MARIEM  
Achour SALMA  
Bel Hadj Slimen NADA

*Encadré par :*

Mr. Maatoussi Anis

2019- 2020

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Maximum de vraisemblance</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Principe de la méthode . . . . .	2
1.3 Conclusion . . . . .	4
<b>2 Modèle Lee Carter</b>	<b>5</b>
2.1 Introduction . . . . .	5
2.2 Présentation du modèle . . . . .	5
2.2.1 Définition . . . . .	5
2.2.2 La relation de Lee Carter avec le taux de mortalité . . . . .	5
2.3 Estimation des paramètres avec la méthode des Moindres Carrés . . . . .	6
2.3.1 Méthode des Moindres Carrés . . . . .	6
2.3.2 Estimation du modèle Lee Carter . . . . .	6
2.4 Conclusion . . . . .	7
<b>3 Valeur Actuelle Probable</b>	<b>8</b>
3.1 Introduction . . . . .	8
3.2 Valeur Actuelle Probable "VAP" . . . . .	8
3.2.1 Valeur Actuelle . . . . .	8
3.2.2 Valeur Actuelle Probable . . . . .	8
3.3 Définition des rentes viagères . . . . .	8
3.3.1 Rente viagère à termes anticipés . . . . .	9
3.3.2 Rente viagère à termes échus . . . . .	9
3.3.3 Rente viagère différée et temporaire . . . . .	9
3.4 Définition de Taux d'intérêt : . . . . .	9
3.5 Définition de Taux de mortalité : . . . . .	9
3.6 Définition de la table de mortalité : . . . . .	9
3.7 Définition de la table actuarielle : . . . . .	10
3.8 Définition de Taux de mortalité : . . . . .	11
3.9 Conclusion . . . . .	11
<b>4 Applications numériques en R</b>	<b>12</b>
4.1 Introduction . . . . .	12
4.2 Présentation et description des données . . . . .	12
4.3 Extrapolation des taux de mortalité par la méthode de Coale et Kisker . . . . .	13
4.4 Estimation des paramètres du Lee Carter . . . . .	14
4.4.1 Estimation par le modèle <code>lca()</code> . . . . .	14
4.4.2 Estimation en utilisant le package <code>StMoMo</code> . . . . .	15
4.5 Projection du taux de mortalité . . . . .	17
4.5.1 Le Package <code>Forecast</code> . . . . .	17
4.5.2 Mise en oeuvre avec la méthode <code>forecast</code> . . . . .	18
4.6 Taux de mortalités historique pour la cohorte 1943 . . . . .	18
4.7 Calcul de la Valeur Actuelle Probable du contrat . . . . .	20
4.7.1 Cas d'une rente viagère à termes anticipés . . . . .	21
4.7.2 Cas d'une rente viagère temporaire d'une durée de 15 ans. . . . .	21
4.8 Variation de la VAP en fonction du taux d'intérêt . . . . .	21
4.9 Influence du taux d'intérêt à l'influence de la variation des taux de mortalité . . . . .	22

4.10 Conclusion . . . . . 23

**Conclusion Générale 24**

**Bibliographie 24**

# Table des figures

4.1	Logarithme de taux de mortalité (1872-2017) en Italie par genre . . . . .	12
4.2	Logarithme de taux de mortalité (0-110) en Italie par genre . . . . .	13
4.3	Les valeurs estimées des $a_x$ , $b_x$ et $k_t$ du modèle . . . . .	14
4.4	Les valeurs estimées de $b_x$ en fonction d'âge . . . . .	15
4.5	Les valeurs estimées de $k_t$ du modèle avec <b>lca()</b> . . . . .	16
4.6	Les valeurs estimées des $a_x$ , $b_x$ et $k_t$ du modèle avec le package StMoMo . . . . .	17
4.7	Projection du taux de mortalité pour les 50 prochaines années . . . . .	18
4.8	Le taux de mortalité pour la cohorte 1943 en fonction d'âge $x$ . . . . .	19
4.9	Le logarithme du taux de mortalité pour la cohorte 1943 en fonction d'âge $x$ . . . . .	19
4.10	La table de survie . . . . .	20
4.11	La table d'actuarielle . . . . .	20
4.12	Variation de la VAP en fonction de taux d'intérêt . . . . .	22
4.13	Relation entre le taux d'intérêt et le taux de mortalité . . . . .	23

# Introduction

Les dernières années ont été marquées par un intérêt croissant porté par les démographes sur les problèmes relatifs à la mortalité et à la longévité des populations. A cet égard, les statisticiens et les assureurs ont cherché à analyser ces phénomènes. Certes, l'analyse des tendances de mortalité n'est pas sans intérêt pour les spécialités de l'assurance vie. En effet, l'estimation des rentes aussi bien viagères que temporaires dépend notamment de la mortalité. Par ailleurs, le calcul des rentes est fortement influencé par l'évolution des taux d'intérêt.

Dans ce projet, on se propose d'analyser l'effet des taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère. En fait, il existe plusieurs indicateurs pour le suivi de la mortalité de la population. Cependant, l'indicateur le plus utilisé reste le taux de mortalité. Ce taux est souvent utilisé par les financiers et les spécialistes d'actuariat dans la mesure où il conditionne l'engagement de l'assureur en matière de calcul des primes et l'estimation des rentes à distribuer. Rappelons que le contrat d'assurance vie garantit le versement d'une prestation sous forme de rente ou de capital à un bénéficiaire selon deux options :

- Une assurance vie en cas de vie qui garantit le versement d'un capital ou le service d'une rente si l'assuré est en vie à une date donnée.
- Une assurance vie en cas de décès par laquelle l'assureur s'engage à verser un capital ou une rente en cas de décès qui peut intervenir à n'importe quelle époque ou avant un délais fixé à l'avance.

Dans les deux cas l'estimation de la rente (ou du capital) dépend du taux d'actualisation utilisé qui lui même dépend du taux d'intérêt en vigueur.

Notre étude s'intéresse particulièrement à analyser l'influence du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable (VAP) d'une rente viagère sur un portefeuille composé d'une cohorte d'assurés Italiens ayant souscrit un contrat en 2018 à l'âge de 75 ans.

Dans un premier chapitre, nous estimerons les paramètres du modèle de Lee Carter.

Un deuxième chapitre sera consacré aux fondements théoriques de la valeur actuelle probable.

Enfin un dernier chapitre nous permettra de tester empiriquement l'effet de la variation du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable moyennant le langage R.

# Chapitre 1

## Maximum de vraisemblance

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les fondements théoriques de la méthode de maximum de vraisemblance.

### 1.2 Principe de la méthode

La vraisemblance de l'échantillon s'exprime de la manière suivante[1]

$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta),$$

où  $f$  désigne la fonction de masse de probabilité ou la densité suivant la loi retenue. L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de  $\theta$  est la valeur  $\hat{\theta}$  qui maximise la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)$  par rapport à  $\theta$  (pour un jeu d'observation donné) sur son domaine de définition. De plus, ceci est équivalent à maximiser le logarithme de la vraisemblance (appelé log-vraisemblance) :

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta)$$

On définit les fonctions de score :

$$S_j(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln \mathcal{L}(\theta), \quad \text{pour } j = 1, \dots, p$$

La maximisation de  $\mathcal{L}(\theta)$  se résume donc à résoudre les équations normales

$$S_j(\theta) = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, p$$

Généralement, il n'existe pas de formules fermées pour ces équations, on les résout numériquement.

Dans le cas de données groupées, où  $n_j$  représente le nombre de données dans la classe  $]c_{j-1}, c_j]$ ,  $j = 1, \dots, r$  la probabilité qu'une donnée tombe dans l'intervalle  $]c_{j-1}, c_j]$  est  $F(c_j) - F(c_{j-1})$ . La fonction de vraisemblance est donc :

$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^r [F(c_i, \theta) - F(c_{i-1}, \theta)]^{n_i}$$

On trouvera dans tout bon livre de statistique mathématique (par exemple Hogg et al.[4](2005), Saporta[5](2006), Dagnelie[2](2007), Dalggaard[3](2008)) une étude détaillée des propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Aussi nous contenterons-nous, ici, de ne présenter que les principaux résultats.

**Invariance** Pour toute fonction bijective  $g$ , si  $\hat{\theta}$  est l'EMV de  $\theta$ , alors  $g(\hat{\theta})$  est l'EMV de  $g(\theta)$ , soit :

$$\hat{g}(\theta) = g(\hat{\theta})$$

**Biais et efficacité asymptotique** Sous des conditions de régularité, l'EMV est asymptotiquement sans biais et efficace. C'est-à-dire que si  $\hat{\theta}_n$  est l'EMV de  $\theta$  pour un échantillon (i.i.d.) de taille  $n$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\hat{\theta}_{n,i}] = \theta_i, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}[\hat{\theta}_{n,i}] = \frac{1}{I_n(\theta)_{ii}}, \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, p\},$$

où  $I_n(\theta)$  désigne la matrice d'information de Fisher de taille  $p \times p$  dont l'élément  $(i,j)$  est donné par :

$$I_n(\theta)_{ij} = -n\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\ln f(X,\theta)\right]$$

$(I_n(\theta)_{ii})^{-1}$  est appelée borne de Cramer-Rao.

**Normalité asymptotique** La distribution asymptotique de l'EMV est une loi normale multivariée de moyenne  $\theta$  et avec matrice de variance-covariance  $I_n(\theta)^{-1}$ , i.e.

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \mathcal{N}(\theta, I_n(\theta)^{-1}),$$

où  $I_n(\theta)$  est la matrice d'information de Fisher donnée ci-dessus.

Concentrons-nous pour un instant sur le cas univarié ( $p=1$ ), plus simple. Par la propriété de normalité asymptotique, on a que, pour de grands échantillons,

$$P\left[-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}} < z_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha,$$

où  $z_\alpha$  est le  $100(1 - \alpha)^e$  centile d'une  $\mathcal{N}(0,1)$ . On peut réécrire l'expression ci-dessus sous la forme :

$$P\left[\hat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\theta)^{-1}} < \theta < \hat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}\right] = 1 - \alpha,$$

d'où

$$\left[\hat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}, \hat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}\right]$$

est un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\theta$ .

En pratique, la forme de l'information  $I_n(\theta)$  rend souvent le calcul de l'intervalle de confiance ci-dessus est impossible. Deux cas de figure se présentent :

1. l'information est connue, mais dépend de  $\theta$  d'une manière compliquée. On remplace alors  $\theta$  par son estimation  $\hat{\theta}$ , ce qui résulte en une estimation de la variance et donc à l'intervalle de confiance

$$\left[\hat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\hat{\theta}_n)^{-1}}, \hat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\hat{\theta}_n)^{-1}}\right]$$

2. l'information est inconnue, par exemple si l'espérance est trop compliquée. Dans un tel cas, on remplace l'espérance par une moyenne empirique : c'est **l'information observée**

$$\hat{I}_n(\hat{\theta}_n) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2\theta} \ln f(x_i; \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{\partial^2}{\partial^2\theta} l(\theta; x_1, \dots, x_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_n}$$

L'intervalle de confiance pour  $\theta$  est alors

$$\left[\hat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{I}_n^{-1}(\hat{\theta}_n)}, \hat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{I}_n^{-1}(\hat{\theta}_n)}\right]$$

Ces idées se généralisent au concept d'ellipse ou d'ellipsoïde de confiance dans le cas multivarié.

En pratique, il n'est pas rare que l'on souhaite estimer non pas  $\theta$ , mais une fonction  $h(\theta)$  de  $\theta$ . On sait déjà que l'EMV de  $h(\theta)$  est  $h(\hat{\theta}_n)$ , mais qu'en est-il d'un intervalle de confiance pour cette estimation ? En général, il s'agit d'un calcul difficile car la distribution de  $h(\hat{\theta}_n)$  peut être très compliquée. On peut alors utiliser la méthode delta, qui est valide pour les grands échantillons. Ainsi dans le cas univarié et pour  $h$  continûment différentiable, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$h(\hat{\theta}_n) \sim \mathcal{N}(h(\theta), [h'(\theta)]^2 I^{-1}(\theta)),$$

d'où un intervalle de confiance de  $h(\theta)$  est

$$\left[h(\hat{\theta}_n) - z_{\alpha/2}\sqrt{[h'(\theta)]^2 I(\theta)}, h(\hat{\theta}_n) + z_{\alpha/2}\sqrt{[h'(\theta)]^2 I(\theta)}\right]$$

Ce résultat s'étend aussi au cas multivarié. Si l'on souhaite estimer une fonction  $h(\theta_1, \dots, \theta_p)$  des paramètres inconnus  $\theta_1, \dots, \theta_p$ , alors par la méthode delta, on a asymptotiquement

$$h(\hat{\theta}_n) \sim \mathcal{N}(h(\theta), \nabla h^T I_n^{-1}(\theta) \nabla h),$$

où  $\nabla h^T$  représente la transposée du gradient  $\nabla h$  est donné par

$$\nabla h(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} h(\theta) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} h(\theta) \end{bmatrix}$$

Un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $h(\theta)$  est donc

$$\left[ h(\hat{\theta}_n) - z_{\alpha/2} \sqrt{\nabla h^T I_n(\theta)^{-1} \nabla h}, h(\hat{\theta}_n) + z_{\alpha/2} \sqrt{\nabla h^T I_n(\theta)^{-1} \nabla h} \right]$$

Considérons l'exemple trivial : on choisit de calibrer la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , alors on a

$$\log \mathcal{L}(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \log \left( \lambda^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} \right) = n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n (-\lambda) x_i$$

D'où l'estimateur de maximum de vraisemblance est  $n / \sum_{i=1}^n X_i$

En pratique, il est plutôt rare de pouvoir obtenir explicitement l'expression du maximum de la fonction de vraisemblance. Dans de tels cas, il faut avoir recours à des méthodes numériques pour résoudre les équations normales (par exemple avec la méthode de Newton-Raphson) ou alors pour directement maximiser la fonction de vraisemblance ou, plus communément, de logvraisemblance.

### 1.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons parlé de l'aspect théorique de la méthode de maximum de vraisemblance et ses limites dans la pratique.



# Chapitre 2

## Modèle Lee Carter

### 2.1 Introduction

Dans le cadre de notre projet nous allons modéliser le taux de mortalité à travers Le modèle de Lee Carter. Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle de Lee Carter en identifiant la méthode des moindres carrés en mettant en évidence la relation de Lee Carter et le taux de mortalité.

### 2.2 Présentation du modèle

#### 2.2.1 Définition

Le modèle original de Lee Carter, Lee et Carter (1992)<sup>1</sup>, se concentre, en tant que principales méthodologies de prévision, sur les taux de mortalité centraux  $\mu_{x,t}$  pour l'âge  $x$  au cours de l'année  $t$  définis comme le rapport entre nombre de décès  $D(x,t)$ , enregistrés au cours de l'année civile  $t$  pour les personnes âgées de  $x$ , et exposition au risque  $E(x,t)$  obtenue en tant que nombre moyen de personnes vivant au cours du calendrier année  $t$ .

Nous rappelons que ce taux coïncide avec le taux central de mortalité sous l'hypothèse de constance par morceaux, ce qui conduit à :

$$\mu_{x,t} = \frac{\mathbb{E}(D_{x,t})}{\mathbb{E}(E_{x,t})}$$

Où :

$D_{x,t}$  est le nombre de décès d'âge  $x$  dans l'année  $t$ .

$E_{x,t}$  est l'exposition au risque d'âge  $x$  dans l'année  $t$  ou autrement dit, le nombre de vivants d'âge  $x$  observé au milieu de l'année  $t$ .

#### 2.2.2 La relation de Lee Carter avec le taux de mortalité

D'après Lee et Carter, la relation entre la mortalité, le temps et l'âge est définie de la manière suivante : [6]

$$\ln(\mu_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

$\varepsilon_{x,t}$  est la structure gaussienne centrée (bruit blanc),  $a_x$  et  $b_x$  sont des composantes dépendant de l'âge et  $k_t$  la composante temporelle.

Le modèle nous laisse la liberté sur la modélisation de la structure d'évolution du terme temporel  $k_t$ .

— Coefficient  $a_x$

Le Coefficient  $a_x$  est la composante du modèle liée à l'âge. Il décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps.

---

1. Le modèle Lee – Carter a été introduit par Ronald D. Lee et Lawrence Carter en 1992 avec l'article «Modeling and Forecasting the Time Series of US Mortality»

— Coefficient  $b_x$ 

Le coefficient  $b_x$  est supposé invariant au fil du temps et il explique comment les taux diminuent rapidement ou lentement en réponse au changement de  $k_t$ .

$$\frac{d \ln(\mu_{x,t})}{dt} = b_x \cdot \frac{dk_t}{dt}$$

— Coefficient  $k_t$ 

Le coefficient  $k_t$  reproduit la tendance temporelle sous-jacente, tandis que le terme  $b_x$  est considéré dans l'ordre de prendre en compte les différents effets du temps  $t$  à chaque âge.

$$\frac{d \ln(\mu_{x,t})}{dt} = k_t \cdot \frac{db_x}{dt}$$

— Coefficient  $\varepsilon_{x,t}$ 

Le coefficient  $\varepsilon_{x,t}$  implique les "bruits" ou la variance des taux centraux de mortalité. Ce coefficient  $\varepsilon_{x,t}$  dont l'espérance = 0 et la variance =  $\sigma^2$  reflète l'influence historique particulière de l'âge non prise en compte dans le modèle.

Des contraintes sur les paramètres doivent donc venir compléter le modèle. Lee et Carter proposent de fixer la valeur des sommes des  $b_x$  et des  $k_t$

$$\sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} b_x = 1$$

$$\sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} k_t = 0$$

## 2.3 Estimation des paramètres avec la méthode des Moindres Carrés

### 2.3.1 Méthode des Moindres Carrés

La méthode des moindres carrés était élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809. Elle permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure, à un modèle mathématique censé décrire ces données. La méthode des moindres carrés permet de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en ajoutant de l'information dans le processus de mesure. [7]

### 2.3.2 Estimation du modèle Lee Carter

Pour que le modèle soit calibré, on utilise la méthode des moindres carrés ordinaires et décomposition en valeurs singulières. La méthode dite des moindres carrés pondérés (1993) estime les paramètres du modèle Lee Carter [8] en minimisant la fonction :

$$(\hat{a}_x, \hat{b}_x, \hat{k}_t) = \arg \min \sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} [\hat{\ln}(\mu_{x,t}) - \ln(\mu_{x,t})]^2$$

Avec :

- $\ln(\mu_{x,t}) = a_x - b_x \cdot k_t$
- $\hat{\ln}(\mu_{x,t}) = \hat{a}_x - \hat{b}_x \cdot \hat{k}_t$

#### Etape 1 : Estimation des $a_x$

Les coefficients  $a_x$  sont estimés par les moyennes des  $\ln(\mu_{x,t})$  au cours du temps.

$$\hat{a}_x = \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} \ln \hat{\mu}_x(t)$$

#### Etape 2 : Estimation des $b_x$ et $k_t$

Désignons par  $\mathbf{Z}$  la matrice de dimensions  $(x_{max} - x_{min} + 1) \times (t_{max} - t_{min} + 1)$  dont l'élément  $(x, t)$ , noté  $z_{x,t}$ , est donné par

$$z_{x,t} = \ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{a}_x$$

Alors, il s'agit d'un centrage des  $\ln \hat{\mu}_x(t)$  par rapport à leur moyenne temporelle. L'idée est d'approximer  $\mathbf{Z}$  par le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne

$$\mathbf{Z} \approx \hat{\beta} \hat{\mathbf{k}}'$$

- Finalement, il suffit de prendre :

$$\hat{b}_x = \frac{v_1}{\sum_j v_{j1}}$$

$$\hat{k}_x = \sqrt{\lambda_1} \left( \sum_j v_{j1} \right) u_1$$

avec

- $\hat{\beta} = (\hat{b}_{x_{min}}, \dots, \hat{b}_{x_{max}})'$
- $\hat{\mathbf{k}} = (\hat{k}_{t_{min}}, \dots, \hat{k}_{t_{max}})'$
- $u_i$  c'est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre normé de la matrice carrée  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$  de dimensions  $(t_{max} - t_{min} + 1) \times (t_{max} - t_{min} + 1)$  correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$
- $v_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre de la matrice carrée  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}'$  de dimensions  $(x_{max} - x_{min} + 1) \times (x_{max} - x_{min} + 1)$ , correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$

### Etape 3 : Ajustement des paramètres $k_t$

À ce niveau du développement, nous possédons déjà des estimateurs  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{b}_x$  et  $\hat{k}_t$ . Néanmoins, en traitant directement les estimations brutes des taux instantanés de mortalité  $\hat{\mu}_x(t)$ , nous ne faisons que peu de cas de la qualité de l'ajustement du point de vue des nombres de décès. Donc Il est conseillé d'effectuer une étape de plus en exigeant par exemple que

$$\sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} D_{xt} = \sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} E_{xt} \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t)$$

Le modèle de Lee Carter reproduirait maintenant fidèlement le nombre total de décès observés pour une année donnée. Alors, il convient de réestimer de nouveau le paramètre temporel  $k_t$ .

## 2.4 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté le modèle Lee Carter en identifiant la méthode des moindres carrés qui est une parmi plusieurs qui permet d'estimer les paramètres de notre modèle. Ainsi, nous avons mis en évidence la relation adéquate entre Lee Carter et le taux de mortalité. Dans le chapitre suivant, nous allons identifier les effets du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère.

## Chapitre 3

# Valeur Actuelle Probable

### 3.1 Introduction

Dans le cadre de notre projet, nous allons présenter l'influence du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère d'un portefeuille d'assurés italiens. Dans ce chapitre, nous allons aussi présenter la valeur actuelle probable, la définition d'une rentes viagères et finalement la table de mortalité ainsi que ses composants qui seront détaillés dans des formules mathématiques.

### 3.2 Valeur Actuelle Probable "VAP"

#### 3.2.1 Valeur Actuelle

Dans la finance la valeur actuelle désigne la valeur actuelle des flux futures espérés, qui est actualisée au taux de rentabilité exigé par les investisseurs. Elle est toujours inférieure ou égale à la valeur future,[9] représentée par :

$$VA = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k 1C_k$$

avec :

$F_K$  : une série de flux

$V$  : facteur d'actualisation

$C_k$  : des conditions de paiements aléatoires

#### 3.2.2 Valeur Actuelle Probable

La valeur actuelle probable d'un engagement est définie comme le produit de la valeur actuelle de cet engagement par la probabilité de réalisation de l'engagement. Elle permet à l'assureur d'évaluer ces engagements et donc de les provisionner suffisamment. [9]

La Valeur Actuelle Probable est représentée par l'espérance de la valeur actuelle :

$$VAP = E(VA) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k P(C_k)$$

### 3.3 Définition des rentes viagères

La rente viagère est une somme d'argent versée, de manière régulière, à un bénéficiaire, ce qui lui donne une certaine analogie avec une retraite ou avec certaines pensions à vie jusqu'à son décès. En contrepartie, le capital ne peut pas être récupéré, ni être transmis aux héritiers. La rente cesse au décès de son bénéficiaire, exceptée si le contrat prévoit la réversion de la rente pour le conjoint ou tout autre bénéficiaire désigné.[10]

Il existe plusieurs types de rente viagère :

### 3.3.1 Rente viagère à termes anticipés

Une rente viagère à termes anticipés est une série annuelle de flux de l'individu à commencer d'aujourd'hui jusqu'au décès. [11]

Sa valeur actuelle probable est

$$VAP(\text{rente}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kP_x = \ddot{a}_x$$

avec :

$x$  : l'âge de l'assuré à la souscription

${}_kP_x$  : Probabilité de survie est égale à  $P(T > x + k | T > x)$

$v^k$  : un facteur d'actualisation compris entre 0 et 1 est égale à  $(1 + i)^{-k}$  ( $i$  : le taux d'intérêt annuel)

### 3.3.2 Rente viagère à termes échus

Une rente viagère à termes anticipés est une série annuelle de flux de l'individu à partir de la première année jusqu'au décès. [11]

Sa valeur actuelle probable est

$$VAP(\text{rente}) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_kP_x = a_x$$

La relation entre la Rente viagère à termes échus et la Rente viagère à termes anticipés est simplement :

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

### 3.3.3 Rente viagère différée et temporaire

Une rente viagère différée et temporaire est une série annuelle de flux de l'individu. Elle est versée pendant une durée déterminée entre  $[s; s + t]$  et s'interrompt en cas de décès du bénéficiaire si sa durée de versement n'est pas garantie. [12]

Sa valeur actuelle probable est [11]

$$VAP(\text{difftemp}) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k {}_kP_x = {}_s|_t\ddot{a}_x$$

La rente peut être seulement temporaire si le versement de l'individu à commencer d'aujourd'hui  $s=0$  et notée

$${}_t\ddot{a}_x = {}_0|_t\ddot{a}_x$$

La rente peut être seulement différé de  $s$  années si  $t = \infty$  et notée

$${}_s\ddot{a}_x = {}_s|\infty\ddot{a}_x$$

## 3.4 Définition de Taux d'intérêt :

Le taux d'intérêt  $i$  est un pourcentage de rémunération fixé à l'avance s'appliquant à une somme confiée par le créancier à son débiteur. C'est une rémunération ou une contrepartie du risque engendrée par le prêteur.

## 3.5 Définition de Taux de mortalité :

Le taux de mortalité  $q_x$  est une mesure du nombre de décès (en général ou dû à une cause spécifique) dans une population particulière, à l'échelle de la taille de cette population, par unité de temps.

## 3.6 Définition de la table de mortalité :

La table de mortalité appelée aussi table de survie est une table donnant, pour chaque âge, la probabilité annuelle de décès d'un individu. Elle est établie selon des données statistiques. Elle est utilisée en démographie pour étudier l'espérance de vie d'une population cible. [13]

La table de mortalité représente :

- $x$  : Présente l'âge de l'assuré à la souscription
- $d_x$  : Le nombre de décès entre l'âge  $x$  et  $x+1$

$$d_x = l_x * q_x$$

- $l_x$  : Présente le nombre de personne survivant jusqu'à l'âge  $x$  :

$$l_x = l_{x-1} * (1 - q_{x-1})$$

- $L_x$  : Présente le nombre d'années des personnes vécues entre les âges exacts  $x$  et  $x + 1$  :

$$L_x = l_x - 5d_x$$

- $T_x$  : Présente le nombre d'années des personnes vécues après l'âge exact  $x$  :

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + ..$$

- ${}^o e_x$  : Présente le nombre moyen d'années de vie restant à l'âge exact  $x$

$${}^o e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

### 3.7 Définition de la table actuarielle :

La table actuarielle est un outil statistique qui montre l'espérance de vie moyenne pour les personnes selon le sexe et l'âge. Elle hérite de la table de mortalité et ajoute de plus une colonne du taux d'intérêt.

La table de mortalité représente :

- $l_x$  : Présente le nombre de personne survivant jusqu'à l'âge  $x$  :

$$l_x = l_{x-1} * (1 - q_{x-1})$$

- $D_x$  : Présente le nombre de décès à l'âge  $x$  du dernier anniversaire dans une population au cours d'une année :

$$D_x = v^x * l_x$$

- $N_x$  : Présente le nombre d'organismes d'âge  $x$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ..$$

- $C_x$  : n'appartient pas dans la table de survie, elle est utilisée uniquement pour les calculs

$$C_x = v^{x+1} * d_x$$

- $M_x$  : Présente le taux de mortalité central pour le sous-ensemble d'une population qui se situe entre les âges exacts  $x$  et  $x + y$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ..$$

- $v$  : C'est un facteur d'actualisation mais n'appartient pas dans la table de survie, elle est utilisée uniquement pour les calculs

$$v = \frac{1}{1+i}$$

avec  $i$  le taux d'intérêt

Avec la table de mortalité on peut déterminer les probabilités de vie et de décès  $p_x$  et  $q_x$  avec les formules suivantes :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad p_x = 1 - q_x$$

### 3.8 Définition de Taux de mortalité :

Le taux de mortalité est une mesure du nombre de décès (en général ou dû à une cause spécifique) dans une population particulière , à l'échelle de la taille de cette population, par unité de temps

### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté en premier lieu la valeur actuelle probable, en deuxième lieu la rente viagère et finalement la table de mortalité.

Dans le chapitre suivant, nous entamons la phase pratique de ces notions en R.

## Chapitre 4

# Applications numériques en R

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons projeter et estimer le taux de mortalité de la populations italiennes en utilisant le modèle lee Carter, calculer la valeur actuelle probable du contrat d'une rente viagère à terme anticipé et temporaire d'une durée de 15 ans, étudié la variation de la valeur actuelle probable en fonction du taux d'intérêt et finalement étudier l'influence du taux d'intérêt à l'influence de la variation des taux de mortalité.

### 4.2 Présentation et description des données

Les données sur lesquelles nous travaillons sont celles provenant du site internet [www.mortality.org](http://www.mortality.org). Il s'agit de *Human Mortality Database (HMD)*, une base de données qui a été créée pour fournir des données détaillées sur la mortalité pour 47 populations homogènes dans différents pays et régions.

Dans le cadre de notre projet, nous nous sommes concentrés sur les données concernant l'Italie et qui se présentent comme ceci :

- **year** : les années pour lesquelles la mortalité a été observée entre **1872-2017**
- **age** : les âges pour lesquelles la mortalité a été observée entre **0-110**
- **pop** : une répartition de la population Italienne selon 3 modalités : année du décès, âge du décès et genre (H/F).
- **rate** : les taux de mortalité observés en Italie repartis selon 3 modalités : année, âge et genre (H/F).

Pour mieux analyser les données, nous commençons par tracer les logarithmes des taux de mortalité de la population Italienne âgée de 0 à 110 ans pour la période 1872-2017 (4.1) :

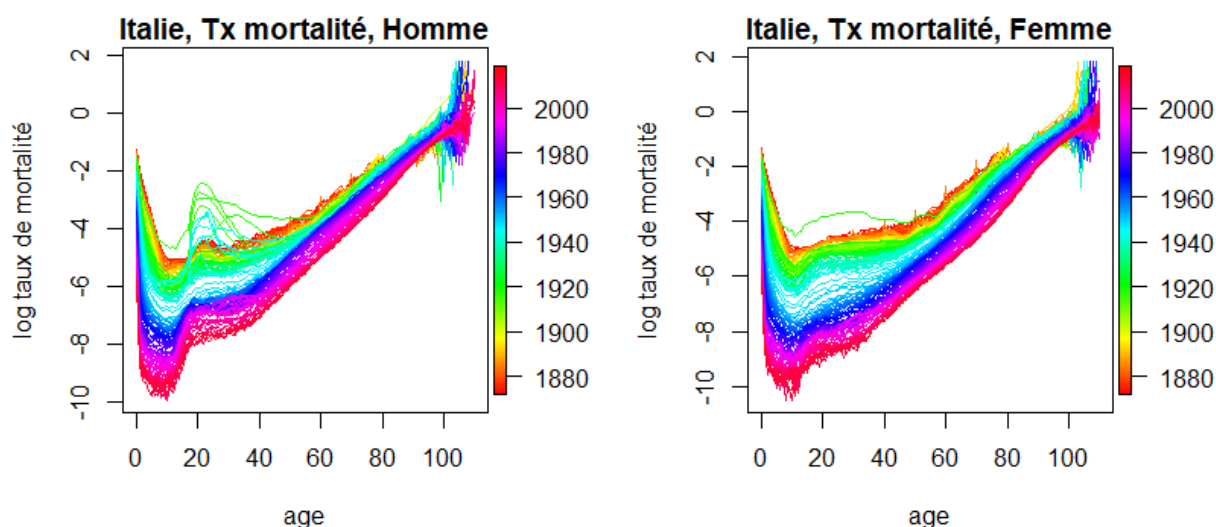


FIGURE 4.1 – Logarithme de taux de mortalité (1872-2017) en Italie par genre



On constate tout d'abord que le taux de mortalité a baissé au cours du temps pour les deux genres. De même nous observons un taux particulièrement élevé pour les hommes âgés de 20 à 40 ans durant les périodes 1914-1918 (première guerre mondiale) et 1941-1946 (deuxième guerre mondiale). Cependant, l'augmentation du taux de mortalité est restée relativement moins importante pour les femmes âgées de 20 à 50 ans pendant les mêmes périodes.

Pour confirmer les observations ci-dessus, on peut envisager le traçage des logarithmes des taux de mortalité en fonction des années pour les différentes tranches d'âge (4.2) :

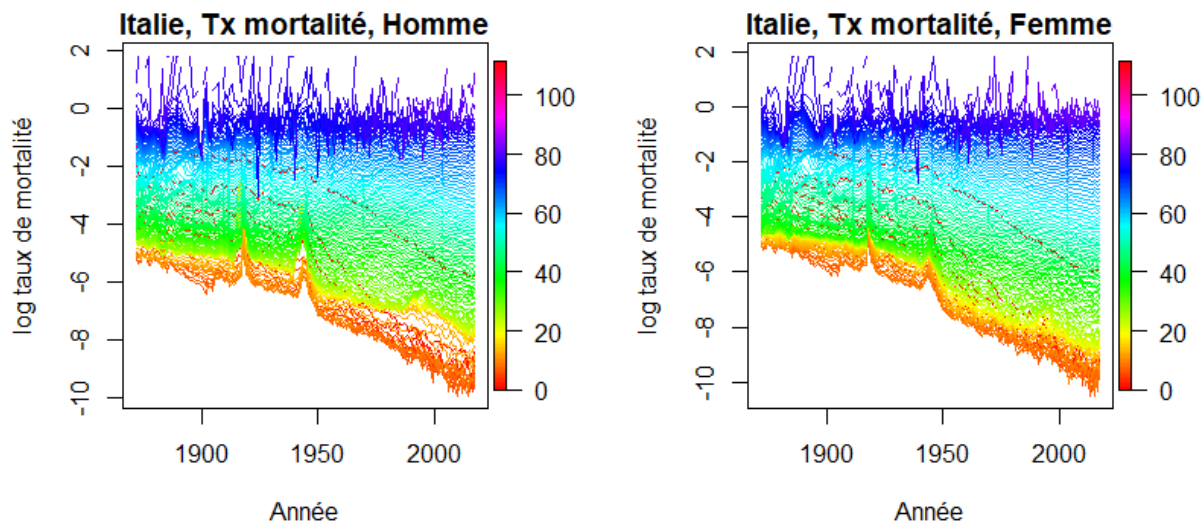


FIGURE 4.2 – Logarithme de taux de mortalité (0-110) en Italie par genre

Cette représentation permet de confirmer que la mortalité a diminuée pour tous les âges selon des tendances différentes.

### 4.3 Extrapolation des taux de mortalité par la méthode de Coale et Kisker

#### Choix de la plage d'âge : Fermeture de tables

Avant d'utiliser des modèles d'ajustement, il convient de "fermer" les tables, les taux bruts au delà de 90 ans étant inexploitable. Différentes méthodes existent sur ce point et nous retiendrons ici la méthode de Coale et Kisker (COALE et KISKER [1990])[14] qui conduit à des résultats satisfaisants. Cette méthode consiste à extrapoler les taux instantanés de mortalité aux grands âges (jusqu'à  $x = 110$  ans par exemple) en se basant sur la formule

$$g_x = \ln\left(\frac{\hat{\mu}_x}{\hat{\mu}_{65}}\right)/(x - 65), x \geq 65$$

Coale et Kisker ont en effet remarqué empiriquement que les courbes des  $g_x$  possèdent en général un pic aux alentours de 80 ans avant de décroître linéairement. Ils ont par conséquent proposé l'équation :

$$g_x = g_{80} + s(x - 80), x \geq 80$$

Avec :

$s$  le taux de croissance du taux à partir de 80 ans

$$s = -\frac{\ln(\hat{\mu}_{79} + 31g_{80})}{465}$$

et  $g_{80}$  représente l'étendue entre le log taux de mortalité à l'âge 65 ans et celui à 80 ans

$$g_{80} = \frac{\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}}\right)}{15}$$

A partir de la méthode de Coale et Kisker, nous pouvons affirmer que l'intervalle d'âge va être  $[80, 110]$ . Puisque avec la fonction  $g(x)$  nous avons la contrainte que l'âge doit être au delà de 80 ans.

Alors pour ce stade là, nous avons choisi comme âge maximum une valeur qui appartient à l'intervalle  $[80,110]$ .

## 4.4 Estimation des paramètres du Lee Carter

### 4.4.1 Estimation par le modèle $\text{lca}()$

Pour s'adapter au modèle Lee-Carter (sans passer par les logarithmes), la fonction  $\text{lca}()$  (Latent Class Analysis) peut être utilisée. LeeCarter est ici appliqué séparément entre la population masculine, féminine et totale et en considérant un âge maximum appartenant à  $[80,110]$ . Cette hypothèse sera utilisée pour la calibration dans le modèle de mortalité qui sera présenté dans les sections suivantes.

$\text{lca}$  est un modèle de mesure dans lequel les individus peuvent être classés en types mutuellement exclusifs et exhaustifs, ou classes latentes, en fonction de leur modèle de réponses sur un ensemble de variables indicatrices catégorielles.

—  $\text{lca}()$  retourne un objet qui nous permet d'inspecter  $a_x$ ,  $b_x$  et  $k_t$ . Les chiffres représentent les valeurs des paramètres estimés.

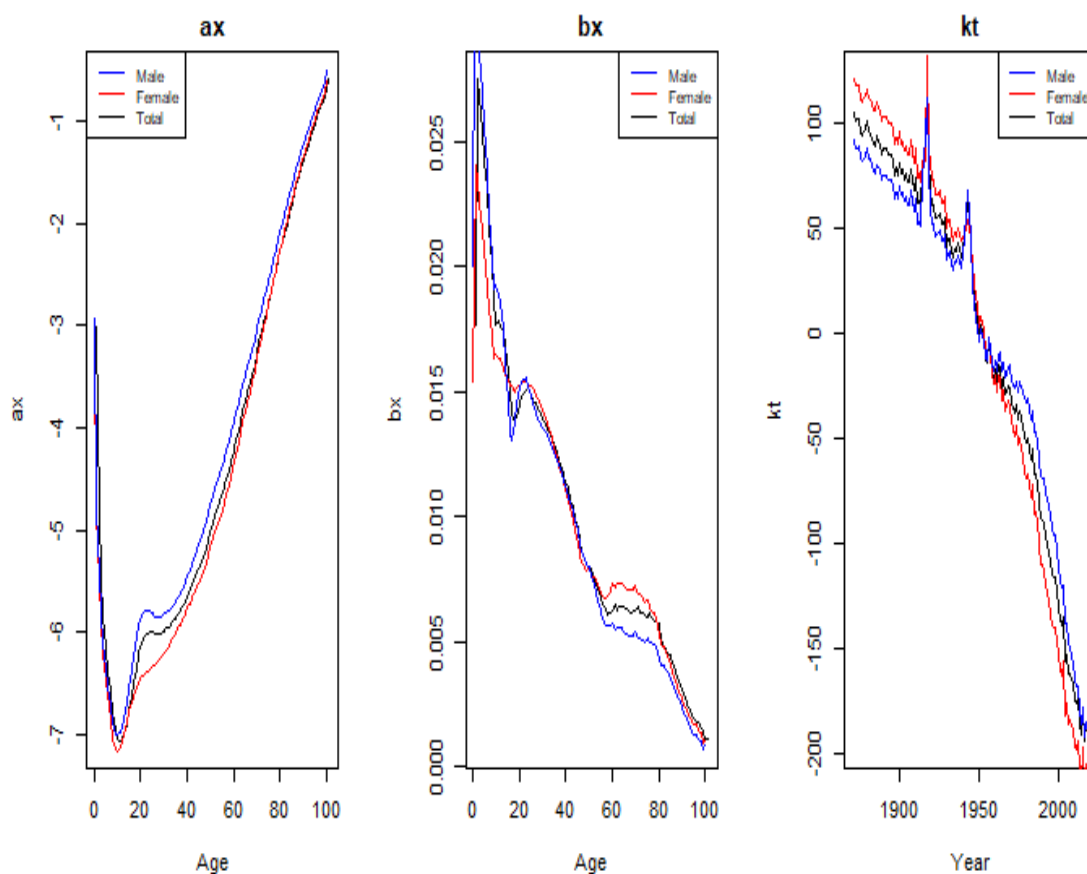


FIGURE 4.3 – Les valeurs estimées des  $a_x$ ,  $b_x$  et  $k_t$  du modèle

La Figure 4.3 représente cette estimation à partir des données masculines et féminines italiennes.

Un comportement similaire des paramètres est observé selon différents ensembles de données.

Comme prévu la mortalité moyenne augmente lorsque l'âge augmente (voir schéma  $\hat{a}_x$ ).

En outre, il est clairement visible la jeune bosse de mortalité pour les hommes dans la tranche d'âge (20,30) en raison de décès accidentels.

Le coefficient estimé  $\hat{b}_x$  montre plutôt une valeur plus élevée pour les jeunes âges et une plus grande amé-

lioration pour la tranche d'âge (60-80).

Enfin, comme prévu,  $\hat{k}_x$  a une tendance à la baisse avec l'augmentation de temps.

— **Amélioration pour la choix d'âge :**

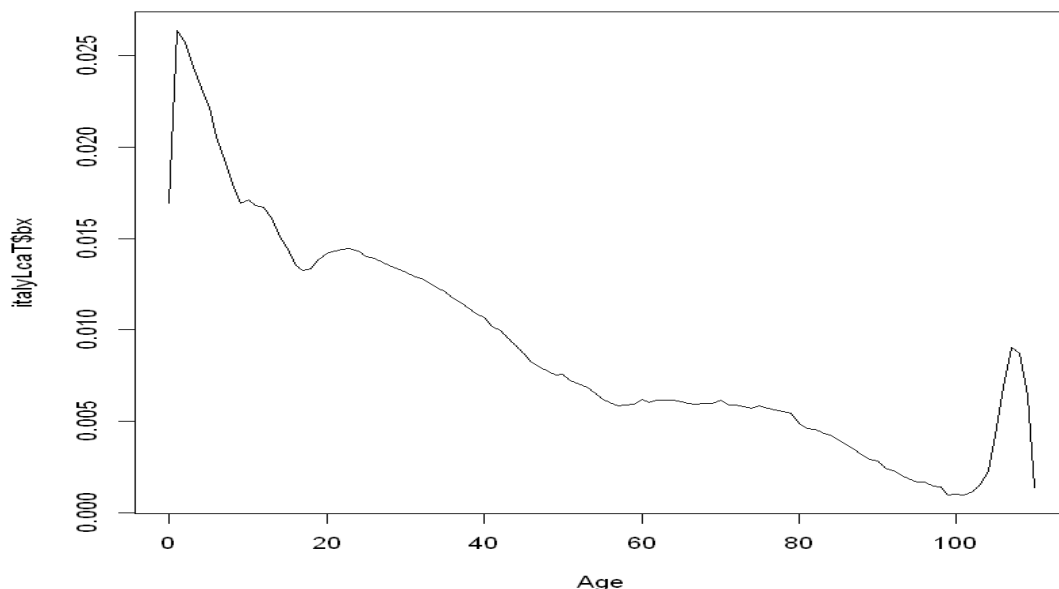


FIGURE 4.4 – Les valeurs estimées de  $b_x$  en fonction d'âge

A partir de 100 ans, les données apparaissent difficilement interprétables, on constate en effet des chutes de mortalité soudaines où le taux déjà s'annule (au-delà de 100 ans). Ce qui ne correspond sans doute pas à la réalité.

En se basant sur la méthode de Coale et Kisker sur les données principales de la base de données HMD et sur cette représentation de l'évolution du taux de mortalité, nous avons constaté et pris la décision que l'intervalle d'âge est  $[0,100]$ . Alors, nous avons choisit comme âge maximum 100 ans.

#### 4.4.2 Estimation en utilisant le package StMoMo

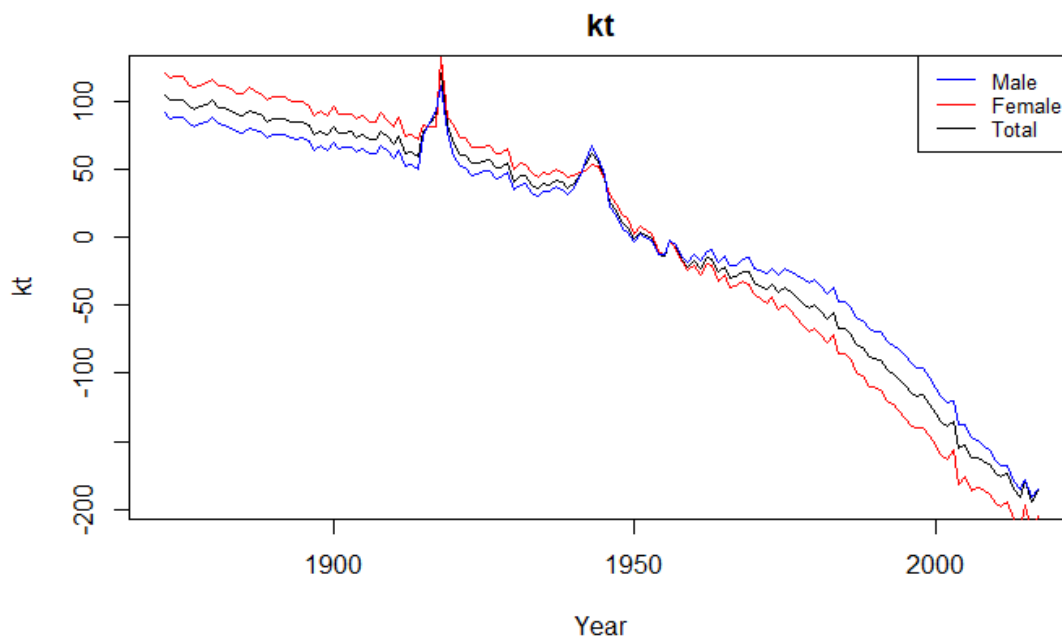
##### Package StMoMo

StMoMo (Stochastic Mortality Modeling) est un package R fournissant des fonctions pour spécifier et ajuster les modèles de mortalité stochastique, y compris les modèles Lee-Carter, le modèle CBD, le modèle APC et de nombreux autres modèles. L'ensemble comprend également des outils pour analyser la qualité de l'ajustement des modèles et effectuer des projections et des simulations de mortalité.[15]

##### Choix de la période choisie

D'après la première méthode d'estimation des coefficients du modèle Lee Carter ( avec la fonction prédéfinie `lca()`), nous avons provoqué qu'il faut restituer l'intervalle des années 1872-2017.

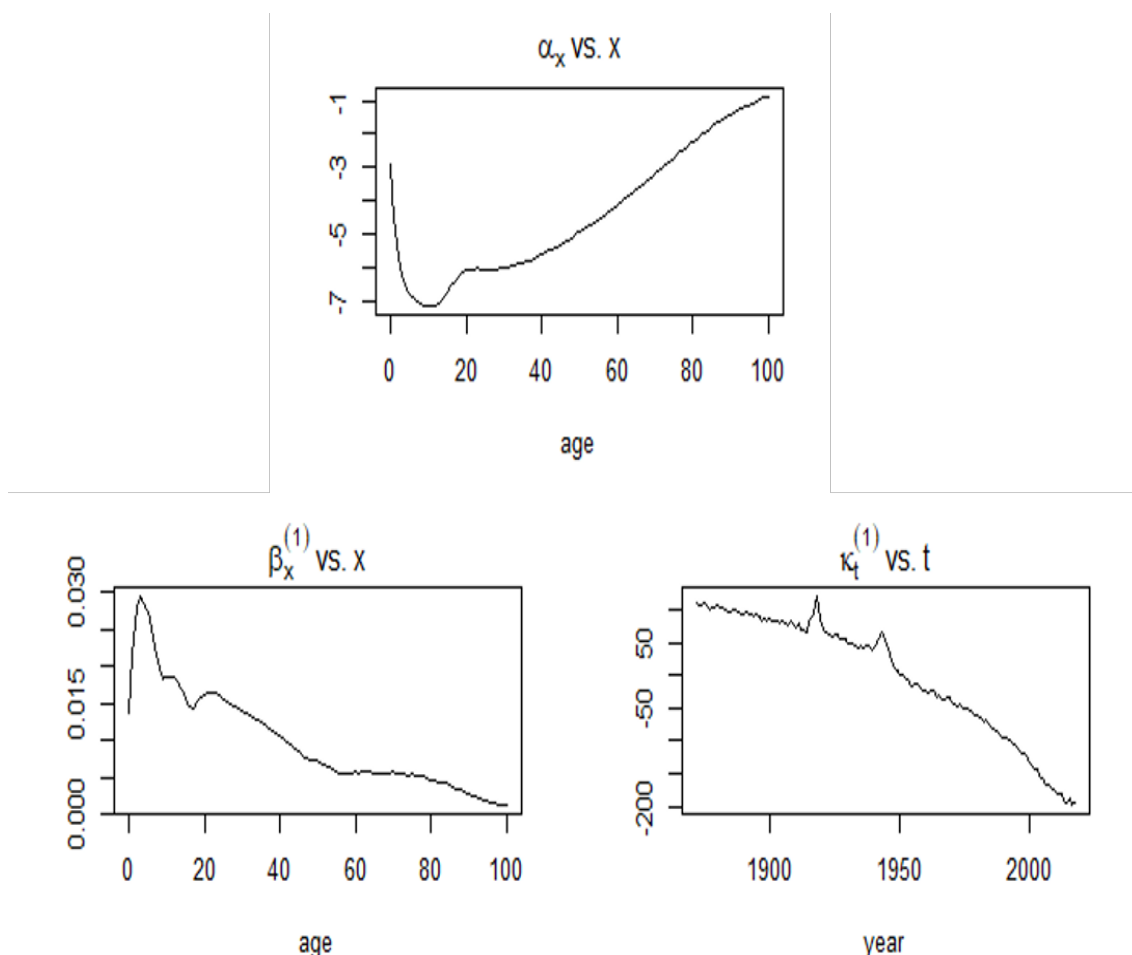
Dans la figure 4.5, la courbe montre que la valeur de  $k_t$  est presque stable, autour du valeur 100 de l'année 1872 jusqu'à 1900, avant de marquer une forte décroissance. Ainsi, cette courbe présente deux grands pics de valeur de  $k_t$  qui expliquent que l'italie a participé dans les deux guerres mondiales respectivement en 1914 et 1939. Alors, nous avons avoué une différence sur les années les plus récentes mais aucune sur les années les plus anciennes. Comme nous souhaitons projeter, nous allons restreindre notre étude aux années 1900 - 2017 pour la calibration de modèle de mortalité

FIGURE 4.5 – Les valeurs estimées de  $k_t$  du modèle avec `lca()`

### Application de la méthode

On va estimer différemment les coefficients du modèle Lee Carter avec le package `StMoMo` en appliquant les étapes suivantes :

- Charger les données annuelles disponibles par années d'âge dans la base HMD.
- Appliquer une fonction qui va créer un objet `StMoMoData` adapté à l'ajustement d'un modèle de mortalité stochastique.
- Une transformation des données `StMoMo` des expositions centrales en expositions initiales sera appliquée. Les expositions initiales sont calculées en ajoutant la moitié des décès aux expositions centrales en utilisant la fonction `central2initial()`.
- Assumer à avoir un seuil d'âge égale à 100 ans.
- Générer une matrice de poids en fonction d'un groupe d'âge et d'années et d'un ensemble de cohortes étant donné un poids nul. Ceci est utile pour exclure certains points de données lors de l'ajustement d'une mortalité stochastique par la fonction `genWeightMat()`. Cette dernière comporte un argument à calibrer qui est `clip` qui est le nombre de cohortes dans la limite pour attribuer un poids nul. Cela peut être utilisé pour peser zéro certaines des premières et dernières cohortes dans les données. Dans l'exemple italien, nous avons pris la valeur de `clip` égale à 3.
- Estimer le modèle LC(Lee-Carter) avec le paramètre `link` qui définit la fonction de liaison et la composante aléatoire associées au modèle de mortalité. Nous avons opté pour "log" qui supposerait que les décès suivent une distribution de Poisson et utilisent un lien logarithmique tandis que "logit" supposerait que les décès suivent une distribution binomiale.

FIGURE 4.6 – Les valeurs estimées des  $a_x$ ,  $b_x$  et  $k_t$  du modèle avec le package StMoMo

La figure 4.6 ci-dessus montre les ajustements LC.

#### Étape 1 : Estimation du coefficient $\hat{a}_x$

La courbe, relativement élevée chez les nouveaux-nés et décroît rapidement avec l'âge pour atteindre son minimum absolu vers l'âge de 10 ans. On survient d'ailleurs un pic de mortalité discrètement appelé "bosse-accident". Cette bosse, qui touche les jeunes d'une vingtaine d'années, est en fait essentiellement composée de deux sortes d'événements, suicides et accidents. Ensuite, les logarithmes moyens des taux instantanés de mortalité augmentent pratiquement linéairement avec l'âge.

#### Étape 2 : Estimation du coefficient $\hat{b}_x$

Les paramètres  $\hat{b}_x$  représentent l'interaction de l'effet des années calendaires sur les taux de mortalité. Cet effet est toujours positif mais la valeur ne cesse de diminuer avec l'âge. Autrement dit, l'effet des années calendaires agit majoritairement avant 60 ans et de moins en moins au delà. On constate une bosse à 22 ans. Au contraire, vers les âges élevés,  $\hat{b}_x$  avoisine zéro et la chute temporelle de la mortalité est donc beaucoup moins sensible.

#### Étape 3 : Estimation du coefficient $\hat{k}_x$

Enfin, comme prévu,  $\hat{k}_x$  a une tendance à la baisse avec l'aide de temps

## 4.5 Projection du taux de mortalité

### 4.5.1 Le Package Forecast

Le package contient des méthodes et des outils pour afficher et analyser des prévisions de séries temporelles univariées, y compris le lissage exponentiel via des modèles d'espace d'état et la modélisation automatique ARIMA. [16]

### 4.5.2 Mise en oeuvre avec la méthode forecast

Il s'agit d'une fonction générique de prévision à partir de séries temporelles ou de modèles de séries temporelles.

#### Choix du nombre d'année

Pour soumettre le forecast, La valeur horizon est mise à 50 ans.

#### Application de la prévision

Forecast utilise des informations sur les fluctuations de la vitesse du changement dans le passé pour estimer l'intervalle de confiance pour l'incertitude qui enveloppe le taux de mortalité dans l'avenir.

Les valeurs prévues de  $k_t$  remises à zéro au cours de la dernière année observée (2017) sont rapportées ici.

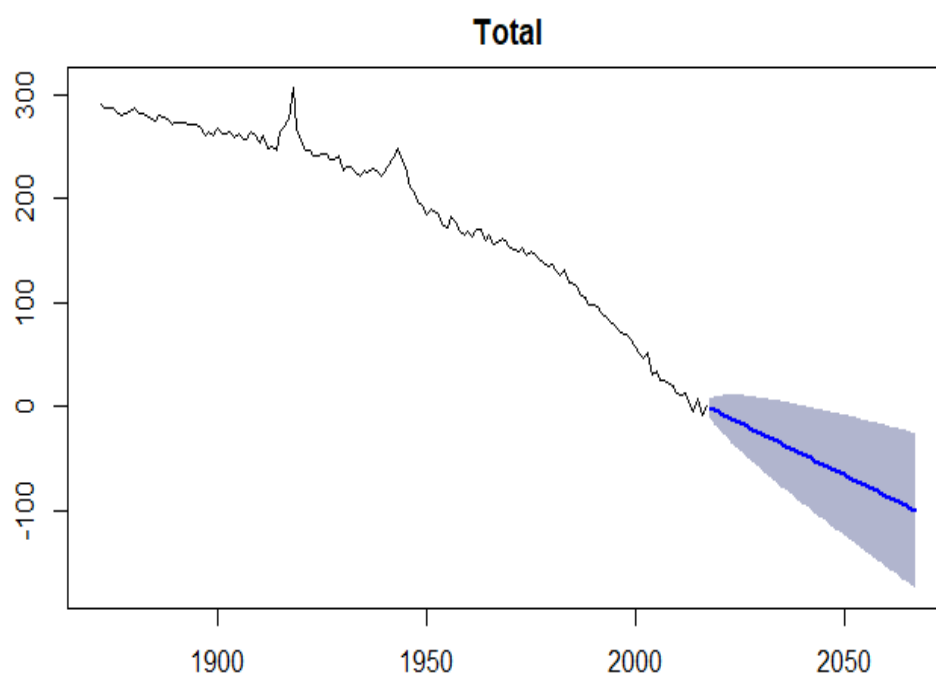


FIGURE 4.7 – Projection du taux de mortalité pour les 50 prochaines années

La Figure 4.7, nous trouvons les intervalles de confiance à 95% et les comparons avec les estimations du modèle classique de Lee et Carter. Remarquons que les taux de mortalité en 2050 générées par le modèle de Lee et Carter se situent dans cet intervalle. Ceci prouve qu'il n'existe pas une différence significative entre l'ajustement du modèle, du moins pour les données italiennes.

## 4.6 Taux de mortalités historique pour la cohorte 1943

Une cohorte désigne un ensemble d'individus ayant vécu un même événement au cours d'une même période. Le package StMoMo fournit une fonction utile "extractCohort" permet d'extraire les taux de mortalité à partir du modèle selon une cohorte bien déterminée.

Dans cette partie nous avons déterminé la cohorte avec la formule suivante

$$\text{Cohorte} = \text{Période} - \text{âge}$$

Dans notre cas : la période vaut 2018, l'âge égale à 75 ans. Alors la cohorte est égale :

$$2018 - 75 = 1943$$

La figure 4.8 représente le taux de mortalité historique pour la cohorte 1943 en fonction d'âge sans appliquer la fonction "log" ce qui explique le comportement exponentielle de la courbe à partir de l'âge 75 ans. On peut aussi remarquer que le taux de mortalité reste stable entre l'âge de 20 à 55 et commence à augmenter progressivement de l'âge de 55 ans jusqu'à 75 ans.

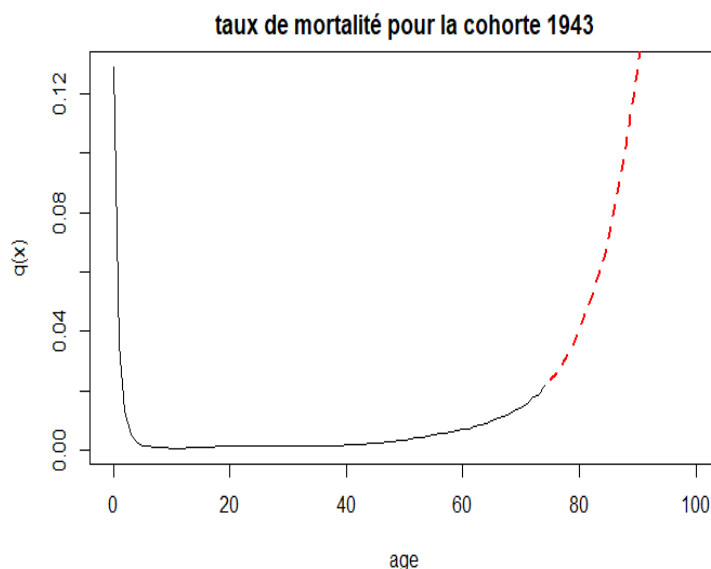


FIGURE 4.8 – Le taux de mortalité pour la cohorte 1943 en fonction d'âge  $x$

En appliquant la fonction logarithme, on obtient la figure 4.9 qui représente le logarithme de taux de mortalité historique pour la cohorte 1943 en utilisant la fonction `extractcohort()`. Cette courbe présente presque le même comportement du taux de mortalité de la population italienne déjà vu dans la partie précédente.

Le taux diminue de 0 à 15 ans en raison de la mortalité infantile en Italie. Aux alentours de 18 ans, la « bosse des accidents » implique une élévation de la mortalité en raison de l'augmentation de la mortalité accidentelle. Ce taux croît ensuite jusqu'à l'âge maximum de la table 100 ans.

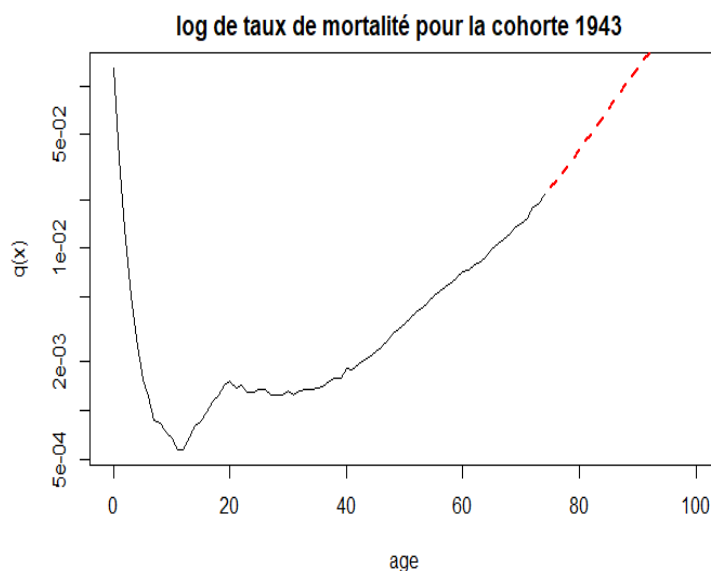


FIGURE 4.9 – Le logarithme du taux de mortalité pour la cohorte 1943 en fonction d'âge  $x$

## 4.7 Calcul de la Valeur Actuelle Probable du contrat

Le problème principal de l'assureur vie est de pouvoir déterminer à la date de souscription d'un contrat quelconque, la valeur d'un engagement à long terme dont la réalisation n'est pas certaine. Pour cela, il utilise la notion de valeur actuelle probable qui combine à la fois la notion de la valeur probable (calcul de probabilité) et celle de valeur actuelle (mathématiques financières).

Pour calculer la VAP, plusieurs étapes ont été réalisées. Nous avons affiché tout d'abord la table de mortalité qui nous permet de visualiser la probabilité annuel de décès d'un individu et la table actuarielle. Ensuite nous avons calculé la durée de vie attendu afin d'obtenir la valeur actuelle probable.

### Étape 1 :

D'abord, nous avons converti les taux de mortalité en probabilités de décès pour la cohorte 1943 à l'aide de la fonction `mx2qx()` afin de construire la table de survie.

### Étape 2 :

Après, nous avons utilisé la fonction `probs2lifetable()` pour créer une nouvelle table de survie en précisant la génération de cette table à partir de la probabilité de décès  $q_x$  ou de survie  $p_x$ .

<b>x</b> <int>	<b>lx</b> <dbl>	<b>px</b> <dbl>	<b>ex</b> <dbl>
0	10000.0000	0.8786875	66.3968561
1	8786.8753	0.9651830	74.5636719
2	8480.9428	0.9867597	76.2534023
3	8368.6525	0.9949315	76.2765677
4	8326.2360	0.9972520	75.6651450
5	8303.3552	0.9984320	74.8736487
6	8290.3353	0.9987651	73.9912366
7	8280.0978	0.9991215	73.0827194
8	8272.8241	0.9991609	72.1469757
9	8265.8821	0.9992531	71.2075681

FIGURE 4.10 – La table de survie

### Étape 3 :

Ensuite, nous avons créé une nouvelle table actuarielle qui est générée à partir de la table de survie avec un taux d'intérêt égale à 1.5 % et qui contient tous les indicateurs nécessaires à l'analyse des résultats par période.

<b>x</b> <int>	<b>lx</b> <dbl>	<b>Dx</b> <dbl>	<b>Nx</b> <dbl>	<b>Cx</b> <dbl>	<b>Mx</b> <dbl>	<b>Rx</b> <dbl>
0	10000.0000	10000.00000	389193.78324	1195.196766	4248.36774	197302.35088
1	8786.8753	8657.01998	379193.78324	296.956957	3053.17097	193053.98314
2	8480.9428	8232.12677	370536.76325	107.385097	2756.21401	190000.81217
3	8368.6525	8003.08463	362304.63648	39.964174	2648.82892	187244.59816
4	8326.2360	7844.84827	354301.55186	21.239361	2608.86474	184595.76925
5	8303.3552	7707.67519	346456.70359	11.907191	2587.62538	181986.90450
6	8290.3353	7581.86147	338749.02841	9.224279	2575.71819	179399.27912
7	8280.0978	7460.58997	331167.16694	6.456931	2566.49391	176823.56093
8	8272.8241	7343.87802	323706.57697	6.071491	2560.03698	174257.06702
9	8265.8821	7229.27631	316362.69895	5.319459	2553.96549	171697.03004

FIGURE 4.11 – La table d'actuarielle



**Étape 4 :**

Pour le calcul de la valeur actuelle probable à partir d'un tableau actuariel, nous avons utilisé la fonction "axn" qui permet directement d'afficher le résultat.

**4.7.1 Cas d'une rente viagère à termes anticipés**

En se rappelant de la formule du calcul de la valeur actuelle probable à terme anticipés :

$$VAP(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kP_x = \ddot{a}_x$$

Dans notre cas :

$$VAP(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kP_{75} = \ddot{a}_{75}$$

Le résultat obtenu pour la valeur actuelle probable d'une rente viagère à termes anticipés pour une cohorte des assurés ayant un contrat en 2018 à l'âge de 75 ans égale à **12.35293**

**4.7.2 Cas d'une rente viagère temporaire d'une durée de 15 ans.**

En se rappelant de la formule du calcul de la valeur actuelle probable temporaire d'une durée de 15 ans :

$$VAP(difftemp) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k {}_kP_x = {}_s|t\ddot{a}_x$$

Dans notre cas :

$$VAP(difftemp) = \sum_{k=0}^{16} v^k {}_kP_{75} = {}_0|15\ddot{a}_{75}$$

Le résultat obtenu pour la valeur actuelle probable dans le cas d'une rente viagère temporaire d'une durée de 15 ans pour une cohorte des assurés ayant un contrat en 2018 à l'âge de 75 ans égale à **1.776947**

**4.8 Variation de la VAP en fonction du taux d'intérêt**

La formule de la valeur actuelle probable est la somme de produit de la probabilité de survie et le facteur d'actualisation qui dépend du taux d'intérêt **i**

D'où la valeur actuelle probable varie en fonction du taux d'intérêt

$$VAP(rente) = \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kP_x$$

$$VAP(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+i} \right)^k {}_kP_x$$

$$VAP(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} {}_kP_x$$

Après le développement de la formule, nous avons montré que la valeur actuelle probable est inversement proportionnelle à la valeur du taux d'intérêt .

La figure 4.12 affirme l'effet du changement de la valeur du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable.

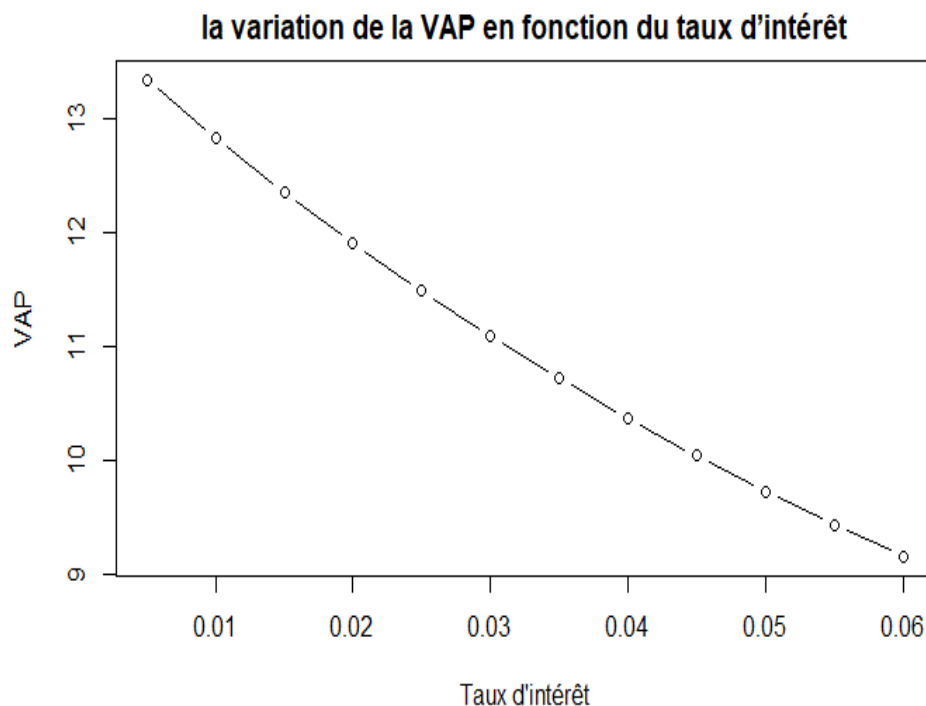


FIGURE 4.12 – Variation de la VAP en fonction de taux d'intérêt

## 4.9 Influence du taux d'intérêt à l'influence de la variation des taux de mortalité

La formule du taux de mortalité central  $M_x$  dépend de la valeur du taux d'intérêt  $i$ . La valeur du taux d'intérêt augmente si la valeur du taux de mortalité diminue et vis-versa.

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots + C_{x+y}$$

avec :

- $x$  : l'âge de la sous population
- $C_x$  : Commutation de décès actualisée à l'âge  $X$

$$M_x = v^{x+1} * d_x + v^{x+2} * d_{x+1} + v^{x+3} * d_{x+2} + \dots + v^{x+y+1} * d_{x+y}$$

avec :

- $v^x$  : la facteur d'actualisation compris entre 0 et 1
- $d_x$  : le nombre de décès

$$M_x = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+1} * d_x + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+2} * d_{x+1} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+3} * d_{x+2} + \dots + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+y+1} * d_{x+y}$$

$$M_x = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+1} * l_x * q_x + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+2} * l_{x+1} * q_{x+1} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+3} * l_{x+2} * q_{x+2} + \dots + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+y+1} * l_{x+y} * q_{x+y}$$

avec :

- $i$  : le taux d'intérêt
- $l_x$  : le nombre de personne vivant à l'âge  $x$  par rapport à une cohorte initiale
- $q_x$  : la probabilité de décès est égale  $1 - p_x$

$$M_x = \sum_{k=x}^{x+y} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k+1} * l_k * q_k$$

$$M_x = \sum_{k=x}^{x+y} (1+i)^{-(x+1)} * l_x * q_x$$

Après le développement de la formule, nous avons montré que le taux de mortalité est inversement proportionnelle à la valeur du taux d'intérêt .

La figure 4.13 affirme l'effet du changement de la valeur du taux d'intérêt sur le taux de mortalité.

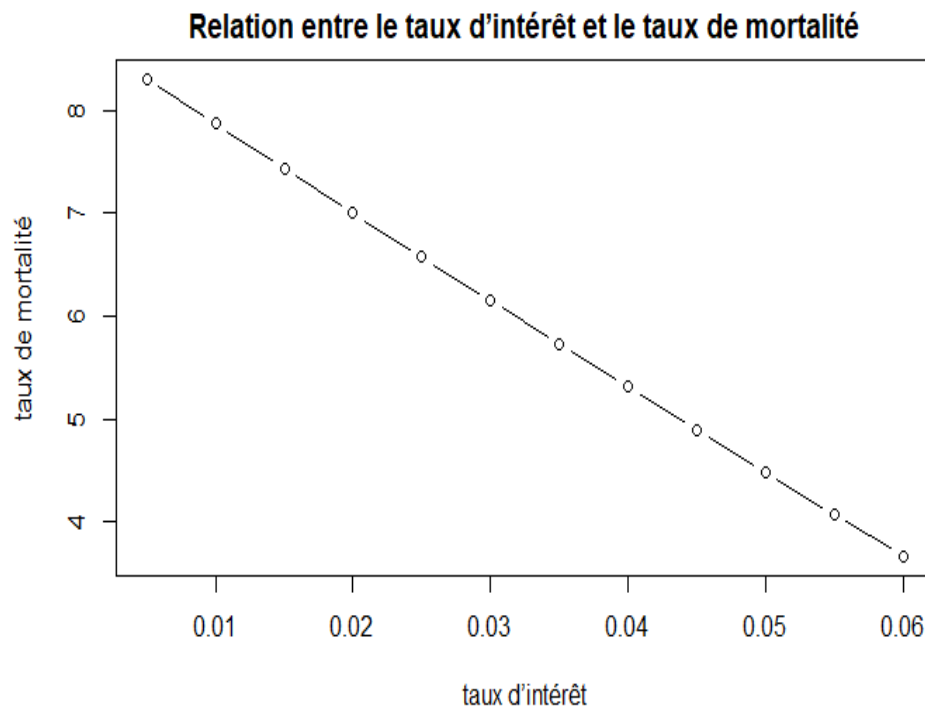


FIGURE 4.13 – Relation entre le taux d'intérêt et le taux de mortalité

## 4.10 Conclusion

Dans ce dernier chapitre ,nous avons mis en évidence l'influence du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère sur les données italiennes. nous avons défini les différentes étapes faites pour atteindre cet objectif. D'abord, nous avons estimé et projeté le taux de mortalité de la population italienne a l'aide du modèle Lee carter, ensuite, nous avons calculé la valeur actuelle probable d'une rente viagère a terme anticipé et temporaire d'une durée de 15 ans, et pour finir nous avons étudié la variation du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable et la variation du taux de mortalité sur la valeur du taux d'intérêt.

# Conclusion Générale

L'objectif de ce projet est d'estimer l'impact des taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère. Pour ce faire, nous avons procédé à une estimation du taux de mortalité de la population Italienne sur une période s'étalant de 145 ans (1872-2017).

Statistiquement, le taux de mortalité a connu une baisse sur la période d'analyse. Nous soulignons toutefois deux pics correspondants aux deux guerres mondiales (1914-1918 et 1941-1946).

La test d'un modèle stochastique (modèle de Lee-Carter) a permis de quantifier la longévité en deux étapes :

- une première étape consistant à l'estimation des paramètres de ce modèle selon deux modalités différentes : le modèle lca et le package StMoMo. Les résultats de ces estimations ont permis de conclure que la mortalité moyenne augmente avec l'âge avec une nette différence selon le genre pour la tranche d'âge 20-30 qui semble correspondre à des décès qualifiés d'accidentels pour les hommes.
- Dans une seconde étape, nous avons procédé à une projection des taux de mortalité sur une période de 50 ans. Cette projection a permis de conclure que les taux de mortalités générés par le modèle de Lee-Carter restent significatifs à 95%.

Par ailleurs, pour répondre à la question posée nous avons procédé au calcul de la valeur actuelle probable pour la cohorte 1943 et ce :

- Pour une rente viagère à terme anticipée estimée à 12.35
- Pour une rente viagère temporaire d'une durée de 15 ans estimée à 1.77

De plus, l'estimation de la variation de la valeur actuelle probable en fonction des taux d'intérêt a permis de conclure l'existence d'une relation inverse entre ces dernières : La valeur actuelle probable aura tendance à baisser quand le taux d'intérêt augmente.

Enfin, l'étude de la variation du taux d'intérêt en fonction de taux de mortalité montre que ce dernier baisse quand le taux d'intérêt augmente.

Il est ainsi possible d'infirmar que pour la gestion des contrats d'assurance vie, la sous estimation des taux de mortalité engendrera une réduction des prestations en valeur actuelle probable et donc taux d'intérêt plus important.

# Bibliographie

- [1] Charpentier, A. Dutang, C. (2012). *Actuariat Avec R*. [https://cran.r-project.org/doc/contrib/Charpentier\\_Dutang\\_actuariat\\_avec\\_R.pdf](https://cran.r-project.org/doc/contrib/Charpentier_Dutang_actuariat_avec_R.pdf)
- [2] Dagnelie, P. (2007), *Statistique théorique et appliquée* De Boeck Université. 21
- [3] Dalgaard, P. (2008), *Introductory Statistics with R* Springer. 21
- [4] Hogg, R. V., Craig, A. T. & McKean, J. W. (2005), *Introduction to Mathematical Statistics*, 6edn, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. 21
- [5] Saporta, G. (2006), *Probabilités, analyse de données et statistique* Technip. 21, 29
- [6] VU Tuan Anh, *Modèle Lee Carter*. <https://www.institutdesactuaire.com/>
- [7] *Méthode des moindres carrés*. Consultée sur <http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/M%C3%A9thode%20des%20moindres%20carr%C3%A9s/fr-fr/>
- [8] Antoine Delwarde (2003-2004). *Modèle log-bilinéaire pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives*. <https://www.scor.com/fr>
- [9] Jakubowicz, L. (2019), *Valeur actuelle : définition, calcul, traduction*. La rédaction JDN, consultée sur <https://www.journaldunet.fr/business/dictionnaire-economique-et-financier/1198837-valeur-actuelle-definition-calcul-traduction/>
- [10] La Finance Pour Tous, (2019). *La rente viagère*. Consulté sur <https://www.lafinancepourtous.com/pratique/retraite/epargne-retraite/la-rente-viagere/>
- [11] Maatoussi, Anis, (2019-2020). *Cours actuariat vie 2019-2020*.
- [12] Dico Du Net, *Rente temporaire*. Consulté sur <http://www.dicodunet.com/definitions/economie/rente-temporaire.htm>
- [13] Felicitie C. Bell et Michael L. Miller. *Life Tables for the United States Social Security Area 1900-2100*. Consulté sur [https://www.ssa.gov/oact/NOTES/as116/as116\\_IV.html](https://www.ssa.gov/oact/NOTES/as116/as116_IV.html)
- [14] UTILISATION DES METHODES DE LEE-CARTER ET LOGPOISSON POUR L'AJUSTEMENT DE TABLES DE MORTALITE DANS LE CAS DE PETITS ECHANTILLONS, *Méthode de Coale et Kisker*. Consultée sur <http://www.ressources-actuarielles.net/>
- [15] Villegas, A., Kaishev, V. K., & Millossovich, P. (2015). *StMoMo : An R package for stochastic mortality modelling*. In 7th Australasian Actuarial Education and Research Symposium. <https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf>
- [16] Hyndman, R. J., Athanasopoulos, G., Bergmeir, C., Caceres, G., Chhay, L., O'Hara-Wild, M., ... Wang, E. (2020). *Forecasting Functions for Time Series and Linear Models*. <https://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf>.