Projet Arbre 2-3-4

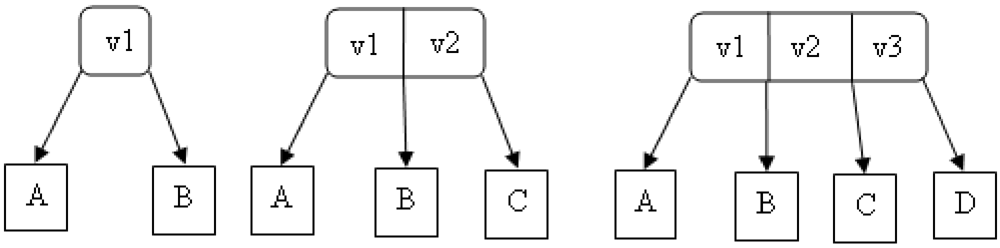
Objectif

Ce projet a pour but d'implémenter en Coq une structure informatique : les arbres 2-3-4. L'implémentation inclura les spécifications de la structure en elle-même ainsi que les opérations de base de la structure (l'ajout / retrait d'un élément, tests d'appartenance…). Dans un second temps, l'objectif sera de formaliser et prouver des prédicats correspondant notamment aux propriétés de cette structure.

Definition

Un arbre 2-3-4 est un arbre dont les feuilles sont vide, et dont les nœuds contiennent 1 élément et deux fils(binode) ou bien 2 éléments et 3 fils (trinode) ou bien 3 éléments et 4 fils (quadnode). Les fils étant des arbres 2-3-4.

En ce qui concerne l'ordonnancement des éléments :



Les sous-arbres *A*, *B*, *C* et *D* ont les propriétés suivantes :

- tous les nœuds du sous arbre *A* ont une valeur inférieure à *v1*.
- tous les nœuds du sous arbre *B* ont une valeur supérieure ou égale à *v1* et inférieure à *v2*, pour les nœuds 3 ou 4.
- tous les nœuds du sous arbre *C* ont une valeur supérieure ou égale à *v2* et inférieure à *v3*, pour les nœuds 4.
- tous les nœuds du sous arbre *D* ont une valeur supérieure ou égale à *v3*.

Specification

Structure

La structure des arbres 2-3-4 est une structure construite par induction avec 4 types d'élément :

Les feuilles, vides, les binodes contenant un élément et deux sous arbres. Les trinodes avec 2 éléments et 3 sous arbres et les quadnodes avec 3 éléments et 4 sous-arbres

```
Inductive tree (A: Type ) : Type :=
 leaf : tree A
 |binode: A -> tree A -> tree A -> tree A
 |trinode : A -> A -> tree A -> tree A -> tree A -> tree A
 |quadnode : A -> A -> A -> tree A -> tree A -> tree A -> tree A -> tree A.
```

Opérations

- L'existence : exist (a:nat)(T:tree nat): bool retourne vrai si l'élément a est dans l'arbre T, faux sinon. Parcours de l'arbre de manière descendante jusqu'à trouver l'élément a en faisant des tests d'ordre sur les différents élémetn des nœuds.
- L'ajout add (a:nat) (T : tree nat): tree nat retourne un arbre qui contient tous les éléments de T et l'élément a. Parcours de l'arbre de manière descendante. Si on rencontre un quadnode on effectue un éclatement.
- Le retrait delete (a:nat)(T: tree nat): tree nat retourne un arbre qui contient tous les éléments de T sauf a. On utilise une fonction intermédiaire qui transforme l'arbre en liste puis on supprime l'élément de cette liste qu'on transforme ensuite en arbre.
- Test de l'équilibre

Opérations secondaires

- to_list (a:nat)(T: tree nat): list nat retourne une liste qui contient tous les éléments d'un arbre sauf a (utilisé pour la fonction delete)
- from_list (l : list nat): tree nat retourne un arbre contenant tous les éléments de la liste l
- count (T: tree nat): nat retourne le nombre d'éléments contenu dans un arbre
- equals_value (t1 : tree nat)(t2 : tree nat): bool retourne vrai si les deux arbres contiennent les mêmes éléments
- hauteurMax(t:tree nat) : nat retourne la hauteur max d'un arbre
- hauteurMin(t:tree nat) : nat retourne la hauteur min d'un arbre
- is_balanced_height(t:tree nat): bool retourne vrai si un arbre est équilibré (si la hauteur max et la hauteur min sont égales) faux sinon.
- ordered(t: tree nat): bool retourne vrai si les éléments de l'arbre sont bien ordonnés

Preuves

Les lemmes que nous pouvons démontrer à partir de cette spécification vont correspondre aux différentes propriétés des arbres 2-3-4, comme la hauteur équilibrée et l'ordonnancement des éléments, et vont aussi correspondre aux « post condition » des fonctions. Par exemple que si on ajoute un élément e dans un arbre T, e existe dans T après l'opération.

Propriétés

La principale propriété des arbres 2-3-4 réside dans l'équilibre et l'ordonnancement des éléments.

- Un arbre reste équilibré par sa construction, lorsqu'on ajoute un élément :
  forall T: tree nat ,forall X: nat, (is_balanced_height(T)=true) -> (is_balanced_height(add X T)=true).
- Un arbre reste bien ordonné par sa construction forall T : tree nat , forall X : nat, (ordered (T) = true => (ordered(add X T) = true.
-

Pour démontrer ces propriétés difficiles il faut démontrer de plus petits lemmes :

- Propriété arithmétique des hauteurs, le père d'un nœud dont la hauteur vaut h a une hauteur qui vaut h+1. Nous avons décomposé les preuves en fonctions du type de nœuds
  forall T2 T1 T3:tree nat,forall n:nat,forall x: nat,(T1 = binode x T2 T3) /\ (n = (max (hauteurMax T2) (hauteurMax T3)) -> (hauteurMax T1) = (S n).
- Propriété de la structure, si un Arbre est équilibré alors ses sous arbres sont équilibrés
  forall T2 T1 T3:tree nat,forall x: nat,(T1 = binode x T2 T3) /\ is_balanced_height(T1)=true -> is_balanced_height(T2)=true.
- (OTHERS)

Post Conditions des opérations structurelles

- Opération add : forall T: tree nat ,forall X: nat, exist X (add X T) = true.
- Opération delete : forall T : tree nat, forall X : nat, exist X (delete X T) = false