

TESIS

**ASPEK MATEMATIS DAN ASPEK PENDIDIKAN PADA SUATU
MODEL PEMURNIAN AIR DALAM
SISTEM OSMOSIS TERBALIK**



Osniman Paulina Maure

NIM : 171 442 012

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA PROGRAM MAGISTER
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2019**

TESIS

ASPEK MATEMATIS DAN ASPEK PENDIDIKAN PADA SUATU MODEL PEMURNIAN AIR DALAM SISTEM OSMOSIS TERBALIK

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh Gelar Magister
Pendidikan pada Program Magister Pendidikan Matematika



Osniman Paulina Maure

NIM : 171 442 012

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA PROGRAM MAGISTER
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2019**

TESIS

ASPEK MATEMATIS DAN ASPEK PENDIDIKAN PADA SUATU MODEL PEMURNIAN AIR DALAM SISTEM OSMOSIS TERBALIK

Disusun oleh :

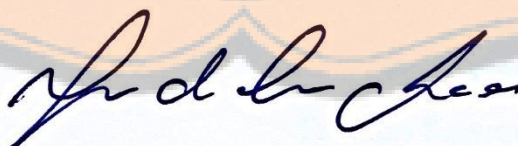
Osniman Paulina Maure

NIM : 171 442 012

Telah disetujui

pada tanggal 5 April 2019

Dosen Pembimbing



Sudi Mungkasi, S.Si., M.Math.Sc., Ph.D.

TESIS

ASPEK MATEMATIS DAN ASPEK PENDIDIKAN PADA SUATU MODEL PEMURNIAN AIR DALAM SISTEM OSMOSIS TERBALIK

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Osniman Paulina Maure

171 442 012

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 12 April 2019 dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap

Tanda Tangan

Ketua : Dr. Marcellinus Andy Rudhito, S.Pd.

Sekretaris : Dr. Hongki Julie, M.Si.

Anggota : Sudi Mungkasi, S.Si., M.Math.Sc., Ph.D.

Anggota : Hartono, S.Si, M.Sc., Ph.D.

Anggota : Dr. Marcellinus Andy Rudhito, S.Pd.

Yogyakarta, 12 April 2019

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma Yogyakarta

Dekan



Dr. Yohanes Harsoyo, S.Pd., M.Si.

MOTTO

“I’M NOTHING WITHOUT GOD“



PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada :

- ♥ Tuhan Yesus Maha Pengasih
- ♥ Bapa Yonas Maure terkasih di surga
- ♥ Mama Maria Nu dan Mama Mina terkasih
- ♥ Popin, Cyan, Arin, dan Julio



PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

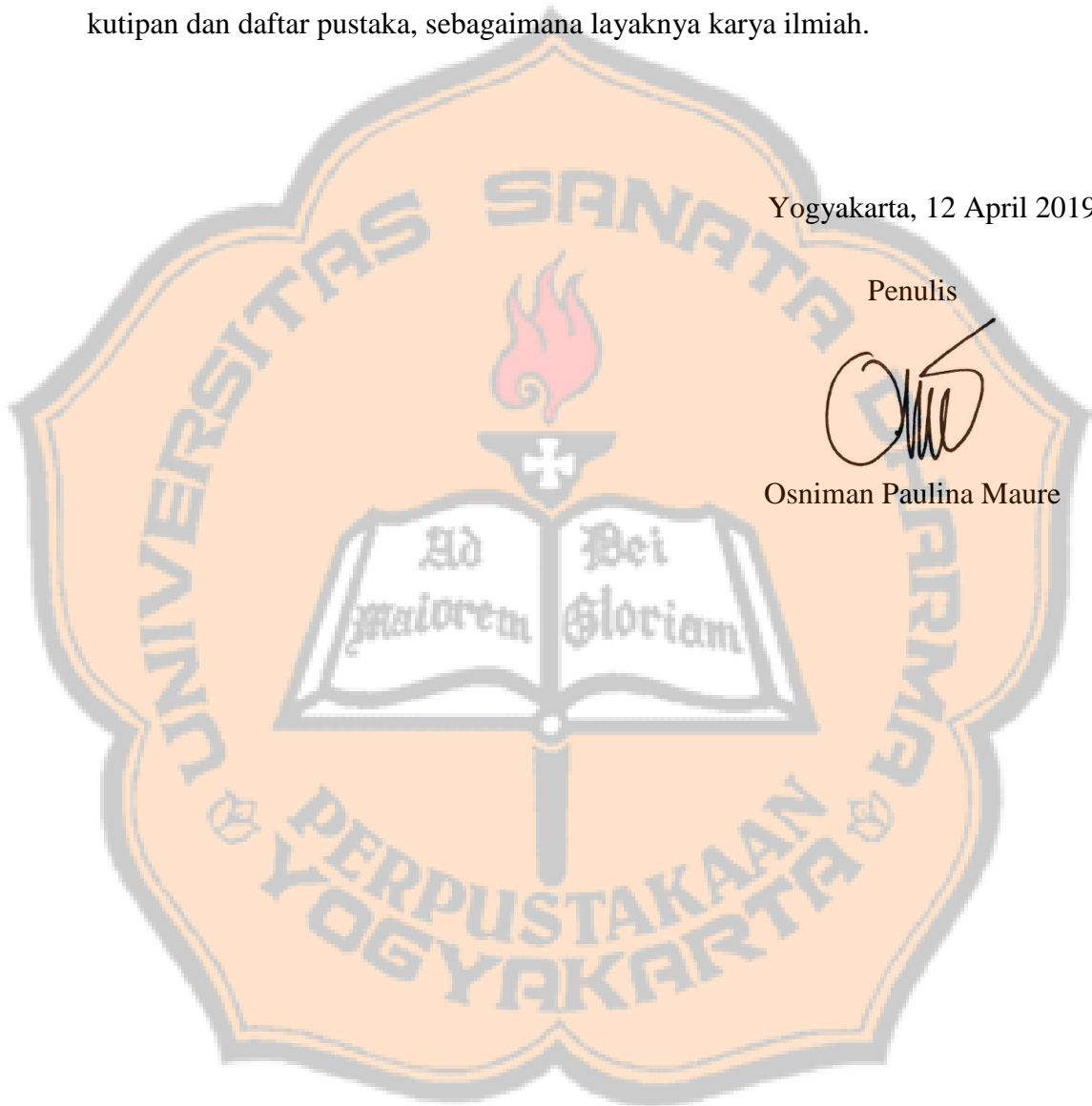
Dengan ini saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa dalam tesis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 12 April 2019

Penulis



Osniman Paulina Maure



ABSTRAK

Osniman Paulina Maure. 2019. Aspek Matematis dan Aspek Pendidikan pada Suatu Model Pemurnian Air dalam Sistem Osmosis Terbalik. Tesis. Program Studi Pendidikan Matematika Program Magister, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Pada tesis ini, penulis memodelkan masalah pemurnian air pada sistem osmosis terbalik untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada membran semipermeabel. Penulis menggunakan persamaan adveksi-difusi dua dimensi sebagai persamaan pengatur. Ini adalah persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial ini dikonversi menjadi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode *stretching transformation*. Selanjutnya, penulis menggunakan teorema kalkulus, metode reduksi order, dan integrasi numerik dalam mencari solusi analitik dari persamaan diferensial biasa. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi pustaka.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode *stretching transformation* dapat digunakan untuk mengubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa. Teorema kalkulus, metode reduksi order, dan integrasi numerik dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Dengan demikian, penulis memperoleh suatu model persamaan untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada membran semipermeabel. Solusi dari model persamaan ini menunjukkan bahwa konsentrasi larutan garam akan meningkat pada jarak di sepanjang membran semipermeabel yang disebabkan oleh adanya faktor $x^{1/3}$ dan apabila laju alir pada membran semipermeabel (q) ditingkatkan maka konsentrasi larutan garam juga akan semakin meningkat. Hasil penelitian lainnya adalah sebuah rancangan proses pembelajaran yang berkaitan dengan konsep sistem osmosis terbalik, penggunaan metode *stretching transformation*, dan penggunaan integrasi numerik.

Kata kunci: pemurnian air, osmosis terbalik, metode *stretching transformation*, teorema kalkulus, integrasi numerik.

ABSTRACT

Osniman Paulina Maure. 2019. Mathematical and Educational Aspects of a Water Purification Model in the Reverse Osmosis System. Thesis. Program Master of Mathematics Education Study Program, Mathematics and Science Education Department, Faculty of Teacher Training and Education, Sanata Dharma University, Yogyakarta.

In this thesis, the author models the water purification problem in the reverse osmosis system to predict the concentration of salt solutions in semipermeable membranes. The author uses a two-dimensional diffusion-advection equation as a governing equation. This is a partial differential equation. Partial differential equations are converted into ordinary differential equations with a stretching transformation method. Furthermore, the author uses calculus theorems, order reduction methods, and numerical integration to finding analytical solutions from ordinary differential equations. The research method used in this work is literature study.

Results showed that the stretching transformation method can be used to convert partial differential equations into ordinary differential equations. Calculus theorems, order reduction methods, and numerical integration can be applied to solve ordinary differential equations. Thus, the authors obtained an equation model to predict the concentration of salt solution in a semipermeable membrane. The solution of this equation model shows that the concentration of salt solution will increase at a distance along the semipermeable membrane caused by the presence of a factor $x^{1/3}$ and if the flow rate on the semipermeable (q) membrane is increased, the concentration of salt solution will also increase. Another results is a design of learning processes relating to the concept of reverse osmosis systems, the use of stretching transformation methods, and the use of numerical integration.

Keywords: water purification, reverse osmosis, stretching transformation methods, calculus theorems, numerical integration.

LEMBAR PERSETUJUAN
PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN
AKADEMIS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya mahasiswa Universitas Sanata Dharma:

Nama : Osniman Paulina Maure

Nomor Induk Mahasiswa : 171 442 012

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma suatu karya ilmiah yang berjudul:

**ASPEK MATEMATIS DAN ASPEK PENDIDIKAN PADA SUATU
MODEL PEMURNIAN AIR DALAM SISTEM OSMOSIS TERBALIK**

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan demikian saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma baik untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengolahnya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas dan mempublikasikan di Internet atau media lain untuk keperluan akademis tanpa meminta izin dari saya maupun memberikan royalti kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis. Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta

Pada tanggal 12 April 2019

Yang menyatakan,



Osniman Paulina Maure

DAFTAR PUBLIKASI HASIL PENELITIAN TESIS

Sebagian hasil tesis ini telah dipresentasikan dalam *International Conference on Science and Technology for Internet of Things* yang diselenggarakan oleh Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa Yogyakarta pada tanggal 20 Oktober 2018 dan *International Conference on Science and Applied Science* di Universitas Sebelas Maret Surakarta pada tanggal 20 Juli 2019.



KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Bapa yang penuh kasih atas limpahan berkat dan tuntunan-Nya, penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Aspek Matematis dan Aspek Pendidikan pada Suatu Model Pemurnian Air dalam Sistem Osmosis Terbalik” dengan baik.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa ada begitu banyak dukungan dan bantuan dari berbagai pihak dalam menyelesaikan tesis ini. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tulus kepada :

1. Bapak Dr. Yohanes Harsoyo, S.Pd., M.Si., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.
2. Bapak Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Program Magister serta selaku salah satu penguji tesis atas segala motivasi dan arahan yang diberikan kepada penulis.
3. Bapak Sudi Mungkasi, S.Si., M.Math.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing tesis yang dengan penuh kasih memberikan motivasi, bimbingan, serta arahan yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan tesis.
4. Bapak Hartono, S.Si, M.Sc., Ph.D. selaku dosen penguji tesis yang telah memberikan kritik dan saran demi menyempurnakan tesis ini.
5. Segenap Dosen Program Studi Magister Pendidikan Matematika yang telah membekali penulis dengan berbagai ilmu pengetahuan dan keteladanan selama menempuh pendidikan di Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.
6. Keluarga istimewa yang terkasih (Bapak Yonas Maure, Mama Maria Nu, Mama Mina, Popin, Cyan, Julio, dan Arin) dan juga seluruh keluarga yang selalu mendoakan, memotivasi serta memberikan semangat kepada penulis selama masa perkuliahan dan proses penyusunan tesis ini.
7. Sahabat terkasih Adele Sarmento, Apolo Metra, Fera Babut, Ayu Tanjung, Eka Sumariati, Ica Tatu, Kakak Olive, dan Kakak Ningsi.
8. Teman-teman seperjuangan Magister Pendidikan Matematika yang telah mendukung penulis selama masa perkuliahan dan proses penyusunan tesis ini.

9. Teman-teman Kost Gratia: Ibu Panji, Panji, Novi Mahenu, Lodvi, Kakak Natalia Mahenu, Lestari, dan Tati yang telah mendukung penulis selama masa perkuliahan dan proses penyusunan tesis ini.
10. Semua pihak yang telah memberikan dukungan, bimbingan, bantuan, dan motivasi kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih memiliki banyak kekurangan. Oleh sebab itu, penulis terbuka terhadap kritikan dan saran yang membangun demi sempurnanya tesis ini. Akhir kata, penulis berharap semoga tesis ini dapat berguna bagi para pembaca dan pihak-pihak terkait. Tuhan memberkati.

Yogyakarta, 12 April 2019

Penulis



Osniman Paulina Maure

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
MOTTO	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
LEMBAR PERSETUJUAN	ix
DAFTAR PUBLIKASI	x
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvi
DAFTAR DIAGRAM	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	2
C. Tujuan Penulisan.....	3
D. Manfaat Penulisan.....	3
E. Tinjauan Pustaka	4
F. Kebaruan Penelitian	7
G. Batasan Masalah	7
H. Metode Penelitian	7
I. Sistematika Penulisan	8
BAB II LANDASAN TEORI	10
A. Turunan	10
B. Integral	13
C. Integrasi Numerik	15

1. Aturan Penjumlahan Riemann	16
2. Metode Trapezium	17
3. Metode Simpson 1/3	19
4. Galat (<i>error</i>)	21
D. Persamaan Diferensial Parsial	29
E. Persamaan Difusi dan Adveksi	30
F. Sistem Osmosis Terbalik	31
G. Metode <i>Stretching Transformation</i>	33
BAB III HASIL PENELITIAN	39
A. Pemodelan Masalah	39
B. Penyelesaian Persamaan Secara Analitik	42
C. Penyelesaian Integral Secara Numerik	56
BAB IV ASPEK PENDIDIKAN	61
A. Aplikasi Konsep Pemurnian Air pada Sistem Osmosis Terbalik	61
B. Penerapan Integrasi Numerik	66
C. Penerapan Metode <i>Stretching Transformation</i>	67
D. Refleksi	71
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	75
A. Kesimpulan	75
B. Saran	76
DAFTAR PUSTAKA	77
LAMPIRAN	80
RPP 1	81
LKS 1	86
Lembar Eksperimen Siswa	87
LKS 2	89
TES ESAI	90
RPP 2	91
LKS	96
Lembar Jawaban Siswa	97
RPS	98
Penyelesaian Persamaan Secara Numerik	101

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Aturan Jumlahan Riemann	17
Gambar 2.2	Metode Trapesium	18
Gambar 2.3	Kurva $f(x)$ yang di dekati dengan kurva parabola $P(x)$	19
Gambar 2.4	Kurva fungsi $f(x)$	22
Gambar 2.5	Prinsip kerja membran osmosis terbalik	32
Gambar 3.1	Membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik	39
Gambar 3.2	Adveksi dan difusi di dekat membran semipermeabel	40
Gambar 3.3	$C(x, 0)/c_0$ dengan $q = 10^{-3}$	53
Gambar 3.4	$C(x, 0)/c_0$ dengan $q = 15^{-3}$ dan $q = 20^{-3}$	54
Gambar 3.5	$C(x, 0)/c_0$ dengan $q = 10^{-3}$, $q = 15^{-3}$, dan $q = 20^{-3}$	55
Gambar 4.1	Daun	66

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Galat setiap metode integrasi numerik	28
Tabel 3.1	Nilai $C(x, 0)/c_0$ pada jarak x dengan laju alir (q).....	54
Tabel 3.2	Nilai \bar{v}_i untuk penjumlahan Riemann tengah	58
Tabel 3.3	Galat setiap metode integrasi numerik	60



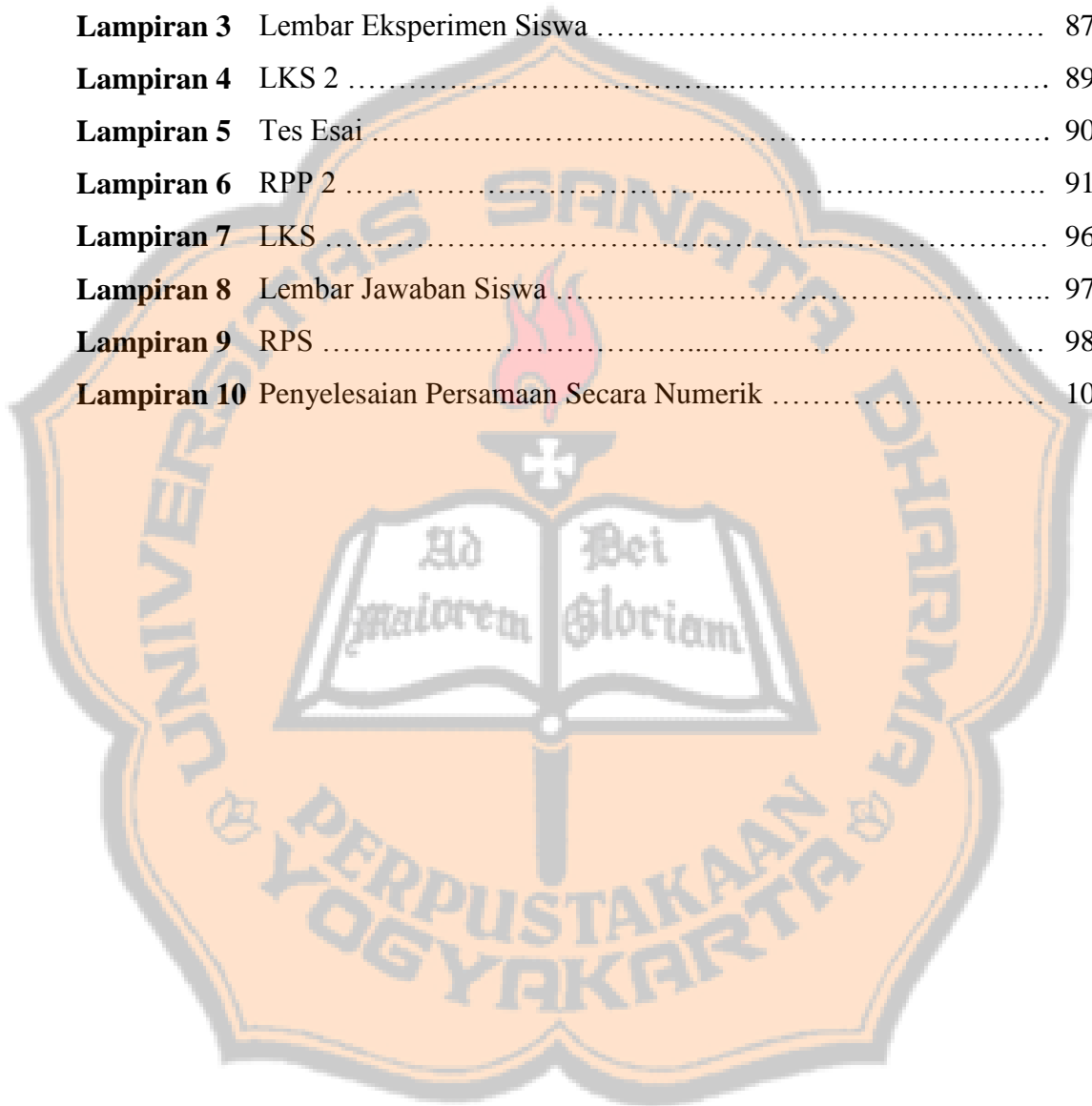
DAFTAR DIAGRAM

Diagram 1.1 Garis besar penelitian penulis 04



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	RPP 1	81
Lampiran 2	LKS 1	86
Lampiran 3	Lembar Eksperimen Siswa	87
Lampiran 4	LKS 2	89
Lampiran 5	Tes Esai	90
Lampiran 6	RPP 2	91
Lampiran 7	LKS	96
Lampiran 8	Lembar Jawaban Siswa	97
Lampiran 9	RPS	98
Lampiran 10	Penyelesaian Persamaan Secara Numerik	101



BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini, penulis memaparkan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, tinjauan pustaka, kebaruan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

A. Latar Belakang

Salah satu fenomena yang belakangan ini menjadi perhatian serius bagi semua pihak adalah kelangkaan air bersih. Air yang tersedia di bumi kini telah banyak tercemar oleh berbagai macam limbah dan sampah dari hasil kegiatan manusia (Sulaeman, dkk., 2018). Hal ini berdampak pada berkurangnya kualitas dan kuantitas air (Yeleliere, dkk., 2018). Berdasarkan data dari Melbourne Water (Pacquola & Leivers, 2013), sekitar 70% permukaan bumi ini ditutupi oleh air dimana terdapat 2,5% air tawar dan 0,007% air yang layak diminum oleh manusia, sedangkan sisanya merupakan air garam. Air garam ini dapat dimanfaatkan untuk berbagai kepentingan manusia. Hal ini dilakukan dengan terlebih dahulu memurnikan air garam tersebut agar layak dikonsumsi manusia.

Salah satu teknik pemurnian air garam yaitu sistem osmosis terbalik. Sistem osmosis terbalik menggunakan tekanan hidrolik tinggi untuk mengatasi tekanan osmotik dan menggerakkan air yang hampir murni melalui membran semipermeabel (Tow, dkk., 2018). Membran semipermeabel berfungsi untuk menyaring berbagai molekul besar dan ion-ion dari suatu larutan garam. Proses tersebut mengakibatkan air murni dapat mengalir ke lapisan membran berikutnya, sedangkan zat terlarut akan terendap dan terakumulasi pada sisi luar membran semipermeabel.

Terakumulasinya larutan garam ini dapat menyebabkan berkurangnya efisiensi sistem penyaringan dan membatasi jalannya air murni melewati membran (Fulford dan Broadbridge, 2002; Farooque, dkk., 2014). Selain itu, apabila molekul besar dan ion-ion dari suatu larutan garam ini dialirkan kembali ke lautan akan menyebabkan dampak fisikokimia dan ekologis yang merugikan

(Fattah, dkk., 2017). Dampak fisikokimia diantaranya dikaitkan dengan komponen beracun dari air garam seperti logam berat dan meningkatnya salinitas yang dapat merusak sel-sel organisme air laut (Ariono, dkk., 2016).

Dalam kasus ini, penulis tertarik untuk mempelajari cara memprediksi konsentrasi larutan garam yang dihasilkan oleh suatu sistem osmosis terbalik. Hal pertama yang dilakukan penulis adalah memodelkan masalah pemurnian air pada sistem osmosis terbalik. Pemodelan masalah ini disimulasikan atau diturunkan dari fenomena penyebaran polutan yang terjadi melalui dua proses utama yaitu difusi dan adveksi 2 dimensi (2D). Selanjutnya diperoleh model persamaan matematika berupa persamaan diferensial parsial yang akan diubah menjadi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode *stretching transformation*. Persamaan diferensial biasa tersebut dicari solusinya secara analitik, kemudian disimulasikan dengan menggunakan program Maple. Selain itu, penulis juga membahas tentang penerapan dan keakuratan aturan jumlahan Riemann, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3 dalam integrasi numerik untuk menyelesaikan model persamaan pemurnian air.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan penulis, maka rumusan masalah dalam tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengkonstruksi model persamaan matematika untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik?
2. Bagaimana menyelesaikan model persamaan matematika untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik?
3. Bagaimana penggunaan aturan jumlahan Riemann, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3 serta keakuratannya dalam menemukan solusi dari model persamaan pemurnian air pada sistem osmosis terbalik?

4. Bagaimana rancangan proses pembelajaran yang berkaitan dengan konsep pemurnian air pada sistem osmosis terbalik dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan model persamaan pemurnian air pada sistem osmosis terbalik?

C. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan penulis, maka tujuan penulisan tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi model persamaan matematika untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik.
2. Menyelesaikan model persamaan matematika untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik.
3. Mengetahui penggunaan aturan jumlahan Riemann, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3 dalam metode integrasi numerik serta keakuratannya dalam menemukan solusi dari model persamaan pemurnian air pada sistem osmosis terbalik.
4. Merancang proses pembelajaran yang berkaitan dengan konsep pemurnian air pada sistem osmosis terbalik dan metode yang digunakan dalam penyelesaian model persamaan pemurnian air pada sistem osmosis terbalik.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat yang diperoleh dari penulisan tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui model persamaan matematika untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik.
2. Mengetahui proses penyelesaian model persamaan matematika untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik.

- Mengetahui penerapan dan keakuratan aturan jumlahan Riemann, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3 dalam menemukan solusi dari model persamaan pemurnian air pada sistem osmosis terbalik.

E. Tinjauan Pustaka

Pada bagian ini, penulis membahas penelitian-penelitian yang berkaitan dengan pemodelan persamaan matematika dalam pemurnian air pada sistem osmosis terbalik untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel. Garis besar penelitian yang dilakukan penulis adalah seperti pada Diagram 1.1 berikut ini.

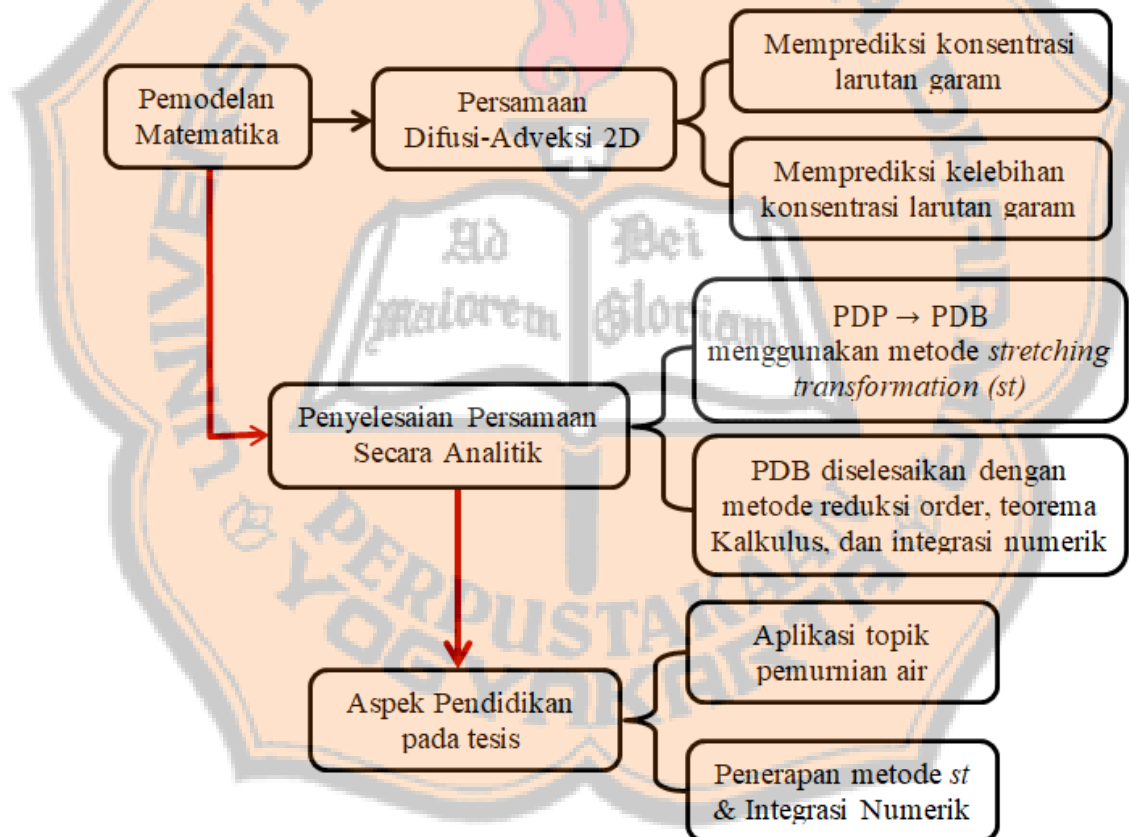


Diagram 1.1 Garis besar penelitian penulis

Berdasarkan Diagram 1.1 di atas, tahap pertama yang dilakukan penulis yaitu membahas pemodelan persamaan matematika dalam pemurnian air pada sistem osmosis terbalik. Sebelumnya, penelitian ini pernah dilakukan oleh Fulford dan Broadbridge (2002). Fulford dan Broadbridge memodelkan persamaan pemurnian

air pada sistem osmosis terbalik untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel. Fulford dan Broadbridge juga menyelesaikan model persamaan tersebut secara analitik dengan menggunakan metode *stretching transformation* dan program Maple. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa konsentrasi larutan garam akan meningkat secara perlahan pada jarak di sepanjang membran semipermeabel karena adanya faktor $x^{1/3}$ pada persamaan tersebut.

Djebedjian (2015) juga pernah memodelkan persamaan matematika dalam pemurnian air pada sistem osmosis terbalik. Pemodelan tersebut bertujuan untuk mengoptimasi kinerja pemurnian air pada sistem osmosis terbalik dengan menggunakan teknik algoritma genetik. Pada penelitian ini, model solusi-difusi dikembangkan untuk memodelkan kinerja sistem osmosis terbalik. Selanjutnya, persamaan matematika ini disimulasikan dengan menggunakan program GARO (*Genetic Algorithm Reverse Osmosis*). Hasil penelitian menunjukkan bahwa hubungan antara perbedaan tekanan operasi melintasi membran RO dan laju aliran volumetrik adalah linear, konsentrasi permeat menurun dengan meningkatnya laju aliran volumetrik dan perbedaan tekanan membran, serta hasil teoritis dari program optimasi ini terlihat dengan baik secara eksperimental pada laju aliran yang lebih tinggi.

Dalam pemodelan matematika ini dikembangkan persamaan difusi-adveksi 2D untuk memprediksi konsentrasi dan kelebihan konsentrasi larutan garam. Penelitian yang terkait sebelumnya dilakukan oleh Ulfah, dkk (2018) yang membahas tentang model adveksi-difusi 2D untuk mensimulasi pendistribusian polusi udara dari sumber titik emisi dalam kondisi atmosfer tertentu seperti kondisi stabil, tidak stabil, dan netral. Model tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit kemudian divisualisasikan dengan program komputer. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa kondisi atmosfer saja yang mempengaruhi tingkat konsentrasi polutan yang tidak konklusif karena parameter dalam model memiliki efek sendiri pada setiap kondisi atmosfer. Selain itu, Tirabassi, dkk (2008) juga mengembangkan persamaan difusi-adveksi 2D untuk mensimulasikan dispersi turbulen vertikal dari polusi udara yang diserap

atau disimpan ke tanah. Berdasarkan hasil penelitian tersebut, persamaan difusi-adveksi 2D dapat mensimulasikan dan mempertimbangkan dispersi turbulen vertikal dari banyak skalar seperti polusi udara, bahan radioaktif, panas, dan lainnya.

Tahap kedua yang dilakukan penulis adalah penyelesaian model persamaan matematika secara analitik. Dalam tesis ini, model persamaan yang dihasilkan dari pemodelan matematika berupa persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan ini diubah menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) dengan menggunakan metode *stretching transformation*. Sebelumnya, Fulford dan Broadbridge (2002) pernah menggunakan metode ini untuk mengubah PDP menjadi PDB. Selain itu, penelitian yang membahas tentang metode yang mengubah PDP menjadi PDB secara analitik dilakukan oleh Karbalaie, dkk (2014). Penelitian ini membahas tentang proses menemukan solusi eksak dari suatu persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode homo-pemisahan variabel. Metode analitik ini adalah kombinasi dari metode perturbasi homotopi (HPM) dengan metode pemisahan variabel. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode ini dapat mengubah persamaan diferensial parsial menjadi dua (atau lebih) persamaan diferensial biasa yang sering kali lebih mudah diselesaikan.

Pada proses penyelesaian analitis juga penulis menerapkan metode reduksi order, teorema-teorema kalkulus, program Maple, dan 5 metode dalam integrasi numerik yaitu aturan jumlahan Riemann kanan, aturan jumlahan Riemann kiri, aturan jumlahan Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3. Penelitian terkait sebelumnya yaitu penelitian Aigo (2013) yang menggunakan metode Simpson 1/3 dan metode gabungan trapesium untuk menyelesaikan persamaan linear Integral Volterra kedua. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa hasil aproksimasi integral Volterra dengan menggunakan metode Simpson 1/3 dan metode gabungan trapesium mendapatkan tingkat akurasi yang baik untuk jarak (h) yang cukup kecil.

F. Kebaruan Penelitian

Kebaruan dalam penulisan ini adalah penggunaan aturan jumlahan Riemann kanan, aturan jumlahan Riemann kiri, aturan jumlahan Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3 dalam metode integrasi numerik untuk menyelesaikan model persamaan pemurnian air dan rancangan pelaksanaan pembelajaran berkaitan dengan konsep pemurnian air pada jenjang Sekolah Dasar, penerapan metode *stretching transformastion* pada jenjang Strata Satu, dan penerapan integrasi numerik pada jengang Sekolah Menengah Pertama.

G. Batasan Masalah

Penelitian ini lebih difokuskan pada pemodelan masalah pemurnian air pada sistem osmosis terbalik dan penyelesaian model persamaan matematika untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik pada waktu konstan. Selain itu, penulis juga membahas tentang rancangan pelaksanaan pembelajaran berkaitan dengan konsep pemurnian air, penerapan metode *stretching transformation*, dan penerapan integrasi numerik.

H. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan penulis adalah studi pustaka dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. Mengumpulkan dan membaca berbagai literatur yang berhubungan dengan pemodelan persamaan matematika dalam pemurnian air pada sistem osmosis terbalik.
2. Memodelkan persamaan matematika dalam pemurnian air pada sistem osmosis terbalik serta menyelesaikan persamaan matematika yang telah diperoleh tersebut secara analitik.
3. Membuat program Maple untuk mensimulasikan persamaan matematika yang digunakan untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada membran semipermeabel.

4. Menyelesaikan integral tentu yang terdapat pada tahap penyelesaian persamaan matematika secara analitik dengan menggunakan 5 metode integrasi numerik yaitu aturan jumlahan Riemann kiri, aturan jumlahan Riemann kanan, aturan jumlahan Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3.
5. Membandingkan hasil perhitungan secara analitik dengan menggunakan program Maple dan perhitungan secara numerik dengan menggunakan 5 metode integrasi numerik.
6. Merancang pelaksanaan pembelajaran berkaitan dengan konsep pemurnian air pada jenjang Sekolah Dasar, penerapan metode *stretching transformastion* pada jenjang Strata Satu, dan penerapan integrasi numerik pada jengang Sekolah Menengah Pertama.

I. Sistematika Penulisan

Secara umum sistematika penulisan tesis ini terdiri dari lima pokok bahasan sebagai berikut.

1. Bab I Pendahuluan

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, tinjauan pustaka, kebaruan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. Bab II Landasan Teori

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang turunan, integral, integrasi numerik, persamaan diferensial parsial, persamaan difusi-adveksi, sistem osmosis terbalik, dan metode *stretching transformastion*.

3. Bab III Hasil Penelitian

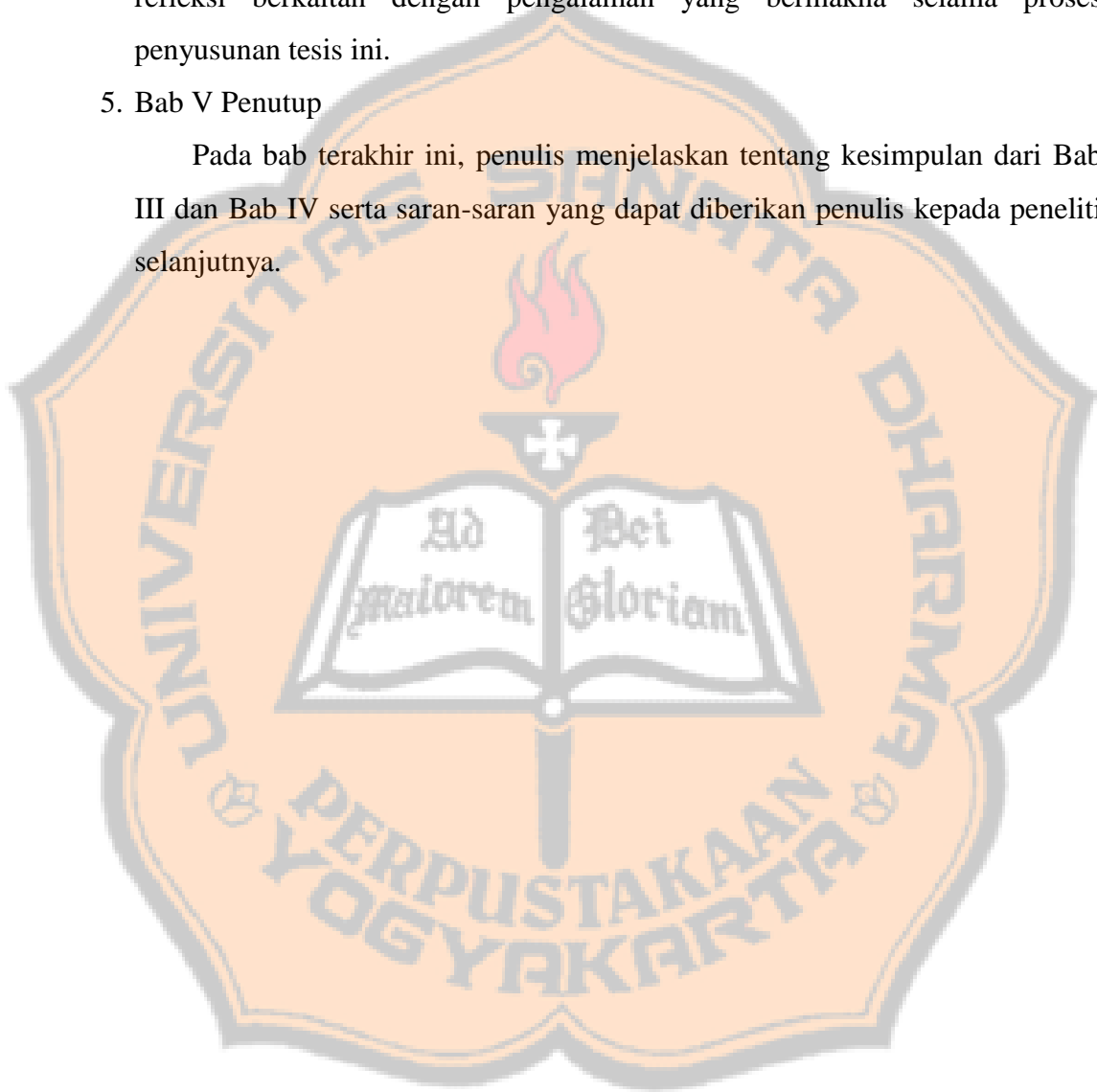
Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang pemodelan masalah untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada sistem osmosis terbalik, penyelesaian model persamaan secara analitik, penyelesaian integral secara numerik, dan analisis hasil penyelesaian model persamaan tersebut.

4. Bab IV Hubungan Tulisan dengan Aspek Kependidikan

Pada bab ini, penulis mendeskripsikan tentang rancangan pelaksanaan pembelajaran berkaitan dengan konsep osmosis terbalik, penerapan metode *stretching transformastion*, dan integrasi numerik. Penulis juga menuliskan refleksi berkaitan dengan pengalaman yang bermakna selama proses penyusunan tesis ini.

5. Bab V Penutup

Pada bab terakhir ini, penulis menjelaskan tentang kesimpulan dari Bab III dan Bab IV serta saran-saran yang dapat diberikan penulis kepada peneliti selanjutnya.



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang teori-teori yang melandasi pembahasan di bab III yang meliputi turunan, integral, integral numerik, jumlahan Riemann, metode trapesium, metode Simpson 1/3, persamaan diferensial parsial, persamaan difusi dan adveksi, sistem osmosis terbalik, dan metode *stretching transformation*.

A. Turunan

Definisi 2.1

Turunan (derivatif) fungsi f pada titik a dinyatakan dengan $f'(a)$ adalah

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dengan syarat nilai limit tersebut ada.

Contoh 2.1

Tentukan turunan fungsi $f(x) = 11x^2 + 6$ pada titik $x = 3$.

Jawab :

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(11(3+h)^2 + 6) - (11(3)^2 + 6)}{h} \\ f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(11(9 + 6h + h^2) + 6) - (11(9) + 6)}{h} \\ f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(99 + 66h + 11h^2 + 6) - (99 + 6)}{h} \\ f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(66h + 11h^2)}{h} \\ f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(66 + 11h)}{h} \\ f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} (66 + 11h) \\ f'(3) &= 66. \end{aligned}$$

Jadi, nilai turunan fungsi $f(x) = 11x^2 + 6$ pada titik $x = 3$ adalah 66.

Definisi 2.2

Apabila $x = a + h$ dengan h mendekati 0 dan jika dan hanya jika x mendekati a , maka definisi turunan dapat pula dinyatakan menjadi

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dengan syarat nilai limit tersebut ada.

Contoh 2.2

Carilah turunan fungsi $f(x) = x^2 - 14x$ pada titik $x = a$.

Jawab :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - 14x) - (a^2 - 14a)}{x - a} \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - a^2) - (14x - 14a)}{x - a} \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{((x - a)(x + a)) - (14(x - a))}{x - a} \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} ((x + a) - 14) \\ f'(a) &= 2a - 14 \end{aligned}$$

Jadi, nilai turunan fungsi $f(x) = x^2 - 14x$ pada titik $x = a$ adalah $2a - 14$.

Notasi turunan

Apabila digunakan $y = f(x)$ yang menunjukkan bahwa variabel bebas adalah x dan variabel terikat adalah y , maka beberapa notasi umum yang digunakan untuk turunan fungsi $y = f(x)$ adalah sebagai berikut.

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Definisi 2.3

Apabila $f'(a)$ ada maka fungsi f dapat didiferensialkan di a .

Teorema 2.4

Jika fungsi f dapat didiferensialkan di a , maka f kontinu di a .

Note: Pembuktian Teorema 2.4 dapat dilihat pada buku Kalkulus edisi keempat (2001) pengarang James Stewart.

Aturan Rantai

Jika f dan g keduanya dapat didiferensialkan dan $F = f \circ g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F(x) = f(g(x))$, maka F dapat didiferensialkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ merupakan fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

dan jika $z = f(x, y)$ adalah fungsi x dan y yang terdiferensialkan dengan $x = g(t)$ dan $y = h(t)$ dan keduanya merupakan fungsi dari t yang terdiferensialkan, maka z adalah fungsi dari t yang terdiferensialkan dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Contoh 2.3

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ apabila diketahui $y = (13x^4 + 25x^2 + 8)^6$.

Jawab :

Misalkan $u = 13x^4 + 25x^2 + 8$ dan $y = u^6$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^6)}{du} \frac{d(13x^4 + 25x^2 + 8)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (6u^5)(52x^3 + 50x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (6(13x^4 + 25x^2 + 8)^5)(52x^3 + 50x)$$

Dengan demikian, $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = (13x^4 + 25x^2 + 8)^6$ adalah $(6(13x^4 + 25x^2 + 8)^5)(52x^3 + 50x)$.

B. Integral

Secara umum, integral dapat diklasifikasikan menjadi integral tentu dan integral tak tentu.

Definisi 2.5 (Integral Tak Tentu)

Apabila diberikan suatu fungsi $f(x)$ pada suatu interval I dan berlaku $F'(x) = f(x)$ untuk suatu $F(x)$, maka $F(x)$ adalah suatu anti turunan dari fungsi $f(x)$.

Contoh 2.4

Tentukan integral dari fungsi $f(x) = 13x^2 + 5x$.

Jawab :

$$\int (13x^2 + 5x) dx = 26x + 5 + c,$$

dengan $c \in \mathbb{R}$.

Pengintegralan dapat dilakukan dengan menggunakan teorema dasar kalkulus seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}\int ax^n dx &= \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C \\ \int e^{ax} dx &= \frac{e^{ax}}{a} + C \\ \int \sin(ax+b) dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \\ \int \cos(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C\end{aligned}$$

Aturan Substitusi

Apabila $u = g(x)$ adalah fungsi terdiferensialkan yang daerah nilainya berupa selang I dan f kontinu pada I , maka

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Integral Parsial

Setiap aturan penurunan berkaitan dengan aturan pengintegralan tertentu, misalkan aturan yang berkaitan dengan aturan hasil kali untuk turunan disebut

aturan pengintegralan parsial. Aturan hasil kali menyatakan jika f dan g adalah fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Apabila dimisalkan $u = f(x)$ dan $v = g(x)$, maka turunannya adalah $du = f'(x)dx$ dan $dv = g'(x)dx$. Dengan demikian, rumus pengintegralan parsial menurut aturan substitusi menjadi

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Definisi 2.6 (Integral Tentu)

Diketahui $f(x)$ adalah fungsi kontinu untuk $a \leq x \leq b$ yang dipartisi menjadi n subinterval yaitu $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ dengan $x_0 = a$ dan $x_n = b$ dengan $\Delta x = (b - a)/n$. Apabila dipilih titik sampel $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ di dalam selang-selang ini sehingga x_i^* terletak dalam selang-bagian ke- i $[x_i, x_{i+1}]$, maka **definisi integral tentu f dari a sampai b** adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x.$$

Definisi integral tentu ini disebut sebagai suatu limit **Penjumlahan Riemann**.

Teorema 2.7

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan $F'(x) = f(x)$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Aturan Substitusi untuk Integral Tentu

Apabila g' kontinu pada $[a, b]$ dan f kontinu pada daerah nilai $u = g(x)$, maka

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Contoh 2.5

Tentukan integral fungsi $f(x) = 16x^3 + 5$ pada $[1, 4]$.

Jawab :

Langkah pertama menentukan anti turunan (integral tak tentu) dari $f(x)$.

$$\begin{aligned}\int (16x^3 + 5) dx &= \frac{1}{4} 16x^4 + c \\ &= 4x^4 + c.\end{aligned}$$

Langkah kedua mensubstitusikan batas atas dan batas bawah sesuai teorema 2.7.

$$\begin{aligned}\int_1^4 (16x^3 + 5) dx &= [4x^4]_1^4 \\ &= (4(4)^4 - 4(1)^4) \\ &= 1024 - 4 \\ &= 1020.\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh integral fungsi $f(x) = 16x^3 + 5$ pada $[1,4]$ adalah 1020.

C. Integrasi Numerik

Integrasi numerik adalah suatu teknik untuk mencari hampiran luas suatu bidang yang dibatasi oleh $f(x)$ dan sumbu x pada selang tertutup $[a, b]$. Apabila $f(x)$ dihampiri dengan polinomial $p_n(x)$, maka integrasi numerik dapat dinyatakan seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}I &= \int_a^b f(x), \\ I &\approx \int_a^b p_n(x).\end{aligned}$$

Proses perhitungan nilai hampiran dari suatu integral tentu disebabkan oleh dua situasi yang tidak memungkinkan diantaranya terdapat integral yang sulit atau tidak dapat diselesaikan secara analitik, contohnya sebagai berikut.

$$\int_0^2 \frac{2 + \cos(1 + x^{3/2})}{\sqrt{1 + 0.5 \sin x}} e^{0.5x} dx.$$

Dalam mencari hampiran nilai integral ini dapat digunakan berbagai metode dalam pengintegralan numerik misalkan aturan penjumlahan Riemann, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3.

1. Aturan Penjumlahan Riemann

Aturan penjumlahan Riemann ini merupakan cikal bakal dari integral tentu, dimana integral tentu ini berbeda dengan integral tak tentu yang dipandang sebagai anti turunan. Pendefinisian integral tentu disusun dari suatu konsep limit pada jumlahan Riemann suatu fungsi.

Definisi 2.8

Diketahui fungsi f terdefinisi pada interval $[a, b]$ yang dipartisi menjadi n subinterval yaitu $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ dengan $x_0 = a$ dan $x_n = b$ dengan $\Delta x = (b - a)/n$. Apabila dipilih titik sampel $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pada selang-selang ini, sehingga x_i^* terletak dalam selang bagian ke- i $[x_i, x_{i+1}]$, maka **definisi integral tentu f dari a sampai b** adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x.$$

Definisi integral tentu ini disebut sebagai suatu limit **Penjumlahan Riemann**, karenanya sebarang jumlahan Riemann dapat dipakai sebagai suatu hampiran untuk integral : Jika dibagi $[a, b]$ atas n selang bagian dengan panjang $\Delta x = (b - a)/n$, maka diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x,$$

dengan x_i^* sebarang titik di selang bagian ke- i $[x_{i-1}, x_i]$. Jika dipilih x_i^* sebagai titik ujung kiri selang sehingga $x_i^* = x_{i-1}$, maka akan diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x. \quad (2.1)$$

Jika dipilih x_i^* sebagai titik ujung kanan sehingga $x_i^* = x_i$, maka akan diperoleh

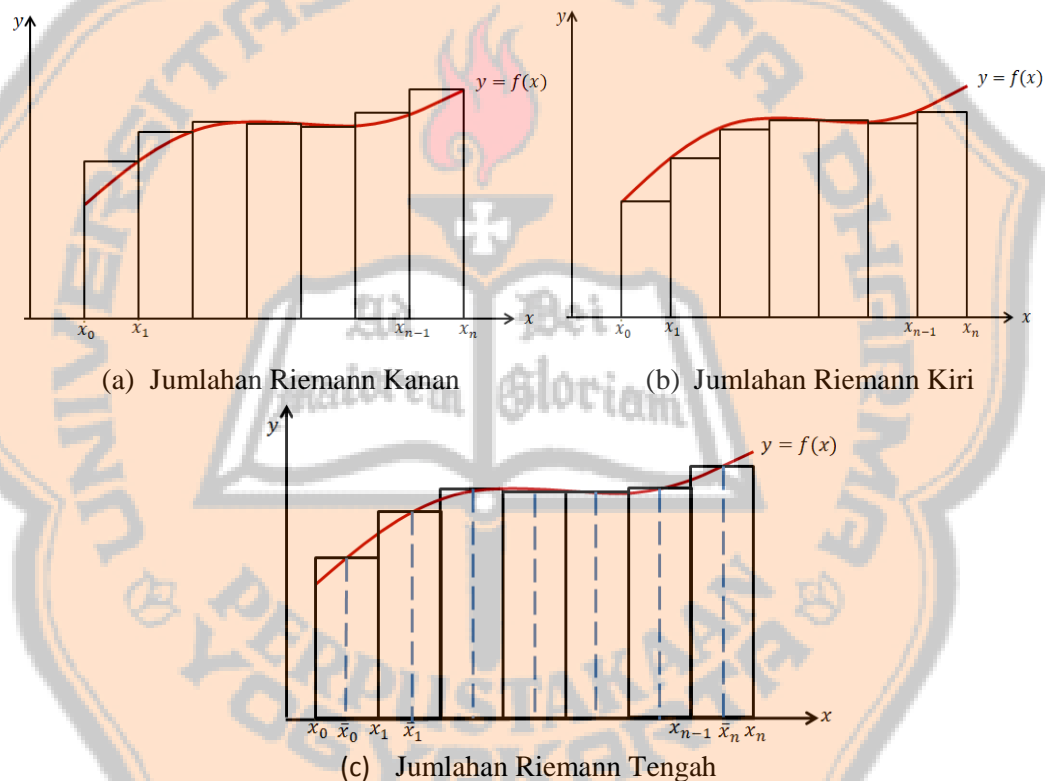
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x. \quad (2.2)$$

Jika kita memilih x_i^* sebagai titik tengah \bar{x}_i dari selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, maka akan diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x, \quad (2.3)$$

dengan $\Delta x = (b - a)/n$ dan $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ titik tengah $[x_{i-1}, x_i]$.

Integral tersebut menyatakan hampiran untuk luas daerah yang dibatasi oleh suatu kurva $f(x)$ dengan rumus luas persegi panjang, dimana persamaan (2.1) disebut sebagai jumlahan Riemann kiri, persamaan (2.2) disebut dengan jumlahan Riemann kanan, dan persamaan (2.3) disebut dengan jumlahan Riemann tengah sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 2.1 di bawah ini.



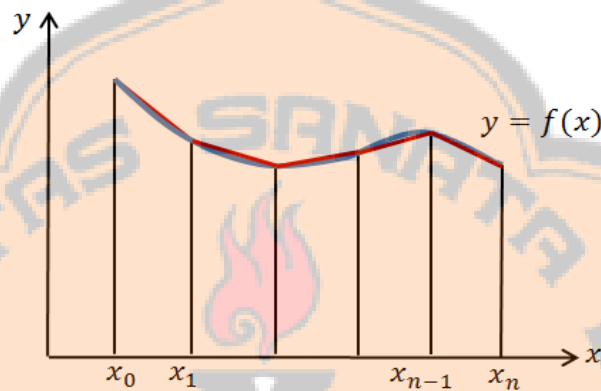
Gambar 2.1 Aturan Jumlahan Riemann

2. Metode Trapesium

Metode trapesium merupakan pengembangan dari aturan jumlahan Riemann, dimana integral tentu dari suatu fungsi $f(x)$ berderajat dua dihampiri dengan rumus luas trapesium. Dengan demikian, rumus luas suatu daerah di bawah kurva $f(x)$ berderajat dua pada interval $[a, b]$ seperti berikut ini.

$$\int_a^b f(x) \approx \left(\frac{a+b}{2}\right) (f(a) + f(b)). \quad (2.4)$$

Kurva $f(x)$ berderajat dua dapat pula dipartisi menjadi n titik, kemudian didekatkan dengan garis lurus pada jarak yang sama sehingga setiap partisi terbentuk sebagai trapesium seperti pada Gambar 2.2 di bawah ini.



Gambar 2.2 Metode Trapesium

Rumus umum dari kaidah ini digeneralisasikan dari rumus luas trapesium (2.4) seperti berikut ini.

Teorema 2.9

Andaikan selang $[a, b]$ dibagi menjadi n selang bagian $[x_i, x_{i+1}]$ selebar $h = (b - a)/n$, menggunakan titik partisi yang berjarak sama yaitu $x_i = a + ih$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$, maka

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(f_a + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right).$$

Bukti :

Perhatikan bahwa

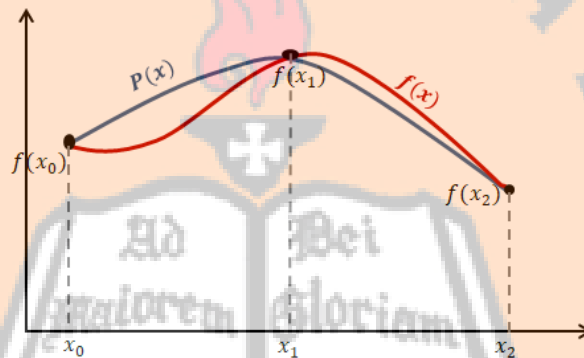
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx, \\ &\approx \frac{h}{2} (f_a + f_1) + \frac{h}{2} (f_1 + f_2) + \dots + \frac{h}{2} (f_{n-1} + f_n), \\ &\approx \frac{h}{2} (f_a + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n), \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left(f_a + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right).$$

Dengan demikian, diperoleh rumus umum untuk metode gabungan trapesium.

3. Metode Simpson 1/3

Metode integrasi Simpson merupakan pengembangan dari metode integrasi trapesium, dimana daerah pembagiannya berupa dua daerah trapesium yang didekati oleh kurva parabola. Perhatikan Gambar 2.3 di bawah ini, suatu daerah di bawah kurva $f(x)$ antara x_0 dan x_2 dihampiri oleh luas daerah di bawah parabola $P(x)$ yang melalui titik x_0, x_1 , dan x_2 .



Gambar 2.3 Kurva $f(x)$ yang di dekati dengan kurva parabola $P(x)$

Andaikan $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ dengan tiga titik partisi yaitu x_0, x_1 , dan x_2 . Andaikan $x_0 = -h, x_1 = 0$, dan $x_2 = h$, dimana setiap partisinya berjarak sama. Substitusi nilai $-h, 0$, dan h ke $f(x)$ sedemikian sehingga diperoleh

$$(-h, f(x_0)) \rightarrow f(x_0) = Ah^2 - Bh + C \quad \dots (2.5)$$

$$(0, f(x_1)) \rightarrow f(x_1) = C \quad \dots (2.6)$$

$$(h, f(x_2)) \rightarrow f(x_2) = Ah^2 + Bh + C \quad \dots (2.7)$$

Eliminasi persamaan (2.5) dan (2.6),

$$\begin{array}{rcl} f(x_0) & = & Ah^2 - Bh + C \\ f(x_1) & = & C \\ \hline f(x_0) - f(x_1) & = & Ah^2 - Bh. \end{array} \quad \dots (2.8)$$

Eliminasi persamaan (2.7) dan (2.6),

$$\begin{aligned} f(x_2) &= Ah^2 + Bh + C \\ f(x_1) &= C \\ \hline f(x_2) - f(x_1) &= Ah^2 + Bh. \end{aligned} \quad \dots (2.9)$$

Eliminasi persamaan (2.8) dan (2.9),

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_1) &= Ah^2 - Bh \\ f(x_2) - f(x_1) &= Ah^2 + Bh \\ \hline f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2) &= 2Ah^2. \end{aligned} \quad \dots (2.10)$$

Integralkan $f(x)$ dengan batas $-h$ dan h sehingga diperoleh luas dibawah kurva

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) &= \left[\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx \right]_{-h}^h, \\ &= \left[\frac{1}{3}Ah^3 + \frac{1}{2}Bh^2 + Ch \right] - \left[-\frac{1}{3}Ah^3 + \frac{1}{2}Bh^2 - Ch \right], \\ &= \frac{1}{3}h(2Ah^2 + 6C). \end{aligned} \quad \dots (2.11)$$

Substitusi persamaan (2.6) dan (2.10) ke persamaan (2.11),

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) &\approx \frac{1}{3}h(f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2) + 6f(x_1)), \\ &\approx \frac{1}{3}h(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \\ \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\approx \frac{1}{3}h(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)). \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh hampiran luasan di bawah kurva $f(x)$ dengan metode Simpson 1/3 adalah

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{1}{3}h(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \quad \dots (2.12)$$

dengan $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$.

Kurva polinom berderajat dua $P_2(x)$ dapat pula dipartisi dengan 3 titik, 5 titik, 7 titik dan seterusnya sedemikian sehingga ruang partisi yang dibentuk berjumlah genap seperti berikut ini.

Teorema 2.10

Andaikan selang $[a, b]$ dibagi menjadi $2M$ selang bagian $[x_i, x_{i+1}]$ berjarak sama yaitu $h = (b - a)/2M$ dengan titik-titik partisinya yaitu $x_i = a + ih$, dimana $i = 0, 1, 2, \dots, 2M$, maka

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f_a + 4 \sum_{i=1}^M f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f_{2i} + f_{2M} \right).$$

Bukti :

Perhatikan bahwa

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2M-2}}^b f(x) dx.$$

Substitusikan persamaan (2.12) ke persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{3} h (f(x_a) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{1}{3} h (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{3} h (f(x_{2M-2}) + 4f(x_{2M-1}) + f(x_{2M})), \\ &\approx \frac{h}{3} (f_a + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{2M-2} + 4f_{2M-1} + f_{2M}), \\ \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} \left(f_a + 4 \sum_{i=1}^M f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f_{2i} + f_{2M} \right). \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh rumus metode gabungan Simpson 1/3.

4. Galat (error)**Definisi 2.11**

Galat (*error*) merupakan perbedaan nilai aproksimasi numerik dengan hasil perhitungan analitis. Hubungan antara nilai eksak (I), nilai aproksimasi (T), dan galat (E) dinyatakan sebagai berikut.

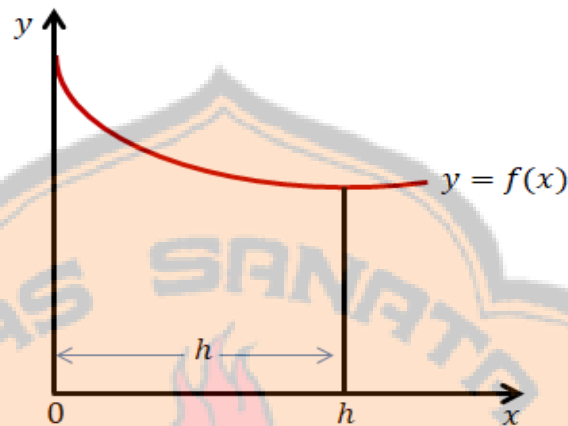
$$I = T + E,$$

sehingga diperoleh,

$$E = I - T.$$

Setiap metode integrasi numerik memiliki galat yang berbeda-beda. Berikut ini diberikan galat dari aturan Riemann kiri, aturan Riemann kanan, aturan

Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3 dalam menghitung hampiran integral dari $f(x)$ pada $[0, h]$ seperti pada Gambar 2.4 di bawah ini.



Gambar 2.4 Kurva fungsi $f(x)$

Teorema 2.12 (Galat Aturan Riemann Kiri)

Galat dari aturan jumlahan Riemann kiri untuk satu pias adalah

$$E = \int_0^h f(x) dx - hf_0.$$

Dengan menggunakan penurunan menggunakan deret Taylor, maka akan diperoleh galat dari aturan jumlahan Riemann kiri adalah

$$E \approx \frac{h^2}{2} f'(t), \quad 0 < t < h.$$

Galat dari aturan jumlahan Riemann kiri dengan n pias adalah

$$\begin{aligned} E_{tot} &\approx n \frac{h^2}{2} f'(t), \quad 0 < t < h \\ &\approx n \left(\frac{b-a}{n} \right) \frac{h}{2} f'(t), \\ &\approx \frac{h}{2} (b-a) f'(t), \\ &\approx O(h). \end{aligned}$$

Jadi, galat total dari aturan jumlahan Riemann kiri sebanding dengan piasnya (h). Semakin kecil ukuran h , maka semakin kecil pula galatnya, demikian pula sebaliknya.

Teorema 2.13 (Galat Aturan Riemann Kanan)

Galat dari aturan jumlahan Riemann kanan untuk satu pias adalah

$$E = \int_0^h f(x)dx - hf_h.$$

Dengan menggunakan penurunan menggunakan deret Taylor, maka akan diperoleh galat dari aturan jumlahan Riemann kanan adalah

$$E \approx -\frac{h^2}{2}f'(t), \quad 0 < t < h.$$

Galat dari aturan jumlahan Riemann kanan dengan n pias adalah

$$\begin{aligned} E_{tot} &\approx n \left(-\frac{h^2}{2}f'(t) \right), \quad 0 < t < h \\ &\approx -n \left(\frac{b-a}{n} \right) \frac{h}{2} f'(t), \\ &\approx -\frac{h}{2}(b-a)f'(t), \\ &\approx O(h). \end{aligned}$$

Jadi, galat total dari aturan jumlahan Riemann kanan sama dengan galat total dari aturan jumlahan Riemann kiri hanya berbeda tanda.

Teorema 2.14 (Galat Aturan Riemann Tengah)

Galat dari aturan jumlahan Riemann tengah untuk satu pias adalah

$$E = \int_0^h f(x)dx - hf_{\frac{1}{2}}.$$

Dengan menggunakan penurunan menggunakan deret Taylor, maka akan diperoleh galat dari aturan jumlahan Riemann tengah adalah

$$E \approx \frac{h^3}{24}f''(t), \quad 0 < t < h.$$

Galat dari aturan jumlahan Riemann tengah dengan n pias adalah

$$\begin{aligned} E_{tot} &\approx n \frac{h^3}{24}f''(t), \quad 0 < t < h \\ &\approx n \left(\frac{b-a}{n} \right) \frac{h^2}{24} f''(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{h^2}{24}(b-a)f''(t), \\ &\approx O(h^2). \end{aligned}$$

Jadi, galat total dari aturan jumlahan Riemann tengah sebanding dengan kuadrat pias (h). Semakin kecil ukuran h , maka semakin kecil pula galatnya, demikian pula sebaliknya.

Teorema 2.15 (Galat Metode Trapezium)

Galat dari metode trapesium untuk satu pias adalah

$$E = \int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1).$$

Dengan menguraikan $f(x)$ di sekitar $x_0 = 0$ menggunakan deret Taylor, maka akan diperoleh galat dari metode trapesium seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} E &\approx -\frac{1}{2}h^3 f''(t), & 0 < t < h \\ E &\approx O(h^3) \end{aligned}$$

Persamaan ini menyatakan bahwa galat metode trapesium sebanding dengan $O(h^3)$, sedangkan galat total untuk n buah pias adalah

$$\begin{aligned} E_{tot} &\approx -n \frac{h^3}{12} f''(t), & \text{dengan } h = \frac{b-a}{n} \\ &\approx -n \left(\frac{b-a}{n} \right) \frac{h^2}{12} f''(t), \\ &\approx -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(t), \\ &\approx O(h^2). \end{aligned}$$

Jadi, galat total dari metode trapesium sama dengan galat total dari aturan jumlahan Riemann tengah yaitu sebanding dengan kuadrat piasnya (h), hanya saja galat total dari metode trapesium 2 kali galat pada aturan jumlahan Riemann tengah dan berbeda tanda.

Teorema 2.16 (Galat Metode Simpson 1/3)

Galat metode Simpson 1/3 untuk dua pasang subselang adalah

$$E = \int_0^{2h} f(x)dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2).$$

Dengan cara penurunan yang sama seperti pada metode trapesium, dapat dibuktikan bahwa

$$E \approx -\frac{1}{90}h^5 f^{(iv)}(t), \quad 0 < t < h.$$

Galat untuk $n/2$ pasang subselang adalah

$$\begin{aligned} E_{tot} &\approx -\frac{n}{2} \frac{1}{90} h^5 f^{(iv)}(t), \quad 0 < t < h. \\ &\approx -\frac{n}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right) \frac{h^4}{90} f^{(iv)}(t), \\ &\approx -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(iv)}(t), \\ &\approx O(h^4). \end{aligned}$$

Jadi, galat total dari metode Simpson 1/3 gabungan berorde 4. Apabila dibandingkan dengan metode Riemann dan metode trapesium, hasil integrasi dengan metode Simpson 1/3 lebih baik dikarenakan orde galatnya lebih tinggi. Kelemahan metode Simpson 1/3 tidak dapat diterapkan apabila jumlah subselang (n) ganjil.

Contoh 2.6

Tentukan nilai eksak dan galat dari integral di bawah ini dengan menggunakan aturan jumlahan Riemann kiri, aturan jumlahan Riemann kanan, aturan jumlahan Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3.

$$\int_0^2 e^x dx.$$

Jawab :

Apabila interval $[0,2]$ dibagi atas $n = 10$ selang bagian dengan panjang $\Delta x = \frac{(2-0)}{10} = 0.2$, maka diperoleh hampiran integral pada setiap metode seperti berikut ini.

1. Aturan jumlahan Riemann kiri

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^x dx &\approx \sum_{i=1}^{10} e^{x_{i-1}} (0.2), \\
&\approx (0.2) \sum_{i=1}^{10} e^{x_{i-1}} \\
&\approx (0.2)(e^{x_0} + e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_9}) \\
&\approx (0.2)(e^0 + e^{0.2} + e^{0.4} + \dots + e^2) \\
&\approx (0.2)(1 + 1.2214 + 1.4918 + \dots + 7.3890) \\
&\approx (0.2)(28.85716579) \\
&\approx 5.771433158.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan aturan reiman kiri diperoleh nilai dari integral tersebut adalah 5.771433158.

2. Aturan jumlahan Riemann kanan

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^x dx &\approx \sum_{i=1}^{10} e^{x_i} (0.2) \\
&\approx (0.2) \sum_{i=1}^{10} e^{x_i} \\
&\approx (0.2)(e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \dots + e^{x_{10}}) \\
&\approx (0.2)(e^{0.2} + e^{0.4} + e^{0.6} + \dots + e^2) \\
&\approx (0.2)(1.2214 + 1.4918 + 1.8221 + \dots + 7.3890) \\
&\approx (0.2)(35.24622189) \\
&\approx 7.049244378.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan aturan reiman kanan diperoleh nilai dari integral tersebut adalah 7.049244378.

3. Aturan jumlahan Riemann tengah

Kita perlu mencari \bar{x}_i , dimana

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$

sehingga diperoleh,

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) = \frac{1}{2}(0 + 0.2) = 0.1$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(0.2 + 0.4) = 0.3$$

$$\vdots$$

$$\bar{x}_{10} = \frac{1}{2}(x_9 + x_{10}) = \frac{1}{2}(1.8 + 2) = 1.9.$$

Dengan demikian, berdasarkan aturan jumlahan Riemann tengah diperoleh,

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^x dx &\approx \sum_{i=1}^{10} e^{\bar{x}_i} (0.2) \\ &\approx (0.2) \sum_{i=1}^{10} e^{\bar{x}_i} \\ &\approx (0.2)(e^{\bar{x}_1} + e^{\bar{x}_2} + e^{\bar{x}_3} + \dots + e^{\bar{x}_{10}}) \\ &\approx (0.2)(e^{0.1} + e^{0.3} + e^{0.5} + \dots + e^{1.9}) \\ &\approx (0.2)(1.1051 + 1.3498 + 1.6487 + \dots + 6.6858) \\ &\approx (0.2)(31.89210041) \\ &\approx 6.378420082. \end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan aturan Riemann tengah diperoleh nilai dari integral tersebut adalah 6.378420082.

4. Metode trapesium

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^x dx &\approx \frac{h}{2} \left(f_a + 2 \sum_{i=1}^9 f_i + f_b \right) \\ &\approx \left(\frac{0.2}{2} \right) (f_a + 2f_1 + 2f_2 + \dots + f_b) \\ &\approx (0.1)(e^0 + 2e^{0.2} + 2e^{0.4} + \dots + e^2) \\ &\approx (0.1)(1 + 2(1.2214) + 2(1.4918) + \dots + 1.3438) \\ &\approx (0.1)(64.10338768) \\ &\approx 6.410338768 \end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan metode trapesium diperoleh nilai dari integral tersebut adalah 6.410338768.

5. Metode Simpson 1/3

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^x dx &\approx \frac{h}{3} \left(f_a + 4 \sum_{i=1}^M f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f_{2i} + f_{2M} \right) \\
&\approx \frac{h}{3} (f_a + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + f_{10}) \\
&\approx \frac{0.2}{3} (e^0 + 4e^{0.2} + 2e^{0.4} + \dots + e^2) \\
&\approx \frac{0.2}{3} (1 + 4.8856 + 2.9836 + \dots + 7.3890) \\
&\approx \frac{0.2}{3} (95.83668932) \\
&\approx 6.389112621.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan metode Simpson 1/3 diperoleh nilai dari integral tersebut adalah 6.389112621.

Apabila integral tersebut diselesaikan secara eksak, maka akan diperoleh hasil integral tersebut seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^x dx &= [e^x]_0^2 \\
&= e^2 - e^0 \\
&= e^2 - e^0.
\end{aligned}$$

$$\int_0^2 e^x dx = 6.389056099.$$

Dengan demikian, galat dari aturan jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann kiri, aturan jumlahan Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3 dapat dinyatakan seperti pada Tabel 2.1 berikut ini.

Tabel 2.1 Galat setiap metode integrasi numerik

Metode	Eksak	Numerik	Galat
Riemann Kiri	6.389056099	5.771433158	0.617622941
Riemann Kanan	6.389056099	7.049244378	0.660188279
Riemann Tengah	6.389056099	6.378420082	0.010636017
Trapeسيوم	6.389056099	6.410338768	0.021282669
Simpson	6.389056099	6.389112621	0.000056522

Berdasarkan hasil perhitungan galat tersebut, diperoleh galat dari metode Simpson 1/3 lebih kecil dibanding keempat metode integrasi numerik lainnya.

D. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi yang memiliki satu atau lebih variabel (Olver, 2014). Persamaan diferensial yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi dan memiliki tepat satu variabel disebut persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan diferensial yang memuat suku-suku diferensial parsial dengan lebih dari satu variabel independen disebut persamaan diferensial parsial (Robinson, 2004).

Contoh 2.7

1. $\frac{d^4c}{dx^4} + \frac{d^2c}{dx^2} + c^2 = \sin x$, persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial biasa orde empat dimana terdapat fungsi $c(x)$ yang bergantung pada variabel x .
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k$, persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial parsial orde dua yang melibatkan fungsi $u(t, x, y)$ dari tiga variabel.
3. $\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial parsial orde dua yang melibatkan fungsi $y(t, x)$ yang bergantung pada variabel x dan t .

Definisi 2.17

Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial linear orde dua adalah sebagai berikut (Coleman, 2013):

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + fu_y + gu = 0, \quad (2.13)$$

dengan $u = u(x, y)$ dan a, b, c, d, f , dan g adalah konstanta. Persamaan diferensial parsial (2.13) dapat dikatakan persamaan diferensial parsial hiperbolik apabila $b^2 - 4ac > 0$, persamaan diferensial parsial parabolik apabila $b^2 - 4ac = 0$, dan persamaan diferensial parsial eliptik apabila $b^2 - 4ac < 0$.

Menurut Pinchover dan Rubinstein (2005), persamaan diferensial parsial sering muncul di semua bidang fisika, teknik, biologi, kimia, dan ekonomi (keuangan). Hal ini dikarenakan persamaan diferensial parsial berperan penting dalam penggambaran keadaan fisis, dimana besaran-besaran yang terlibat di dalamnya berubah terhadap ruang dan waktu (Sulistiyono, 2015). Sebuah solusi dari persamaan diferensial parsial secara umum memerlukan kondisi tambahan dan syarat batas dari daerah di mana solusi didefinisikan.

E. Persamaan Difusi dan Adveksi

Proses distribusi konsentrasi dengan ruang dan waktu digambarkan oleh persamaan diferensial parsial tipe parabola yang dikenal sebagai persamaan adveksi-difusi (Kumar, 2010). Adveksi adalah proses perpindahan panas sebagai akibat dari adanya aliran. Difusi adalah proses perpindahan panas berupa rambatan dari air dengan temperatur tinggi ke air dengan temperatur yang lebih rendah.

Model satu dimensi tidak dapat menangkap transversal transpor sehingga diperlukan model dua dimensi (2D) (Djordjevich, dkk., 2017). Oleh sebab itu, pada kasus pemurnian air ini digunakan persamaan difusi adveksi 2D yang merupakan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan pengatur dari banyak fenomena fisik seperti dinamika fluida, akustik, elektrostatik, elektrodinamika, aliran fluida, elastisitas, pemantauan kesehatan, atau elastisitas (Mahmoodi, dkk., 2017).

Persamaan difusi satu dimensi (1D) berbentuk seperti berikut (Fulford dan Broadbridge, 2002).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (2.14)$$

Persamaan derivasi difusi 2D yaitu :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

Persamaan derivasi adveksi 1D seperti berikut ini (Fulford dan Broadbridge, 2002).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Persamaan derivasi adveksi 2D yaitu :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

Apabila $w = 0$, maka diperoleh

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (2.15)$$

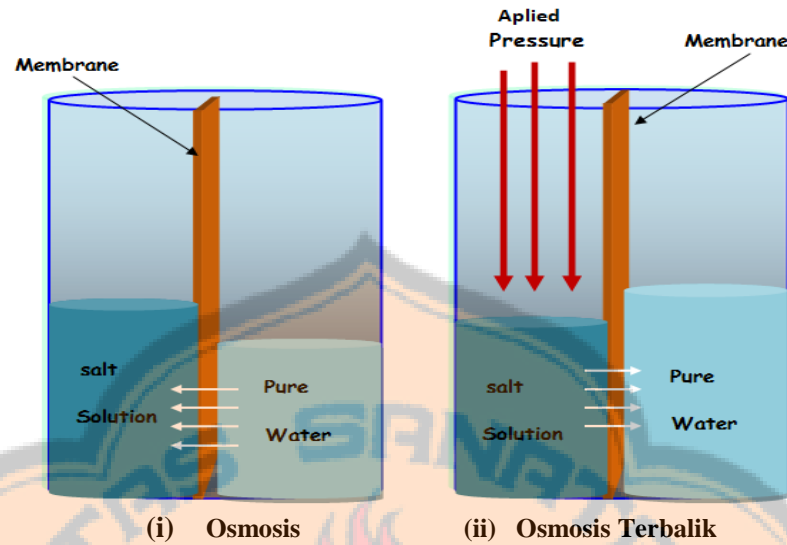
Dengan demikian, persamaan adveksi-difusi 2D untuk mendefinisikan konsentrasi larutan garam $C(x, y, t)$ dinyatakan seperti berikut ini (Fulford dan Broadbridge, 2002).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_1(y) \frac{\partial C}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right). \quad (2.16)$$

Model persamaan diferensial parsial adveksi-difusi 2D tersebut merupakan persamaan pengatur yang selanjutnya akan dikembangkan untuk mendapatkan model persamaan diferensial parsial yang baru yang akan digunakan untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada membran semipermeabel.

F. Sistem Osmosis Terbalik

Osmosis adalah proses alami dimana air mengalir melalui membran semipermeabel dari larutan dengan konsentrasi rendah padatan terlarut ke larutan dengan konsentrasi tinggi padatan terlarut (Kuncera, 2010). Pada sistem osmosis terdapat tekanan alami. Menurut Spellman (2016), tekanan osmotik adalah pengukuran perbedaan energi potensial antara larutan pada kedua sisi membran semipermeabel akibat osmosis. Besarnya tekanan osmosis tersebut dipengaruhi oleh karakteristik atau jenis membran, temperatur air, dan konsentrasi garam serta senyawa lain yang terlarut dalam air (Widayat dan Yudo, 2002). Membran adalah lapisan tipis yang mampu memisahkan berbagai material secara fisik atau kimia dengan menerapkan gaya pendorong (Spellman, 2016). Secara sederhana dapat digambarkan seperti Gambar 2.4 berikut ini.



Gambar 2.5 Prinsip kerja membran osmosis terbalik

Osmosis terbalik adalah proses pemurnian air yang menggunakan membran semipermeabel untuk memisahkan dan menghilangkan padatan terlarut, organik, pirogen, submikron koloid, nitrat, dan bakteri dari air (Garud, dkk., 2011). Menurut Mulder (Wenten, dkk., 2014), osmosis terbalik adalah sebuah metode filtrasi yang mampu menyisihkan banyak jenis molekul dan ion besar dari larutan dengan memberikan tekanan pada larutan yang berada pada salah satu sisi membran selektif. Pada proses pemurnian air menggunakan sistem osmosis terbalik diperlukan energi yang rendah dibandingkan dengan proses pemurnian air lainnya (Abdallah, dkk., 2018).

Pada proses osmosis terbalik diberikan tekanan tinggi ke sisi terkonsentrasi (sisi yang terkontaminasi) dari membran. Ketika tekanan diterapkan pada sisi ini, air murni akan mengalir melalui membran semipermeabel ke arah sisi lain yang berkonsentrasi lebih rendah sehingga menyebabkan konsentrasi zat terlarut di sisi dimana tekanan diterapkan menjadi lebih tinggi (Wimalawansa, 2013). Menurut Wenten, dkk (2014), tekanan eksternal diaplikasikan pada larutan untuk melawan tekanan osmotik sehingga menyebabkan perpindahan air dari larutan hipertonik ke larutan hipotonik. Hal ini menyebabkan air murni dapat melewati membran semipermeabel tersebut tanpa melewatkan molekul besar dan ion-ion dari suatu larutan dan mengendapkannya pada salah satu sisi membran semipermeabel.

Membran ini permeabel terhadap air dan beberapa ion tetapi impermeabel terhadap hampir semua ion dan padatan terlarut. Transpor pelarut berlangsung dari larutan yang lebih encer ke larutan dengan konsentrasi lebih tinggi sampai tercapai ekuilibrium (Minkov, dkk., 2013).

Menurut Wenten (2016), industri membran telah berkembang sejak tahun 1950-an, namun masih pada kapasitas produksi yang kecil. Terobosan monumental dalam pengembangan teknologi membran baru terjadi pada awal tahun 1960-an setelah Loeb dan Sourirajan menemukan teknik pembuatan membran asimetris. Penemuan ini merupakan titik awal perkembangan osmosis terbalik yang saat ini telah banyak digunakan untuk proses desalinasi air laut dan aplikasi skala besar di berbagai sektor industri. Salah satu aplikasi membran pertama adalah konversi air laut menjadi air tawar dengan menggunakan membran osmosis terbalik.

Aplikasi umum lainnya dari osmosis terbalik meliputi desalinasi air laut dan air payau untuk diminum yang sangat umum terjadi di daerah pesisir dan Timur Tengah dimana persediaan air tawar langka, menghasilkan air dengan kemurnian tinggi untuk obat-obatan, pengolahan produk susu, konsentrasi pemanis jagung, pewarna yang digunakan dalam pembuatan tekstil, dan reklamasi air limbah kota dan industri (Kucera, 2010). Selain itu, menurut Garud, dkk (2011), proses osmosis terbalik juga telah diterapkan untuk merawat air limbah kota dengan menghilangkan padatan terlarut karena proses pengolahan kota konvensional tidak menghilangkan padatan terlarut. Osmosis terbalik juga semakin banyak digunakan sebagai teknik pemisahan zat kimia dari lingkungan yang dilakukan dengan menghilangkan bahan organik dan polutan organik yang berada di air limbah.

G. Metode *Stretching Transformation*

Dipandang suatu keluarga transformasi dari variabel x, t, C ke beberapa variabel baru x_*, t_*, C_* , dengan

$$x = e^a x_*, \quad t = e^b t_*, \quad C = e^\gamma C_*, \quad (2.17)$$

dimana a, b , dan γ adalah tiga parameter yang ditentukan. Transformasi bentuk (2.17) ini disebut *stretching transformation* karena transformasi tersebut sesuai

dengan penskalaan ulang atau pembesaran dari setiap variabel, dimana e^a, e^b , dan e^y adalah faktor pembesar.

Himpunan transformasi (2.17) membentuk keluarga transformasi 3 parameter. Tujuannya adalah untuk menemukan subset (himpunan bagian) dari transformasi yang memiliki sifat tidak mengubah persamaan pengatur atau disebut invarian. Berikut ini adalah lima langkah untuk menemukan himpunan bagian transformasi yang invarian (Fulford dan Broadbridge, 2002).

1. Memisalkan suatu keluarga transformasi dari variabel x, y, c menjadi beberapa variabel baru x_*, y_*, c_* seperti pada persamaan (2.17).
2. Mensubstitusikan keluarga 3 parameter ke PDP dan kondisi batasnya.
3. Menentukan keluarga transformasi parameter yang persamaannya invarian dengan PDP tersebut.
4. Menentukan kombinasi variabel yang invarian dalam satu parameter.
5. Perubahan variabel-variabel pada langkah (4) disubstitusikan kembali ke PDP sehingga diperoleh PDB.

Contoh 2.7

Diberikan persamaan pengatur untuk masalah difusi berikut ini.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (2.18)$$

dengan kondisi batas

$$C(0, t) = 1, \quad C(\infty, t) = 0 \quad (2.19)$$

dan kondisi awal

$$C(x, 0) = 0. \quad (2.20)$$

Pada kasus ini, PDP (2.18), kondisi batas (2.19), dan kondisi awal (2.20) akan direduksi menjadi PDB dengan langkah dalam metode *stretching transformation* sebagai berikut.

Langkah 1

Memisalkan suatu keluarga transformasi dari variabel x, y, c menjadi beberapa variabel baru x_*, y_*, c_* seperti persamaan (2.17).

Langkah 2

Mensubstitusikan tiga parameter pada persamaan (2.17) ke dalam PDP (2.18), kondisi batas (2.19), dan kondisi awal (2.20). Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C e^{\gamma}}{\partial t_* e^b} &= \frac{\partial^2 C_* e^{\gamma}}{\partial (e^a x_*)^2} \\ \frac{\partial C e^{\gamma}}{\partial t_* e^b} &= \frac{\partial^2 C_* e^{\gamma}}{\partial e^{2a} x_*^2} \\ \text{atau} \quad e^{\gamma-b} \frac{\partial C_*}{\partial t_*} &= e^{\gamma-2a} \frac{\partial^2 C_*}{\partial x_*^2}\end{aligned}\quad (2.21)$$

Apabila kedua ruas dibagi dengan faktor $e^{\gamma-2a}$, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{e^{\gamma-b}}{e^{\gamma-2a}} \frac{\partial C_*}{\partial t_*} &= \frac{e^{\gamma-2a}}{e^{\gamma-2a}} \frac{\partial^2 C_*}{\partial x_*^2} \\ e^{2a-b} \frac{\partial C_*}{\partial t_*} &= \frac{\partial^2 C_*}{\partial x_*^2}\end{aligned}\quad (2.22)$$

Kondisi batas (2.19) dapat ditulis menjadi

$$C = 1 \quad \text{saat} \quad x = 0$$

Substitusikan 3 parameter umum transformasi peregangan (2.17) ke kondisi batas (2.19), diperoleh

$$e^{\gamma} C_* = 1 \quad \text{saat} \quad e^a x_* = 0. \quad (2.23)$$

sedangkan kondisi batas pada $x = \infty$ invarian di bawah keluarga transformasi umum (2.17). Kondisi awal (2.20) dapat pula dinyatakan menjadi

$$C = 0 \quad \text{saat} \quad t = 0.$$

Substitusikan 3 parameter transformasi peregangan umum (2.17) ke kondisi awal di atas, diperoleh

$$e^{\gamma} C_* = 0 \quad \text{saat} \quad e^b t_* = 0,$$

yang disederhanakan menjadi

$$C_* = 0 \quad \text{atau} \quad e^{\gamma} = 0 \quad \text{saat} \quad e^b = 0 \quad \text{atau} \quad t_* = 0. \quad (2.24)$$

Langkah 3

Menentukan keluarga transformasi parameter yang persamaannya invarian dengan persamaan (2.18), (2.19), dan (2.20). Perhatikan persamaan (2.22), persamaan ini akan invarian dengan persamaan (2.18) apabila

$$2a - b = 0.$$

atau
$$2a = b. \quad (2.25)$$

Persamaan (2.23) akan invarian dengan persamaan (2.19) apabila

$$\gamma = 0. \quad (2.26)$$

Persamaan (2.24) akan invarian dengan persamaan (2.19) dengan nilai γ dan b berapapun akan memenuhi kondisi batas (2.19) tersebut.

Dengan demikian, pada kasus ini hanya digunakan persamaan (2.25) dan (2.26). Apabila persamaan (2.25) dan (2.26) ini disubstitusikan kembali ke dalam keluarga transformasi yang asli yaitu persamaan (2.17), maka akan diperoleh

$$x = e^a x_*, \quad t = e^{2a} t_*, \quad C = C_* \quad (2.27)$$

Dengan demikian, semua persamaan pengatur sudah invarian di bawah keluarga transformasi 1 parameter.

Langkah 4

Menentukan kombinasi variabel yang invarian dalam satu parameter dengan cara mengeliminasi parameter a pada persamaan (2.25). Hal ini dilakukan seperti berikut ini.

$$e^a = \frac{x}{x_*}, \quad e^a = \left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sehingga diperoleh,

$$e^a = \frac{x}{x_*} = \left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.28)$$

Dengan perkalian silang, diperoleh sebuah kombinasi invarian dari variabel-variabel pada persamaan (2.28) sebagai berikut.

$$xt^{-\frac{1}{2}} = x_* t_*^{-1/2}. \quad (2.19)$$

Selanjutnya, dimisalkan η_1 dan η_2 untuk menunjukkan dua kombinasi invarian dari persamaan (2.19) berikut ini.

$$\eta_1 = xt^{-1/2} = x_* t_*^{-1/2}, \quad \eta_2 = C = C_*. \quad (2.20)$$

Oleh karena persamaan differensial parsial dan kondisi batasnya ada di bawah invarian dalam transformasi (2.20), solusi yang unik tersebut juga dapat ditulis menjadi $\eta_2 = f(\eta_1)$, dimana f adalah sebagai berikut.

$$C(x, t) = f(xt^{-1/2}). \quad (2.21)$$

Langkah 5

Perubahan variabel-variabel pada langkah (4) disubstitusikan kembali ke PDP sehingga diperoleh PDB. Hal ini dilakukan dengan menggunakan *Chain Rule* untuk mencari setiap turunan pada PDP dari persamaan (2.21) seperti berikut ini. Turunan pertama C terhadap t ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= -\frac{1}{2} xt^{-\frac{3}{2}} \frac{df}{d\eta}. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (14), $\eta = xt^{-\frac{1}{2}}$ atau $x = \eta t^{\frac{1}{2}}$. $x = \eta t^{\frac{1}{2}}$ disubstitusikan ke persamaan di atas, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \eta t^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \frac{df}{d\eta}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \eta t^{-1} \frac{df}{d\eta}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

sedangkan turunan pertama C terhadap x yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= t^{-\frac{1}{2}} \frac{df}{d\eta}, \end{aligned}$$

dan turunan kedua C terhadap x yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} \left(t^{-\frac{1}{2}} \frac{df}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= t^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= t^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} \right) t^{-\frac{1}{2}}, \\
\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= t^{-1} \frac{d^2 f}{d\eta^2}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Substitusi persamaan (2.22) dan (2.23) ke persamaan (2.18), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \\
-\frac{1}{2} \eta t^{-1} \frac{df}{d\eta} &= t^{-1} \frac{d^2 f}{d\eta^2}.
\end{aligned}$$

Apabila kedua ruas persamaan dibagi dengan t^{-1} , maka akan diperoleh

$$-\frac{1}{2} \eta \frac{df}{d\eta} = \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \tag{2.24}$$

Dengan demikian, PDP (2.18) telah direduksi menjadi PDB orde 2 yaitu persamaan (2.24).

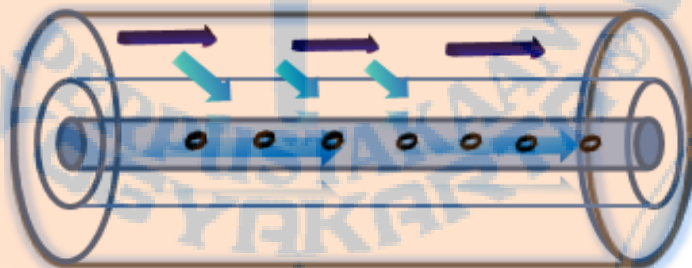
BAB III

HASIL PENELITIAN

Pada bab ini, penulis memaparkan hasil penelitian penulis yang terdiri atas pemodelan persamaan pemurnian air pada sistem osmosis terbalik, penyelesaian model persamaan secara analitik, dan penerapan kelima metode integrasi numerik yaitu aturan jumlahan Riemann kiri, aturan jumlahan Riemann kanan, aturan jumlahan Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3 dalam memprediksi konsentrasi larutan garam pada membran semipermeabel. Dalam bab ini, penulis juga membahas tentang keakuratan dari kelima metode integrasi numerik tersebut.

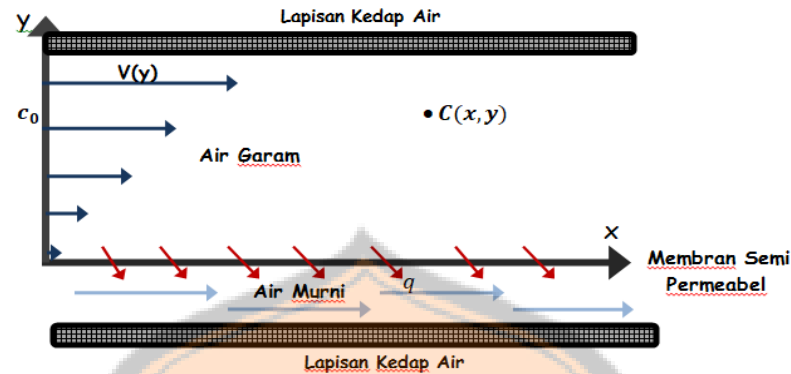
A. Pemodelan Masalah

Pada sistem osmosis terbalik, membran semipermeabel disusun berlapis dalam satu gulungan. Dalam proses ini, air yang hendak dimurnikan akan melewati membran dengan tujuan untuk menghilangkan zat garam atau zat lainnya dari air, hingga akhirnya hanya air murnilah yang dapat masuk ke dalam saluran air murni untuk disalurkan seperti Gambar 3.1 di bawah ini.



Gambar 3.1 Membran semipermeabel dalam sistem osmosis terbalik

Fokus masalah ini pada konsentrasi larutan garam yang sangat dekat dengan membran semipermeabel karena disinilah terbentuknya penumpukan garam. Hal ini ditunjukkan pada Gambar 3.2 di bawah ini dengan mempertimbangkan daerah semi-tak terbatas $x > 0, y > 0$ dan membran semipermeabel pada $y = 0$. Cairan mengalir melalui saluran dengan kecepatan $v(y)$ yang sejajar dengan sumbu x . Pada membran, tekanan mempercepat air keluar pada laju alir yang diketahui q .



Gambar 3.2 Adveksi dan difusi di dekat membran semipermeabel

Model matematis untuk mendefinisikan konsentrasi larutan garam $C(x, y, t)$ dinyatakan melalui persamaan adveksi-difusi 2D berikut ini.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_1(y) \frac{\partial C}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad (3.1)$$

dengan $v_1(y)$ adalah komponen horisontal dari kecepatan yang bergantung pada jarak dari membran yang mana nilainya nol pada permukaan membran. Konsentrasi larutan garam berubah dengan cepat pada arah y sehingga memungkinkan penyebaran garam sebagian besar pada arah y . Hal ini menyebabkan penyebaran dalam arah x diabaikan. Konsentrasi pada waktu konstan juga dapat diperoleh dengan mengatur $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$, sehingga persamaan pengatur (3.1) menjadi

$$0 + v_1(y) \frac{\partial C}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)$$

atau

$$v_1(y) \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (3.2)$$

Pada membran, kecepatan campuran garam akan menjadi nol. Di atas membran kecepatan akan meningkat ke beberapa kecepatan khusus v_0 melalui saluran. Dengan demikian, diperoleh pemodelan kecepatan pada saluran yang dekat dengan membran semipermeabel sebagai berikut.

$$v(y) = \frac{v_0 y}{h}, \quad (3.3)$$

dengan h adalah jarak dari batas semipermeabel ke pusat saluran, di sini h konstan. Perhatikan bahwa kecepatan horisontal $v(y)$ ini adalah nol pada

membran semipermeabel. Perbedaan kecepatan dengan jarak dari membran penting untuk gradien konsentrasi vertikal yang sesuai. Persamaan diferensial yang mengatur konsentrasi larutan garam diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (3.3) ke persamaan (3.2), sehingga diperoleh

$$\frac{v_0 y}{h} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

atau

$$y \frac{\partial C}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad \text{dengan } \alpha = \frac{Dh}{v_0}. \quad (3.4)$$

Fokus masalah ini pada konsentrasi larutan garam yang sangat dekat dengan membran semipermeabel. Oleh sebab itu, kita perlu mempertimbangkan daerah semi-tak terbatas dimana konsentrasi jauh dari membran adalah konsentrasi larutan sebelum mengalir ke filter yaitu c_0 , sehingga diperoleh

$$C(0, y) = c_0, \quad C(x, \infty) = c_0. \quad (3.5)$$

Syarat batas pada membran yaitu $y = 0$ juga perlu diperhatikan. Pada kondisi batas pada $y = 0$ tidak terdapat aliran massa garam karena pada $y = 0$ merupakan permukaan membran semipermeabel. Namun demikian, karena terdapat kecepatan vertikal pada $y = 0$ maka terdapat pula dua komponen pada aliran massa garam yaitu aliran karena difusi J_{diff} dan aliran karena adveksi J_{adv} ,

$$J = J_{\text{diff}} + J_{\text{adv}}. \quad (3.6)$$

Aliran karena difusi diberikan oleh hukum Fick

$$J_{\text{diff}} = -D \frac{\partial C}{\partial y}, \quad (3.7)$$

sedangkan aliran karena adveksi

$$J_{\text{adv}} = -qC(x, 0), \quad (3.8)$$

dengan q adalah laju aliran air sepanjang membran semipermeabel. Tanda minus pada persamaan (3.8) dikarenakan aliran air berada pada arah yang berlawanan dengan sumbu y . Pada permukaan membran $y = 0$, diperoleh $J(x, 0) = 0$ sehingga kondisi batas pada permukaan membran adalah

$$-D \frac{\partial C}{\partial y}(x, 0) - qC(x, 0) = 0. \quad (3.9)$$

Tambahan Konsentrasi

Dalam pemodelan masalah ini perlu didefinisikan tambahan konsentrasi $c(x,y)$ yang masuk dimana konsentrasi secara keseluruhan tidak akan jauh berbeda dari konsentrasi masuk c_0 yang dinyatakan seperti berikut ini.

$$c(x,y) = C(x,y) - c_0. \quad (3.10)$$

Dengan demikian persamaan (3.4) menjadi,

$$y \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad (3.11)$$

dengan $\alpha = \frac{Dh}{v_0}$ dan kondisi batas homogenya yaitu

$$c(0,y) = 0, \quad c(x,\infty) = 0. \quad (3.12)$$

Berdasarkan persamaan (3.9) dan (3.10) diperoleh kondisi batas pada permukaan membran sebagai berikut.

$$-D \frac{\partial c}{\partial y}(x,0) = q(c(x,0) + c_0). \quad (3.13)$$

Selanjutnya, persamaan (3.13) dapat disederhanakan dengan mengasumsikan konsentrasi larutan garam tidak jauh berbeda dari konsentrasi c_0 . Diasumsikan bahwa $c(x,0) \ll c_0$, sehingga kondisi batas (3.13) dapat diperkirakan oleh

$$-D \frac{\partial c}{\partial y}(x,0) = qc_0. \quad (3.14)$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan diferensial parsial (3.11) untuk memprediksi konsentrasi larutan garam dengan kondisi batas (3.12) dan (3.14).

B. Penyelesaian Persamaan Secara Analitik

Pada bagian ini, penulis akan menerangkan penyelesaian persamaan (3.11) dengan menggunakan kondisi batas (3.12) dan (3.14). Tahapan penyelesaian persamaan ini dimulai dengan mereduksi PDP (3.11) menjadi PDB menggunakan metode *stretching transformation*. Metode *stretching transformation* memberikan bentuk fungsional yang sesuai dengan persamaan aslinya. Hal ini dilakukan dengan menerapkan suatu keluarga transformasi dari variabel independen dan dependen pada PDP, kemudian menentukan suatu transformasi yang membuat persamaan tersebut tidak berubah atau invarian.

Dalam metode *stretching transformation* terdapat lima langkah untuk mengubah PDP menjadi PDB, diantaranya :

Langkah 1. Memisalkan suatu keluarga transformasi dari variabel x, y, c menjadi beberapa variabel baru x_*, y_*, c_* seperti berikut ini.

$$x = e^a x_*, \quad y = e^b y_*, \quad c = e^\gamma c_*. \quad (3.15)$$

Langkah 2. Mensubstitusikan tiga parameter pada persamaan (3.15) ke PDP (3.11), kondisi batas homogen (3.12), dan kondisi batas (3.14).

Substitusikan persamaan (3.15) ke PDP (3.11) seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} e^b y_* \left(\frac{\partial(e^\gamma c_*)}{\partial(e^a x_*)} \right) &= \alpha \left(\frac{\partial^2(e^\gamma c_*)}{\partial(e^b y_*)^2} \right), \\ \frac{e^b e^\gamma}{e^a} y_* \left(\frac{\partial(c_*)}{\partial(x_*)} \right) &= \alpha \left(\frac{\partial^2(e^\gamma c_*)}{\partial(e^{2b} y_*^2)} \right), \\ \frac{e^b e^\gamma}{e^a} y_* \left(\frac{\partial c_*}{\partial x_*} \right) &= \alpha \left(\frac{e^\gamma}{e^{2b}} \right) \left(\frac{\partial^2(c_*)}{\partial(y_*^2)} \right), \end{aligned}$$

sehingga diperoleh,

$$e^{b+\gamma-a} y_* \left(\frac{\partial c_*}{\partial x_*} \right) = \alpha (e^{\gamma-2b}) \left(\frac{\partial^2 c_*}{\partial y_*^2} \right). \quad (3.16)$$

Apabila kedua ruas dari persamaan (3.16) dibagi dengan $e^{\gamma-2b}$, maka akan diperoleh

$$e^{3b-a} y_* \left(\frac{\partial c_*}{\partial x_*} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 c_*}{\partial y_*^2} \right). \quad (3.17)$$

Berdasarkan kondisi batas homogen (3.12) diperoleh,

$$c = 0 \text{ saat } x = 0 \text{ dan } c = 0 \text{ saat } y = \infty.$$

Substitusikan persamaan (3.15) ke kondisi batas homogen (3.12) seperti berikut ini.

$$e^\gamma c_* = 0 \text{ saat } e^a x_* = 0$$

dan

$$e^\gamma c_* = 0 \text{ saat } e^b y_* = \infty. \quad (3.18)$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.15) ke kondisi batas (3.14) seperti berikut ini.

$$-D \frac{\partial c}{\partial y}(x, 0) = q c_0,$$

$$-D \frac{\partial(e^\gamma c_*)}{\partial(e^b y_*)}(x, 0) = qc_0$$

sehingga diperoleh,

$$-D(e^{\gamma-b}) \frac{\partial(c_*)}{\partial(y_*)}(x, 0) = qc_0. \quad (3.19)$$

Langkah 3. Menentukan keluarga transformasi parameter dari persamaan (3.17) yang invarian dengan PDP (3.11), kondisi batas homogen (3.12), dan kondisi batas (3.14). Perhatikan persamaan (3.17), persamaan ini akan invarian dengan persamaan (3.11) apabila,

$$3b - a = 0 \quad \text{atau} \quad b = \frac{a}{3}. \quad (3.20)$$

Persamaan (3.19) akan invarian dengan persamaan (3.14) apabila,

$$\gamma - b = 0 \quad \text{atau} \quad \gamma = b. \quad (3.21)$$

Berdasarkan persamaan (3.18) dan (3.20), diperoleh

$$b = \frac{a}{3} \quad \text{dan} \quad \gamma = b = \frac{a}{3}. \quad (3.22)$$

Perhatikan persamaan (3.18), kondisi batas homogen ini selalu invarian dengan 3 parameter pada persamaan (3.15). Hal ini tidak memberikan informasi lebih lanjut tentang nilai a, b , atau γ .

Langkah 4. Menentukan kombinasi variabel pada persamaan (3.22) yang invarian dalam satu parameter. Hal ini dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan (3.22) ke persamaan (3.15) seperti berikut ini.

$$e^a = \frac{x}{x_*}, \quad y = e^{\frac{a}{3}} y_*, \quad c = e^{\frac{a}{3}} c_*$$

atau

$$e^a = \frac{x}{x_*}, \quad e^{\frac{a}{3}} = \frac{y}{y_*}, \quad e^{\frac{a}{3}} = \frac{c}{c_*},$$

sehingga diperoleh kombinasi variabel invarian yaitu

$$e^a = \frac{x}{x_*} = \frac{y^3}{y_*^3} = \frac{c^3}{c_*^3}$$

atau

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x_*^{\frac{1}{3}}} = \frac{y}{y_*} = \frac{c}{c_*}. \quad (3.23)$$

Selanjutnya dari perkalian bebas dua variabel pada persamaan (3.23) diperoleh kombinasi invarian yaitu

$$\eta_1 = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x_*^{\frac{1}{3}}} = \frac{y}{y_*} \rightarrow \eta_1 = yx^{-\frac{1}{3}} = y_*x_*^{-\frac{1}{3}}$$

atau
$$\eta_1 = yx^{-\frac{1}{3}} \quad (3.24)$$

dan
$$\eta_2 = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x_*^{\frac{1}{3}}} = \frac{c}{c_*} \rightarrow \eta_2 = x^{-\frac{1}{3}}c = x_*^{-\frac{1}{3}}c_*$$

atau
$$c = \eta_2 x^{\frac{1}{3}}. \quad (3.25)$$

Agar solusi memiliki sifat invarian dengan persamaan (3.11) dan persamaan (3.14), maka perlu dihubungkan dua kombinasi invarian pada persamaan (3.24) dan (3.25) dengan memisalkan $\eta_2 = f(\eta_1)$, sehingga diperoleh

$$c(x, y) = \eta_2 x^{\frac{1}{3}} = f(\eta_1) x^{\frac{1}{3}}$$

atau
$$c(x, y) = x^{\frac{1}{3}} f(\eta), \quad \text{dengan } \eta = yx^{-\frac{1}{3}}. \quad (3.26)$$

Langkah 5. Perubahan variabel-variabel pada langkah (4) disubstitusikan kembali ke PDP sehingga diperoleh PDB. Sebelumnya akan dicari turunan parsial dari variabel c sesuai yang terdapat pada persamaan (3.11) dengan menggunakan *Chain rule* yang selanjutnya akan disubstitusikan pada persamaan (3.11).

Turunan pertama c dari persamaan (3.26) terhadap x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{\frac{1}{3}} f(\eta) \right), \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} f(\eta) + x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} f(\eta) + x^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{3} yx^{-\frac{4}{3}} \frac{df}{d\eta} \right), \end{aligned}$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} f(\eta) - \frac{1}{3} yx^{-1} \frac{df}{d\eta}. \quad (3.27)$$

Kemudian, dicari turunan pertama c dari persamaan (3.26) terhadap y ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x^{\frac{1}{3}} f(\eta) \right), \\ \frac{\partial c}{\partial y} &= x^{\frac{1}{3}} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = x^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} \frac{df}{d\eta}$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{df}{d\eta}. \quad (3.28)$$

Selanjutnya akan dicari turunan kedua c dari persamaan (3.26) terhadap y ,

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right),$$

Substitusikan persamaan (3.28) ke persamaan di atas sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{df}{d\eta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{d}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\frac{df}{d\eta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \left(x^{-\frac{1}{3}} \right)$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = x^{-\frac{1}{3}} \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \quad (3.29)$$

Substitusi persamaan (3.27) dan (3.29) ke persamaan (3.11) seperti berikut ini.

$$y \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} f(\eta) - \frac{1}{3} y x^{-1} \frac{df}{d\eta} \right) = \alpha \left(x^{-\frac{1}{3}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right),$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{1}{3} y x^{-\frac{2}{3}} \left(f(\eta) - y x^{-\frac{1}{3}} \frac{df}{d\eta} \right) = \alpha x^{-\frac{1}{3}} \frac{d^2 f}{d\eta^2}.$$

Apabila kedua ruas persamaan dibagi dengan $x^{-\frac{1}{3}}$, maka diperoleh

$$\frac{1}{3} y x^{-\frac{1}{3}} \left(f(\eta) - y x^{-\frac{1}{3}} \frac{df}{d\eta} \right) = \alpha \frac{d^2 f}{d\eta^2}.$$

Oleh karena $\eta = y x^{-\frac{1}{3}}$ (persamaan (3.26)), maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{\eta}{3} \left(f(\eta) - \eta \frac{df}{d\eta} \right) = \alpha \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \quad (3.30)$$

Dengan demikian, PDP (3.11) sebagai persamaan pengatur untuk masalah penyaringan air dengan kondisi batas (3.14) telah direduksi menjadi persamaan diferensial linier orde dua (3.30) dengan menggunakan metode *stretching transformation*.

Selanjutnya dicari solusi dari persamaan (3.30) tersebut. Melalui pemeriksaan, terlihat bahwa $f(\eta) = \eta$ adalah salah satu solusi. Solusi umum lainnya untuk persamaan (3.30) dapat dicari dengan menggunakan metode reduksi order dimana diasumsikan solusi kedua dari persamaan (3.30) yaitu

$$f_2(\eta) = \eta g(\eta), \quad (3.31)$$

sehingga diperoleh

$$f_2'(\eta) = g(\eta) + \eta g'(\eta), \quad (3.32)$$

$$f_2''(\eta) = 2g'(\eta) + \eta g''(\eta). \quad (3.33)$$

Substitusikan persamaan (3.31), (3.32), dan (3.33) ke persamaan (3.30) seperti berikut ini.

$$\frac{\eta}{3}(\eta g(\eta) - \eta(g(\eta) + \eta(g'(\eta)))) = \alpha(2g'(\eta) + \eta g''(\eta)),$$

$$\frac{\eta}{3}(\eta g(\eta) - \eta g(\eta) - \eta^2 g'(\eta)) = \alpha(2g'(\eta) + \eta g''(\eta)),$$

$$\frac{\eta}{3}(-\eta^2 g'(\eta)) = 2\alpha g'(\eta) + \alpha \eta g''(\eta),$$

$$\alpha \eta g''(\eta) = \left(-\frac{\eta^3}{3} - 2\alpha\right) g'(\eta)$$

Apabila kedua ruas persamaan di atas dibagi dengan $\alpha \eta$, maka diperoleh

$$g''(\eta) = \left(-\frac{\eta^2}{3\alpha} - \frac{2}{\eta}\right) g'(\eta),$$

$$\frac{d}{d\eta}(g'(\eta)) = \left(-\frac{\eta^2}{3\alpha} - \frac{2}{\eta}\right) g'(\eta),$$

$$\frac{d(g'(\eta))}{g'(\eta)} = \left(-\frac{\eta^2}{3\alpha} - \frac{2}{\eta}\right) d\eta.$$

Apabila kedua ruas persamaan di atas diintegralkan, maka akan diperoleh

$$\ln|g'(\eta)| = -\frac{\eta^3}{9\alpha} - 2 \ln|\eta| + k_1,$$

$$g'(\eta) = e^{\left(-\frac{\eta^3}{9\alpha} - 2 \ln|\eta| + k_1\right)},$$

$$g'(\eta) = e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} e^{\ln|\eta|^{-2}} e^{k_1},$$

$$g'(\eta) = k_2 \eta^{-2} e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}}.$$

Apabila kedua ruas persamaan di atas diintegalkan, maka akan diperoleh

$$g(\eta) = k_2 \int \eta^{-2} e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} d\eta. \quad (3.34)$$

Berdasarkan persamaan (3.31) dan (3.34) diperoleh,

$$f_2(\eta) = k_2 \eta \int \eta^{-2} e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} d\eta. \quad (3.35)$$

Dengan demikian diperoleh solusi umum dari persamaan (3.30) yaitu berikut ini.

$$f(\eta) = C_1 f_1(\eta) + C_2 f_2(\eta),$$

$$f(\eta) = C_1 \eta + C_2 \left(k_2 \eta \int \eta^{-2} e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} d\eta \right),$$

$$f(\eta) = C_1 \eta + C_2 \left(\eta \int \eta^{-2} e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} d\eta \right). \quad (3.36)$$

Kondisi homogen (3.12) yaitu $c(x, \infty) = 0$ dapat pula dinyatakan menjadi $f(\infty) = 0$ (karena $\eta = yx^{-\frac{1}{3}}$), sehingga diperoleh solusi khusus dari persamaan (3.30) adalah

$$f(\eta) = C_2 \eta \int_{\eta}^{\infty} \eta^{-2} e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} d\eta. \quad (3.37)$$

Selanjutnya, persamaan (3.37) ini disederhanakan dengan menggunakan integral parsial dengan memisalkan:

$$u = e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} \quad \text{dan} \quad dv = \eta^{-2} d\eta$$

sehingga diperoleh,

$$du = -\frac{3\eta^2}{9\alpha} e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} d\eta \quad \text{dan} \quad v = -\eta^{-1}.$$

Berdasarkan rumus integral parsial diperoleh,

$$\int_{\eta}^{\infty} u dv = [uv]_{\eta}^{\infty} - \int_{\eta}^{\infty} v du,$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\eta}^{\infty} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} \eta^{-2} d\eta &= \left[-\frac{e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}}}{\eta} \right]_{\eta}^{\infty} - \int_{\eta}^{\infty} (-\eta^{-1}) \left(-\frac{3\eta^2}{9\alpha} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} d\eta \right), \\
 &= \left(-\frac{e^{\frac{-\infty^3}{9\alpha}}}{\infty} - \left(-\frac{e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}}}{\eta} \right) \right) - \int_{\eta}^{\infty} (\eta^{-1}) \left(\frac{3\eta^2}{9\alpha} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} d\eta \right), \\
 &= \left(0 - \left(-\frac{e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}}}{\eta} \right) \right) - \int_{\eta}^{\infty} \frac{3\eta}{9\alpha} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} d\eta, \\
 &= \frac{e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}}}{\eta} - \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} d\eta, \\
 \int_{\eta}^{\infty} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} \eta^{-2} d\eta &= \frac{e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}}}{\eta} - \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} d\eta, \text{ dengan } \eta \neq 0.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh bentuk sederhana dari persamaan (3.37) yaitu

$$\begin{aligned}
 f(\eta) &= C_2 \eta \left(\frac{e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}}}{\eta} - \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} d\eta \right), \\
 f(\eta) &= C_2 \left(e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} - \frac{\eta}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} d\eta \right). \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Dalam menentukan nilai dari C_2 , maka perlu diperhatikan kembali persamaan (3.14) dan (3.28). Persamaan (3.28) ini dapat dinyatakan menjadi

$$\frac{\partial c}{\partial y}(x, 0) = \frac{df}{d\eta}(x, 0). \tag{3.39}$$

Berdasarkan persamaan (3.39), persamaan (3.14) dapat pula dinyatakan menjadi

$$\frac{df}{d\eta}(x, 0) = \frac{-qc_0}{D}.$$

Oleh karena $\eta = yx^{\frac{1}{3}}$, maka

$$\frac{df}{d\eta}(x, 0) = f'(0) = \frac{-qc_0}{D}. \tag{3.40}$$

Dengan menggunakan turunan aturan rantai, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
 f'(\eta) &= C_2 \left(\left(-\frac{3\eta^2}{9\alpha} \left(e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} \right) \right) - \left(\left(\frac{\eta}{3\alpha} \left[\eta e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} \right]_{\eta}^{\infty} \right) + \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1 \right) \right), \\
 &= C_2 \left(\left(-\frac{3\eta^2}{9\alpha} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} \right) - \left(\frac{\eta}{3\alpha} \left(\frac{\infty}{e^{\infty}} - \eta e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} \right) + \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1 \right) \right), \\
 &= C_2 \left(\left(-\frac{3\eta^2}{9\alpha} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} \right) - \left(\frac{\eta}{3\alpha} \left(0 - \eta e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} \right) + \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1 \right) \right), \\
 &= C_2 \left(-\frac{\eta^2}{3\alpha} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} + \frac{\eta^2}{3\alpha} e^{\frac{-\eta^3}{9\alpha}} - \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1 \right), \\
 f'(\eta) &= C_2 \left(0 - \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1 \right), \\
 f'(\eta) &= -C_2 \frac{1}{3\alpha} \int_{\eta}^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1.
 \end{aligned}$$

Oleh karena $\eta = 0$, maka diperoleh $f'(0)$ sebagai berikut.

$$f'(0) = -C_2 \frac{1}{3\alpha} \int_0^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1. \quad (3.41)$$

Berdasarkan persamaan (3.40) dan (3.41), maka diperoleh

$$\frac{-qc_0}{D} = -C_2 \frac{1}{3\alpha} \int_0^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1$$

atau
$$C_2 = \frac{3\alpha qc_0}{D \int_0^{\infty} \eta_1 e^{\frac{-\eta_1^3}{9\alpha}} d\eta_1}.$$

Nilai dari C_2 ini dapat disederhanakan dengan memisalkan

$$v^3 = \frac{\eta_1^3}{9\alpha}. \quad (3.42)$$

Berdasarkan persamaan (3.42), diperoleh

$$\eta_1 = 3^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} v \quad \text{dan} \quad v = \frac{\eta_1}{3^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}}}.$$

Dengan demikian, didapat

$$dv = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}}} d\eta_1$$

atau
$$d\eta_1 = 3^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} dv$$

Apabila kedua ruas dikalikan η_1 , maka akan diperoleh

$$\eta_1 d\eta_1 = \eta_1 3^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} dv.$$

Substitusikan nilai $\eta_1 = 3^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} v$ pada persamaan di atas, maka diperoleh

$$\eta_1 d\eta_1 = \left(3^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} v \right) 3^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} dv$$

atau
$$\eta_1 d\eta_1 = 3^{\frac{4}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} v dv. \quad (3.43)$$

Berdasarkan persamaan (3.42) dan (3.43), nilai C_2 dapat pula dinyatakan menjadi

$$C_2 = \frac{3\alpha qc_0}{D \int_0^\infty e^{-v^3} 3^{\frac{4}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} v dv}$$

atau
$$C_2 = \frac{3\alpha qc_0 \left(3^{-\frac{4}{3}} \alpha^{-\frac{2}{3}} \right)}{D \int_0^\infty e^{-v^3} v dv}$$

atau
$$C_2 = \frac{3^{-\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} qc_0}{D \int_0^\infty e^{-v^3} v dv}$$

sehingga diperoleh,

$$C_2 = \frac{3^{-\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} qc_0}{DI},$$

dengan $I = \int_0^\infty e^{-v^3} v dv$.

Dengan demikian, diperoleh bentuk lain dari persamaan (3.38) yaitu

$$f(\eta) = \frac{3^{-1/3} \alpha^{1/3} qc_0}{DI} \left(e^{-\frac{\eta^2}{3\alpha}} - \frac{\eta}{3\alpha} \int_\eta^\infty \eta e^{-\frac{\eta^2}{3\alpha}} d\eta \right). \quad (3.44)$$

Oleh karena penelitian ini difokuskan pada titik $(x, 0)$ yaitu pada membran semipermeabel, maka berdasarkan persamaan (3.26) diperoleh

$$c(x, 0) = f(0) x^{\frac{1}{3}} \text{ untuk } \eta = y x^{-\frac{1}{3}},$$

$$c(x, 0) = \frac{3^{-\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} qc_0}{DI} \left(e^0 - \frac{0}{3\alpha} \int_\eta^\infty \eta^{-1} e^{-\frac{\eta^3}{9\alpha}} d\eta \right) x^{\frac{1}{3}},$$

$$c(x, 0) = \frac{3^{-\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} qc_0}{DI} (1) x^{\frac{1}{3}},$$

$$c(x, 0) = \frac{3^{-\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} q c_0}{DI} x^{\frac{1}{3}}, \quad (3.45)$$

dengan $I = \int_0^\infty e^{-v^3} v \, dv$.

Dengan demikian, diperoleh persamaan (3.45) untuk memprediksi kelebihan konsentrasi larutan garam dekat membran semipermeabel pada titik $(x, 0)$.

Interpretasi

Integral tentu I dapat diperoleh secara eksak dengan menggunakan program Maple atau dihampiri dengan menggunakan integrasi numerik. Pada kasus ini, penulis menggunakan integrasi numerik yang dibahas pada bagian (C) dan program Maple. Secara eksak nilai I sampai 10 desimal adalah sebagai berikut.

$$I = 0.4513726463.$$

Substitusikan nilai I ini pada persamaan (3.45), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} c(x, 0) &= \frac{3^{-\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} q c_0}{D(0.4513726463)} x^{\frac{1}{3}}, \\ &= \frac{0.6933612744}{(0.4513726463)} \left(\frac{q c_0}{D} \right) \alpha^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}, \\ c(x, 0) &= 1.5361171751 \left(\frac{q c_0}{D} \right) \alpha^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Perhatikan bahwa $\alpha = Dh/v_0$ (persamaan 3.11), dimana D adalah difusivitas garam dalam air, v_0 adalah kecepatan horisontal yang diukur pada jarak h dari batas semipermeabel, dan q adalah laju alir air pada membran semipermeabel. Substitusikan persamaan (3.46) ke persamaan (3.10), sehingga diperoleh $C(x, 0)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= c(x, 0) + c_0, \\ C(x, 0) &= 1.5361171751 \left(\frac{q c_0}{D} \right) \left(\frac{Dh}{v_0} \right)^{1/3} x^{\frac{1}{3}} + c_0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

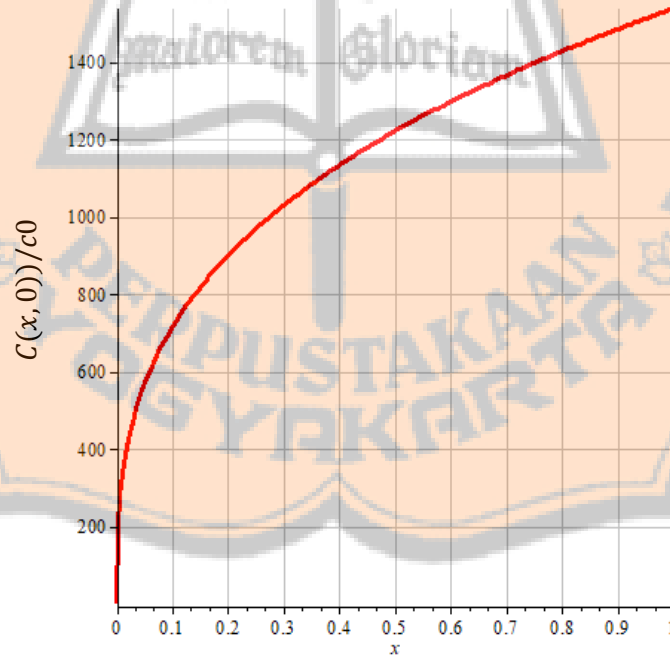
Apabila kedua ruas persamaan (3.47) dibagi dengan c_0 , maka akan diperoleh

$$\frac{C(x, 0)}{c_0} = 1.5361171751 \left(\frac{q}{D} \right) \left(\frac{Dh}{v_0} \right)^{1/3} x^{\frac{1}{3}} + 1. \quad (3.48)$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan (3.48) untuk memprediksi konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel. Apabila dimisalkan nilai dari parameter $q = 10^{-3}$, $v_0 = 10^{-3}$, $D = 10^{-9}$, dan $h = 10^{-3}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{C(x, 0)}{c_0} &= 1.5361171751 \left(\frac{10^{-3}}{10^{-9}} \right) \left(\frac{10^{-9} 10^{-3}}{10^{-3}} \right)^{1/3} x^{\frac{1}{3}} + 1, \\ \frac{C(x, 0)}{c_0} &= 1.5361171751 (10^6) (10^{-3}) x^{\frac{1}{3}} + 1, \\ \frac{C(x, 0)}{c_0} &= 1.5361171751 (10^3) x^{\frac{1}{3}} + 1.\end{aligned}\quad (3.49)$$

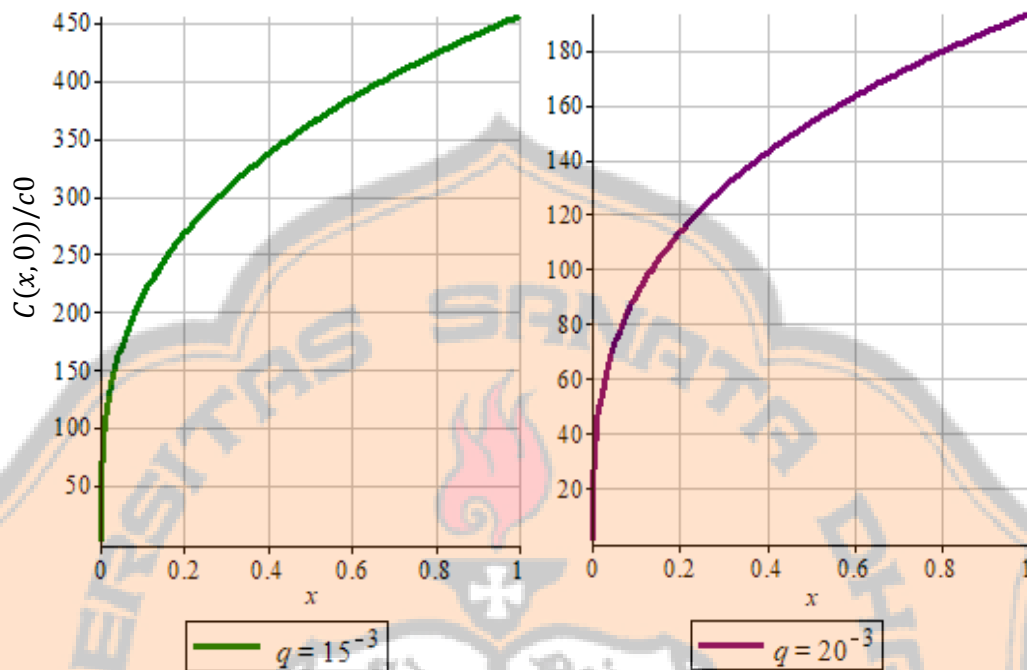
Dengan demikian, diperoleh persamaan (3.49) sebagai persamaan perbandingan antara konsentrasi larutan garam pada batas membran semipermeabel ($C(x, 0)$) dan kelebihan konsentrasi larutan garam (c_0). Persamaan (3.49) tersebut disimulasikan menggunakan program Maple dengan nilai $0 \leq x \leq 1$. Berdasarkan program Maple tersebut, maka diperoleh Gambar 3.3 di bawah ini.



Gambar 3.3 $C(x, 0)/c_0$ dengan $q = 10^{-3}$

Berdasarkan Gambar 3.3, nilai dari $C(x, 0)/c_0$ meningkat pada jarak di sepanjang membran semipermeabel yang disebabkan oleh adanya faktor $x^{1/3}$.

Apabila laju alir (q) ini diperlambat menjadi $q = 15^{-3}$ dan $q = 20^{-3}$, maka akan diperoleh Gambar 3.4 berikut ini.



Gambar 3.4 $C(x, 0)/c_0$ dengan $q = 15^{-3}$ dan $q = 20^{-3}$

Berdasarkan Gambar 3.4 ini, nilai dari $C(x, 0)/c_0$ juga meningkat pada jarak di sepanjang membran semipermeabel yang disebabkan oleh adanya faktor $x^{1/3}$. Namun pada jarak yang sama, nilai $C(x, 0)/c_0$ dengan laju alir (q) = 15^{-3} mencapai ∓ 450 dan nilai $C(x, 0)/c_0$ dengan laju alir (q) = 20^{-3} hanya mencapai ∓ 180 . Penurunan nilai $C(x, 0)/c_0$ pada laju alir $q = 10^{-3}$, $q = 15^{-3}$, dan $q = 20^{-3}$ dalam jarak tertentu diperlihatkan pada Tabel 3.1 berikut ini.

Tabel 3.1 Nilai $C(x, 0)/c_0$ pada jarak x dengan laju alir (q)

Laju alir (q)	Nilai $C(x, 0)/c_0$ pada jarak x				
	0	0.005	0.01	0.015	0.02
$q = 10^{-3}$	1	263.6723	331.9464	379.8390	417.9663
$q = 15^{-3}$	1	78.8288	99.0581	113.2486	124.5455
$q = 20^{-3}$	1	33.8340	42.3683	48.35488	53.1207

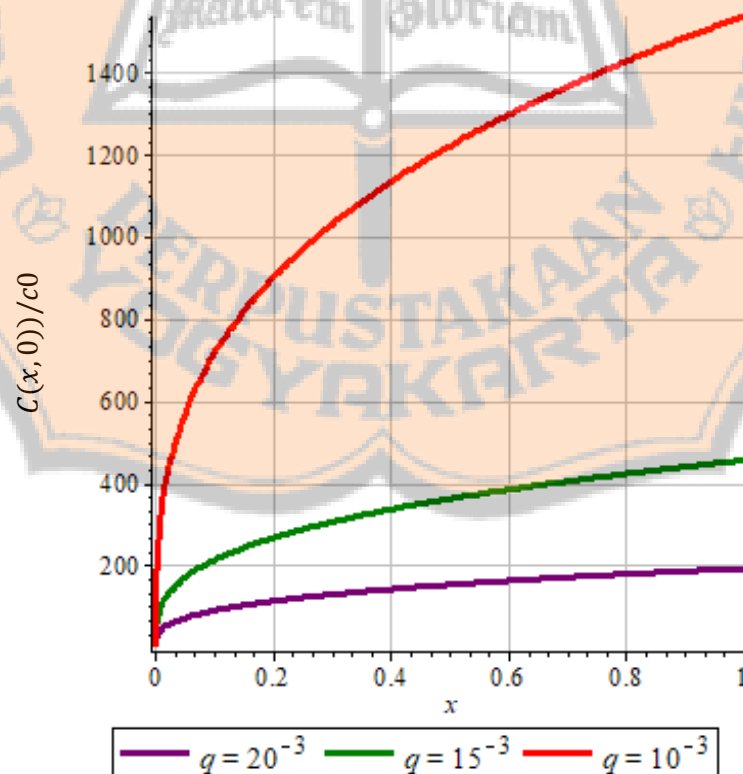
Berdasarkan Tabel 3.1, nilai dari $C(x, 0)/c_0$ pada jarak $x = 0$ dengan $q = 10^{-3}$, $q = 15^{-3}$, dan $q = 20^{-3}$ yaitu 1. Hal ini berarti bahwa pada jarak

$x = 0$, nilai dari $C(x, 0)$ dan c_0 sama ($C(x, 0) = c_0$). Hal ini dikarenakan pemodelan masalah ini pada waktu kesetimbangan yang berarti sebelumnya terdapat proses pemurnian air yang menyebabkan adanya konsentrasi larutan garam yang diketahui $C(x, 0)$. Apabila nilai tersebut disubstitusikan pada persamaan (3.10),

$$\begin{aligned} c(x, 0) &= C(x, 0) - c_0, \\ c(x, 0) &= C(x, 0) - C(x, 0), \\ \text{diperoleh, } c(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Hal ini berarti pada $x = 0$ tidak terdapat kelebihan konsentrasi larutan garam karena tidak terdapat laju alir air pada $x = 0$. Hal ini juga berlaku untuk nilai q, D, h , dan v_0 berapapun sesuai dengan persamaan (3.48).

Apabila laju alir (q) dipercepat maka nilai $C(x, 0)$ dan nilai c_0 akan bertambah pada setiap jarak x kecuali $x = 0$. Simulasi perbandingan $C(x, 0)/c_0$ dengan laju alir $q = 10^{-3}$, $q = 15^{-3}$, dan $q = 20^{-3}$ di sepanjang jarak $0 \leq x \leq 1$ dinyatakan pada Gambar 3.5 di bawah ini.



Gambar 3.5 $C(x, 0)/c_0$ dengan $q = 10^{-3}$, $q = 15^{-3}$, dan $q = 20^{-3}$

Berdasarkan Gambar 3.5 ini, terlihat bahwa apabila laju alir (q) semakin ditingkatkan, maka nilai $C(x,0)/c_0$ di sepanjang membran semipermeabel juga akan meningkat.

C. Penyelesaian Integral Secara Numerik

Pada bagian ini, penulis menjelaskan penerapan integral numerik untuk menyelesaikan integral tentu I , yang mana integral ini sangat sulit diselesaikan secara analitik. Penulis menggunakan aturan penjumlahan Riemann kiri, aturan penjumlahan Riemann kanan, aturan penjumlahan Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-v^3} v \, dv.$$

Nilai eksak dari integral tentu di atas telah dihitung dengan menggunakan program Maple dan diperoleh nilai integral tentunya yaitu sebagai berikut.

$$\int_0^{\infty} e^{-v^3} v \, dv = 0.4513726463.$$

Dalam perhitungan integral numerik dengan menggunakan aturan penjumlahan Riemann kiri, aturan penjumlahan Riemann kanan, aturan penjumlahan Riemann tengah, metode trapesium, dan metode Simpson digunakan interval yang sama yaitu $[0,100]$. Interval $[0,100]$ ini dipartisi menjadi $n = 2000$ subinterval yaitu $[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_{1999}, v_{2000}]$ dengan $v_0 = 0$ dan $v_n = 100$ dimana $\Delta v = \frac{100-0}{2000} = 0.05$ seragam.

Berikut ini dipaparkan perhitungan nilai I dengan menggunakan kelima metode integrasi numerik tersebut dan perbandingan keakuratan masing-masing metode integrasi tersebut.

1. Aturan Penjumlahan Riemann Kanan

Berdasarkan rumus penjumlahan Riemann kanan, dipilih $v_1 = 0.05$ sebagai titik ujung kanan selang dari setiap subinterval $[0,100]$ dengan menggunakan titik partisi yang berjarak sama yaitu $v_i = 0 + i\Delta v$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2000$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^{100} e^{-v^3} v \, dv &\approx \sum_{i=1}^{2000} (e^{-v_i^3} v_i)(0.05), \\
&\approx f(v_1^*)\Delta v + f(v_2^*)\Delta v + \cdots + f(v_{2000}^*)\Delta v, \\
&\approx f(0.05)(0.05) + f(0.10)(0.05) + \cdots + f(100)(0.05), \\
&\approx (e^{-0.05^3} 0.05)(0.05) + (e^{-0.10^3} 0.10)(0.05) + \cdots + (e^{-100^3} 100)(0.05), \\
&\approx (0.04999375)(0.05) + (0.09990005)(0.05) + \cdots + (0)(0.05), \\
&\approx (0.002499688) + (0.004995002) + \cdots + (0), \\
\int_0^{100} e^{-v^3} v \, dv &\approx 0.4511643131.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh aproksimasi dari nilai I dengan menggunakan aturan penjumlahan Riemann kanan yaitu 0.4511643131.

2. Aturan Penjumlahan Riemann Kiri

Berdasarkan rumus penjumlahan Riemann kiri, dipilih $v_0 = 0$ sebagai titik ujung kiri selang dari setiap subinterval $[0,100]$ dengan titik partisi yang berjarak sama yaitu $v_i = 0 + i\Delta v$, $i = 0, 1, 2, \dots, 1999$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^{100} e^{-v^3} v \, dv &\approx \sum_{i=0}^{1999} (e^{-v_i^3} v_i)(0.05), \\
&\approx f(v_0^*)\Delta v + f(v_1^*)\Delta v + \cdots + f(v_{1999}^*)\Delta v, \\
&\approx f(0)(0) + f(0.05)(0.05) + \cdots + f(99.95)(0.05), \\
&\approx (e^{-0^3} \cdot 0)(0.05) + (e^{-0.05^3} 0.05)(0.05) + \cdots + (e^{-99.95^3} 99.95)(0.05), \\
&\approx (0)(0.05) + (0.04999375)(0.05) + \cdots + (0)(0.05), \\
&\approx (0) + (0.002499688) + (0.004995002) + \cdots + (0), \\
\int_0^{100} e^{-v^3} v \, dv &\approx 0.4511643131.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh aproksimasi dari nilai I dengan menggunakan aturan penjumlahan Riemann kiri yaitu 0.4511643131.

3. Aturan Penjumlahan Riemann Tengah

Dalam aturan penjumlahan Riemann tengah, dipilih \bar{v}_i sebagai titik tengah dari setiap subinterval $[0,100]$, sehingga berdasarkan rumus penjumlahan Riemann tengah diperoleh,

$$\int_0^{100} e^{-v^3} v \, dv \approx \sum_{i=0}^{2000} f(\bar{v}_i) \Delta v$$

dengan $\Delta v = 0.05$ dan $\bar{v}_i = \frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2000$ seperti pada Tabel 3.2 berikut ini.

Tabel 3.2 Nilai \bar{v}_i untuk penjumlahan Riemann tengah

v_i	v_{i+1}	\bar{v}_i
0	0.05	0.025
0.05	0.10	0.075
0.10	0.15	0.125
...
99.95	100	99.975

Selanjutnya, nilai \bar{v}_i pada Tabel 3.2 di atas disubstitusikan ke rumus aturan penjumlahan Riemann tengah seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{100} e^{-v^3} v \, dv &\approx \sum_{i=0}^{2000} (e^{-v_i^3} v_i)(0.05), \\
 &\approx f(v_0^*)\Delta v + f(v_1^*)\Delta v + f(v_2^*)\Delta v + \dots + f(v_{2000}^*)\Delta v, \\
 &\approx f(0.025)(0) + f(0.075)(0.05) + \dots + f(99.975)(0.05), \\
 &\approx (e^{-0.025^3} 0.025)(0.05) + (e^{-0.075^3} 0.075)(0.05) + \dots + (e^{-99.975^3} \\
 &\quad 99.975)(0.05), \\
 &\approx (0.024999609)(0.05) + (0.074968366)(0.05) + \dots + (0) \\
 &\quad (0.05), \\
 &\approx (0.00124998) + (0.003748418) + \dots + (0), \\
 &\approx 0.451476813.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh aproksimasi dari nilai I dengan menggunakan aturan penjumlahan Riemann tengah yaitu 0.451476813.

4. Metode Trapezium

Berdasarkan rumus metode trapesium, pada selang $[0,100]$ yang dibagi menjadi 2000 selang bagian $[v_0, v_{2000}]$ selebar $\Delta v = 0.05$ dengan menggunakan titik partisi yang berjarak sama yaitu $v_i = 0 + i\Delta v$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2000$, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^{100} e^{-v^3} v \, dv &\approx \frac{\Delta v}{2} \left(f(v_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(v_i) + f(v_{2000}) \right), \\ &\approx \frac{0.05}{2} (f(0) + 2f(0.05) + 2f(0.10) + \dots + f(100)), \\ &\approx \frac{0.05}{2} ((e^{-0^3} 0) + 2e^{-0.05^3} 0.05 + \dots + (e^{-100^3} 100)), \\ &\approx \frac{0.05}{2} ((0) + 2(0.04999375) + \dots + (0)), \\ &\approx 0.4511643131.\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh aproksimasi dari nilai I dengan menggunakan aturan trapesium yaitu 0.4511643131.

5. Metode Simpson 1/3

Berdasarkan rumus metode Simpson 1/3, pada selang $[0,100]$ dibagi menjadi $2M = 2000$ selang bagian $[v_0, v_{2000}]$ berlebar sama yaitu $\Delta v = 0.05$ dan menggunakan titik-titik partisi yang berjarak sama yaitu $v_i = 0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2M$, maka

$$\begin{aligned}\int_0^{100} e^{-v^3} v \, dv &\approx \frac{\Delta v}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{i=1}^M f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f_{2i} + f_{2000} \right), \\ &\approx \frac{0.05}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{i=1}^{1000} f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{999} f_{2i} + f_{2000} \right), \\ &\approx \frac{0.05}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 4f_{1999} + f_{2000}), \\ &\approx \frac{0.05}{3} (e^{-0^3} 0 + 4e^{-0.05^3} 0.05 + \dots + 4e^{-99.95^3} 99.95 + e^{-100^3} 100),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx (0.016666667)(0 + 0.199975002 + \dots + (0) + (0)), \\
&\approx (0.016666667)(27.08235879), \\
&\approx 0.4513726464.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh aproksimasi dari nilai I dengan menggunakan aturan Simpson 1/3 yaitu 0.4513726464.

Galat dari setiap perhitungan integral tentu I dengan menggunakan kelima metode integrasi numerik dinyatakan pada Tabel 3.3 berikut ini.

Tabel 3.3 Galat setiap metode integrasi numerik

Metode	Eksak	Numerik	Galat
Riemann Kiri	0.4513726463	0.4511643131	0.0002083332
Riemann Kanan	0.4513726463	0.4511643131	0.0002083332
Riemann Tengah	0.4513726463	0.4514768131	0.0001041668
Trapeسيوم	0.4513726463	0.4511643131	0.0002083332
Simpson 1/3	0.4513726463	0.4513726464	0.0000000001

Berdasarkan hasil perhitungan galat pada Tabel 3.3 di atas, diperoleh galat dari metode Simpson 1/3 lebih kecil dibanding keempat metode integral numerik lainnya yaitu sebesar 0.0000000001. Hal ini menunjukkan bahwa dalam perhitungan hampiran suatu integral tentu, metode Simpson 1/3 adalah metode terbaik dibanding dengan aturan penjumlahan Riemann kiri, aturan penjumlahan Riemann kanan, aturan penjumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium. Hal ini dikarenakan metode Simpson $\frac{1}{3}$ memiliki orde galat yang lebih tinggi dibandingkan keempat metode integrasi numerik tersebut.

BAB IV

ASPEK PENDIDIKAN

Pada bab ini, penulis memaparkan sumbangan penulis pada aspek pendidikan berkaitan konsep pemurnian air pada sistem osmosis terbalik, penerapan metode, dan *stretching transformation* integrasi numerik. Penulis juga menuliskan refleksi berkaitan dengan pengalaman yang bermakna selama proses penyusunan tesis ini.

A. Aplikasi Konsep Pemurnian Air pada Sistem Osmosis Terbalik

1. Pendahuluan

Keberadaan matematika dan ilmu pengetahuan alam memiliki peran dan kaitan erat dalam kehidupan manusia. Hal ini dikarenakan matematika tidak dapat berkembang tanpa adanya pengalaman empiris atau permasalahan yang muncul dari alam. Demikian pula sebaliknya, ilmu pengetahuan alam tidak dapat berkembang tanpa matematika karena pada dasarnya ilmu pengetahuan alam menggunakan matematika dalam berbagai pengalaman empiris dan konsep-konsep pengetahuannya. Ilmu pengetahuan alam merupakan ilmu tentang alam yang mempelajari gejala alam disekitar kita yang meliputi ilmu dasar yaitu biologi, fisika, dan kimia. Sebagai ilmu pengetahuan yang saling berkaitan, penulis tertarik mengaitkan tesis ini tidak hanya dalam bidang pendidikan matematika saja tetapi juga dalam bidang ilmu pengetahuan alam.

Salah satu sumber daya kehidupan yang sangat penting bagi manusia adalah air. Namun demikian, seiring dengan perkembangan teknologi yang kian pesat, pencemaran airpun menjadi suatu perhatian serius bagi setiap kalangan. Keberadaan sungai yang bersih sebagai sendi kehidupan bagi masyarakat sekitarnya hampir tergeser akibat kerusakan yang disebabkan oleh banjirnya sungai. Hal ini disebabkan oleh kebiasaan buruk masyarakat sekitarnya yang menjadikan sungai sebagai tempat pembuangan sampah ataupun limbah.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis ingin membagi pengetahuan sejak dini kepada siswa kelas VI SD melalui matematika tentang pentingnya air bersih bagi kehidupan dan bagaimana membuat alat penyaringan air sederhana

dengan menggunakan alat dan bahan yang mudah ditemukan di sekitar lingkungan. Proses pembuatan alat penyaringan sederhana inipun didasarkan pada pengetahuan penulis tentang osmosis terbalik. Melalui edukasi sederhana ini, secara tidak langsung menyadarkan siswa agar siswa dapat menjaga kelestarian air yang berguna bagi kehidupan siswa di masa depan.

2. Rancangan pembelajaran di Sekolah Dasar

Menindaklanjuti niat penulis yang telah dipaparkan sebelumnya, penulis merancang suatu Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP) pada jenjang Sekolah Dasar kelas VI (Lampiran 1). RPP ini terdiri atas tiga materi pokok diantaranya osmosis terbalik, konsep pembuatan penyaringan air kotor secara sederhana, dan penggunaan volume tabung untuk menghitung volume air pada tabung sistem osmosis terbalik. Dalam RPP tersebut, pembelajaran terbagi atas pendahuluan, kegiatan inti, dan penutup. Metode pembelajaran yang digunakan dalam pembelajaran tersebut adalah pengamatan, eksperimen, tanya jawab, dan diskusi kelompok. Instrumen yang digunakan dalam pembelajaran tersebut adalah Lembar Kerja Siswa (LKS) (lampiran 2 & Lampiran 4), Lembar Eksperimen Siswa (Lampiran 3), dan tes esai (Lampiran 5).

Pada awal pembelajaran, penulis perlu memotivasi siswa agar mengikuti pembelajaran dengan baik. Hal ini dilakukan dengan penyampaian tujuan pembelajaran serta menjelaskan tentang pentingnya pengetahuan osmosis terbalik, pembuatan alat penyaringan air kotor dalam kehidupan sehari-hari, dan pentingnya mempelajari volume tabung dalam kehidupan sehari-hari. Materi apersepsi dalam pembelajaran ini adalah difusi, adveksi, dan luas lingkaran. Sebelum masuk dalam pembahasan materi, penulis membagi siswa ke dalam beberapa kelompok.

Tahapan yang dilakukan penulis dalam menjelaskan tiga materi pokok kepada siswa dilakukan dengan cara sebagai berikut.

1. Konsep osmosis terbalik

Sebelum memahami konsep osmosis terbalik, tentunya siswa terlebih dahulu harus memahami konsep osmosis. Oleh karena itu, penulis memperkenalkan

konsep osmosis melalui konsep difusi kepada siswa dengan menayangkan video tentang permainan kapal kertas di permukaan air, proses pembuatan teh menggunakan teh celup, dan proses penentesan tinta pulpen di air. Penulis akan menjelaskan bahwa konsep osmosis dan difusi sama-sama merupakan proses perpindahan pelarut dari konsentrasi tinggi ke konsentrasi rendah, tetapi dalam osmosis perpindahan pelarut melalui membran semipermeabel. Video ini difokuskan pada proses peleburan kertas di dalam air, proses terlarutnya teh pada air panas, dan proses terlarutnya tinta pulpen di air. Siswa diberikan kesempatan untuk memahami setiap proses tersebut selama ± 5 menit. Instrumen yang digunakan pada tahap ini adalah LKS. Kemudian penulis memberikan waktu kepada setiap kelompok agar berdiskusi tentang setiap pertanyaan pada LKS. Pertanyaan ini berkaitan dengan proses yang terjadi pada setiap peristiwa tersebut dan kesamaannya. Penulis akan memberikan topangan seperlunya agar setiap kelompok dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan pada LKS.

Dalam menentukan jawaban yang tepat atas setiap pertanyaan dilakukan dengan diskusi kelompok, dimana penulis akan meminta salah satu kelompok untuk menjawab pertanyaan dan kelompok lain menanggapi. Dengan demikian, penulis akan menjelaskan bahwa proses yang sama pada peristiwa-peristiwa tersebut disebut osmosis. Kemudian, penulis bersama siswa akan membuat kesimpulan tentang pengertian osmosis.

Setelah siswa dapat memahami konsep osmosis, penulis akan menayangkan video yang berkaitan dengan pemisahan zat-zat dari air. Penulis akan menanyakan kepada setiap kelompok tentang proses yang terjadi dan kesamaan pada setiap peristiwa tersebut sesuai langkah-langkah dalam mengajarkan konsep osmosis. Selanjutnya, penulis akan bertanya tentang kaitannya dengan osmosis. Dengan demikian, penulis akan menjelaskan bahwa peristiwa tersebut disebut kebalikan dari osmosis atau osmosis terbalik atau *reverse osmosis*.

2. Konsep pembuatan penyaringan air kotor secara sederhana

Sebelum mengajarkan konsep pembuatan penyaringan air kotor secara sederhana, penulis akan menayangkan video tentang manfaat osmosis terbalik dalam pemurnian air. Penulis akan menjelaskan proses yang terjadi dalam

pemurnian air dan manfaat lain dari osmosis terbalik seperti pembuatan obat, pengolahan produk susu, pewarna yang digunakan dalam pembuatan tekstil, dan reklamasi air limbah kota dan industri.

Penulis akan menjelaskan bahwa siswa dapat membuat alat pemurnian air sederhana dengan menggunakan alat dan bahan di sekitar lingkungan. Selanjutnya, penulis akan membagi alat dan bahan untuk pembuatan alat penyaringan air kepada setiap kelompok. Dari beberapa alat yang telah dibagikan oleh penulis, terdapat satu alat peraga berbentuk tabung. Penulis akan menunjukkan alat tersebut kepada siswa sambil mengajukan pertanyaan tentang bentuk dan rumus volume alat peraga tersebut. Namun, jika siswa tidak dapat menjawabnya dengan tepat, penulis akan menanyakan pengertian volume lalu melalui diskusi dan tanya jawab antara penulis dan siswa, siswa diharapkan dapat menemukan rumus volume tabung dan memahami mengapa rumus $\text{volume tabung} = \text{luas alas} \times \text{tinggi}$.

Selanjutnya, penulis akan membagikan LKS tentang eksperimen pembuatan penyaringan air kotor secara sederhana kepada siswa. Penulis akan menjelaskan langkah pembuatan penyaringan air kotor secara sederhana tersebut dan memberikan kesempatan kepada siswa untuk bertanya tentang langkah yang tidak dipahami siswa. Jika siswa sudah dapat memahami langkah yang telah dijelaskan penulis, penulis akan mempersilahkan siswa untuk melakukan eksperimen.

Selama proses eksperimen ini, penulis akan membimbing setiap kelompok dan memberikan tolongan seperlunya kepada kelompok yang mengalami kendala. Jika setiap kelompok sudah dapat membuat alat penyaring tersebut dengan benar, penulis akan meminta tiap kelompok agar menjawab pertanyaan yang tertera pada LKS. Selanjutnya, penulis akan meminta salah satu kelompok untuk menjawab pertanyaan pada LKS dengan mendemo alat peraga tersebut di depan kelas, sedangkan kelompok lain menanggapi penjelasan kelompok tersebut.

Tahapan terakhir, penulis akan menyimpulkan dan menjelaskan proses osmosis dan osmosis terbalik dengan menggunakan alat peraga tersebut kepada siswa. Pertanyaan dan penjelasan tersebut bertujuan agar siswa lebih memahami konsep osmosis dan osmosis terbalik dengan baik.

3. Penggunaan volume tabung dalam menghitung volume air pada tabung dalam sistem osmosis terbalik

Pada tahap ini, penulis akan membagikan LKS kepada setiap kelompok. LKS berisikan pertanyaan tentang volume air pada kedua tabung saat proses osmosis dan osmosis terbalik. Pertanyaan ini bertujuan agar siswa mengetahui terjadi perbedaan volume air pada tabung yang sama pada proses osmosis dan osmosis terbalik. Pertanyaan selanjutnya yaitu mengapa terjadi perbedaan volume pada tabung yang sama pada kedua proses tersebut. Pertanyaan ini bertujuan agar siswa dapat memahami konsep osmosis dan osmosis terbalik.

Melalui serangkaian aktifitas ini, siswa diharapkan mampu memahami pengertian osmosis dan osmosis terbalik serta kegunaan mempelajarinya dalam kehidupan sehari-hari. Selanjutnya, penulis akan memberikan tes esai sebanyak dua nomor kepada setiap siswa. Berikut rancangan tes esai yang akan diberikan penulis kepada seluruh siswa SD kelas VI.

1. Setiap sistem dalam tubuh manusia memerlukan air putih untuk menunjang kerja sistem tersebut. Contohnya dalam sistem peredaran darah, darah memerlukan air untuk dapat membawa nutrisi ke sel-sel tubuh manusia, dalam sistem pencernaan air digunakan untuk membuang racun yang dihasilkan oleh organ tubuh, dan air juga menciptakan lingkungan lembab untuk telinga, hidung, dan tenggorokan. Oleh sebab itu, setiap manusia perlu meminum air putih dalam jumlah cukup. Jika setiap manusia memerlukan air sebanyak minimal 2 liter per hari ($1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3$), berapa minimal gelaskah yang diperlukan Joni untuk meminum air apabila diketahui gelas Joni berbentuk tabung dengan diameter 6 cm dan tinggi gelas 10 cm?
2. Jika dalam proses penyaringan air dengan menggunakan sistem osmosis terbalik, 10 liter air kotor dapat menghasilkan 8 liter air bersih. Berapa liter air kotorkah yang diperlukan untuk menghasilkan 48 liter air bersih?

3. Penutup

Demikianlah Rancangan Pelaksanaan Pembelajaran (RPP) untuk materi pembelajaran matematika dan ilmu pengetahuan alam yang akan dilaksanakan penulis. Penulis memperkirakan waktu yang diperlukan dalam proses pelaksanaan pembelajaran tersebut yaitu selama 3×35 menit.

B. Penerapan Integrasi Numerik

Aspek pendidikan lainnya dalam tesis ini terdapat pada penerapan metode integrasi numerik. Penerapan metode integrasi numerik ini dirancang bagi siswa di bangku Sekolah Menengah Pertama. Metode integrasi numerik yang diperkenalkan oleh penulis adalah jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium. Penulis merancang suatu Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP) yang terdiri atas 4×40 menit pertemuan (Lampiran 6). Metode pembelajaran yang digunakan dalam pembelajaran ini adalah pengamatan, penemuan (*discovery*), tanya jawab, dan diskusi kelompok. Instrumen yang digunakan dalam pembelajaran ini adalah LKS (Lampiran 7).

Metode integrasi numerik ini diterapkan untuk menghitung luas suatu daerah yang berbentuk tidak beraturan dengan menggunakan koordinat titik. Penulis menggunakan daun sebagai suatu masalah nyata seperti Gambar 4.1 di bawah ini.



Gambar 4.1. Daun

Dalam proses pembelajaran, penulis meminta siswa untuk menghitung luas daerah daun. Hal ini bertujuan agar memudahkan siswa untuk memahami tentang jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium. Penulis membagikan LKS yang memuat beberapa pertanyaan topangan agar siswa menemukan konsep jumlahan Riemann kiri, jumlahan

Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium. Dalam pembelajaran ini, penulis tidak memperkenalkan siswa kepada istilah integral. Namun, penulis hanya menggunakan konsep integral untuk menghitung hampiran luas suatu daerah dengan menggunakan koordinat titik yang akan diketahui siswa setelah mengukur daun dengan menggunakan penggaris.

C. Penerapan Metode *Stretching Transformation*

Aspek pendidikan dalam tesis ini juga terdapat dalam penerapan metode *stretching transformation*. Metode *stretching transformation* ini digunakan untuk mengubah PDP menjadi PDB. Pada tahap ini, penulis merancang suatu Rencana Pembelajaran Semester (RPS) tentang penerapan metode ini kepada mahasiswa pendidikan matematika Stara Satu (Lampiran 9). Pembelajaran ini dirancang selama 3×55 menit. Metode pembelajaran yang digunakan dalam pembelajaran tersebut adalah presentasi, ceramah, diskusi kelompok, dan latihan soal. Bahan ajar tentang *stretching transformation* yang akan diberikan penulis kepada mahasiswa termuat dalam kajian teori (bab II). Penulis memberikan suatu masalah konduksi panas seperti berikut ini kepada mahasiswa.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

dengan fluks panas yang ditentukan pada batas $x = 0$ yaitu

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 1. \quad (4.2)$$

Pada kasus ini, PDP (4.1) dan kondisi awal (4.2) akan direduksi menjadi PDB dengan menggunakan langkah-langkah pada metode *stretching transformation* seperti berikut ini.

Langkah 1

Memisalkan suatu keluarga transformasi dari variabel x, y, c menjadi beberapa variabel baru x_*, y_*, c_* .

$$x = e^a x_*, \quad t = e^b t_*, \quad u = e^c u_*. \quad (4.3)$$

Langkah 2

Mensubstitusikan tiga parameter pada persamaan (4.3) ke dalam PDP (4.1) dan kondisi batas (4.2). Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial e^\gamma u_*}{\partial e^b t_*} &= \alpha \frac{\partial^2 e^\gamma u_*}{\partial (e^a x_*)^2} \\ \frac{e^\gamma}{e^b} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} &= \alpha \frac{e^\gamma}{e^{2a}} \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} \\ \text{atau} \quad e^{\gamma-b} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} &= \alpha e^{\gamma-2a} \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Kondisi batas (4.2) dapat pula dinyatakan menjadi

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \text{saat } x = 0,$$

sehingga persamaan (4.3) disubstitusikan ke persamaan tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned}\text{atau} \quad -k \frac{\partial e^\gamma u_*}{\partial e^a x_*} &= 1 \quad \text{saat } e^a x_* = 0 \\ \text{atau} \quad -k \frac{e^\gamma}{e^a} \frac{\partial u_*}{\partial x_*} &= 1 \quad \text{saat } e^a x_* = 0 \\ \text{atau} \quad -k e^{\gamma-a} \frac{\partial u_*}{\partial x_*} &= 1 \quad \text{saat } e^a x_* = 0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Langkah 3

Menentukan keluarga transformasi parameter yang persamaannya invarian dengan persamaan (4.1) dan (4.2). Perhatikan persamaan (4.4), persamaan ini akan invarian dengan persamaan (4.1) apabila,

$$\begin{aligned}\gamma - b &= 0 \quad \text{dan} \quad \gamma - 2a = 0 \\ \text{atau} \quad \gamma &= b \quad \text{dan} \quad \gamma = 2a,\end{aligned}\tag{4.6}$$

sedangkan persamaan (4.5) akan invarian dengan persamaan (4.2) apabila,

$$\begin{aligned}\gamma - a &= 0 \quad \text{saat } e^a x_* = 0, \\ \gamma &= a \quad \text{saat } a \text{ berapapun.}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Persamaan (4.7) ini tidak memberikan informasi secara spesifik tentang nilai a . Oleh sebab itu, pada kasus ini hanya digunakan persamaan (4.6). Persamaan

(4.6) ini disubstitusikan kembali ke dalam keluarga transformasi yang asli yaitu persamaan (4.3), sehingga diperoleh

$$x = e^a x_*, \quad t = e^{2a} t_*, \quad u = e^{2a} u_*. \quad (4.8)$$

Langkah 4

Menentukan kombinasi variabel yang invarian dalam satu parameter dengan cara mengeliminasi parameter a pada persamaan (4.8). Hal ini dilakukan seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} e^a &= \frac{x}{x_*}, & e^{2a} &= \frac{t}{t_*}, & e^{2a} &= \frac{u}{u_*} \\ \text{atau} & & e^a &= \frac{t^{1/2}}{t_*^{1/2}}, & e^a &= \frac{u^{1/2}}{u_*^{1/2}}. \\ \text{sehingga diperoleh,} & & & & & \\ \frac{x}{x_*} &= \frac{t^{1/2}}{t_*^{1/2}} = \frac{u^{1/2}}{u_*^{1/2}}. \\ \text{atau} & & \frac{x^2}{x_*^2} &= \frac{t}{t_*} = \frac{u}{u_*}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Selanjutnya dari perkalian dua variabel bebas pada persamaan (4.9) diperoleh kombinasi invarian yaitu

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{x^2}{x_*^2} = \frac{t}{t_*} \rightarrow \eta_1 = tx^{-2} = t_* x_*^{-2} \\ \text{atau} & & \eta_1 &= tx^{-2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{dan} & & \eta_2 &= \frac{t}{t_*} = \frac{u}{u_*} \rightarrow \eta_2 = t^{-1}u = t_*^{-1}u_* \\ \text{atau} & & \eta_2 &= t^{-1}u \quad \text{atau} \quad u = \eta_2 t. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agar solusi memiliki sifat invarian dengan persamaan (4.1) dan persamaan (4.2), maka perlu dihubungkan dua kombinasi invarian pada persamaan (4.10) dan (4.11) dengan memisalkan $\eta_2 = f(\eta_1)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \eta_2 t = tf(\eta_1) \\ \text{atau} & & c(x, y) &= tf(\eta), \quad \text{dengan } \eta = tx^{-2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Langkah 5. Perubahan variabel-variabel pada langkah 4 disubstitusikan kembali ke PDP sehingga diperoleh PDB. Sebelumnya akan dicari turunan parsial dari variabel u dari persamaan (4.12) dengan menggunakan *Chain rule*.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(tf(\eta)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= f(\eta) + t \left(\frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= f(\eta) + t \left(x^{-2} \frac{df}{d\eta} \right),\end{aligned}$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(\eta) + tx^{-2} \frac{df}{d\eta}. \quad (4.13)$$

Kemudian, dicari turunan pertama u dari persamaan (4.12) terhadap x ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(tf(\eta)), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 + t \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= t(-2x^{-3}t) \frac{df}{d\eta},\end{aligned}$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x^{-3}t^2 \frac{df}{d\eta}.$$

Selanjutnya akan dicari turunan kedua u dari persamaan (4.12) terhadap x ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} (-2x^{-3}t) \left(-2x^{-3}t^2 \frac{df}{d\eta} \right),\end{aligned}$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (4x^{-6}t^3) \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \quad (4.14)$$

Substitusi persamaan (4.13) dan (4.14) ke persamaan (4.1) seperti berikut ini.

$$f(\eta) + tx^{-2} \frac{df}{d\eta} = \alpha \left((4x^{-6}t^3) \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right). \quad (4.15)$$

Oleh karena $\eta = tx^{-2}$, maka persamaan (4.15), maka persamaan (4.15) menjadi

$$f(\eta) + \eta \frac{df}{d\eta} = 4\alpha\eta^3 \frac{d^2f}{d\eta^2}. \quad (4.16)$$

Dengan demikian, persamaan diferensial parsial (4.1) sebagai persamaan pengatur untuk masalah konduksi panas dengan kondisi batas (4.2) telah direduksi menjadi persamaan diferensial linier orde dua (4.16) dengan menggunakan metode *stretching transformation*.

D. Refleksi

Setiap orang pasti memiliki harapan, mimpi, dan cita-cita dalam hidupnya. Tidak dapat dipungkiri bahwa dalam mewujudkan semua harapan, mimpi, dan cita-cita tersebut banyak lika-liku yang harus dilewati. Beberapa diantara kita terkadang memilih menyerah dibanding terus berjuang untuk mewujudkannya. Ya, saya hampir menjadi salah satu diantaranya. Selama proses penyusunan tesis ini, telah banyak lika-liku yang saya jumpai baik suka maupun duka.

Sejak awal perkuliahan, saya tertarik untuk mengambil tesis murni matematika. Saya tahu bahwa hal ini tidaklah mudah karena latar belakang S1 saya adalah pendidikan matematika. Namun, saya tetap bertekad untuk mengambil tesis murni, *toh* banyak senior saya yang memiliki latar belakang yang sama namun mereka berhasil menyelesaikan tesisnya dengan baik. Ya, petualangan pun dimulai!

Sejak awal, Pak Sudi selaku dosen pembimbing membebaskan kami untuk memilih topik tesis sesuai ketertarikan kami masing-masing. Hal ini menjadi kendala bagi saya karena saya belum memiliki bayangan apapun tentang topik tesis murni. Dua minggupun berlalu, saya tetap berada pada 'titik' yang sama, sedangkan teman-teman sebimbing saya sudah melangkah maju di 'titik' lain. Mereka sudah berkonsultasi bahkan topik tesis mereka pun telah disetujui oleh Pak Sudi. Saya mencoba berdiskusi dengan para senior dan mencari berbagai referensi di perpustakaan maupun di internet, namun saya tidak menemukan ide apapun. Hingga suatu saat saya memberanikan diri untuk berkonsultasi tentang topik

pemurnian air dengan menggunakan sistem osmosis terbalik, dimana topik ini sudah saya pelajari sewaktu perkuliahan pemodelan matematika.

Sebelumnya saya berasumsi bahwa karena saya sudah mempelajari topik ini, maka proses penyusunan tesis ini nantinya pun tidak akan terlalu rumit. Hal ini ternyata di luar ekspektasi saya, mulai dari bagian yang awalnya saya pandang ‘mengerti’ sewaktu perkuliahan pemodelan, namun setelah saya pelajari lebih jauh semakin ‘memancing’ berbagai pertanyaan dalam benak saya. Saya coba mencari jawaban atas pertanyaan saya sendiri dengan bertanya kepada teman-teman yang juga pernah mempelajari topik tersebut serta mencari berbagai referensi terkait topik ini, namun saya tidak berhasil. Saya juga sering berkonsultasi dengan Pak Sudi. Selama proses konsultasi, saya seolah mendapat ilham bagaimana, mengapa, dan dari mana pemodelan persamaan masalah pemurnian air yang tertera pada beberapa referensi. Keyakinan ini membuat saya ingin melanjutkan pengerjaan tesis ini. Namun, sewaktu saya bergegas kembali mempelajari pemodelan masalah tersebut di perpustakaan atau di kos, saya kembali digerogeti oleh keputusan saya sendiri. Hal ini tentu memakan waktu yang cukup lama bagi saya. Saya menyadari bahwa banyak hal penting yang tidak saya pelajari sebelumnya dan tanpa berpikir panjang sayapun mengambil topik tersebut.

Ya, saya percaya tidak ada usaha dan doa yang sia-sia. Hingga suatu waktu, menjelang seminggu untuk presentasi proposal tesis pada perkuliahan metode penelitian, Pak Sudi memanggil saya agar berdiskusi tentang pemodelan pemurnian air tersebut. Banyak hal yang menjadi pertanyaan saya sebelumnya telah terjawab melalui diskusi itu. Selang beberapa hari kemudian, saya juga berdiskusi dengan dua pengawai yang sedang membersihkan alat pemurnian air osmosis terbalik (RO) tepat di samping ruangan Laboratorium Matematika. Pertemuan itu tanpa terencana bahkan sebelumnya tidak pernah terlintas dalam benak bahwa saya akan berjumpa dengan kedua bapak itu, berdiskusi tentang pemurnian air RO bahkan mendapatkan membran semipermeabel RO secara gratis. Hal ini semakin memperjelas penjelasan Pak Sudi beberapa hari yang lalu.

Selanjutnya, saya juga menemukan berbagai kendala dalam proses penyelesaian persamaan secara analitik. Banyak kekeliruan yang saya lakukan sehingga mengharuskan saya mempelajari kembali beberapa materi yang berkaitan dengan proses penyelesaian persamaan tersebut. Saya juga mengalami kesulitan dalam menemukan aspek pendidikan yang berkaitan dengan tesis ini. Hal yang saya lakukan adalah mencari dan mempelajari berbagai referensi berkaitan dengan tesis ini. Ya, walaupun pengerjaan tesis ini sangat menyita waktu, tenaga, dan pikiran saya, namun saya percaya semua akan terselesaikan dengan baik.

Pada tahap akhir penyusunan tesis ini, saya kehilangan sosok penyemangat yang menjadi alasan terkuat saya untuk berjuang sampai di titik ini. Ya, ayah saya. Saya kehilangan sosok yang sangat saya sayangi. Ini merupakan puncak dimana saya benar-benar ingin menyerah. Saya kehilangan pengharapan bahkan di dalam Tuhan. Seolah doa saya tidak terjawab, beribu pertanyaan menghunjam benak saya bahkan kembali saya persalahkan Tuhan atas semua yang terjadi. Saat saya berada jauh dari Tuhan, saya mengalami berbagai masalah. Saya terus mempersalahkan diri saya bahkan Tuhan hingga akhirnya membuat sayapun lelah. Ini merupakan titik balik saya.

Saya teringat akan semua kebaikan Tuhan dalam kehidupan saya dan nasihat ayah saya agar jangan meninggalkan Tuhan dalam kondisi apapun. Saya mencoba kembali, namun ada ragu dalam hati kecil saya. Apakah Ia memaafkan saya atau malah menghakimi saya atas semua kelakuan saya sebelumnya. Namun Tuhan itu luar biasa! Sejak saya kembali, saya menemukan harapan baru dan hidup saya kembali dipulihkan. Tuhan menghadirkan para motivator di sekeliling saya. Ya, walaupun semua yang terjadi kadang tidak sesuai dengan apa yang saya harapkan, namun saya percaya semua yang Tuhan kehendaki adalah yang terbaik. Lebih baik dari yang saya harapkan termasuk tentang tesis ini yang awalnya luar biasa rumit namun akhirnya dapat terselesaikan dengan baik seperti ini.

Dalam setiap lika-liku tersebut, ada banyak hal yang Tuhan ajarkan kepada saya melalui setiap orang yang saya jumpai diantaranya Pak Sudi. Beliau memberikan banyak keteladanan baik melalui tutur kata dan sikap terutama

ketelitian dan kesungguhannya dalam mengerjakan segala sesuatu. Beliau adalah sosok yang sangat cerdas sekaligus bermurah hati. Ya, hal ini hampir saya temukan pada setiap pribadi dosen di USD ini. Terima kasih kampus sejuta senyum! Terima kasih juga Pak Sudi untuk segala kebaikan yang telah bapak berikan kepada saya dan teman-teman selama proses penyusunan tesis ini. Semoga segala sesuatu yang telah saya pelajari selama ini berbuah manis di kemudian hari.



BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi kesimpulan dan saran yang dapat diberikan penulis kepada pembaca berdasarkan seluruh pembahasan pada tesis ini.

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada tesis ini, penulis menyimpulkan beberapa hal sebagai berikut.

1. Tahapan yang dilakukan penulis dalam mengkonstruksi model persamaan untuk memprediksi konsentrasi larutan garam ini diantaranya memahami masalah pemurnian air dalam sistem osmosis terbalik, memilah faktor-faktor signifikan yang mempengaruhi masalah pemurnian air seperti proses difusi, proses adveksi, tekanan, kecepatan air, laju alir pada membran, kelebihan konsentrasi, jarak, dan difusivitas garam dalam air, kemudian menghubungkannya dengan hukum-hukum terkait seperti persamaan difusi-adveksi 2D, kemudian membuat suatu model matematika dari hubungan-hubungan tersebut.
2. Tahapan dalam menyelesaikan model persamaan konsentrasi larutan garam ini diantaranya mengubah PDP menjadi PDB dengan menggunakan metode *stretching transformation*, kemudian menyelesaikan PDB dengan menggunakan teorema kalkulus dan integrasi numerik. Selanjutnya, solusi PDB tersebut disimulasikan dengan menggunakan program Maple dan dianalisis.
3. Dalam menggunakan aturan jumlahan Riemann, metode trapesium, dan metode Simpson 1/3, penulis perlu mempelajari literatur terkait metode integrasi numerik tersebut kemudian menerapkannya dalam menyelesaikan suatu integral tentu yang sulit diselesaikan secara analitik. Selanjutnya, penulis membandingkan hasil analitik (Maple) dan integrasi numerik tersebut. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode Simpson 1/3 memiliki ketelitian yang lebih baik dibandingkan dengan aturan jumlahan Riemann dan metode trapesium.

4. Rancangan proses pembelajaran yang berkaitan dengan pemurnian air dalam sistem osmosis terbalik ini lebih ditekankan pada proses memahami peristiwa osmosis dan osmosis terbalik serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari terutama dalam pemurnian air yang dilaksanakan pada jenjang Sekolah Dasar. Rancangan lainnya berkaitan dengan penggunaan metode *stretching transformation* dan metode integrasi numerik yaitu jumlahan Riemann dan metode trapesium.

B. Saran

Adapun saran yang diberikan penulis untuk penelitian selanjutnya, yaitu:

1. Dalam tesis ini, penulis telah menyelesaikan persamaan pemodelan pemurnian air dalam sistem osmosis terbalik secara analitik, sehingga bagi penulis selanjutnya dapat menyelesaikan model persamaan matematika dalam kasus ini secara numerik. Sebelumnya, penulis telah berusaha menyelesaikan model persamaan matematika ini secara numerik menggunakan metode beda hingga (Lampiran 10), namun karena diperlukan waktu yang cukup lama maka penulis hanya menyelesaikan model persamaan tersebut secara analitik.
2. Bagi peneliti dalam bidang matematika dapat menggunakan metode *stretching transformation* untuk mengubah PDP menjadi PDB, meskipun nantinya dalam menyelesaikan PDB tersebut, peneliti perlu menerapkan berbagai teorema dalam kalkulus maupun lainnya.
3. Bagi penulis selanjutnya dapat menerapkan metode Simpson 1/3 untuk menghampiri suatu integral tentu yang sulit diselesaikan secara analitik.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdallah, H., Shalaby, M.S., Saad, M.A., & Shaban A.M., 2018, Supporting Polyvinylchloride Polymeric Blend Membrane with Coated Woven Fabric, *Journal of Membrane Science and Research*, 4, (3), 174–180.
- Aigo, M., 2013, On the Numerical Approximation of Volterra Integral Equations of Second Kind Using Quadrature Rules, *International Journal of Advanced Scientific and Technical Research*, 1, (3), 558–564.
- Ariono, D., Purwasasmit, M., & Wenten, I.G., 2016, Brine Effluents: Characteristics, Environmental Impacts, and Their Handling, *Journal of Engineering and Technological Sciences*, 48, (4), 367–387.
- Coleman, M.P., 2013, *An Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB. Second Edition*, Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- Djebedjian, B., Gad, H., Khaled. I., & Rayan, M.A., 2008, Optimization of Reverse Osmosis Desalination System Using Genetic Algorithms Technique, Twelfth International Water Technology Conference, 1047–1067.
- Djordjević, A., Savović, S., & Janićijević, A., 2017, Explicit Finite-Difference Solution of Two-Dimensional Solute Transport with Periodic Flow in Homogenous Porous Media, *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 65, (4), 426–432.
- Farooque, A. M., Al-Jeshi, S., Saeed, M.O., & Alreweli, A., 2014, Inefficacy of Osmotic Backwash Induced by Sodium Chloride Salt Solution in Controlling SWRO Membrane Fouling, *Applied Water Science*, 4, (4), 407–424.
- Fattah, K.P., Al-Tamimi, A.K., Hamweyah, W., & Iqbal, F., 2017, Evaluation of Sustainable Concrete Produced with Desalinated Reject Brine, *International Journal of Sustainable Built Environment*, 6, (1), 183–190.
- Fulford, G.R. & Broadbridge, P., 2002, *Industrial Mathematics. Case Studies in the Diffusion of Heat and Matter*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Garud, R.M., Kore S.V., Kore, V.S., & Kulkarni, G.S., 2011, A Short Review on Process and Applications of Reverse Osmosis, *Universal Journal of Environmental Research and Technology*, 1, (3), 233–238.
- Karbalaie, A., Muhammed, H.H., Shabani, M., & Montazeri, M.M., 2014, Exact Solution of Partial Differential Equation Using Homo-Separation of Variables, *International Journal of Nonlinear Science*, 17, (1), 84–90.
- Kucera, J., 2010, *Reverse Osmosis. Industrial Applications and Processes*. Salem: Scrivener Publishing.
- Kumar, A., Jaiswal, D.K., & Kumar, N., 2010, Analytical Solutions to One-Dimensional Advection-Diffusion Equation with Variable Coefficients in Semi-Infinite Media, *Journal of Hydrology*, 380, (3-4), 330–337.
- Mahmoodi, K., Ghassemi, H., & Heydarian, A., 2017, Solving the Nonlinear Two-Dimension Wave Equation Using Dual Reciprocity Boundary

- Element Method, *International Journal of Partial Differential Equations and Applications*, 5, (1), 19–25.
- Minkov, I.L., Manev, E.D., Sazdanova, S.V., & Kolikov, K.H., 2013, Equilibrium and Dynamic Osmotic Behaviour of Aqueous Solutions with Varied Concentration at Constant and Variable Volume, *The Scientific World Journal*, 2013, (10), Article ID 876897, 1–7.
- Olver, P.J., 2014, *Introduction to Partial Differential Equations*, Cham: Springer International Publishing Switzerland.
- Pacquola, C. & Leivers, N., 2013, *Water-learn it live it. An Education Resource for Primary and Secondary School*, Melbourne: Melbourne Water.
- Pinchover, Y. & Rubinstein, J., 2005, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Robinson, J.C., 2004, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Spellman, R.F., 2016, *Reverse Osmosis. A Guide for the Nonengineering Professional*, Boca Raton : Taylor & Francis Group.
- Stewart, J., 2001, *Kalkulus Edisi Keempat*, Jakarta: Erlangga.
- Sulaeman, D., Arif, SS., & Sudarmadji., 2018, Trash-Polluted Irrigation: Characteristics and Impact on Agriculture, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 148, (1), Article ID 012028, 1–12.
- Sulistiyono, B.A., 2015, Aplikasi Metode Beda Hingga Skema Eksplisit pada Persamaan Konduksi Panas, *Jurnal Math Educator Nusantara*, 01, (01), 41–46.
- Tirabassi, T., Buske, D., Moreira, D.M., & Vilhena, M.T., 2008, A Two-Dimensional Solution of the Advection-Diffusion Equation with Dry Deposition to the Ground, *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 47, (2), 2096–2104.
- Tow, E.W., Warsinger, D.M., Trueworthy, A.M., Swaminathan, J., Thiel, G.P., Zubair, S.M., Myerson, A.S., & Lienhard, J.H., 2018, Comparison of Fouling Propensity Between Reverse Osmosis, Forward Osmosis, and Membrane Distillation, *Journal of Membrane Science*, 556, (June 2018), 352–364.
- Ulfah, S., Awalludin, S.A., & Wahidin., 2018, Advection-Diffusion Model for the Simulation of Air Pollution Distribution from a Point Source Emission, *Journal of Physics: Conference Series*, 948, (1), Article ID 012067, 1–9.
- Widayat, W. & Yudo, S., 2002, Pengolahan Air Payau Menggunakan Teknologi Osmosis Balik, *Jurnal Teknologi Lingkungan*, 3, (1), 69–81.
- Wenten, I G., 2016, *Teknologi Membran: Prospek dan Tantangannya di Indonesia*, Bandung: Forum Guru Besar Institut Teknologi Bandung.
- Wenten, I G., Khoiruddin., & Hakim, A.N., 2014, *Osmosis Balik*, Diktat Teknik Kimia Institut Teknologi Bandung.
- Wimalawansa, S.J., 2013, Purification of Contaminated Water with Reverse Osmosis: Effective Solution of Providing Clean Water for Human Needs in Developing Countries, *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 3, (12), 75–89.

Yelee1, E., Cobbinal, S.J., & Duwiejuah, A. B., 2018, Review of Ghana's Water Resources: The Quality and Management with Particular Focus on Freshwater Resources, *Applied Water Science*, 8, (1), 93, 1–12.



LAMPIRAN



LAMPIRAN 1

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN 1

(RPP 1)

Nama Sekolah	: SD ...
Mata Pelajaran	: Matematika/Sains
Kelas/ Semester	: VI / 2
Materi	: Osmosis Terbalik & Volume Tabung
Alokasi Waktu	: 3 X 35 Menit

A. Kompetensi Dasar

1. Memahami konsep osmosis terbalik.
2. Memahami konsep pembuatan penyaringan air kotor secara sederhana.
3. Menghitung volume tabung.

B. Indikator

1. Menggunakan konsep osmosis.
2. Memahami pentingnya air bersih dalam kehidupan sehari-hari.
3. Menggunakan rumus untuk menghitung volume tabung.

C. Tujuan Pembelajaran

Melalui serangkaian pengamatan dan eksperimen sederhana berbasis kontekstual diharapkan siswa dapat :

1. Memahami konsep osmosis balik.
2. Memahami konsep pembuatan penyaring air kotor secara sederhana.
3. Menghitung volume tabung.

D. Materi Ajar

1. Osmosis terbalik
2. Penyaring air kotor sederhana
3. Volume tabung

E. Metode Pembelajaran

Metode pembelajaran yang digunakan dalam pembelajaran ini adalah pengamatan, eksperimen, tanya jawab, penugasan individu dan kelompok, dan diskusi kelompok.

Kegiatan Pembelajaran

Kegiatan Pembelajaran	Waktu
Kegiatan Pendahuluan <ol style="list-style-type: none"> 1. Guru membuka pembelajaran dengan salam dan berdoa. 2. Guru menyampaikan materi yang akan dipelajari serta tujuan pembelajaran. 3. Guru memotivasi siswa dengan menjelaskan tentang pentingnya pengetahuan tentang osmosis terbalik, pembuatan alat penyaring air kotor dalam kehidupan sehari-hari, dan pentingnya mempelajari volume tabung dalam kehidupan sehari-hari. 	20 menit
Kegiatan Inti <ol style="list-style-type: none"> 1. Guru memberikan materi apersepsi kepada siswa dengan mengulas kembali tentang difusi, adveksi, dan luas lingkaran. 2. Guru membagi siswa dalam kelompok diskusi. <p>‘Materi pengertian osmosis terbalik’</p> <p>Eksplorasi</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Guru membagikan LKS pada tiap kelompok. 4. Guru menayangkan video pada <i>slide</i> Power Point yang berkaitan peristiwa difusi sederhana misalnya permainan kapal kertas di permukaan air, pembuatan teh, tinta pulpen yang diteteskan di air, atau lainnya. 5. Siswa diberi kesempatan untuk mengamati video tersebut. <p>Elaborasi</p> <ol style="list-style-type: none"> 6. Guru memberikan waktu kepada siswa untuk berdiskusi dalam kelompok untuk menjawab pertanyaan pada LKS yang telah diberikan. 7. Guru meminta salah satu kelompok menjawab pertanyaan dan kelompok lain menanggapi. 8. Guru bertanya tentang suatu kesamaan yang terdapat pada setiap peristiwa tersebut. 9. Guru meminta salah satu kelompok menjawab pertanyaan dan kelompok lain menanggapi. 10. Guru menjelaskan bahwa proses yang sama pada peristiwa-peristiwa tersebut disebut difusi. 11. Guru bertanya tentang pengertian difusi kepada siswa 	70 menit

kemudian menyimpulkan pengertian difusi yang benar dan memberikan kesempatan kepada siswa lain apabila terdapat jawaban yang kurang tepat dari siswa.

12. Guru menjelaskan bahwa konsep difusi dapat dikaitkan dengan konsep osmosis, dimana kedua konsep ini sama-sama merupakan proses perpindahan pelarut dari konsentrasi tinggi ke konsentrasi rendah, tetapi dalam osmosis perpindahan pelarut melalui membran semipermeabel.

Konfirmasi

13. Guru dan siswa secara bersama-sama membuat kesimpulan mengenai pengertian osmosis.


Guru akan mengulangi kembali tahap 4-12 untuk materi osmosis terbalik sehingga siswa dapat memahami pengertian osmosis terbalik.

14. Guru menayangkan video tentang manfaat osmosis terbalik dalam pemurnian air serta menjelaskan proses yang terjadi dalam pemurnian air.
15. Guru melakukan tanya jawab dengan siswa agar siswa memahami osmosis terbalik dalam pemurnian air.

'Materi pembuatan alat penyaringan air sederhana'

16. Guru menjelaskan bahwa siswa dapat membuat alat pemurnian air sederhana dengan menggunakan peralatan sederhana.

Eksplorasi

17. Guru membagi alat dan bahan untuk pembuatan alat penyaringan air kepada setiap kelompok.
18. Guru menunjukkan alat peraga  dan bertanya tentang bentuk dan rumus volume alat peraga tersebut kepada siswa?
19. Guru meminta siswa menjawab pertanyaan dan memberikan kesempatan kepada siswa lain apabila terdapat jawaban yang kurang tepat dari siswa.
20. Guru memberikan LKS pada siswa dan meminta siswa melakukan eksperimen sesuai petunjuk pada LKS.
21. Guru membimbing setiap kelompok dan memastikan

<p>setiap kelompok dapat membuat alat penyaringan air dengan benar.</p> <p>22. Guru bersama siswa melakukan tanya jawab terkait alat penyaringan air tersebut dan memberikan kesempatan kepada siswa lain apabila terdapat penjelasan yang kurang tepat dari siswa.</p> <p>Konfirmasi</p> <p>23. Guru menyimpulkan dan menegaskan tentang manfaat alat penyaring air dalam kehidupan sehari-hari.</p> <p>‘Materi volume tabung’</p> <p>Elaborasi</p> <p>24. Pada proses osmosis, guru memberikan pertanyaan yang ada dalam LKS mengenai volume air pada kedua tabung.</p> <p>25. Pada proses osmosis terbalik, guru memberikan pertanyaan yang ada dalam LKS mengenai volume air pada kedua tabung.</p> <p>26. Guru memberikan pertanyaan yang ada dalam LKS mengenai perbedaan volume air pada kedua tabung saat proses osmosis dan osmosis terbalik.</p> <p>27. Pada setiap pertanyaan, guru akan menunjuk salah satu siswa untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan yang terdapat di LKS sehingga setiap siswa terlibat aktif, kemudian guru akan memberikan kesempatan kepada siswa lain apabila terdapat jawaban yang kurang tepat dari siswa.</p> <p>Konfirmasi</p> <p>28. Guru dan siswa secara bersama-sama membuat kesimpulan mengenai volume tabung pada proses osmosis dan osmosis terbalik.</p>	
<p>Kegiatan Akhir</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Guru meminta setiap siswa untuk menuliskan dalam kertas tentang pengertian osmosis, osmosis terbalik, kegunaan osmosis terbalik, dan volume tabung. 2. Guru meminta siswa mengumpulkan jawabannya. 3. Guru dan siswa bersama-sama merefleksi dan menyimpulkan pembelajaran hari ini. 4. Guru mengakhiri kegiatan belajar dengan memberikan motivasi untuk giat belajar. 5. Guru mengakhiri pembelajaran dengan doa. 	<p>15 menit</p>

H. Alat dan Sumber Belajar

1. Alat : Papan tulis, spidol, LCD, dan laptop.
2. Sumber :
 - LKS
 - Buku Matematika untuk SD kelas VI
 - Buku referensi lain,

I. Penilaian Hasil Belajar

- Teknik Penilaian : LKS kelompok dan tes esai.
 Bentuk Instrumen : LKS kelompok dan tes esai.

Yogyakarta, 2019

Guru Mata Pelajaran

Mahasiswa Peneliti

NIP.

Osniman Paulina Maure
 NIM. 171 442 012

Kepala SD

LAMPIRAN 2

LEMBAR KERJA SISWA 1
(LKS 1)

Nama Sekolah : SD
 Materi : Konsep Osmosis Terbalik
 Hari/tanggal :
 Nama Anggota Kelompok :
 1. 3.
 2. 4.

Petunjuk !

Perhatikan peristiwa yang terjadi pada video pada *slide Power Point* dan cermati pertanyaan-pertanyaan berikut. Diskusikan bersama kelompokmu dan tulislah jawaban tersebut dengan rapi pada lembar yang telah disediakan.

Soal !

1. Proses apakah yang terjadi pada peristiwa tersebut ?
2. Apakah kesamaan dari setiap peristiwa tersebut?
3. Jelaskan pengertian osmosis dan osmosis terbalik!

LAMPIRAN 3

LEMBAR EKSPERIMEN SISWA

A. Alat dan Bahan**Alat :**

1. 3 botol plastik dimana 1 botol plastikya telah dilubangi kedua sisinya
2. Pasir bersih
3. arang
4. Tisu atau kertas teh
5. Pluger Spoit

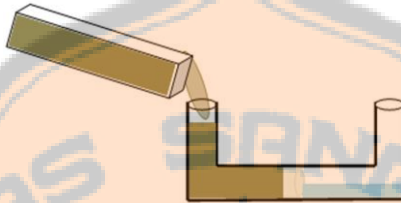
Bahan :

1. Air kotor
2. Air bersih

B. Langkah-langkah Eksperimen :

1. Masukkan tisu atau kertas teh sebagai membran ke dalam botol yang kedua sisinya telah dilubangi, kemudian masukkan pasir bersih tepat di atas membran tersebut.
2. Masukkan arang tepat di atas pasir bersih tersebut, masukkan lagi pasir bersih tepat di atas arang tersebut, dan kemudian masukkan tisu atau kertas teh tepat di atas pasir bersih. Pastikan bahwa susunan material tersebut teratur dan tidak terjatuh.
3. Gabungkan botol tersebut dengan kedua botol lainnya sehingga membentuk huruf U seperti Gambar 1 berikut ini.

4. Tuangkan air kotor pada salah satu sisi dari alat penyaring air seperti gambar di bawah ini.



Gambar 1. Penuangan air kotor pada penyaring air

5. Tuangkan air bersih pada salah satu sisi dari alat penyaring air.
6. Amati keadaan alat penyaring tersebut setelah dituangkan air kotor dan air bersih. Apakah terjadi perubahan? Disebut apakah proses perpindahan air tersebut? Mengapa?
7. Berikan tekanan dengan menggunakan pluger spoit pada tabung yang berisi air kotor. Amatilah apa yang terjadi. Disebut apakah proses perpindahan air tersebut? Mengapa?

LAMPIRAN 4**LEMBAR KERJA SISWA 2****(LKS 2)**

Berdasarkan eksperimen di atas, jawablah pertanyaan berikut dengan benar !

1. Tentukan volume air pada kedua tabung saat proses osmosis.
2. Tentukan volume air pada kedua tabung saat proses osmosis terbalik.
3. Mengapa terjadi perbedaan volume pada kedua tabung saat proses osmosis dan osmosis balik?

LAMPIRAN 5**TES ESAI**

Nama :
 Mata Pelajaran : Matematika
 Hari/tanggal :
 Kelas :

1. Setiap sistem dalam tubuh manusia memerlukan air putih untuk menunjang kerja sistem tersebut. Contohnya dalam sistem peredaran darah, darah memerlukan air untuk dapat membawa nutrisi ke sel-sel tubuh manusia. Oleh sebab itu, setiap manusia perlu meminum air putih dalam jumlah cukup. Jika setiap manusia memerlukan air sebanyak minimal 2 liter per hari ($1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3$), minimal berapa gelaskah yang diperlukan Joni untuk meminum air apabila diketahui gelas Joni berbentuk tabung dengan diameter 6 cm dan tinggi gelas 10 cm?
2. Jika dalam proses penyaringan air dengan menggunakan sistem osmosis terbalik, 10 liter air kotor dapat menghasilkan 8 liter air bersih. Berapa liter air kotorkah yang diperlukan untuk menghasilkan 48 liter air bersih?

LAMPIRAN 6

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN 2 (RPP 2)

Nama Sekolah : SMP ...
Mata pelajaran : Matematika
Kelas/Semester : VIII/ 2
Alokasi Waktu : 4 × 40 menit

A. Kompetensi Dasar

1. Memahami konsep jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium.
2. Menerapkan aturan jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium dalam menghitung luas suatu daerah tak beraturan.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menjelaskan konsep jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium.
3. Menemukan luas daerah dengan menggunakan aturan jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium.

C. Materi Prasyarat

Luas persegi panjang dan luas trapesium.

D. Metode Pembelajaran

Metode pembelajaran yang digunakan dalam pembelajaran ini adalah pengamatan, penemuan (*discovery*), tanya jawab, dan diskusi kelompok.

E. Materi Pembelajaran

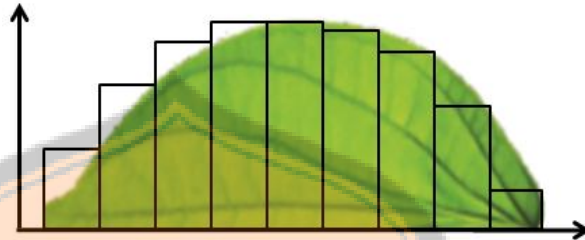
1. Jumlahan Riemann kiri
2. Jumlahan Riemann kanan
3. Jumlahan Riemann tengah, dan
4. Metode trapesium

F. Kegiatan Pembelajaran

Langkah Pembelajaran	Deskripsi	Alokasi Waktu
Kegiatan Pendahuluan	1. Salam dan doa. 2. Guru menyampaikan materi, tujuan, dan manfaat yang akan diterima oleh siswa dalam	10

	<p>pembelajaran.</p> <p>3. Guru mereview materi bangun datar beraturan dan bangun datar tidak beraturan, rumus luas persegi panjang, dan rumus luas trapesium.</p> <p>4. Guru membentuk kelompok siswa.</p>	
Kegiatan Inti	<p>1. Guru membagikan satu daun, penggaris, dan LKS pada setiap kelompok.</p> <p>2. Guru meminta setiap kelompok untuk mencermati LKS.</p> <p>3. Guru menjelaskan LKS kepada siswa dan mempersilahkan siswa untuk bertanya bagian yang belum dipahami oleh siswa pada LKS.</p> <p>4. Guru mempersilahkan setiap kelompok berdiskusi sambil mencari informasi dari buku pegangan atau internet.</p> <p>5. Dalam proses diskusi kelompok, guru akan memberikan topangan seperlunya kepada setiap kelompok yang memerlukan topangan.</p> <p>6. Guru mempersilahkan setiap kelompok untuk mencatat hasil pengerjaan LKS pada lembar yang telah disediakan.</p> <p>7. Guru mempersilahkan salah satu kelompok mempresentasikan hasil diskusi dan kelompok lain menanggapinya.</p> <p>8. Guru menanggapi penjelasan setiap kelompok.</p> <p>9. Guru menjelaskan bahwa luasan daerah tersebut dapat dicari dengan menggunakan rumus luas persegi panjang.</p> <p>10. Guru meminta beberapa kelompok yang perhitungan luasnya menggunakan rumus persegi panjang untuk menggambarkan cara membagi daerah daun menjadi persegi panjang.</p> <p>11. Guru meminta setiap kelompok untuk mencermati dan memilih gambar yang memiliki luasan paling dekat dengan luasan daun.</p> <p>12. Guru meminta siswa untuk menjelaskan alasan siswa memilih gambar yang dimaksud. Hal ini bertujuan agar siswa dapat memahami bahwa semakin kecil pias yang di ambil, maka semakin mendekati luas daun yang sesungguhnya (eksak).</p> <p>13. Guru menjelaskan cara membagi daerah daun menjadi beberapa bagian dapat dilakukan dengan 3 cara. Pada tahap ini guru akan menjelaskan cara menggambar pada jumlahan</p>	130

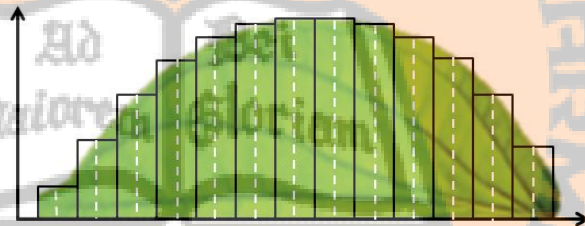
Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, dan jumlahan Riemann tengah seperti Gambar 1, Gambar 2, dan Gambar 3 di bawah ini.



Gambar 1. Partisi daun dengan Riemann kiri

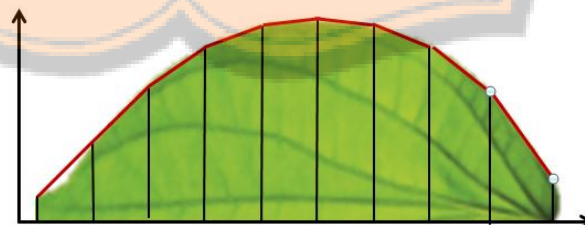


Gambar 2. Partisi daun dengan Riemann kanan



Gambar 3. Partisi daun dengan Riemann tengah

14. Guru juga menjelaskan bahwa luasan daerah daun dapat pula dihamperi dengan rumus luas trapesium dengan menggambarkan partisi daerah berbentuk trapesium seperti Gambar 4 di bawah ini.



Gambar 4. Partisi daun dengan Trapesium

15. Guru menjelaskan konsep dari jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan,

	<p>jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium serta penerapannya.</p> <p>16. Guru memberikan contoh soal tentang jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium.</p> <p>17. Guru memberikan latihan soal dan meminta siswa mengerjakan soal tersebut dalam kelompok.</p> <p>18. Beberapa kelompok diminta untuk menyampaikan hasil diskusinya didepan kelas dan meminta kelompok lain untuk memberikan tanggapan dengan panduan guru,.</p> <p>19. Guru memberikan ulasan dan penguatan konsep yang sudah diterima siswa.</p>	
Kegiatan Penutup	<p>1. Siswa diminta menyimpulkan pembelajaran yang didapat pada hari ini.</p> <p>2. Guru melakukan umpan balik untuk mengetahui sejauh mana pembelajaran terjadi pada peserta didik.</p> <p>3. Guru memberikan tugas mengenai jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium.</p> <p>4. Guru mengakhiri kegiatan belajar memotivasi siswa belajar, salam, dan doa.</p>	20

G. Media / alat, Bahan, dan Sumber Belajar

1. Media / Alat : Laptop, LCD, dan Papan Tulis.
2. Bahan : Daun
3. Sumber Belajar : Buku Matematika Kelas VIII SMP.

H. Latihan soal

Gambarlah telapak tangan kalian pada kertas dan hitunglah luas telapak tangan kalian dengan menggunakan rumus jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann tengah, dan metode trapesium.

Yogyakarta, 2019

Guru Mata Pelajaran

Guru

NIP.

Osniman Paulina Maure
NIM. 171 442 012

Mengetahui

Kepala SMP

LAMPIRAN 7**Lembar Kerja Siswa**
(LKS)

Kelas	: VIII
Mata Pelajaran	: Matematika
Hari/tanggal	:
Nama Anggota Kelompok :	
1.	3.
2.	4.

Petunjuk !

Perhatikan bentuk daun yang telah diberikan guru dan cermati pertanyaan-pertanyaan berikut. Diskusikan bersama kelompokmu dan tuliskan jawaban tersebut dengan rapi pada lembar yang telah disediakan.

Soal !**Gambar 1. Daun**

1. Apakah bentuk dari daun tersebut? Beraturan atau tidak beraturan?
2. Adakah rumus baku untuk menghitung luasan daerah daun tersebut?
3. Gambarlah bentuk daun tersebut pada kertas kalian!
4. Dapatkah kalian membagi daerah daun tersebut menjadi beberapa daerah yang berbentuk beraturan?
5. Apakah bentuk daerah beraturan yang dapat dibagi dari daerah daun tersebut? Mengapa?
6. Hitunglah luasan daerah daun dengan menggunakan penggaris dan rumus luas

LAMPIRAN 8

LEMBAR JAWABAN SISWA



LAMPIRAN 9

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

Fakultas / Prodi : FKIP / Pendidikan Matematika
Mata Pelajaran : Persamaan Diferensial
Semester : VI
Alokasi Waktu : 3 X 55 Menit

A. Capaian Pembelajaran (*learning outcomes* matakuliah)

1. Mahasiswa mampu memahami konsep metode *stretching transformation*.
2. Mahasiswa mampu menggunakan metode *stretching transformation* untuk mengubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa.

B. Rencana Pembelajaran

Tabel 1. Rencana Pembelajaran

Kemampuan Akhir yang Diharapkan	Materi Pembelajaran (Bahan Kajian)	Proses Pembelajaran	Referensi
Competence 1. Mampu memahami konsep metode <i>stretching transformation</i> . 2. Mampu menggunakan metode <i>stretching transformation</i> untuk mengubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa.	Metode <i>stretching transformation</i>	Presentasi, ceramah, diskusi, latihan soal	1. Fulford & Broadbridge. <i>Industrial Mathematics. Case Studies in the Diffusion of Heat and Matter</i>

Tabel 2. Uraian Rinci Proses Pembelajaran

Proses Pembelajaran	Alokasi Waktu
Pendahuluan Melalui dialog dan sedikit penjelasan, mahasiswa peneliti menggali konteks mahasiswa tentang sejauh mana yang mereka ketahui tentang PDP dan PDB.	30 menit

<p>Inti</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Mahasiswa peneliti membagi mahasiswa dalam beberapa kelompok. 2. Mahasiswa peneliti memberikan bahan ajar dan meminta mahasiswa untuk mencari referensi di internet tentang metode <i>stretching transformation</i>. 3. Mahasiswa peneliti memberikan satu soal kepada mahasiswa untuk didiskusikan dalam kelompok. 4. Salah satu kelompok memperpresentasikan jawabannya dan kelompok lain menanggapi. 5. Mahasiswa peneliti menjelaskan konsep dan langkah-langkah penerapan metode <i>stretching transformation</i> kemudian memberikan contoh soal terkait penerapan metode <i>stretching transformation</i>. 6. Mahasiswa peneliti memberikan latihan soal kepada mahasiswa untuk dikerjakan masing-masing mahasiswa. 7. Salah satu kelompok memperpresentasikan jawabannya dan kelompok lain menanggapi. 8. Tanya jawab antara mahasiswa peneliti dan mahasiswa terkait metode <i>stretching transformation</i>. 	110 menit
<p>Penutup</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Mahasiswa peneliti meminta salah satu mahasiswa menyimpulkan konsep dari metode <i>stretching transformation</i> dan langkah-langkah penerapannya dalam mengubah PDP menjadi PDB dan mahasiswa lain menanggapi. 2. Memberikan tugas terkait penggunaan metode <i>stretching transformation</i>. 	25 menit

C. Referensi

Fulford, G.R. & Broadbridge, P., 2002, *Industrial Mathematics. Case Studies in the Diffusion of Heat and Matter*, Cambridge: Cambridge University Press.

D. Soal**SOAL**

Diberikan masalah konduksi panas (1) dengan dengan fluks panas yang ditentukan pada batas $x = 0$ (2) seperti berikut ini.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 1 \quad (2)$$

Ubahlah persamaan diferensial parsial di atas menjadi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode *stretching transformation*.

Yogyakarta, Maret 2019

Mahasiswa Peneliti

Osniman Paulina Maure

NIM. 171 442 012

LAMPIRAN 10

Penyelesaian Persamaan Secara Numerik

Berdasarkan pemodelan masalah pemurnian air telah diperoleh persamaan diferensial untuk memprediksi konsentrasi larutan garam sebagai berikut.

$$y \frac{\partial C}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (\text{ref 3.4})$$

dengan $\alpha = \frac{Dh}{v_0}$ dan kondisi batasnya adalah

$$C(0, y) = c_0, \quad C(x, \infty) = c_0, \quad (\text{ref 3.5})$$

$$-D \frac{\partial C}{\partial y}(x, 0) - qC(x, 0) = 0. \quad (\text{ref 3.9})$$

Dari persamaan (ref 3.4), diperoleh

$$y \frac{\partial C}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right). \quad (3.50)$$

Persamaan (ref 3.9) juga dapat dinyatakan menjadi,

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x, 0) = -\frac{qC(x, 0)}{D} \quad (3.51)$$

atau

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x, 0) = -kC(x, 0) \quad (3.52)$$

dengan $k = \frac{q}{D}$.

Membran semipermeabel mempunyai panjang L dibagi ke dalam N interval yang sama, $\Delta x = \frac{L}{N}$. $x_0 = 1, x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \dots, x_N = N\Delta x = L$ sedangkan jarak dari permukaan membran ke lapisan kedap air yaitu P dibagi ke dalam M interval yang sama, $\Delta y = \frac{P}{M}$, $y_0 = 1, y_1 = \Delta y, y_2 = 2\Delta y, \dots, y_N = M\Delta y = P$. Secara umum, dapat pula ditulis menjadi

$$x_i = i\Delta x \text{ dan } y_j = j\Delta y.$$

Misalkan kelebihan konsentrasi larutan garam pada x_i, y_i , dengan pendekatan numerik dapat dinotasikan menjadi

$$C_{i,j} = C(x_i, y_j).$$

Dengan demikian, skema pendekatan beda mundur untuk turunan pertama terhadap x adalah

$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx \frac{C(x_i, y_j) - C(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x} \quad (3.52)$$

atau

$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx \frac{C_j^i - C_j^{i-1}}{\Delta x}, \quad (3.53)$$

sedangkan skema pendekatan beda maju untuk persamaan (3.49) adalah

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \approx \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{j+1}^i - \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_j^i}{\Delta y}. \quad (3.54)$$

Substitusikan persamaan (3.52) dan (3.53) ke persamaan (3.49), sehingga diperoleh skema eksplisit sebagai berikut.

$$y_j \left(\frac{C_j^i - C_j^{i-1}}{\Delta x} \right) = \alpha \left(\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{j+1}^i - \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_j^i}{\Delta y} \right).$$

Perhatikan bahwa $x + \Delta x$ menjadi $x_i + \Delta x = x_{i+1}$ dan $y + \Delta y$ menjadi $y_j + \Delta y = y_{j+1}$, sehingga diperoleh

$$\frac{y_j}{\Delta x} (C_j^i - C_j^{i-1}) = \frac{\alpha}{\Delta y} \left(\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{j+1}^i - \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_j^i \right).$$

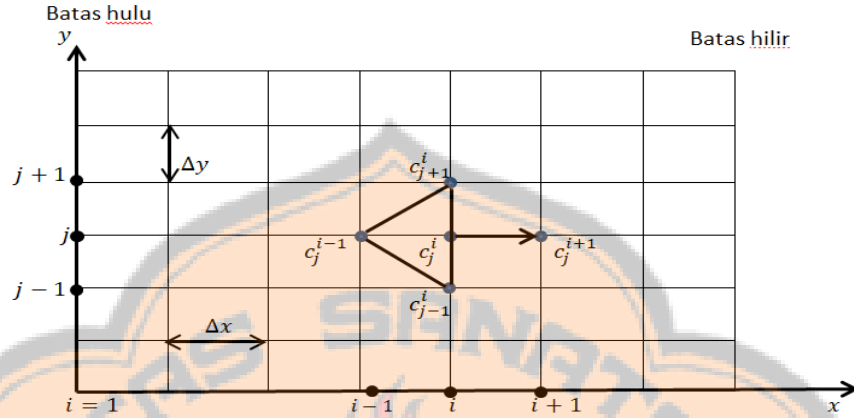
Jika kedua ruas dikali $\frac{\Delta x}{y}$, maka diperoleh

$$C_j^i - C_j^{i-1} = \frac{\Delta x}{y_j} \frac{\alpha}{\Delta y} \left(\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{j+1}^i - \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_j^i \right)$$

atau

$$C_j^i = k \left(\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{j+1}^i - \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_j^i \right) + C_j^{i-1}, \quad (3.55)$$

dengan $k = \frac{\alpha \Delta x}{y_j \Delta y}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, dan $j = 1, 2, \dots, M - 1$.



Gambar 3.4 Skema beda pusat untuk persamaan pemurnian air

Agar dapat menyelesaikan persamaan (3.55), dibutuhkan syarat tambahan yaitu syarat batasnya sebagai berikut.

$$C(0, y) = C_j^0 = c_0, \quad (3.56)$$

$$C(x, \infty) = C_\infty^i = c_0, \quad (3.57)$$

Misalkan diberikan nilai dari parameter $D = 10^{-9}$, $h = 10^{-3}$, $\Delta x = 10^{-2}$, $\Delta y = 10^{-2}$, $y = 6$, dan $v_0 = 10^{-3}$. Oleh karena $\alpha = \frac{Dh}{v_0}$ maka nilai parameter $\alpha = \frac{10^{-9} \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 10^{-9}$.