Rozproszony alogrytm orientacji cyklu

Marcin Wykpis

Styczeń 2025

1 Algorytm

```
send(RIGHT, [1, 1])
while true do
    from := receive([vote, distance, stop, undecided])
    if stop then
        send(!from, [stop])
        if undecided then
            return "No majority"
        else if from == LEFT then
            return "Node not flipped"
        else
            return "Node flipped"
        end
    else
        if distance==N then
            if vote > 0 then
                send(RIGHT, [stop])
                return "Node not flipped"
            else
                send(RIGHT, [stop, undecided])
                return "No majority"
            end
        end
        if from == LEFT then
            send(RIGHT, [msg.vote+1, msg.distance+1])
        end
        if from == RIGHT and msg.vote > 0 then
            send(LEFT, [msg.vote-1, msg.distance+1])
        end
    end
end
```

2 Dowód poprawności

Dla ciągu zer i jedynek s, oznaczy $\#_0 s$ i $\#_1 s$ jako liczbę zer i jedynek w tym ciągu. Ciąg s nazwiem dominującym, gdy $\#_1 t > \#_0 t$ dla każdego prefixu t w s. Podobnie, ciąg s jest słabo dominujący, gdy zachodzi warunek $\#_1 t \geqslant \#_0 t$.
Bez straty ogólności, niech poprawna orientacja będzie według wskazówek zegara.
Zdefiniujmy $s_i = 1$ jeśli prawy kanał i-tego procesu wysyła wg. wskazówek zegara oraz $s_i = 0$ wpp. Skoro $\#_1 s \geqslant \#_0 s$, conajmniej jedna cykliczna permutacja $s_k s_{k+1} ... s_{k-1}$ jest słabo dominująca.
A zatem k-ty proces otrzyma wiadomość [vote, N], gdzie wartość vote jest równa $\#_1 s \geqslant \#_0 s$.

3 Złożoność

W przypadku, gdy wszystkie procesy są jednakowo zorientowane, każdy z nich wysyła wiadomość, która pokona cały cykl. Mamy zatem $\Omega(N^2)$ wiadomości. Ponadto, każdy deterministyczny algorytm orientacji cyklu, wykonuje w pesimistycznym przypadku $\Omega(N^2)$.
Ciekawszym problemem wydaje się *średnia* liczba wiadomości wysyłanych w trakcie trwania algorytmu. Wynosi ona $\Theta(N^{3/2})$.

4 Dowód złożoności

Lemma 4.1. *Niech p i q będą liczbami naturalnymi $p \geqslant q \geqslant 0$. Wśród $\binom{p+q}{q}$ ciągów s takich, że $\#_1 s = p$ oraz $\#_0 s = 1$ dokładnie $\binom{p+q}{q}\frac{p+1-q}{p+1}$ z nich jest słabo dominujących.*

Dowód.

$$\binom{p+q}{q}\frac{p+1-q}{p+1} = \binom{p+q}{p} - \binom{p+q}{p+1}$$

Dowód analogiczny jak dla liczb Catalana. □

Niech $L(N)$ będzie zbiorem ciągów zer i jedynek, o długości N. Niech $Pref(N)$ bęzie zbiorem niepustych prefixów cyklicznych permutacji zbioru $1, 2, ...N$.
Dla $s = s_1 s_2 ... s_N \in L(N)$ oraz $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k \in Pref(N)$, definiujemy

$$s[\alpha] = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} ... s_{\alpha_1}$$

Dla $s \in L(N)$ definiujemy również $D(s)$ jako moc zbioru

$$\{\alpha \in Pref(N) \mid s[\alpha] - \text{słabo domnujące}\}$$

Lemma 4.2.

$$\sum_{s \in L(N)} D(s) = 2^N \left(2\sqrt{2/\pi} \cdot N^{3/2} + O(N)\right)$$

Dowód. Dla $s \in L(N)$ oraz $p + q \leqslant N$, zdefiniujmy $D_{p,q}(s)$ jako moc zbioru

$$\{\alpha \in Pref(N) \mid \#_1 s[\alpha] = p, \#_0 s[\alpha] = q, s[\alpha] - \text{słabo domnujące}\}$$

Dla ustalonego p, q, że $p + q \leqslant N$ mamy $\binom{p+q}{q}$ ciągów t o długości $p+q$, że $\#_1 = p$ oraz $\#_0 = q$. Dla każdego takiego ciągu, mamy $N \cdot 2^{N-(p+q)}$ par (s, α) takich, że $s \in L(N), \alpha \in Pref(N)$ oraz $t = s[\alpha]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in L(N)} D(s) &= \sum_{k=0}^{N} \sum_{q=0}^{k} D_{k-q,q}(s) \\
&\overset{\text{lem.1}}{=} \textstyle\sum_{k=0}^{N} \sum_{q=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} N \cdot 2^{N-(p+q)} \cdot \binom{p+q}{q} \frac{p+1-q}{p+1} \\
&= \ldots \\
&= N \cdot 2^n \left(\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{2N_i + 1}{2^{2N_i}} \binom{2N_i}{N_i} \right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

gdzie $N_1 = \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ i $N_2 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$

Korzystając z wzoru Sterlinga:

$$\binom{2n}{n} = \frac{2^2 n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

oraz z faktu, że $N_1, N_2 = \frac{N}{2} + O(1)$, dostajemy

$$\sum_{s \in L(N)} D(s) = 2^N \left(2\sqrt{2/\pi} \cdot N^{3/2} + O(N)\right)$$

Co chcieliśmy pokazać. □

Wartość, którą policzyliśmy jest sumą wiadomości wysłanych wg. wskazówek zegara dla wszystkich 2^N możliwych ciągów zer i jedynek.
Średnia liczba wiadomości wysłana podczas algorytmu, jest więc równa

$$\begin{aligned}
avg(N) &= \frac{1}{2^N} \cdot 2 \sum_{s \in L(N)} D(s) \\
&\overset{\text{lem.2}}{=} 4\sqrt{2/\pi} \cdot N^{3/2} + O(N)
\end{aligned}$$