Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»
ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Билет 8

Геометрическая вероятность. Бесконечное бросание правильной монеты. Игра «Penney Ante». Парадокс Бертрана.

Геометрическая вероятность

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрические вероятности* — вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.).
Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений:

- поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L,
- вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L.

В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством

$$P = \frac{\text{Длина } l}{\text{Длина } L}.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Это означает выполнение следующих предположений:

- брошенная точка может оказаться в любой точке фигуры G,
- вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g.

В этих предположениях вероятность попадания точки на фигуру g определяется равенством

$$P = \frac{\text{Площадь } g}{\text{Площадь } G}.$$

Замечание 1. Приведенные определения являются частными случаями общего определения геометрической вероятности. Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через mes, то вероятность попадания точки, брошенной наудачу (в указанном выше смысле) в область g — часть области G, равна

$$P = \frac{mes\ g}{mes\ G}.$$

Замечание 2. В случае классического определения вероятность достоверного (невозможного) события равна единице (нулю); справедливы и обратные утверждения (например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно). В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют места. Например, вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области G равна нулю, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

Бесконечные подбрасывания монеты

Построим вероятностное пространство, моделирующее бесконечный подбрасывание монеты. Множеством элементарных исходов Ω в данном случае будет множество бесконечных двоичных последовательностей, и таким образом, Ω будет континуальным множеством. Каждая такая последовательность задает некоторую точку из отрезка $[0,1]$ при помощи двоичной записи. То есть определена функция $f : \Omega \to [0,1]$, сопоставляющая каждой последовательности $\omega = \{\omega_n\}$ число $f(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^n}$. Вероятности для такого вероятностного пространства не могут быть определены для каждой последовательности, и поэтому определены только для событий $A_n = \{\omega : \omega_1 = \varepsilon_1, \ldots, \omega_n = \varepsilon_n\}$ и $P(A_n) = 2^{-n}$, где $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Такое определение вероятностного пространства позволяет нам рассматривать события, касающиеся только первых n бросков, при этом вероятности таких событий вычисляются исходя из схемы Бернулли для n бросаний и от дальнейших бросков эти вероятности не зависят.

Игра «Penney Ante»

Задача 1. Алиса и Боб играют в следующую игру:
Правильная монета бросается до тех пор, пока не встретится комбинация 110 или 100 (где, например, 1 соотвествует решке, а 0 — орлу).
Алиса выигрывает, если первой появилась комбинация 110, а Боб в случае, когда первой появилась комбинация 100. Кто будет выигрывать чаще?

Решение.
Будем считать, что монету продолжают подбрасывать и в случае, когда одна из комбинаций 110 или 100 уже выпала, полагая, что результат дальнейших подбрасываний не имеет значения. Таким образом, эксперимент выглядит так: случайно выбираем бесконечную последовательность из нулей и единиц, а затем смотрим, какая из последовательностей 110 или 100 появилась раньше.
Обозначим за R_N событие, которое заключается в том, что на N-ом броске выигрывает Алиса (то есть на N-ом броске в первый раз встретилась комбинация 110 и ни разу до этого не встретилась комбинация 100). Ясно, что $P(R_1) = P(R_2) = 0$, а $P(R_3) = \frac{1}{8}$.
Обозначим за Q_N вероятность того, что за первые N бросков Алиса не выигрывает (то есть комбинация 110 так и не появилась после первых N бросков). Тогда

$$P(Q_N) = 1 - P(R_1) - P(R_2) - \ldots - P(R_N)$$

и

$$P(R_{N+3}) = P(R_{N+3} \cap Q_N) = P(R_{N+3}|Q_N) \cdot P(Q_N) = \frac{1}{8}P(Q_N).$$

Тогда

$$P(R_{N+3}) = \frac{1}{8}(1 - P(R_1) - P(R_2) - \ldots - P(R_N))$$

Мы получили рекуррентную формулу для вычисления $P(R_{N+3})$, и теперь можем вычислить, например, $P(R_4) = \frac{1}{8} = P(R_5)$ и $P(R_6) = \frac{7}{64}$.
Для того чтобы вычислить то же самое для выигрыша Боба можно провести аналогичные рассуждения и получить похожую формулу. И может показаться, что обе комбинации, 110 и 100, равноправны, однако эта игра все же не является справедливой и одна из комбинаций выигрывает у другой. Докажем это:
Обозначим через A_N событие, представляющее собой выигрыш Алисы на N-ом шаге, через B_N — событие, представляющее собой выигрыш Боба на N-ом шаге, а C_N — событие, при котором ни Алиса, ни Боб не выиграли на N-ом шаге. Тогда:

$$P(A_{N+3}) = P(A_{N+3} \cap C_N) = P(A_{N+3}|C_N) \cdot P(C_N) = \frac{1}{8}P(C_N).$$

Пусть D_N — событие, состоящее в том, что после N-го бросания никто не выиграл, а потом при следующих трех бросаниях выпадает 100. Тогда

$$P(D_N) = \frac{1}{8}P(C_N).$$

С другой стороны, событие D_N заключается в том, что либо на $N+2$ шаге выиграла Алиса, либо на $N+3$ шаге выиграл Боб, то есть

$$P(D_N) = \frac{1}{2}P(A_{N+2}) + P(B_{N+3}).$$

Вспомним, что

$$P(A_{N+3}) = \frac{1}{8}P(C_N).$$

Тогда

$$P(A_{N+3}) = \frac{1}{2}P(A_{N+2}) + P(B_{N+3}).$$

Пусть A — событие, состоящее в том, что Алиса выиграла. Тогда $A = \bigsqcup\limits_{N=1}^{\infty} A_N$. И пусть B — событие, состоящее в том, что Боб выиграл. Тогда $B = \bigsqcup\limits_{N=1}^{\infty} B_N$.

$$P(A) = \sum_{N=1}^{\infty} P(A_N) = \sum_{N=1}^{\infty} P(A_{N+3}) + P(A_3) = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}P(A_{N+2}) + P(B_{N+3})\right) + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty} P(A_{N+2}) + \sum_{N=1}^{\infty} P(B_{N+3}) + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty} P(A_{N+2}) + \sum_{N=1}^{\infty} P(B_N) - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1}{2}P(A) + P(B).$$

Тогда

$$P(A) = 2P(B).$$

Уже, не вычисляя сами вероятности, мы можем сделать вывод, что Алиса будет выигрывать вдвое чаще Боба.

Заметим, что $P(C) = 0$, где C — событие, состоящее в том, что никто никто не выиграл. Почему так? В это множество входит множество всех таких последовательностей, что если их разбить на подряд идущие тройки цифр, то среди этих троек нет 100. Вероятность того, что если первые $3N$ цифр разбить на N троек, то среди нет 100, равна $\left(\frac{7}{8}\right)^N$ и стремится к нулю при $N \to \infty$. Итак,

$$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3},\ P(B) = \frac{1}{3}.$$

Парадокс Бертрана

Задача 2. В круге единичного радиуса проводят случайным образом хорду. Какова вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного вписанного треугольника?

Решение.

Задавая различными способами вероятностное пространство в этой задаче можно получить совершенно различные, но абсолютно верные ответы.

Первый способ:

Фиксируем одну точку на окружности, а вторую выбираем наудачу и проводим через них хорду. Чтобы посчитать искомую вероятность, представим, что треугольник повернут так, что одна из его вершин совпадает с фиксированным концом хорды. Что в данном случае означает, что хорда длиннее стороны правильного вписанного треугольника? Это значит, что вторая точка лежит на дуге между двумя другими вершинами треугольника. Длина такой дуги равна одной трети длины окружности, а значит искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

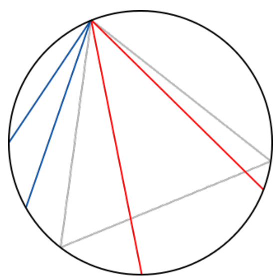

Рис. 1. Первый способ

Красным цветом на данном рисунке изображены те хорды, длина которых больше длины правильного вписанного треугольника, а синим - те, длина которых короче.

Замечание 3. *(Комментарий к первому способу)*

Почему длина дуги, стягиваемой двумя вершинами правильного вписанного треугольника, равна одной трети длины окружности?

Вспомним, что нам дан правильный треугольник. У него все углы равны, а значит и равны дуги, на которые эти углы опираются. Но треугольник делит окружность только на три части, а значит одна такая дуга имеет длину, равную одной трети длины окружности.

Второй способ:

Фиксируем радиус окружности и наудачу выбираем точку на этом радиусе. Построим хорду, перпендикулярную зафиксированному радиусу, проходящую через выбранную точку. Для нахождения искомой вероятности, представим, что треугольник повернут так, что одна из его сторон перпендикулярна зафиксированному радиусу. Хорда длиннее стороны треугольника, если ее центр ближе к центру окружности, чем точка пересечения стороны треугольника с зафиксированным радиусом. Сторона треугольника делит радиус пополам, а значит вероятность выбрать хорду, длиннее стороны треугольника, равна $\frac{1}{2}$.

Замечание 4. *(Комментарий ко второму способу)*

Почему сторона правильного вписанного треугольника, перпендикулярная зафиксированному радиусу, делит этот радиус пополам?

В этом треугольнике перпендикуляр h (он же биссектриса и медиана, так как треугольник правильный), проведенный к стороне, которая перпендикулярна фиксированному радиусу, делится центром описанной окружности в соотношении $2 : 1$, считая от вершины, из которой он проведен. Получается, что радиус описанной окружности равен $\frac{2}{3} \cdot h$, а $h - R = R \cdot \frac{1}{2}$, из чего и следует утверждение из вопроса.

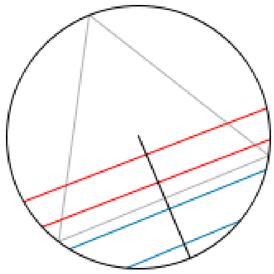

Рис. 2. Второй способ
Красным цветом на данном рисунке изображены те хорды, длина которых больше длины правильного вписанного треугольника, а синим - те, длина которых короче.

Третий способ:
Выбираем наудачу произвольную точку внутри круга и строим хорду с центром в выбранной точке. Хорда длиннее стороны равностороннего вписанного треугольника, если выбранная точка находится внутри круга, вписанного в этот треугольник. Площадь вписанного круга есть $\frac{1}{4}$ от площади описанного, а значит искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.

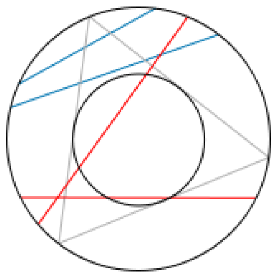

Рис. 3. Третий способ
Красным цветом на данном рисунке изображены те хорды, длина которых больше длины правильного вписанного треугольника, а синим - те, длина которых короче.

Замечание 5. *(Комментарий к третьему способу)*
1) Почему площадь вписанного круга в четыре раза меньше площади описанного?
Достаточно вспомнить, что площадь круга равна πR^2 и то, что радиус вписанной в правильный треугольник окружности вдвое меньше радиуса описанной.
2) Почему хорда будет больше стороны треугольника, только если ее центр попал внутрь вписанной окружности?
Достаточно вспомнить, что каждая сторона правильного треугольника касается этой вписанной окружности, причем точка касания делит сторону правильного треугольника пополам, и что длина хорды (a сторона правильного треугольника является частным случаем хорды) вычисляется по формуле $2R \cdot sin\frac{\alpha}{2}$, где α — центральный угол, опирающийся на данную хорду, а значит, если центр выбираемой хорды попадет в область вне вписанной окружности, то длина этой ходы будем меньше стороны треугольника, а если попадет внутрь вписанной окружности, то ее длина будет больше.

Но парадокс Бертрана — это парадокс в кавычках. Никакого парадокса нет, просто это разные задачи. Они словесно звучат одинаково: "случайно проводится хорда". Но слово "случайно" можно расшифровывать разными способами. Поэтому нет ничего удивительного в том, что мы получили разные ответы.