Подготовка к РК2 : Теория вероятностей и математическая статистика

Печатная версия файла

Вопросы для подготовки

1. Дать определение σ-алгебре событий.

Класс $\mathfrak{A}$ подмножеств из Ω назовем σ-алгеброй событий, если:

1. $\forall A \in \mathfrak{A} \ \Rightarrow \overline{A} \in \mathfrak{A}$
2. Если $A_n \in \mathfrak{A},\ n = 1, 2, ..,$ то их объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ принадлежит $\mathfrak{A}$.

2. Перечислить операции, определенные для случайных событий.

1. **Пересечение (произведение)** двух событий A и B называют событие C, происходящее тогда и только тогда, когда одновременно происходят события A и B.

$$C = A \cap B,\ C = AB$$

2. **Объединение (сумма)** двух событий A и B называют событие C, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из
событий A или B.

$$C = A \cup B,\ C = A + B$$

3. **Разностью** двух событий A и B называют событие C,
происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

$$C = A \backslash B$$

4. **Дополнением** события A называют событие, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

$$\overline{A} = \Omega \backslash A$$

3. Дать классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов,
т.е.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Примечание: В классическом определении вероятности исходят из того, что пространство элементарных исходов Ω содержит конечное число элементарных исходов, причем все они равновозможны.

4. Дать геометрическое определение вероятности.

Вероятностью события A называют число $P(A)$, равное отношению меры
множества A к мере множества Ω:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Примечание:

1. Под мерой $\mu(A)$ подмножества A будем понимать его длину, площадь или объем (обобщенный объем) в зависимости от того, какому пространству принадлежит Ω: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^n)$.
2. Будем также считать, что пространство элементарных исходов Ω имеет конечную меру, а возможность попадания "случайно брошенной" точки в любое подмножество Ω пропорциональна мере этого подмножества и не зависит от его расположения и формы.

5. Дать аксиоматическое определение вероятности.

Пусть каждому событию A (т.е. подмножеству A пространства элементарных исходов Ω, принадлежащему σ-алгебре $\mathfrak{A}$) поставлено в соответствие число $P(A)$. Числовую функцию P называют **вероятностью**,
если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\forall A \in \mathfrak{A}:\ P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. если $A_n \in \mathfrak{A},\ n = 1, 2, ..,$ и $\forall k \neq n:\ A_k A_n = \varnothing$, то

$$P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

6. Дать определение достоверного события.

Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т.е. событие, которое обязательно происходит в данном опыте, называют **достоверным событием**.

Достоверное событие, как и пространство элементарных исходов, обозначают буквой Ω

7. Дать определение невозможного события.

Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, т.е. событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называют **невозможным событием**.

Невозможное событие будем обозначать символом $\varnothing$.

8. Дать определение несовместных событий.

События A и B называют **несовместными**, если их пересечение является невозможным событием, т. е. если $A \cap B = \varnothing$.

9. Дать определение условной вероятности.

Условной вероятностью события A при условии (наступлении) события B называют отношение вероятности пересечения событий A и B к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

10. Дать определение независимых событий.

События A и B, имеющие ненулевую вероятность, называют **независимыми**, если условная вероятность A при условии B совпадает с безусловной вероятностью A или если условная вероятность B при условии A совпадает с безусловной вероятностью B, т.е.

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

Пояснение: запись "..условная вероятность A при условии B совпадает с безусловной вероятностью A.." означает, что вероятность наступления события A одинакова, как при наступлении события B, так и без его наступления, т.е. наступление события A **не зависит** от наступления события B.

Замечание:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(B|A) = P(B)$$

11. Дать определение полной группы событий.

События $H_1, H_2, .., H_n$ образуют **полную группу событий**, если:

1. $H_1 + H_2 + ... + H_n = \Omega$
2. $\forall i \neq j: \ H_i H_j = \varnothing$

12. Сформулировать основные свойства вероятности.

Вероятность имеет следующие свойства:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{A}: \ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2. $\forall A \in \mathfrak{A}: \ P(A) \in [0; \ 1]$
3. $P(\varnothing) = 0$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

13. Сформулировать теорему умножения.

Пусть событие $A = A_1A_2..A_n$ (т.е. A - пересечение событий $A_1, A_2, .., A_n$) и $P(A) > 0$. Тогда справедливо равенство

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)..P(A_n|A_1A_2..A_{n-1})$$

14. Сформулировать теорему сложения.

Вероятность объединения любого конечного числа событий

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - ... - P(A_{n-1})P(A_n) + P(A_1A_2A_3) +$$

Эта формула вытекает из более простой формулы для объединения двух событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Также можно показать, что вероятность двух несовместных событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

15. Сформулировать теорему о полной вероятности.

Пусть $H_1, H_2, .., H_n$ образуют полную группу событий. Тогда для любого события A

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$$

16. Сформулировать теорему Байеса.

Пусть $H_1, H_2, .., H_n$ образуют полную группу событий. Тогда для любого события A

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + ...P(A|H_n)P(H_n)}$$

17. Сформулировать теорему Бернулли.

Обозначим через Y_n число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда вероятность того, что в n испытаниях произойдет ровно $Y_n = k$ успехов:

$$P\{Y_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 1, 2, .., n,\ q = 1 - p,\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

18. Сформулировать следствия из теоремы Бернулли.

Следствие 1

$$P\{Y_n \geq 1\} = 1 - q^n$$

Следствие 2

$$P\{k_1 \leq Y_n \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

19. Дать определения случайной величины, дискретной случайной величины, непрерывной случайной величины.

Пусть есть пространство элементарных событий Ω с σ-алгеброй событий $\mathfrak{A}$ и вероятностью P.

Функцию $\xi(\omega)$ из Ω в $\mathbb{R}$ называют **случайной величиной**, если для любого $x \in \mathbb{R}$ множество исходов, для которых $\xi(\omega) < x$, т.е. $\{\omega :\ \xi(\omega) < x\}$, является событием.

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ \{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{A}$$

Случайную величину называют **дискретной**, если она принимает не более, чем счетное число различных значений.

Случайную величину ξ называют **непрерывной**, если ее функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ f(t) - \text{плотность распределения вероятностей случайной величины } \xi$$

20. Дать определения функции распределения и плотности распределения случайной величины, сформулировать их основные свойства.

Функцию $F(x) = P\{\xi < x\}$ называют **функцией распределения** вероятности случайной величины ξ.

Функция F распределения случайной величины ξ имеет следующие свойства:

1. $\forall x \in \mathbb{R}:\ 0 \le F(x) \le 1$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y:\ F(x) \le F(y)$
3. $F(-\infty) = 0;\ F(+\infty) = 1$
4. $P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a)$
5. $\lim\limits_{y \to x-0} F(y) = F(x)$, т.е. $F(x)$— непрерывная слева функция.

Плотностью распределения случайной величины $f(x)$ называют первую производную от функции распределения, т.е.

$$f(x) = F'(x)$$

Функция f плотности распределения случайной величины ξ имеет следующие свойства:

1. $F'(x) = f(x)\ \ \forall x : \exists F'(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}:\ f(x) \ge 0$
3. $P\{a \le x \le b\} = \int\limits_a^b f(x)dx$
4. $P\{x \le \xi \le x + \Delta x\} = f(x)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R}:\ P\{\xi = x\} = 0$
6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

21. Дать определения математического ожидания и дисперсии случайной величины, сформулировать их основные свойства.

Пусть ξ - дискретная случайная величина, и пусть $P\{\xi = x_n\} = p_n,\ n = 1, 2, ..,\ p_1 + p_2 + .. + p_n + .. = 1$.

Число $M\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + .. + x_np_n + .. = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_np_n$ называют **математическим ожиданием** (средним значением), (средним) случайной величины ξ при условии, что этот ряд абсолютно сходится.

Математическое ожидание $M\xi$ обладает следующими свойствами:

1. $C = const:\ MC = C$
2. $\forall \alpha:\ M(\alpha\xi) = \alpha M(\xi)$
3. $M(\xi_1 \pm \xi_2) = M(\xi_1) \pm M(\xi_2)$
4. $M(\xi_1\xi_2) = M(\xi_1)M(\xi_2)$, где ξ_1, ξ_2-независимые случайные величины.

Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины ξ от ее среднего значения

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

Дисперсия $D\xi$ обладает следующими свойствами:

1. $C = const:\ DC = 0$
2. $\forall a:\ D(a\xi) = a^2 D\xi$

3. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$
4. $D(\xi_1 \pm \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$

22. Дать определения биномиальной, пуассоновской, экспоненциальной, нормальной, равномерно распределенной случайной величины. Сформулировать свойства нормальной случайной величины.

Случайную величину ξ называют **биномиальной** с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0; 1)$, если

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, .., n,\ q = 1 - p$$

Случайную величину ξ называют **пуассоновской** с параметром $\lambda > 0$, если

$$P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},\ n = 0, 1, 2, ..$$

Случайную величину ξ называют **экспоненциальной** с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$$

Случайную величину ξ называют **нормальной (гауссовской)** с параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}$$

Свойства нормальной величины:

1. $M\xi = \mu$
2. $D\xi = \sigma^2$

Случайную величину ξ называют **равномерно распределенной** на отрезке $[a; b]$, если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in [a; b] \\ 0,\ x \notin [a; b] \end{cases}$$
