Отчёт по практикуму.
Метод условного градиента.

Студентка 411 группы
Кузнецова М.П.

1 Математическое описание метода

Рассмотрим задачу минимизации:

$$J(u) \to inf, u \in U \tag{1}$$

Идея метода условного градиента основана на том, что в окрестности точки u_k функционал $J(u)$ можно приближенно представить как

$$J(u) \approx J(u_k) + \langle J'(u_k), u - u_k \rangle \tag{2}$$

Так как $J(u_k)$ близко к $J(u)$, то мы стараемся минимизировать скалярное произведение $J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle$. Введём обозначение:

$$\bar{u}_k = argmin_{u \in U} J_k(u) \tag{3}$$

Для обоснования сходимости метода используется теорема:

Теорема. Пусть U - выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, $J(u) \in C^1(U)$ и выпукла, $J'(u) \in Lip(U)$ с константой $L > 0, D = diamU$. Тогда

$$J(u_k) - J_* \leq \frac{J(u_0) - J_*}{1 + \frac{J(u_0) - J_*}{2LD} k} = O(\frac{1}{k}) \tag{4}$$

Если $J(u)$ сильно выпукла, то, кроме этого, выполнено условие

$$\frac{k}{2} ||u_k - u_*|| \leq J(u_k) - J_* \tag{5}$$

Источники: Потапов М.М. "Методы оптимизации. Конспект лекций."

2 Описание функции, реализующей метод условного градиента

f - функция, которую мы минимизируем, f_k - её производная, A, b - ограничения на x, eps - точность, k_{max} - максимальное количество итераций.

Функция conditional gradient задаёт метод условного градиента. В ней, используя метод linprog, решаем вспомогательную задачу линейного программирования и находим $\bar{u}_k$. Далее, используя метод деления отрезка пополам bisect, находим α_k. После находим u_{k+1} и переходим к следующей итерации.

3 Описание решения задачи оптимизации

Функция, которую мы минимизируем

$$J(x) = \sum_{i=1}^{5}[(ln(x_i - 2))^2 + (ln(10 - x_i))^2 - (\prod_{i=1}^{5} x_i)^2] \to min \tag{6}$$

$$2.001 \le x_i \le 9.999, i = 1, ..., 5 \tag{7}$$

Задаём ограничения A и b, начальную точку x_0, точность eps, програмируем данную функцию $f(x)$, её производную $f_k(x)$ и производную по α функции $f(x_0 + \alpha * \bar{x}_k)$.

Задав всем этим нашу задачу минимизации, используем нашу функцию условного градиента и находим ответ:

$$x_{min} = (9.999, 9.999, 9.999, 9.999, 9.999) \tag{8}$$

$$f(x_{min}) = -49950022233.797874 \tag{9}$$

4 Таблица решений в зависимости от выбора начальной точки

Как можно видеть по таблице, используя метод условного градиенты, оптимальное решение находится за 2 итерации, если мы не находимся на границе. И за 1 итерацию, если мы находимся на границе, которая является точкой минимума для данной задачи (последняя строчка таблицы). Из чего можно сделать вывод, что функция всюду убывает внитри наших ограничений и поэтому метод за одну итерацию приводит нас к границе и в ней и остаётся.

Ниже приведены начало и конец таблицы. С полной таблицей можно ознакомиться в прикреплённом файле table.csv.

Каждая точка имеет вид $x = [x_i, x_i, x_i, x_i, x_i]$. В таблице для более удобного её изображения пишется чему равно x_i на данной итерации.

x_0	iterations	x_{min}	$f(x_{min})$
$x_i = 2.001$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.002$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.003$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.004$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.005$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.006$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.007$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.008$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.009$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 2.01$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
...	...	...	...
$x_i = 9.99$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.991$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.992$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.993$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.994$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.995$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.996$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.997$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.998$	2	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874
$x_i = 9.999$	1	$x_i = 9.999$	-49950022233.797874