Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра исследования операций

Отчёт по пакетам прикладных программ на тему:

Решение задачи о рюкзаке с помощью метода Ленда и Дойга

Выполнила студентка 411 группы
Кузнецова Мария Павловна

Москва 2023

Содержание

Введение

Рассматриваемая в данной работе задача о рюкзаке получила своё название от конечной цели: уложить как можно большее число ценных вещей в рюкзак при условии, что вместимость рюкзака ограничена.

Задача о рюкзаке и различные её модификации широко применяются на практике в прикладной математике, криптографии, экономике, логистике, для нахождения решения оптимальной загрузки различных транспортных средств: самолетов, кораблей, железнодорожных вагонов и т.д.

В общем виде задачу можно сформулировать так: из заданного множества предметов со свойствами «стоимость» и «вес» требуется отобрать подмножество с максимальной полной стоимостью, соблюдая при этом ограничение на суммарный вес.

Рассматриваемая нами задача является NP-полной, то есть для неё не существует полиномиального алгоритма, решающего её за разумное время, в этом и есть проблема. Либо мы выбираем быстрый алгоритм, но он как известно не всегда решает задачу наилучшим образом, либо выбираем точный, который опять же не является работоспособным для больших значений.

В данной работе задачу о рюкзаке пробуется решить с помощью метода Лэнда и Дойга или по-другому метода ветвей и границ.

1 Математическая постановка задачи

Пусть имеется n грузов. Для каждого i-го груза определены его масса $w_i \geq 0$ и ценность $c_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$. Ограничение суммарного веса предметов в рюкзаке задаётся грузоподъёмностью $W \geq 0$. Тогда необходимо найти такое подмножество $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ что:

$$\sum_{j \in S} c_j \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j \in S} w_j \leq W \tag{2}$$

Переформултруем как задачу целочисленного линейного программипрвания с одним ограничением:

$$\sum_{j=1}^{n} -c_j x_j \to \min \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le W \tag{4}$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = \overline{1,n}$$

2 Общая схема метода ветвей и границ

Метод ветвей и границ (branch-and-bound) представляет собой технику сокращения полного перебора вариантов решений. Для многих NP-полных задач комбинаторной оптимизации метод ветвей и границ представляет собой наилучший из известных способов нахождения оптимального решения. Этот метод был предложен Лэнд и Дойг и впервые применен к задаче коммивояжера Литтлом и др.

Пусть стоит задача, где D — конечное множество. На каждой итерации алгоритма происходит работа с некоторым подмножеством конечных вершин дерева поиска. Это множество называется списком задач-кандидатов или задач для ветвления. Задача решена, если список задач-кандидатов пуст, т.е. если все они отсеяны по правилам отсева. На начальном шаге процесса список состоит из множества D. Некоторым способом вычисляется значение нижней оценки $\xi(D)$ для целевой функции.

Пусть можно указать план $x' \in D$. Если $f(x) = \xi(D)$, то x' — оптимальное решение задачи. В противном случае полагаем $x_0 = x'$ - рекордное решение, рекорд равен $f_0 = f(x_0)$. Если допустимых планов не найдено, $f_0 = +\infty$. Стандартная (k-я) итерация алгоритма состоит из следующих этапов:

1. Если список кандидатов пуст, прекратить работу, при этом, если рекорд конечен, рекордное решение является оптимальным, в противном случае задача не имеет допустимых решений.

2. Выбрать для ветвления одно из множеств списка.

3. Осуществить ветвление. Модифицировать список.

4. Для каждого подмножества, получившегося в результате ветвления, найти нижние границы $\xi(D_i^k), i = 1, 2, \ldots, r_k$.

5. Если становятся известны допустимые решения (например, если,$D_i^k = \{x\}$) откорректировать сведения о рекорде. Пусть X_k - множество допустимых решений, полученных на k-й итерации. Тогда рекорд равен
$$f_k = \min(f_{k-1}, \min_{x \in X_k} f(x)) \tag{5}$$

и рекордное решение x^k есть допустимое решение, на котором достигается минимум.

6. Проверить выполнение правила отсева. Если для некоторого множества $D_i^k = \{x\}$, то исключить его из списка.

Алгоритм ветвей и границ можно остановить до его завершения, используя рекордное решение x^k в качестве приближенного решения задачи. Относительная погрешность такого решения не превосходит

$$\frac{f(x^k) - \xi_0}{\xi_0}$$

3 Метод ветвей и границ для задачи о рюкзаке

Алгоритм осуществляется по схеме, описанной в предыдущем параграфе. Вершены дерева поиска — это задачи целочисленного линейного программирования

$$f(x) \to \min, x \in D'$$

а оценочные задачи для них — соответствующие задачи линейного программирования, получаемые отбрасыванием условий целочисленности.

Если оценочная задача неразрешима, не имеет решений и задача и, следовательно, соответствующая вершина дерева поиска удаляется из списка. Если решение оценочной задачи удовлетворяет условиям целочисленности, то оно является допустимым решением исходной задачи и используется для корректировки сведений о рекорде.

Предположим, на k-й итерации алгоритма $(k = 0, 1, \ldots)$ выбрано для ветвления множество D^k (на начальном этапе множество D^0 определяется условиями), $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — решение соответствующей оценочной задачи, и его компонента x_{j_0} , где $1 \leq j_0 \leq n$, не является целой. Тогда множество D^k разбивается на множества D_1^k и D_2^k , первое из них образовано добавлением к ограничениям, задающим D^k , условия $x_{j_0} = 0$, второе — добавлением условия $x_{j_0} = 1$.

Если нецелочисленных компонент вектора x несколько, ветвление осуществляется, например, по дробной компоненте, имеющей наименьший номер.

4 Описание программы

Для решения задачи о рюкзаке методом Лэнда и Дойга была написана программа, принимающая на вход вектор ценности вещей, вектор весов вещей (размеры векторов должны быть одинаковыми и соответствовать количеству вещей) и грузоподъёмность рюкзака.

В программе исходная задача превращается в задачу на минимум и решается как задача линейного программирования. Если в решение этой задачи присутствуют нецелочисленные значения, то осуществляется ветвление по первой нецелочисленной переменной, как было написано в предыдущем параграфе. И вновь решаются задачи линейного программирования с новыми ограничениями. Из решений, полученных такием образом, выбирается то, при котором целевая функция максимальна.

Программа выдаёт x, при котором значение функции максимально, и максимальное значение функции.

Подробнее с программой можно ознакомится в jupyter notebook.

Список литературы

1. Корте Б., Фиген Й. Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы.