

# سؤالات موضوعی نهایی

## ((حسابان ۲))

پایه دوازدهم رشته‌ی ریاضی و فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

آخرین نسخه: شهریور ۹۹

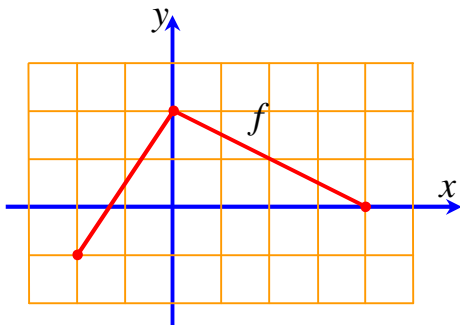
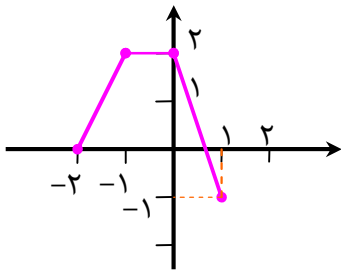
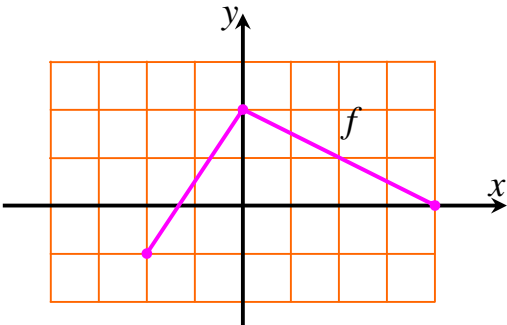
تهیه کننده: جابر عامری

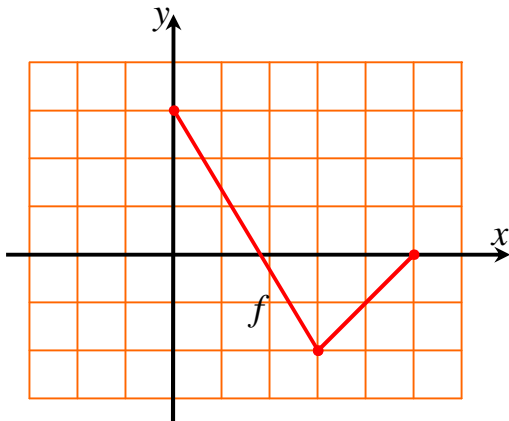
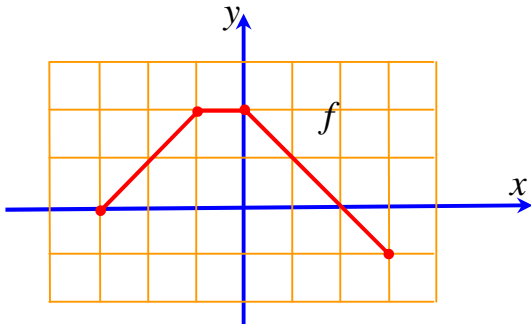
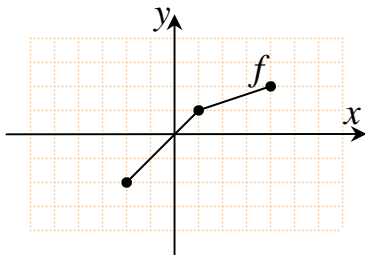
عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

# (( فصل اوّل : تابع ))

\*\*\*

## تبدیل نمودار توابع

۱/۵ نمره	دی ۹۷	<p>۱ نمودار تابع <math>f</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>g(x) = -f(2x)</math> را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع <math>g</math> را تعیین کنید.</p> 	۱
۱ نمره	خرداد ۹۸	<p>۲ نمودار تابع <math>y = f(x)</math> به صورت زیر است. نمودار <math>g(x) = 2f(x-1)</math> را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 	۲
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	<p>۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>اگر <math>k &gt; 1</math> باشد، نمودار <math>y = f(kx)</math> از انبساط افقی نمودار <math>y = f(x)</math> در راستای محور <math>x</math> ها به دست می آید.</p>	۳
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	<p>۴ نمودار تابع <math>f</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>g(x) = f(2x) - 1</math> را رسم کنید. سپس دامنه‌ی تابع <math>g</math> را تعیین کنید.</p> 	۴

شهریور ۹۸	شماره ۵	<p>کوتاه پاسخ دهید.</p> <p>الف: در فاصله‌ی <math>(0, 1)</math> از بین دو تابع <math>g(x) = x^3</math> و <math>f(x) = x^2</math>، نمودار کدام تابع پایین تر از دیگری قرار دارد؟</p> <p>ب: نمودار تابع <math>y = -f(x)</math>، قرینه‌ی نمودار تابع <math>y = f(x)</math> نسبت به کدام محور است؟</p>
شهریور ۹۸	شماره ۱	<p>نمودار تابع <math>f</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>g(x) = f(3-x)</math> را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.</p> 
دی ۹۸	شماره ۱/۲۵	<p>نمودار تابع <math>f(x)</math> در شکل زیر رسم شده است.</p> <p>نمودار تابع <math>g(x) = f(2x+1)</math> را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 
خرداد ۹۹	شماره ۱	<p>با توجه به نمودار تابع <math>f</math> که در شکل زیر آمده است.</p> <p>نمودار تابع <math>g(x) = f(2x) - 1</math> را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 

۹	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. نقطه‌ی $(2, -1)$ در تابع $y = f(2x + 1) - 1$ متناظر با نقطه‌ی ..... در تابع $y = f(x)$ است.	۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۹
۱۰	اگر نمودار $f$ به صورت مقابل باشد. نمودار تابع $y = f(x - 1) + 2$ زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید.	۱/۵ نمره	خرداد ۹۹
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y = (x + 2)^3$ را می توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع $y = x^3$ به سمت چپ، رسم کرد.	۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۹
۱۲	در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر بازه‌ی $[-2, 1]$ دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(3x + 1)$ برابر ..... است.	۰/۵ نمره	شهریور ۹۹
۱۳	نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید. $y = \cos 2x - 1$	۱ نمره	شهریور ۹۹

### تابع درجه‌ی سوم و چند جمله‌ای

۱	کوتاه پاسخ دهید. درجه‌ی تابع $f(x) = x^2(1 - x)^5$ را مشخص کنید.	۰/۲۵ نمره	شهریور ۹۸
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y = x^3$ در بازه‌ی $[0, 1]$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.	۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۹
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. چند جمله‌ای $P(x) = (2 - x)^2(x + 1)^3$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی ۵ است.	۰/۲۵ نمره	شهریور ۹۹

### توابع یکنوا

۱	نمودار تابع $f(x) = (x + 1)^3$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این تابع در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟	۰/۷۵ نمره	دی ۹۷
---	---	--------------	-------

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس حسابان ۲ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

شهریور ۹۸	نمره ۰/۲۵	۲ کوتاه پاسخ دهید. تابع $h(x) =  x + 2 $ در چه بازه ای اکیداً صعودی است؟
شهریور ۹۸	نمره ۰/۵	۳ اگر $\log(x + 1) \leq \log(2x - 3)$ ، حدود $x$ را به دست آورید؟
دی ۹۸	نمره ۰/۵	۴ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. اگر تابع $f$ در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیداً نزولی می باشد.
دی ۹۸	نمره ۰/۵	۵ در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر $\frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$ باشد، حدود $x$ برابر ..... است.
خرداد ۹۹	نمره ۰/۲۵	۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع $y = f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه در آن فاصله اکیداً صعودی نیز خواهد بود.
خرداد ۹۹	نمره ۱	۷ نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی است.
خرداد ۹۹	نمره ۰/۲۵	۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $g(x) = 2^{-x}$ ، تابعی است که در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است.
خرداد ۹۹	نمره ۰/۲۵	۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ روی بازه‌ی $(-\infty, 3]$ اکیداً صعودی است.
خرداد ۹۹	نمره ۰/۲۵	۱۰ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی باشد و هم نزولی، مقدار $a$ باید برابر ..... باشد.
شهریور ۹۹	نمره ۰/۲۵	۱۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع $f$ در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست.

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

۱	دی ۹۷	۲۵/۰ نمره	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) = x^2 + kx - 1$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد. مقدار $k$ برابر ..... است.
۲	خرداد ۹۸	۷۵/۰ نمره	اگر چند جمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ را به دست آورید.
۳	تیر ۹۸	۳۵/۰ نمره	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) = x^3 - 2x$ بر $x - 1$ برابر ۲ برابر با ..... است.
۴	تیر ۹۸	۱ نمره	مقدار $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x - 2$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x + 1$ برابر ۳ باشد.
۵	شهریور ۹۸	۱ نمره	مقادیر $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.
۶	دی ۹۸	۲۵/۱ نمره	در چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ، مقادیر $a$ و $b$ را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.
۷	خرداد ۹۹	۱ نمره	مقدار $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.
۸	خرداد ۹۹ خ	۳۵/۰ نمره	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در تقسیم $f(x) = x^3 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ باقی مانده برابر صفر است.
۹	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره	در چند جمله‌ای $y = x^3 + ax^2 + x + b$ مقادیر $a$ و $b$ را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.
۱۰	شهریور ۹۹	۵/۱ نمره	مقادیر $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x - 2$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x + 1$ برابر ۳ باشد.

### اتحاد های تکمیلی

۱	دی ۹۷	۱ نمره	هر یک از چندجمله‌ای های زیر را برحسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید. (الف) $x^5 + 1$ با عامل $x + 1$ (ب) $x^6 - 1$ با عامل $x - 1$
---	-------	--------	---

۲	چندجمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $x + 1$ تجزیه کنید.	خرداد ۹۸	۵/۰ نمره
۳	چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را بر حسب عامل $x + 1$ تجزیه کنید.	خرداد ۹۹ خ	۵/۰ نمره

تهیه‌کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

# (( فصل دوّم : مثلثات ))

\*\*\*

## دورهی تناوب

دی ۹۷	۰/۲۵ نمره	۱ درست یا نادرست بودن جملهی زیر را مشخص کنید. مینیم تابع $y = -3\cos(\pi x) + 2$ برابر یک است.
دی ۹۷	۱ نمره	۲ ضابطهی تابعی به فرم $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دورهی تناوب آن $\pi$ ، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن $-3$ باشد.
خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره	۳ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. دورهی تناوب تابع $y = 3\cos(-\frac{\pi}{4}x)$ برابر با ..... است.
تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره	۴ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. دورهی تناوب تابع $y = -\frac{1}{4}\cos(\pi x)$ برابر با ..... است.
تیر ۹۸	۰/۵ نمره	۵ مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2\sin(3x)$ را به دست آورید.
شهریور ۹۸	۱/۵ نمره	۶ دورهی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3\cos(\pi x) + 1$ را مشخص کنید.
دی ۹۸	۱/۵ نمره	۷ ضابطهی تابعی به صورت $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دورهی تناوب آن $\pi$ ، مقدار ماکزیمم آن ۶ و مقدار مینیمم آن $-2$ باشد.
خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره	۸ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید. دورهی تناوب تابع $y = 8\cos(\frac{x}{3})$ برابر با ..... است.
خرداد ۹۹	۱ نمره	۹ مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 + 2\sin 7x$ را به دست آورید.



۱۰	معادله‌ی منحنی رو به رو را به صورت $y = a \cos(bx)$ یا $y = a \sin(bx)$ بیان کنید.	۱ نمره	خرداد ۹۹ خ
۱۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. دوره‌ی تناوب و مقدار مینیمم تابع $y = 2 \sin \frac{\pi}{2} x - 1$ به ترتیب برابر با ..... و ..... است.	۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ
۱۲	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و تابع $y = \sqrt{5} - \pi \cos \frac{1}{2} x$ را محاسبه کنید.	۱ نمره	شهریور ۹۹

### تابع تانژانت

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. دوره‌ی تناوب تابع تانژانت برابر با ..... است.	۲۵ نمره	دی ۹۷
۲	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.	۲۵ نمره	دی ۹۷
۳	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ که در آن $k \in Z$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار ندارند.	۲۵ نمره	خرداد ۹۸
۴	کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟ الف: تابع تانژانت در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی است؟ ب: نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $k \in Z$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار دارند.	۵ نمره	شهریور ۹۸

۵	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر ..... است.	خرداد ۹۹ خ نمره ۰/۲۵
۶	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. مقدار تابع تانژانت در $x = \frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است.	شهریور ۹۹ نمره ۰/۲۵

### معادلات مثلثاتی

۱	معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.	دی ۹۷ نمره ۱/۲۵
۲	معادله‌ی $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	خرداد ۹۸ نمره ۱/۵
۳	معادله‌ی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.	تیر ۹۸ نمره ۱/۲۵
۴	معادله‌ی $\sin 3x = \sin 2x$ را حل کنید.	شهریور ۹۸ نمره ۱
۵	معادله‌ی $2\cos 3x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.	دی ۹۸ نمره ۱/۵
۶	معادله‌ی $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.	خرداد ۹۹ نمره ۱/۵
۷	مثلی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی متر مربع است. اگر اندازه‌ی هر ضلع آن ۴ و ۸ سانتی متر باشد، آنگاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟	خرداد ۹۹ خ نمره ۱
۸	معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید. $2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$	خرداد ۹۹ خ نمره ۱
۹	معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.	شهریور ۹۹ نمره ۱/۷۵

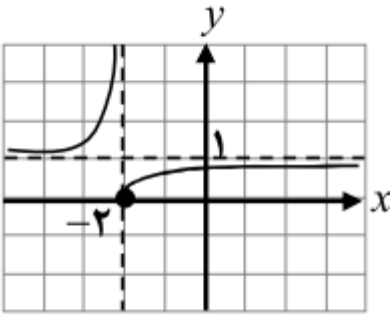
تهیه کننده : جابر عامری

# فصل سوم

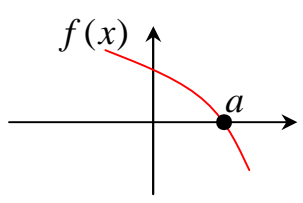
## ((حدهای نامتناهی، حد در بینهایت))

\*\*\*

حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

۱/۵ نمره	دی ۹۷	<p>حدود زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{4-x^2}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3}</math></p>	۱
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>حاصل <math>\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}</math> برابر با <math>-\infty</math> است.</p>	۲
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>حاصل حد <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}</math> برابر با ..... است.</p>	۳
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	<p>حدود زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{-2x^3 + 4}</math></p>	۴
۰/۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>با توجه به نمودار تابع <math>f</math> که در شکل زیر آورده شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \dots</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots</math></p> 	۵
۱/۷۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>حدهای زیر را محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)</math></p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 4x}</math></p>	۶

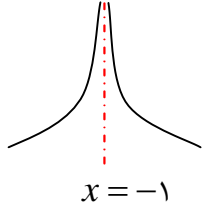
سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس حسابان ۲ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

۷	دی ۹۸	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$ برابر با ..... است.	۰/۵ نمره
۸	دی ۹۸	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+1}{x-5} - \frac{2}{x} \right)$	۱/۵ نمره
۹	خرداد ۹۹	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$	۲ نمره
۱۰	خرداد ۹۹ خ	نمودار تابع $f$ به صورت مقابل است.  الف : حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-2x}{f(x)}$ ب) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-2x}{f(x)}$ ب : نمودار تابع $y = \frac{-2x}{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ی $x = a$ چگونه است؟	۱/۲۵ نمره
۱۱	خرداد ۹۹ خ	حد های زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2}{4x^3 + 2x - 1}$	۱ نمره
۱۲	شهریور ۹۹	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1}$	۱/۵ نمره

مجانبات افقی و مجانب قائم

۱	دی ۹۷	مجانبات های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{3x}{x^3 - 1}$ را بیابید.	۱/۵ نمره
۲	خرداد ۹۸	کدام یک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب قائم $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می باشد؟ دلیل پاسخ خود را بنویسید.	۱/۵ نمره

۳	با توجه به نمودار تابع $f$ که در زیر آمده است. معادلات مجانب های افقی تابع را بنویسید.	۰/۵ نمره	خرداد ۹۸
۴	مجانب های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$ را بیابید.	۱/۲۵ نمره	تبر ۹۸
۵	مجانب قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{x+3}{2-x}$ را بنویسید.	۰/۷۵ نمره	شهریور ۹۸
۶	مجانب قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$ را بنویسید.	۱ نمره	دی ۹۸
۷	نمودار تابع $f$ را به گونه ای رسم کنید که تمامی شرایط زیر را دارا باشد. الف : $f(1) = f(-2) = 0$ ب : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ج : خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.	۰/۵ نمره	خرداد ۹۹
۸	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{x}{x^2-4}$ را در صورت وجود بدست آورید.	۲ نمره	خرداد ۹۹
۹	نمودار تابع $f$ را به گونه ای رسم کنید که تمامی شرایط زیر را دارا باشد. الف : $f(1) = f(-2) = 0$ ب : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ج : خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.	۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ
۱۰	مجانب های افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید. $y = \frac{2x+5}{ x -1}$	۱/۵ نمره	خرداد ۹۹ خ
۱۱	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید.	۲ نمره	شهریور ۹۹

۱۲	شهریور ۹۹	نمره	نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟
۱۳	شهریور ۹۹	نمره	<p>اگر رفتار تابع <math>f(x) = \frac{x+3}{x^2+bx+c}</math> در اطراف نقطه‌ی <math>x = -1</math> به صورت شکل زیر باشد، مقادیر <math>b</math> و <math>c</math> را به دست آورید.</p> 

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

# (( فصل چهارم : مشتق ))

\*\*\*

## مفهوم مشتق

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{2x-1}$ در نقطه ای به طول یک روی منحنی تابع، عدد ..... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ در نقطه ای به طول ۲ روی منحنی تابع، عدد ..... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۳			

## محاسبه‌ی مشتق تابع در یک نقطه

۱	اگر $f(x) = x^2 - 3x$ باشد، با استفاده از تعریف $f'(1)$ را حساب کنید.	تیر ۹۸	۱ نمره
۲	با استفاده از تعریف مشتق، معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه‌ی $x=3$ به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره
۳	اگر $f(x) = x^2 - 3x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(1)$ را حساب کنید.	شهریور ۹۹	۱/۲۵ نمره

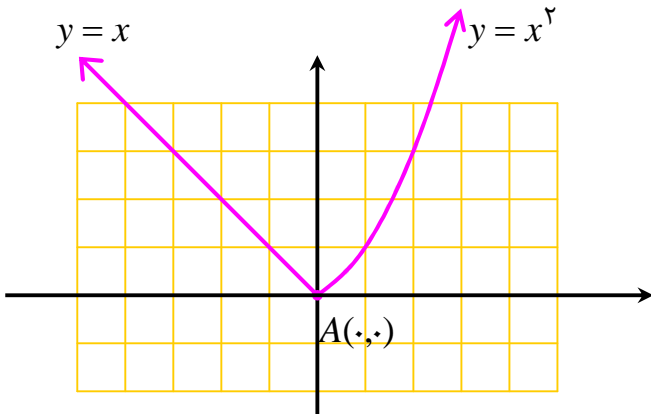
## مشتق پذیری و پیوستگی

۱	مشتق پذیری تابع $f(x) =  x-2 $ را در $x=2$ بررسی کنید.	دی ۹۷	۱ نمره
۲	نشان دهید، نقطه‌ی به طول $x=-1$ ، نقطه‌ی گوشه ای برای تابع $f(x) =  x^2 + x $ می باشد.	خرداد ۹۸	۱/۷۵ نمره

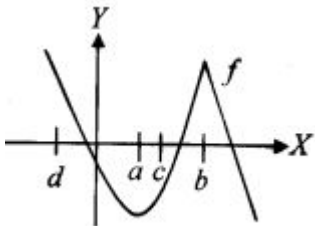
سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل چهارم درس حسابان ۲ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

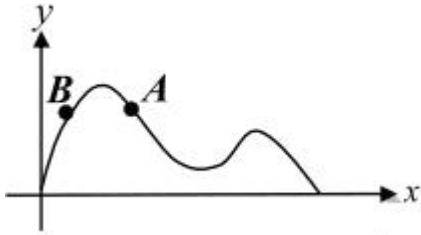
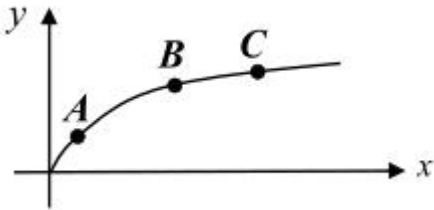
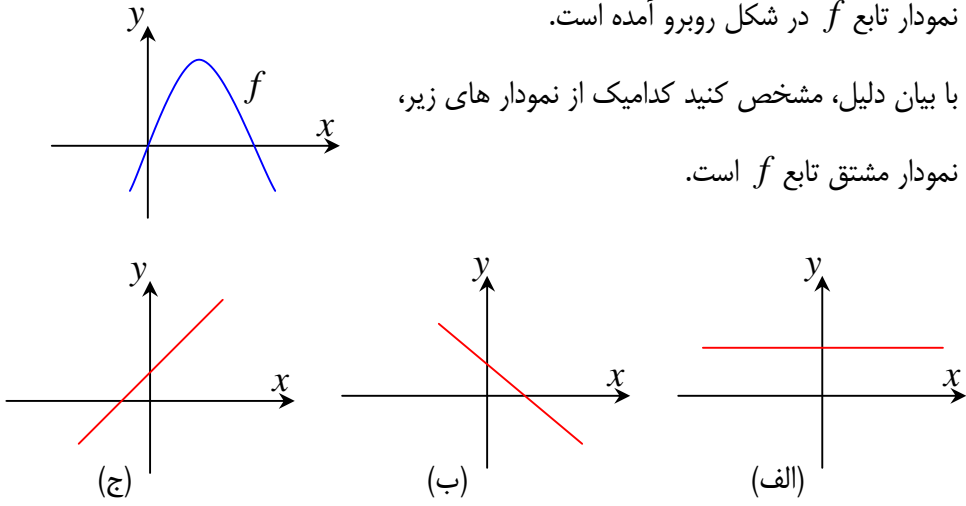
۳	قضیه: ثابت کنید اگر تابع $f$ در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه $f$ در $x = a$ پیوسته است.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۴	نشان دهید $x = 0$ مماس قائم برای تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است.	تیر ۹۸	۰/۷۵ نمره
۵	مشتق پذیری تابع $f(x) =  x^2 - 4 $ را در $x = 2$ بررسی کنید.	شهریور ۹۸	۲ نمره
۶	مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases}$	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع $f$ در $x = a$ پیوسته نباشد، در آنگاه $f$ در $a$ مشتق پذیر هم نیست.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۸	مشتق پذیری تابع $f(x) =  x^2 - 1 $ را در $x = 1$ بررسی کنید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) =  x $ در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق پذیر نیست.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۰	جای خالی را کامل کنید. خط $x = 1$ بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، ..... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره

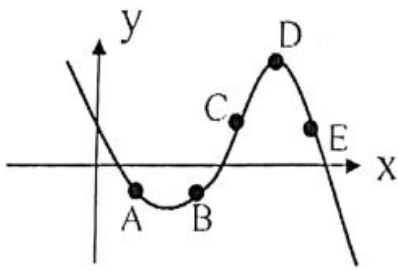
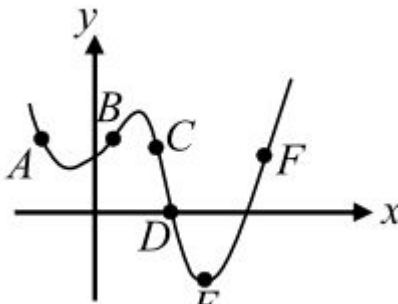


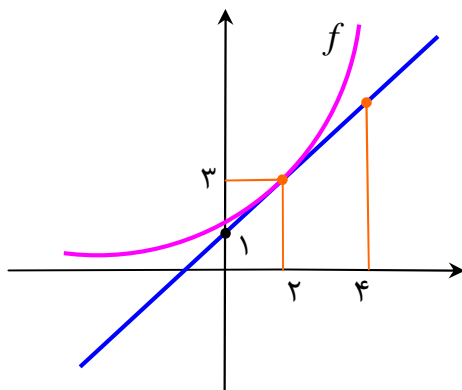
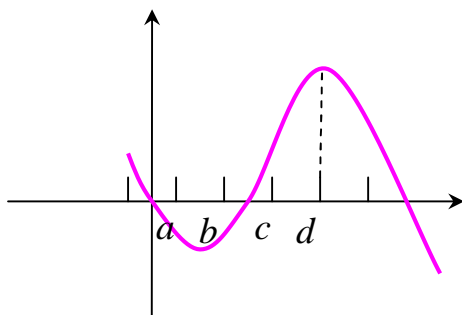
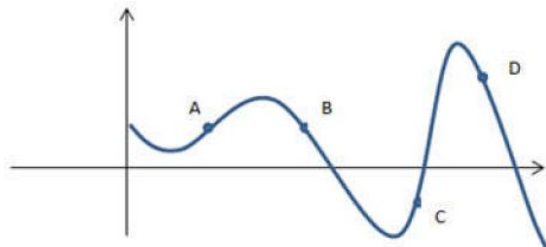
۱۱	با محاسبه‌ی مشتق چپ و راست در نقطه‌ی $A$ ، نشان دهید که تابع در نقطه‌ی $A$ مشتق پذیر نیست.		۱/۵ نمره خرداد ۹۹ خ
۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع $f$ در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است.		۰/۲۵ نمره خرداد ۹۹ خ
۱۳	تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & x > 1 \\ x^3 - 2x & x \leq 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر است. حاصل $a$ و $b$ را به دست آورید.		۱ نمره خرداد ۹۹ خ
۱۴	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.		۲ نمره شهریور ۹۹
۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $x=1$ مماس قائم منحنی $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است.		۰/۲۵ نمره شهریور ۹۹

### تعبیر هندسی مشتق

۱	با در نظر گرفتن نمودار $f$ در شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف : طول نقطه ای که مماس در آن افقی باشد. ب : طول نقطه ای که مشتق در آن مقداری منفی است. پ : طول نقطه ای که تابع در آن مشتق پذیر نیست.		۰/۷۵ نمره دی ۹۷
---	--	---	-----------------------

۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را با توجه به شکل داده شده، مشخص کنید. در شکل روبرو، شیب خطوط مماس در نقاط $A$ و $B$ مثبت است.		۲۵-نمره ۹۸ خرداد
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. با توجه به شکل روبرو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی ..... بزرگتر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی $B$ است.		۲۵-نمره ۹۸ خرداد
۴	نمودار تابع $f$ در شکل روبرو آمده است. با بیان دلیل، مشخص کنید کدامیک از نمودار های زیر، نمودار مشتق تابع $f$ است.		۷۵-نمره ۹۸ خرداد

نمبر ۱	نمبر ۹۸	<p>۵ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب ارائه شده در جدول نظیر کنید.</p>  <table border="1" data-bbox="668 591 1050 860"> <thead> <tr> <th>شیب</th> <th>نقطه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۰</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۰/۵</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-۰/۵</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	شیب	نقطه	۰		۲		۰/۵		-۰/۵		۵
شیب	نقطه												
۰													
۲													
۰/۵													
-۰/۵													
نمبر ۰/۷۵	شهریور ۹۸	<p>۶ با توجه به نمودار داده شده، گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>(i) در کدام نقطه، مماس افقی بر نمودار رسم می شود؟ الف) <math>B</math> ب) <math>E</math></p> <p>(ii) شیب خط مماس در نقطه‌ی <math>F</math> چه علامتی دارد؟ الف) مثبت ب) منفی</p> <p>(iii) شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه‌ی <math>D</math> نسبت به نقطه‌ی <math>B</math> چگونه است؟ الف) بیشتر ب) کمتر</p> 	۶										

دی ۹۸	انمره ۱	<p>۷ در شکل روبرو نمودار تابع <math>f(x)</math> و خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی <math>x = 2</math> داده شده است.</p> <p>الف : مشتق تابع <math>f(x)</math>، در نقطه‌ی <math>x = 2</math> را بیابید.</p> <p>ب : معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی <math>A</math> را بنویسید.</p> 	۷										
خرداد ۹۹	انمره ۱/۵	<p>۸ معادله‌ی خط مماس بر منحنی <math>f(x) = -x^2 + 10x</math> را در نقطه‌ی <math>A(2, f(2))</math> واقع بر نمودار تابع بنویسید.</p>	۸										
خرداد ۹۹ خ	انمره ۱	<p>۹ با در نظر گرفتن نمودار <math>f</math> در شکل زیر، نقاط <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> و <math>d</math> را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.</p>  <table data-bbox="1064 1202 1279 1415"><tr><th><math>x</math></th><th><math>f'(x)</math></th></tr><tr><td></td><td>۰</td></tr><tr><td></td><td>۰/۵</td></tr><tr><td></td><td>۲</td></tr><tr><td></td><td>-۰/۵</td></tr></table>	$x$	$f'(x)$		۰		۰/۵		۲		-۰/۵	۹
$x$	$f'(x)$												
	۰												
	۰/۵												
	۲												
	-۰/۵												
خرداد ۹۹ خ	انمره ۱	<p>۱۰ با توجه به نمودار زیر جدول را کامل کنید.</p>  <table data-bbox="422 1870 1300 1986"><tr><td>شیب</td><td>-۲</td><td>-۱</td><td>۰/۵</td><td>۲</td></tr><tr><td>نقطه</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	شیب	-۲	-۱	۰/۵	۲	نقطه					۱۰
شیب	-۲	-۱	۰/۵	۲									
نقطه													

### محاسبه‌ی مشتق

۱/۲۵ نمره	دی ۹۷	اگر $f$ و $g$ توابع مشتق پذیر باشند $f(2) = 3$ و $f'(2) = 1$ و $g(2) = -3$ و $g'(2) = 2$ مقادیر $(fg)'(2)$ و $(f+g)'(2)$ را به دست آورید.
۰/۵ نمره	دی ۹۸	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر $f'(2) = -1$ و $g'(2) = 3$ ، در این صورت $(2f + 3g)'(2)$ برابر با ..... است.
۱ نمره	دی ۹۸	نمودار توابع $f$ و $g$ را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1)$ را بیابید.
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۹	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید. اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ ، در این صورت $(3f + 2g)'(1)$ برابر با .... است.
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	اگر توابع $f$ و $g$ مشتق پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.

### مشتق گیری از توابع

۲ نمره	دی ۹۷	۱ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x - 5}$ ب) $y = \cos^2(-3x + 1)$
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۸	۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x + 1}$ ب) $y = \cos^3(2x)$
۲ نمره	تیر ۹۸	۳ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $y = \frac{x^2 - 1}{5x^3 - 3x + 1}$ ب) $y = \sin^2(2x + 1)$

۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید.	شهریور ۹۸	۲/۲۵ نمره
۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	دی ۹۸	۱/۷۵ نمره
۶	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	خرداد ۹۹	۳ نمره
۷	مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن الزامی نمی باشد.)	خرداد ۹۹ خ	۲/۲۵ نمره
۸	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	خرداد ۹۹ خ	۲ نمره
۹	مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	شهریور ۹۹	۳ نمره

**مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری**

۱			

**مشتق پذیری روی یک بازه**

۱	نمودار تابع زیر را رسم کرده و مشتق پذیری $f$ را روی بازه‌ی $[-۲, ۰]$ بررسی کنید.	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره

مشتق مرتبه دوم

۱	اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ مقدار $f''(\frac{\pi}{6})$ را حساب کنید.	شهریور ۹۹	۱ نمره

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر

۱	یک توده باکتری پس از $t$ ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^2$ گرم است. آهنگ جرم توده ی باکتری در لحظه‌ی $t = ۹$ چقدر است؟	دی ۹۷	۰/۷۵ نمره
۲	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 - ۲x$ را در بازه‌ی $[۰, ۲]$ و آهنگ تغییر لحظه ای تابع $f$ را در $x = ۱$ محاسبه کنید.	خرداد ۹۸	۱ نمره
۳	یک توده ی باکتری پس از $t$ ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۳t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = ۴$ چقدر است؟	تیر ۹۸	۰/۷۵ نمره
۴	آهنگ تغییر لحظه ای تابع $f(x) = ۲x^2 + ۵x + ۱$ در نقطه‌ی $x = ۲$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه ای آن در $x = -۱$ است؟	شهریور ۹۸	۱ نمره
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. سرعت لحظه ای در $t = ۲$ برای متحرکی با معادله‌ی حرکت $f(t) = t^2 + ۳t$ برابر ۷ است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۶	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + ۱۰$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[۰, ۵]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[۰, ۵]$ برابر است؟	خرداد ۹۹	۱/۵ نمره

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل چهارم درس حسابان ۲ پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی فیزیک

۲۵-۰ نمره	خرداد ۹۹ خ	۷ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. آهنگ لحظه ای تغییر تابع $g(x) = 2 \sin 2x$ نسبت به $x$ در $x = \frac{\pi}{2}$ برابر ..... است.
۲۵-۰ نمره	خرداد ۹۹ خ	۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. آهنگ متوسط تغییر با شیب قاطع و آهنگ لحظه ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.
۲۵-۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	۹ یک توده باکتری پس از $t$ ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^2$ گرم است. الف : جرم این توده باکتری در بازه ی زمانی $3 \leq t \leq 4$ به چه سرعتی افزایش می یابد؟ ب : آهنگ رشد جرم توده ی باکتری در لحظه ی $t = 9$ چقدر است؟
۵-۰ نمره	شهریور ۹۹	۱۰ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. سرعت لحظه ای در $t = 9$ برای متحرکی با معادله ی حرکت $f(t) = \sqrt{t}$ برابر ..... است.

تهیه کننده: جابر عامری

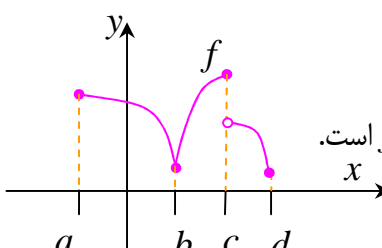
عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

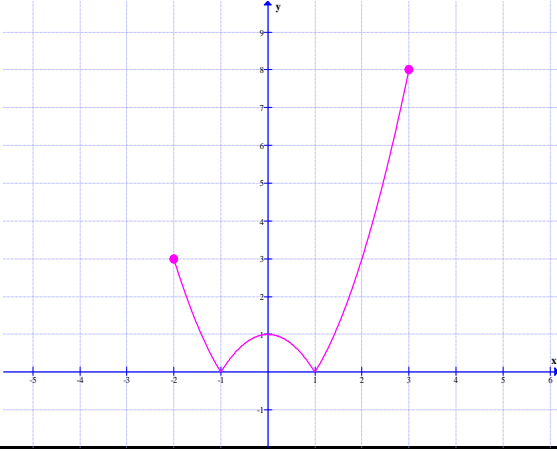


# (( فصل پنجم : کاربردهای مشتق ))

\*\*\*

## اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۱	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. اگر تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع $f$ در این بازه ..... است.
۲	خرداد ۹۸	۱/۵ نمره	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ را در بازه‌ی $[0, 2]$ تعیین کنید.
۳	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره	تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ راه حل خود را بنویسید.
۴	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. اگر تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $(a, b)$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع $f$ در این بازه ..... است.
۵	تیر ۹۸	۰/۵ نمره	درست یا نادرست بودن جملات زیر را با توجه به نمودار تابع $f$ که در ذیل آورده شده، مشخص کنید. الف) نقطه ای به طول $b$ مینیمم نسبی تابع $f$ نیست. ب) نقطه ای به طول $c$ یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع $f$ است. 
۶	تیر ۹۸	۱/۷۵ نمره	مقادیر اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ را در بازه‌ی $[0, 2]$ بیابید.

۷	شهریور ۹۸	۱/۷۵ نمره	مقادیر اکسترم های نسبی و مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ را در بازه‌ی $[-2, 3]$ به دست آورید.
۸	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره	اکسترم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه‌ی $[-1, 2]$ مشخص کنید.
۹	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. $f(a) = 0$ و $f'(a) = 0$ هم برای آن دارد که تابعی وجود ندارد
۱۰	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. بزرگترین بازه ای از $R$ که تابع $h(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، بازه‌ی ..... است.
۱۱	خرداد ۹۹	۲ نمره	تابع $f(x) =  x^2 - 1 $ در بازه‌ی $[-2, 3]$ در نمودار زیر رسم شده است. الف : نقاط اکسترم های نسبی تابع را در صورت وجود بیابید. ب : نقاط اکسترم مطلق تابع را در صورت وجود بیابید. پ : آیا تابع $f$ در بازه‌ی $[0, 3]$ مشتق پذیر است؟ چرا؟ 
۱۲	خرداد ۹۹	۱ نمره	نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ را مشخص کنید.
۱۳	خرداد ۹۹	۱/۷۵ نمره	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 +  x + 1 $ را در بازه‌ی $[-2, 2]$ بیابید.
۱۴	شهریور ۹۹	۲ نمره	اکسترم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه‌ی $[-1, 3]$ مشخص کنید.

۱		
---	--	--

### آزمون مشتق اول

۱	ضرایب $a$ و $b$ را در تابع $f(x) = -x^4 + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی $(1, 2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.	دی ۹۷	۱/۵ نمره
۲	ضرایب $a$ و $b$ را در تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی $(1, 2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.	تیر ۹۸	۱ نمره
۳	اگر نقطه‌ی $(2, 1)$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر $b$ و $d$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹	۱/۲۵ نمره

### جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه‌ی عطف

۱	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ را به دست آورید.	دی ۹۷	۱ نمره
۲	مقادیر $a$ و $b$ را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 - 1$ چنان بیابید که $A(1, 1)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۳	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x + 1$ را به دست آورید.	تیر ۹۸	۱ نمره
۴	ابتدا جهت تقعر تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را مشخص کرده، سپس وجود نقطه‌ی عطف آن را بررسی کنید.	شهریور ۹۸	۱/۵ نمره

۵	دی ۹۸	شکل زیر را در نظر بگیرید. تعیین کنید که در کدام یک از پنج نقطه‌ی مشخص شده در نمودار الف : $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی اند. ب : $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است.
۶	خرداد ۹۹	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را مشخص کنید.
۷	خرداد ۹۹ خ	مقادیر $a$ و $b$ را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ به ترتیب کدام یک از موارد زیر است. اگر $f(1) = 2$ و $x = \frac{1}{2}$ طول نقطه‌ی عطف آن باشد. الف : $a = 1$ و $b = -2$ ب : $a = 4$ و $b = -4$ ج : $a = 4$ و $b = 4$ د : $a = -2$ و $b = 3$
۸	خرداد ۹۹ خ	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ را به دست آورید.

رسم نمودار توابع

۱	دی ۹۷	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ را رسم کنید.
۲	خرداد ۹۸	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید.
۳	تیر ۹۸	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ را رسم کنید.

۴	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را رسم کنید.	شهریور ۹۸	۱/۲۵ نمره
۵	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ را رسم کنید.	دی ۹۸	۱/۷۵ نمره
۶	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۷	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره
۸	جدول رفتار و نمودار تابع $y = x^3 + 3x^2 + 1$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره
۹	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را رسم کنید.	شهریور ۹۹	۲ نمره

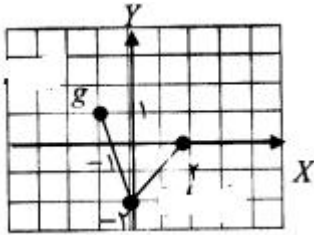
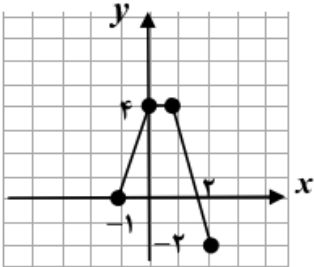
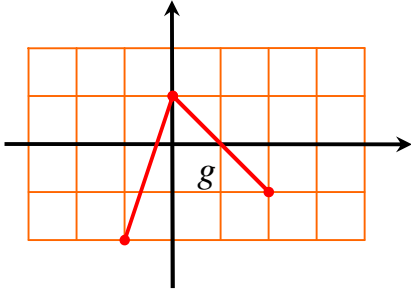
تهیه کننده : جابر عامری

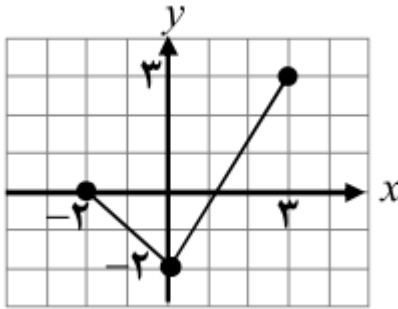
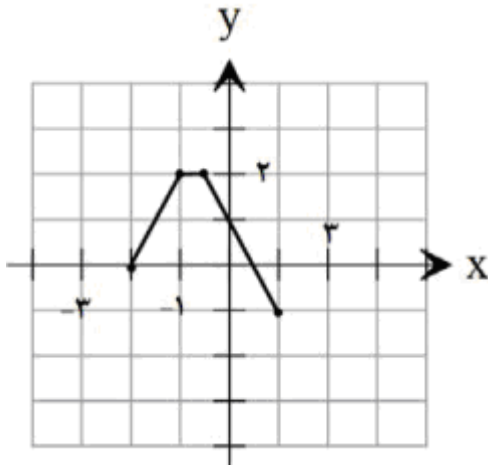
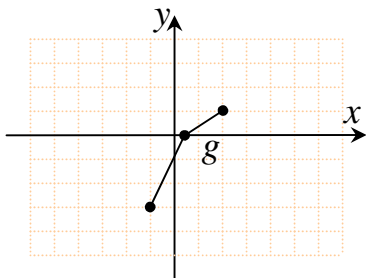
عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

## پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

### فصل اول حسابان ۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

#### تبدیل نمودار توابع

۱	$D_f = [-۱, ۲]$ و $R_f = [-۲, ۱]$ 
۲	$D_f = [-۱, ۲]$ و $R_f = [-۲, ۴]$ 
۳	نادرست
۴	<p>برای رسم نمودار تابع <math>g</math>، ابتدا انقباض افقی برای <math>k = ۲</math> در راستای محور طول ها سپس انتقال یک واحد رو به پایین در راستای محور عرض ها</p> <p><math>D_g = [-۱, ۲]</math></p> 
۵	<p>الف: <math>g(x) = x^۳</math></p> <p>ب: محور طول ها</p>

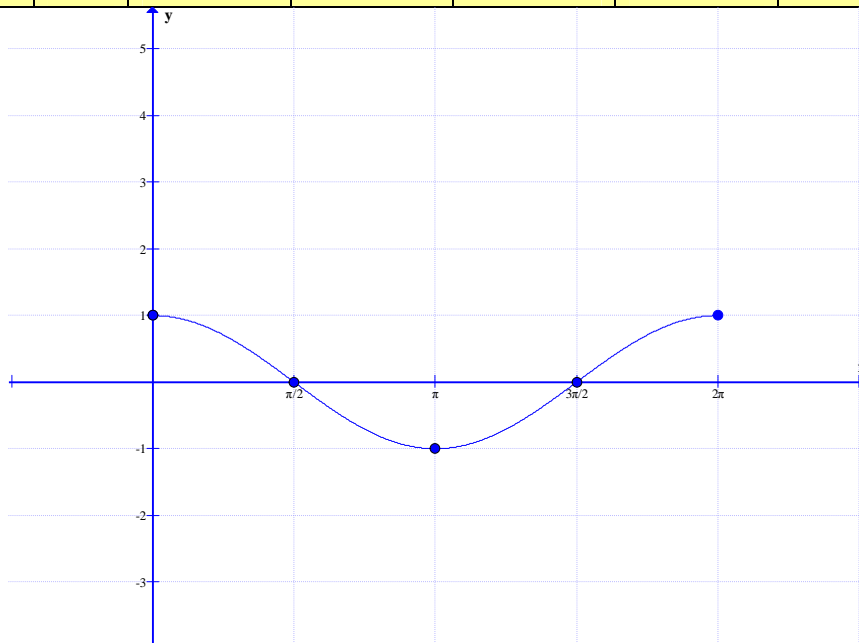
۶	$D_g = [-۲, ۳]$ 																				
۷	دامنه $D = [-۲, ۱]$ برد $R = [-۱, ۲]$ 																				
۸	ابتدا مختصات نقاط مهم تابع $f$ را نوشته، سپس طول هر نقطه را نصف و عرض هر نقطه را یک واحد کم می کنیم. <table data-bbox="234 1323 686 1449"><tr><td><math>f:</math></td><td><math>x</math></td><td>-۲</td><td>۱</td><td>۴</td></tr><tr><td></td><td><math>y</math></td><td>-۲</td><td>۱</td><td>۲</td></tr></table> $\rightarrow$ <table data-bbox="766 1323 1217 1449"><tr><td><math>g:</math></td><td><math>x</math></td><td>-۱</td><td>۰/۵</td><td>۲</td></tr><tr><td></td><td><math>y</math></td><td>-۳</td><td>.</td><td>۱</td></tr></table>  $Dg = [-۱, ۲]$ $Rg = [-۳, ۱]$	$f:$	$x$	-۲	۱	۴		$y$	-۲	۱	۲	$g:$	$x$	-۱	۰/۵	۲		$y$	-۳	.	۱
$f:$	$x$	-۲	۱	۴																	
	$y$	-۲	۱	۲																	
$g:$	$x$	-۱	۰/۵	۲																	
	$y$	-۳	.	۱																	
۹	(۵, ۰)																				

۱۰	<p>طبق قوانین تبدیلات ، کافی است نمودار تابع <math>f</math> را یک واحد به جلو و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل کنید.</p> <p><math>g(x) = f(x-1) + 2</math></p> <p><math>D_f = [-1, 4] \rightarrow D_g = [0, 5]</math></p> <p><math>R_f = [0, 2] \rightarrow R_g = [2, 4]</math></p>
۱۱	درست
۱۲	$[-1, 0]$



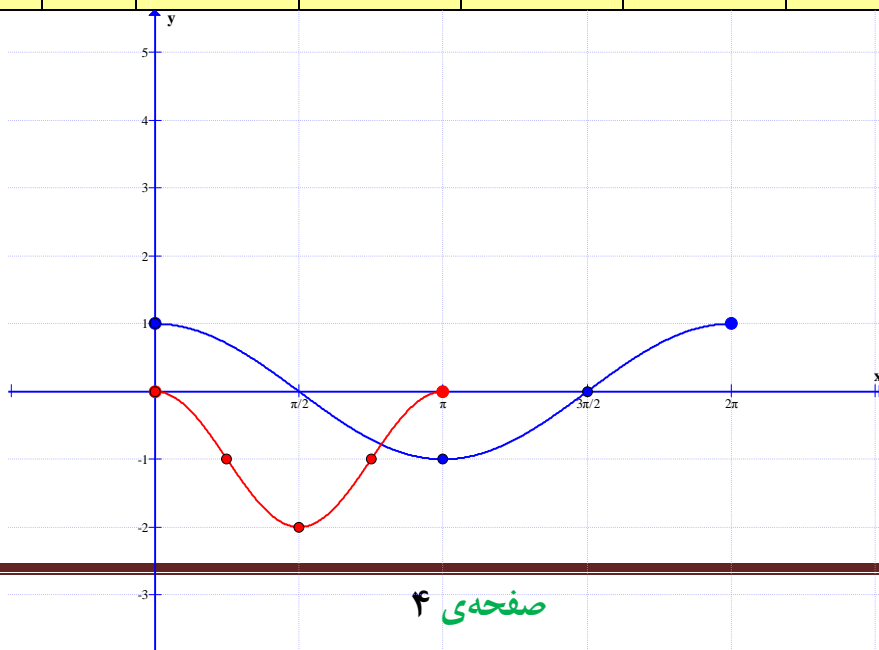
برای رسم نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  ابتدا نقاط مهم فاصله‌ی داده شده را در نظر می‌گیریم.

$f$	$x$	$\cdot$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
	$y$	$1$	$\cdot$	$-1$	$\cdot$	$1$



حال برای رسم نمودار تابع  $g(x) = \cos 2x - 1$  کافی است که طول نقاط تابع  $f(x) = \cos x$  را نصف و عرض نقاط را یک واحد کم کنیم.

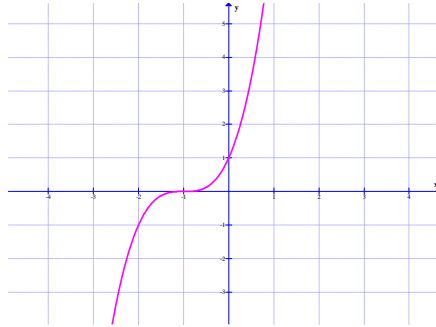
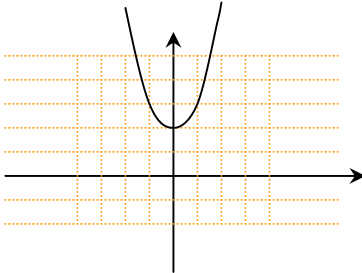
$g$	$x$	$\cdot$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
	$y$	$\cdot$	$-1$	$-2$	$-1$	$1$



تابع درجه سوم و چند جمله ای

۷	۱
نادرست	۲
درست	۳

توابع یکنوا

اکیداً صعودی	۱
	۲
$(2, +\infty)$	۳
$x + 1 \leq 2x - 3 \rightarrow x \geq 4$	۴
نادرست	۵
$[\frac{8}{3}, +\infty)$	۶
نادرست	۷
<p>نمودار این تابع با دو واحد انتقال نمودار تابع <math>f(x) = x^2</math> به سمت بالا بدست می آید که یک سهمی می باشد. رأس سهمی نقطه <math>(0, 2)</math> است.</p> <p>لذا بزرگترین بازه ای که تابع در آن صعودی اکید است بازه <math>(-\infty, 0)</math> و بزرگترین بازه ای که تابع در آن نزولی اکید است بازه <math>(0, +\infty)</math> است.</p> <p>توجه این بازه ها را از طرف صفر هم می توان بسته نوشت.</p> 	

درست	۸
نادرست	۹
صفر	۱۰
درست	۱۱

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

-۲	۱
$f(-۱) = ۰ \rightarrow ۱ - a - ۳ = ۰ \rightarrow a = -۲$ $f(۲) = ۴ - ۴ - ۳ = -۳$	۲
-۱	۳
$P(۲) = ۰ \rightarrow ۴a + ۲b = -۶$ , $P(-۱) = ۰ \rightarrow a - b = ۶$ $\begin{cases} ۲a + b = -۳ \\ a - b = ۶ \end{cases} \rightarrow a = ۱, b = -۵$	۴
$P(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ $x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲$ $\Rightarrow f(۲) = ۰ \rightarrow ۸ + ۴a + ۲b + ۱ = ۰ \rightarrow ۴a + ۲b = -۹$ $x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱$ $\Rightarrow f(-۱) = -۱ + a - b + ۱ = ۰ \rightarrow a - b = ۰$ $\Rightarrow a = b = -\frac{۳}{۲}$	۵

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \Rightarrow p(1) = 1 + a + b$ $\xrightarrow{p(1)=4} 1 + a + b = 4 \rightarrow a + b = 3$ $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \Rightarrow p(-2) = -8 + 4a + b$ $\xrightarrow{p(-2)=0} -8 + 4a + b = 0 \rightarrow 4a + b = 8$ $\begin{cases} a + b = 3 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \rightarrow a = \frac{5}{3}, \quad b = \frac{4}{3}$	۶
$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ $\Rightarrow p(x) _{x=2} = (2)^3 + a(2)^2 + b(2) + 1 = 8 + 4a + 2b + 1 = 9 + 4a + 2b$ $\xrightarrow{r=0} 9 + 4a + 2b = 0 \rightarrow 4a + 2b = -9$ $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ $\Rightarrow p(x) _{x=-1} = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = -1 + a - b + 1 = a - b$ $\xrightarrow{r=0} a - b = 0$ $\begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ a - b = 0 \end{cases} \rightarrow a = \frac{-3}{2}, \quad b = \frac{-3}{2}$	۷
نادرست	۸
$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ $y _{x=1} = 4 \rightarrow (1)^3 + a(1)^2 + (1) + b = 4 \rightarrow a + b = 2$ $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ $y _{x=-2} = 0 \rightarrow (-2)^3 + a(-2)^2 + (-2) + b = 0 \rightarrow -8 + 4a - 2 + b = 0 \rightarrow 4a + b = 10$ $\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = 10 \end{cases} \rightarrow a = \frac{8}{3}, \quad b = \frac{-2}{3}$	۹

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \xrightarrow{P(x)=x^3+ax^2+bx-2} P(2) = 8 + 4a + 2b - 2 = 0$ $\rightarrow 4a + 2b = -6 \rightarrow 2a + b = -3$ $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \xrightarrow{P(x)=x^3+ax^2+bx-2} P(-1) = -1 + a - b - 2 = 3 \rightarrow a - b = 6$ $\rightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 6 \end{cases} \rightarrow a = 1, b = -5$	۱۰
--	----

اتحاد های تکمیلی

$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$	۱
$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$	
$x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$	۲
$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$	۳

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

## پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

### فصل دوم حسابان ۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

#### دوره‌ی تناوب

۱	نادرست
۲	$\frac{2\pi}{ b } = \pi \rightarrow  b  = 2$ $\begin{cases}  a  + c = 3 \\ - a  + c = 3 \end{cases} \rightarrow  a  = 3, c = 0$ <p>هر یک از توابع <math>y = 3\sin(2x)</math> یا <math>y = -3\sin(2x)</math> می توانند جواب باشند.</p>
۳	$T = \frac{2\pi}{ -\frac{\pi}{4} } = \frac{8\pi}{\pi} = 8$
۴	۲
۵	$\max(f) = 3$ و $\min(f) = -1$
۶	$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ $\max(f) =  -3  + 1 = 4$ $\min(f) = - -3  + 1 = -2$
۷	$\frac{2\pi}{ b } = \pi \rightarrow  b  = 2 \rightarrow b = \pm 2$ $\begin{cases}  a  + c = 3 \\ - a  + c = 3 \end{cases} \rightarrow  a  = 4, c = 2$ <p>هر یک از توابع <math>y = 4\sin(2x) + 2</math> یا <math>y = -4\sin(2x) + 2</math> یا <math>y = 4\sin(-2x) + 2</math> یا <math>y = -4\sin(-2x) + 2</math> می توانند باشند.</p>

۸	$6\pi$
۹	$\max(y) =  a  + c = 2 + 1 = 3$ $\min(y) = - a  + c = -2 + 1 = -1$
۱۰	<p>نمودار تابع از مبدأ مختصات می گذرد، لذا بهتر است تابع به صورت سینوسی باشد.</p> $y = a \sin(bx)$ <p>دوره‌ی تناوب نمودار تابع برابر <math>\pi</math> است. لذا :</p> $T = \frac{2\pi}{ b } = \pi \rightarrow b = \pm 2$ $\rightarrow y = a \sin(\pm 2x) \rightarrow y = \pm a \sin(2x)$ <p>نمودار تابع از نقطه‌ی <math>(\frac{\pi}{4}, 2)</math> می گذرد، پس :</p> $\frac{y = \pm a \sin(2x)}{\rightarrow 2 = \pm a \sin(2(\frac{\pi}{4})) \rightarrow 2 = \pm a \sin(\frac{\pi}{2}) \xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{2})=1} a = \pm 2}$ <p>که با توجه به نمودار مقدار <math>a = -2</math> ، قابل قبول نیست. لذا معادله‌ی تابع در نهایت به شکل زیر خواهد شد.</p> $\rightarrow y = 2 \sin(2x)$
۱۱	$\min(y) = - a  + c = -2 + (-1) = -3$ و $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{ \frac{\pi}{2} } = 4$
۱۲	$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ $\max(y) =  -\pi  + \sqrt{5} = \pi + \sqrt{5}$ $\min(y) = - -\pi  + \sqrt{5} = -\pi + \sqrt{5}$

تابع تانژانت

۱	$\pi$
---	-------

۲	نادرست
۳	درست
۴	الف : درست ب : نادرست
۵	$T = \frac{\pi}{ b } = \frac{\pi}{ 1 } = \pi$
۶	درست

### معادلات مثلثاتی

۱	$\cos 3x = \cos x \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$
۲	$2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$ $\cos x = 0 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $2\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
۳	$\sin 2x - \cos x = 0 \rightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$ $\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{6}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$
۴	$\sin 3x = \sin 2x \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - 2x \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}$
۵	$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{6}} 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$



۶	$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$								
۷	<p>فرض کنیم که چنین مثلثی وجود داشته باشد. لذا</p> $S = 8\sqrt{2} \xrightarrow{0 < \theta < \pi} \frac{1}{2}(\sqrt{2})(8)\sin\theta = 8\sqrt{2} \rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \theta = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$ <p>حال مقدار <math>\theta</math> مجاز را تعیین می کنیم.</p> <table><tr><th><math>k</math></th><th>۰</th><th>۱</th><th>۲</th></tr><tr><th><math>\theta</math></th><td><math>\frac{\pi}{4}</math> و <math>\frac{3\pi}{4}</math></td><td>بیش از حد مجاز</td><td>بیش از حد مجاز</td></tr></table> <p>لذا دو مثلث با این شرایط وجود دارد.</p>	$k$	۰	۱	۲	$\theta$	$\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز
$k$	۰	۱	۲						
$\theta$	$\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز						
۸	$2(1 - \cos^2 x) + 9\cos x + 3 = 0 \rightarrow -2\cos^2 x + 9\cos x + 5 = 0$ $\xrightarrow{\Delta = 81 + 40 = 121} \begin{cases} \cos x = \frac{-9 + 11}{-4} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{-9 - 11}{-4} \rightarrow \cos x = -5 \end{cases} \quad \text{غیر ممکن}$ $\cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$								
۹	$\cos 3x = \cos x \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$								

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

## پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

### فصل سوم حسابان ۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

#### حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

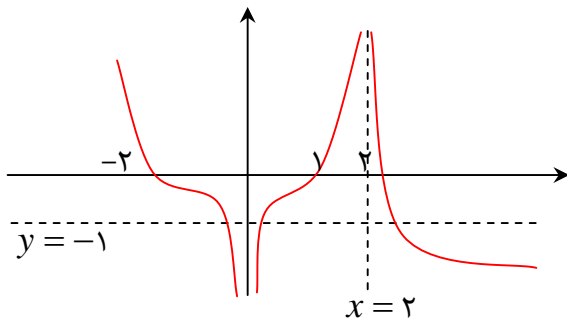
الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{4-x^2} = \frac{5}{-} = -\infty$	۱
ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{-3x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$	۲
درست	۳
۳	۴
الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$	۵
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{-2x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3}{-2x^3} = -\frac{5}{2}$	۶
الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$	۷
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$	
پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$	
$-\infty$	

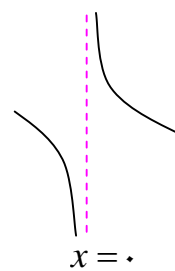
<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x} = \frac{[3^+] - 2}{3 - 3^+} = \frac{3 - 2}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+1}{x-5} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-5} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 3 - 0 = 3</math></p>	۸
<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{\cdot^+} = +\infty</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0</math></p>	۹
<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-2x}{f(x)} = \frac{-2a}{0^-} = +\infty</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-2x}{f(x)} = \frac{-2a}{0^+} = -\infty</math></p> <p>تابع <math>y = \frac{-2x}{f(x)}</math> در اطراف نقطه‌ی <math>x = a</math> حد ندارد و رفتار بی کران دارد.</p>	۱۰
<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3 - 2}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{3 - x} = \frac{1}{0^-} = -\infty</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{+\infty} = 0</math></p>	۱۱

الف :	۱۲
$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{x+1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\frac{\pi}{2}+1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{x+1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\frac{\pi}{2}+1}{-\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = 0$	
ب :	
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$	

### مجانِب افقی و مجانب قائم

۱	<p><math>x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1</math></p> <p>این عدد ریشه‌ی صورت تابع نیست، لذا خط <math>x = 1</math> مجانب قائم است.</p> $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ <p>لذا خط <math>y = 0</math> مجانب افقی است.</p>
۲	$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{2}$ <p>لذا طبق تعریف خط <math>x = -1</math> مجانب قائم منحنی <math>f</math> است. ولی خط <math>x = 3</math> مجانب قائم تابع نمی باشد.</p> <p><b>روش دوم :</b> مقدار <math>x = -1</math> ریشه‌ی مخرج است ولی ریشه صورت نمی باشد، لذا خط <math>x = -1</math> مجانب قائم منحنی <math>f</math> است. ولی مقدار ریشه‌ی مخرج و صورت است. پس خط <math>x = 3</math> مجانب قائم تابع نمی باشد.</p>
۳	<p><math>y = 1</math> و <math>y = -2</math></p>

۴	<p>مجانِب های قائم <math>1 - x^2 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1</math></p> <p>مجانِب افقی <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \rightarrow y = -2</math></p>
۵	<p>مجانِب افقی <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 3}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{-x} = -1 \rightarrow y = -1</math></p> <p>مجانِب قائم <math>2 - x = 0 \rightarrow x = 2</math></p>
۶	<p><math>x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1, x = 0</math></p> <p>خط <math>x = 1</math> مجانب قائم است ولی ریشه‌ی <math>x = 0</math>، ریشه‌ی صورت است و لذا نمی‌تواند مجانب قائم باشد.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1</math></p> <p>لذا خط <math>y = 1</math> مجانب افقی است.</p>
۷	<p>نمودارهای متفاوتی با این شرایط می‌توان رسم کرد. برای مثال:</p> 
۸	<p><math>x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2</math></p> <p><math>D_f = R - \{+2, -2\}</math></p> <p>مجانِب های قائم (ریشه‌های صورت نیستند) <math>x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2</math></p> <p>مجانِب افقی <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \rightarrow y = 0</math></p>
۹	<p>تکرار سؤال ۷</p>

$D_f = R - \{+1, -1\}$ مجانب های قائم (ریشه های صورت نیستند). $ x  - 1 = 0 \rightarrow  x  = 1 \rightarrow x = \pm 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{ x -1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \rightarrow y = 2$ مجانب افقی $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{ x -1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \rightarrow y = -2$ مجانب افقی	۱۰
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+2x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \rightarrow y = -2$ مجانب افقی $1-x^2 = 0 \rightarrow -x^2 = -1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$ مجانب های قائم	۱۱
$x^3 + x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^3+x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x^3+x} = -\infty \end{cases}$ 	۱۲
معادله $x^2 + bx + c = 0$ دارای یک ریشه است. لذا: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1 \rightarrow b = 2$ از طرفی $x = -1 \xrightarrow{x^2+bx+c=0} (-1)^2 + b(-1) + c = 0 \xrightarrow{b=2} 1 - 2 + c = 0 \rightarrow c = 1$	۱۳

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

## پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

### فصل چهارم حسابان ۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

#### مفهوم مشتق

۱	۱
-۳	۲
	۳

#### محاسبه‌ی مشتق تابع در یک نقطه

$f'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2) - (\cdot)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = 1-2 = -1$	۱
$f(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow f(3) = \sqrt{3-2} = 1$ $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3} \times \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2} + 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3} \times \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2) - 1}{x - 3} \times \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} \times \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{3-2} + 1} = \frac{1}{2}$ <p><math>m = \frac{1}{2}</math> شیب خط مماس</p> <p><math>y = m(x - x_0) - y_0</math></p> <p><math>y = \frac{1}{2}(x - 3) - 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}</math> معادله خط مماس</p>	۲

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x) - (-2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$	۳
---	---

### مشتق پذیری و پیوستگی

<p>تابع در نقطه‌ی داده شده مشتق پذیر نیست. زیرا:</p> $f(2) = 0$ $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ x-2  - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x-2  - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$ <p>و <math>f'_+(2) \neq f'_-(2)</math> می باشد.</p>	۱
<p>تابع <math>f</math> در <math>x = -1</math> پیوسته است.</p> $f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$ $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{ x^2 + x  - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-x(x+1)}{x+1} = -1$ $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{ x^2 + x  - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{x+1} = 1$ <p>مشتق های راست و چپ تابع هر دو متناهی و نابرابرند. پس <math>x = -1</math> نقطه‌ی گوشه ای تابع است.</p>	۲



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ : کافی است که نشان دهیم:}$ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$ $= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \times f'(a) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$	۳
$f'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt[3]{x} - \cdot}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$	۴
$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ x^2 - 4  - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x^2 - 4  - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -4$ <p>و چون <math>f'_+(2) \neq f'_-(2)</math> پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.</p>	۵

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 + 3) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3x + 1) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3}{x - 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$ <p>و چون <math>f'_+(1) \neq f'_-(1)</math> پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.</p>	۶
درست	۷
$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ x^2 - 1  - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ x^2 - 1  - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2$ <p>و چون <math>f'_+(1) \neq f'_-(1)</math> تابع در نقطه‌ی <math>x = 1</math> مشتق پذیر نیست.</p>	۸
درست	۹
مماس قائم	۱۰

$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} x = \cdot$ $f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} 1 = 1$ <p>و چون مشتقات چپ و راست تابع در نقطه‌ی نابرابرند، پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.</p>	۱۱
نادرست	۱۲

تابع در  $x = 1$  پیوسته است.

$$\text{حد راست } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

$$\text{حد چپ } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 2x) = 1 - 2 = -1$$

$$\text{مقدار } f(1) = (1)^3 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$

$$\Rightarrow a + b = -1 \rightarrow b + 1 = -a$$

مشتق راست و چپ تابع در  $x = 1$  برابرند.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(ax + b) - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^3 - 2x) - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^3 + x - 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + x - 1) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow a = 1$$

$$a + b = -1 \xrightarrow{a=1} b = -2$$

روش دوم

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 1 \\ x^3 - 2x & x \leq 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & x > 1 \\ 3x^2 - 2 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = a \text{ و } f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 2) = 1$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow a = 1$$

$$a + b = -1 \xrightarrow{a=1} b = -2$$

$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} f(x) = f(\cdot) = \cdot$ $\left. \begin{aligned} f'_+(\cdot) &= \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x^2 - \cdot}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} x = \cdot \\ f'_-(\cdot) &= \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^2 - \cdot}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} x = \cdot \end{aligned} \right\} \rightarrow f'_+(\cdot) = f'_-(\cdot)$ <p>لذا تابع داده شده در <math>x = \cdot</math> مشتق پذیر است.</p>	۱۴
نادرست	۱۵

تعبیر هندسی مشتق

الف : a	ب : d	پ : b	۱										
نادرست			۲										
A			۳										
نمودار (ب) : سهمی نمودار داده شده رو به پایین است. پس ضریب $x^2$ منفی است. لذا در مشتق تابع ضریب $x$ منفی خواهد بود. در نتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است.			۴										
<table><tr><th>شیب</th><th>نقطه</th></tr><tr><td>۰</td><td>D</td></tr><tr><td>۲</td><td>C</td></tr><tr><td>۰/۵</td><td>B</td></tr><tr><td>-۰/۵</td><td>A</td></tr></table>			شیب	نقطه	۰	D	۲	C	۰/۵	B	-۰/۵	A	۵
شیب	نقطه												
۰	D												
۲	C												
۰/۵	B												
-۰/۵	A												
(i) ب (E)      (ii) الف (مثبت)      (iii) ب (کمتر)			۶										
$\left. A \right _3^2, \left. B \right _1^0 \rightarrow m = f'(2) = \frac{3-1}{2-0} = 1$ <p>ب) <math>y - 3 = 1(x - 2) \rightarrow y = x + 1</math></p>			۷										

۸	$f(۲) = ۱۶$ شیب خط مماس $f'(x) = -۲x + ۱۰ \rightarrow f'(۲) = ۶$ معادله ی خط مماس $y - ۱۶ = ۶(x - ۲) \rightarrow y = ۶x + ۴$										
۹	<table><tr><th><math>x</math></th><th><math>f(x)</math></th></tr><tr><td><math>d</math></td><td><math>۰</math></td></tr><tr><td><math>b</math></td><td><math>۰/۵</math></td></tr><tr><td><math>c</math></td><td><math>۲</math></td></tr><tr><td><math>a</math></td><td><math>-۰/۵</math></td></tr></table>	$x$	$f(x)$	$d$	$۰$	$b$	$۰/۵$	$c$	$۲$	$a$	$-۰/۵$
$x$	$f(x)$										
$d$	$۰$										
$b$	$۰/۵$										
$c$	$۲$										
$a$	$-۰/۵$										
۱۰	با توجه به شیب خط مماس در نقاط تعیین شده <table><tr><td>شیب</td><td><math>-۲</math></td><td><math>-۱</math></td><td><math>۰/۵</math></td><td><math>۲</math></td></tr><tr><td>نقطه</td><td>D</td><td>B</td><td>A</td><td>C</td></tr></table>	شیب	$-۲$	$-۱$	$۰/۵$	$۲$	نقطه	D	B	A	C
شیب	$-۲$	$-۱$	$۰/۵$	$۲$							
نقطه	D	B	A	C							

### محاسبه ی مشتق

۱	$(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3$ $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = (1)(-3) + (3)(2) = -3 + 6 = 3$
۲	۷
۳	$A \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \rightarrow m = f'(1) = \frac{4-0}{2-0} = 2, \quad f(1) = 2$ $C \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}, D \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow m = g'(1) = \frac{4-0}{0-4} = -1, \quad g(1) = 3$ $h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)} = \frac{(2)(3) - (2)(-1)}{9} = \frac{8}{9}$
۴	۱۹
۵	$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 19$

### مشتق گیری از توابع

الف) $y = \frac{2x(x^3 + 2x - 5) - (x^2 + 1)(2x^2 + 2)}{(x^3 + 2x - 5)^2}$ ب) $y = -3 \times 2 \cos(-3x + 1)(-\sin(-3x + 1))$	۱
الف) $y = \frac{2x(x^3 + 2x + 1) - (x^2 - 1)(2x^2 + 2)}{(x^3 + 2x + 1)^2}$ ب) $y = -6 \times \sin(2x) \cos^2(2x)$	۲
الف) $y = \frac{2x(5x^3 - 3x + 1) - x^2(15x^2 - 3)}{(5x^3 - 3x + 1)^2}$ ب) $y = 3 \times 2 \cos(2x + 1) \sin^2(2x + 1)$	۳
الف) $f'(x) = 4(6x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(2x^3 + \sqrt[3]{x} - 1)^3$ ب) $f'(x) = -\frac{(1)(x^2 + 1) - 2x(x)}{(x + 1)^2} \times \sin(\frac{x}{x^2 + 1})$	۴
الف) $y' = \frac{2(x^3 - 2x^2) - (2x^2 - 4x)(2x + 3)}{(x^3 - 2x^2)^2}$ ب) $y' = 3 \times 2 \cos(2x + 1) \sin^2(2x + 1)$	۵
الف) $f'(x) = \frac{(2x - 3)(-3x + 2) - (-3)(x^2 - 3x + 1)}{(-3x + 2)^2}$ ب) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + (6x)\sqrt{x}$ پ) $h'(x) = 3 \cos x \sin^2 x - 2 \sin x \cos x$	۶

الف) $f'(x) = 3(2x)(x^2 + 1)^2(5x - 1) + 5(x^2 + 1)^3$	۷
ب) $f'(x) = \frac{-5 \sin x(1 - \sin x) - (\cos x)(5 \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$	
الف) $f(x) = u.v \rightarrow f'(x) = u'.v + v'.u$	۸
$u = 2\sqrt{x} \rightarrow u' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	
$v = 5x^2 - 3x \rightarrow v' = 10x - 3$	
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(5x^2 - 3x) + 2\sqrt{x}(10x - 3)$	
ب) $g(x) = \sin 3x + \cos^2(4x^3 - 2)$	
$g'(x) = 3 \cos 3x - 2(12x^2) \sin(4x^3 - 2) \cos(4x^3 - 2)$	
الف) $f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^3 + 1) + (3x^2)(\sqrt{3x+2})$	۹
ب) $g'(x) = 7(2x+3)(x^2 + 3x+1)^6$	
پ) $h'(x) = \frac{(2x-5)(-2x+9) - (-2)(x^2 - 5x+7)}{(-2x+9)^2}$	

مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

	۱

مشتق پذیری روی یک بازه



۱	تابع $f$ در $x = -1$ پیوسته نیست، لذا در این نقطه مشتق پذیر هم نیست. در نتیجه در بازه $[-2, 0]$ مشتق نیز پذیر نیست.

مشتق مرتبه دوم

۱	$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x = \sin 2x + 2 \sin 2x = 3 \sin 2x$ $f''(x) = 6 \cos 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$
---	---

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر

۱	$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t \rightarrow m'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} + 2(9) = \frac{1}{6} + 18 = \frac{109}{6}$
۲	$f(x) = x^3 - 2x \rightarrow \begin{cases} f(2) = (2)^3 - 2(2) = 8 - 4 = 4 \\ f(0) = (0)^3 - 2(0) = 0 \end{cases}$ <p>آهنگ تغییر متوسط <math>\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2</math></p> <p>آهنگ تغییر لحظه ای <math>f'(x) = 3x^2 - 2 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 3(1)^2 - 2 = 1</math></p>
۳	$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t \rightarrow m'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 4(4) = \frac{1}{4} + 16 = \frac{65}{4}$
۴	$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 1 \\ f'(2) = 13 \end{cases} \quad \text{۱۳ برابر}$
۵	درست

$f(5) = (5)^2 - (5) + 10 = 25 - 5 + 10 = 30$ $f(0) = (0)^2 - (0) + 10 = 10$ $\text{سرعت متوسط } \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$ $f'(t) = 2t - 1$ سرعت لحظه ای $f'(t) = 4 \rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2}$	۶
-۴	۷
درست	۸
$m(t) = \sqrt{t} + t^2 \rightarrow \begin{cases} m(3) = \sqrt{3} + (3)^2 = 9 + \sqrt{3} \\ m(4) = \sqrt{4} + (4)^2 = 2 + 16 = 18 \end{cases}$ $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(4) - m(3)}{4 - 3} = 18 - (9 + \sqrt{3}) = 9 - \sqrt{3}$ <p>(ب)</p> $m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t \rightarrow m'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} + 2(9) = \frac{1}{6} + 18 = \frac{109}{6}$	۹
$\frac{1}{6}$	۱۰

تهیه کننده :

جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

## پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

### فصل پنجم حسابان ۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

#### اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

مثبت	۱												
$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}} \xrightarrow{f'(x)=0} 2x-2=0 \rightarrow x=1$ $f(0) = f(2) = 2 \text{ ماکزیمم مطلق}$ $f(1) = \sqrt{3} \text{ مینیمم مطلق}$	۲												
$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x=0$ <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f'(x)</math></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td><math>0</math></td><td></td></tr></table> <p>تابع در فاصله <math>(-\infty, 0)</math> نزولی و در فاصله <math>(0, +\infty)</math> صعودی است.</p>	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$f(x)$		$0$		۳
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$										
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$										
$f(x)$		$0$											
مثبت	۴												
الف) نادرست ب) درست	۵												
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x \rightarrow f'(x) = x^2 - 1 \xrightarrow{f'(x)=0} x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$ $\rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow f(0)=0 \\ x=1 \rightarrow f(1)=-\frac{2}{3} \\ x=-1 \rightarrow f(-1)=\frac{2}{3} \\ x=2 \rightarrow f(2)=\frac{2}{3} \end{cases}$ <p>لذا <math>f(-1) = f(2) = \frac{2}{3}</math> ماکزیمم مطلق و <math>f(1) = -\frac{2}{3}</math> مینیمم مطلق است.</p>	۶												

<div><math>f'(x) = x^2 + 2x \xrightarrow{f'(x)=0} x=0, x=-2</math></div> <div><math>f(0)=0, \quad f(-2)=\frac{2}{3}, \quad f(3)=18</math></div> <div>لذا ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱۸ و مینیمم مطلق آن صفر می باشد.</div> <div><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-2</math></td><td><math>0</math></td></tr><tr><td><math>f'</math></td><td><math>+</math></td><td><math>-</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td><math>\nearrow</math></td><td><math>\searrow</math></td></tr></table></div> <div>همچنین مینیمم نسبی تابع صفر می باشد.</div>	$x$	$-2$	$0$	$f'$	$+$	$-$	$f$	$\nearrow$	$\searrow$	۷
$x$	$-2$	$0$								
$f'$	$+$	$-$								
$f$	$\nearrow$	$\searrow$								
<div><math>f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}</math></div> <div>ریشه‌ی <math>x = -2</math> قابل قبول نمی باشد.</div> <div><math>f(-1)=13, \quad f(2)=4, \quad f(1)=-7 \Rightarrow \min : (1, -7), \quad \max : (-1, 13)</math></div>	۸									
نادرست	۹									
$(-2, 2)$	۱۰									
<div>الف : نقاط اکسترمم های نسبی تابع عبارتند از <math>(1, 0)</math> و <math>(0, 1)</math> و <math>(-1, 0)</math></div> <div>ب : نقاط اکسترمم های مطلق تابع عبارتند از <math>(3, 8)</math> و <math>(1, 0)</math> و <math>(-1, 0)</math></div> <div>پ : خیر، زیر در نقطه‌ی <math>(1, 0)</math> از این فاصله مشتق پذیر نیست.</div>	۱۱									
<div><math>x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1</math> معادله ریشه ندارد. <math>\Rightarrow D_f = R</math></div> <div><math>f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - 2x(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} -x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1</math></div> <div><math>\rightarrow x=1, \quad x=-1</math> نقاط بحرانی</div>	۱۲									

۱۳

$x$	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x \leq 2$
$f(x)$	$f(x) = x^2 - x - 1$	$f(x) = x^2 + x + 1$
$f'(x)$	$f'(x) = 2x - 1$	$f'(x) = 2x + 1$
$f'(x) = 0$	$x = \frac{1}{2}$ غیر قابل قبول	$x = -\frac{1}{2}$

و چون  $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ ، لذا تابع در نقطه‌ی  $x = -1$  مشتق پذیر نیست.

اکنون عرض نقاط  $x = 2$  و  $x = -2$  و  $x = -\frac{1}{2}$  و  $x = -1$  را تعیین و مقایسه می‌کنیم.

$$x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + |-2 + 1| = 4 + 1 = 5$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = (2)^2 + |2 + 1| = 4 + 3 = 7 \quad \text{ماکزیمم مطلق}$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left|-\frac{1}{2} + 1\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{مینیمم مطلق}$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^2 + |-1 + 1| = 1$$

۱۴

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \xrightarrow{\div 6} x^2 + x - 2 = 0$$

$$\rightarrow x = 1, \quad x = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 13 \\ f(1) = -7 \\ f(3) = 45 \end{array} \right\} \rightarrow \min : (1, -7), \quad \max : (3, 45)$$

بهینه سازی

۱	
---	--

آزمون مشتق اول

$f(x) = -x^4 + ax + b \rightarrow f'(x) = -4x^3 + a \xrightarrow{f'(1)=0} -4 + a = 0 \rightarrow a = 4$ $f(1) = 2 \rightarrow -1 + 4 + b = 2 \rightarrow b = -1$	۱
$f(x) = x^3 + ax + b \rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \xrightarrow{f'(1)=0} 3 + a = 0 \rightarrow a = -3$ $f(x) = x^3 + ax + b \xrightarrow{f(1)=2} 1 + a + b = 2 \xrightarrow{a=-3} b = 4$	۲
$f(x) = x^3 + bx^2 + d \xrightarrow{f(2)=1} 1 = 8 + 4b + d \rightarrow 4b + d = -7$ $f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 0 = 12 + 4b \rightarrow b = -3$ $4b + d = -7 \xrightarrow{b=-3} -12 + d = -7 \rightarrow d = 5$	۳

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه‌ی عطف

$f'(x) = -۳x^۲ + ۶x \rightarrow f''(x) = -۶x + ۶ \xrightarrow{f''(x)=۰} x = ۱$ <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>۱</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y''</math></td><td><math>+</math></td><td><math>۰</math></td><td><math>-</math></td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>\cup</math></td><td><math>۳</math></td><td><math>\cap</math></td></tr></table> <p style="text-align: center;">عطف</p> <p style="text-align: right;">نقطه‌ی عطف (۱,۳)</p>	$x$	$-\infty$	$۱$	$+\infty$	$y''$	$+$	$۰$	$-$	$y$	$\cup$	$۳$	$\cap$	۱
$x$	$-\infty$	$۱$	$+\infty$										
$y''$	$+$	$۰$	$-$										
$y$	$\cup$	$۳$	$\cap$										
$f(x) = ax^۳ + bx^۲ - ۱ \xrightarrow{f(۱)=۱} a + b - ۱ = ۱ \rightarrow a + b = ۲$ $f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx \rightarrow f''(x) = ۶ax + ۲b \xrightarrow{f''(۱)=۰} ۶a + ۲b = ۰$ $\rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۶a + ۲b = ۰ \end{cases} \rightarrow a = -۱, b = ۳$	۲												

<div><math display="block">f(x) = x^3 + 3x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3 \rightarrow f''(x) = 6x</math><math display="block">\xrightarrow{f''(x)=0} 6x = 0 \rightarrow x = 0</math></div> <div><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y''</math></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>\cap</math></td><td><math>\cup</math></td><td><math>\cup</math></td></tr></table><p style="text-align: center;">عطف</p></div> <div><p style="text-align: right;">نقطه‌ی عطف <math>(0, 1)</math></p></div>	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$y''$	$-$	$0$	$+$	$y$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	۳
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$										
$y''$	$-$	$0$	$+$										
$y$	$\cap$	$\cup$	$\cup$										
<div><math display="block">y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad , \quad y'' = \frac{4}{(x-1)^3}</math><math display="block">x - 1 = 0 \rightarrow x = 1</math></div> <div><p>در بازه‌ی <math>(1, +\infty)</math> تقعر رو به بالا و در بازه‌ی <math>(-\infty, 1)</math> تقعر رو به پایین است.</p><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>1</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f''</math></td><td><math>-</math></td><td></td><td><math>+</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td><math>\cap</math></td><td></td><td><math>\cup</math></td></tr></table></div> <div><p style="text-align: right;">تابع نقطه‌ی عطف ندارد.</p></div>	$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$	$f''$	$-$		$+$	$f$	$\cap$		$\cup$	۴
$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$										
$f''$	$-$		$+$										
$f$	$\cap$		$\cup$										
<div><p style="text-align: center;">الف : نقطه‌ی <math>C</math></p><p style="text-align: center;">ب : نقطه‌ی <math>D</math></p></div>	۵												

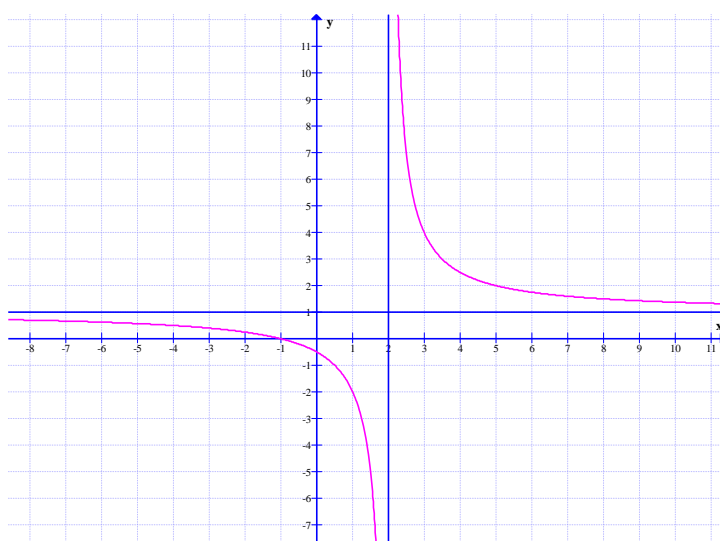
$f'(x) = 3x^2 + 6x$	۶												
$f''(x) = 6x + 6 \xrightarrow{f''(x)=0} 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$													
$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$													
لذا نقطه‌ی $(-1, 3)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع است. جهت تقعر را نیز می‌توان به صورت زیر تعیین کرد.													
<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-1</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y''</math></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>-\infty</math> <math>\cap</math></td><td><math>3</math> عطف</td><td><math>+\infty</math> <math>\cup</math></td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$	$y''$	$-$	$0$	$+$	$y$	$-\infty$ $\cap$	$3$ عطف	$+\infty$ $\cup$	
$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$										
$y''$	$-$	$0$	$+$										
$y$	$-\infty$ $\cap$	$3$ عطف	$+\infty$ $\cup$										
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$	۷												
$x = \frac{1}{2} \xrightarrow{f''(x)=0} 6a\left(\frac{1}{2}\right) + 2b = 0 \rightarrow 3a + 2b = 0$													
$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1 \xrightarrow{f(1)=2} a(1)^3 + b(1)^2 + 1 = 2 \rightarrow a + b = 1$													
$\begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \rightarrow a = -1, \quad b = 3$													
$f'(x) = -3x^2 + 6x \rightarrow f''(x) = -6x + 6 \xrightarrow{f''(x)=0} -6x + 6 = 0 \rightarrow x = 1$	۸												
<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>1</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y''</math></td><td><math>+</math></td><td><math>0</math></td><td><math>-</math></td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>+\infty</math> <math>\cup</math></td><td><math>3</math> عطف</td><td><math>-\infty</math> <math>\cap</math></td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$	$y''$	$+$	$0$	$-$	$y$	$+\infty$ $\cup$	$3$ عطف	$-\infty$ $\cap$	
$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$										
$y''$	$+$	$0$	$-$										
$y$	$+\infty$ $\cup$	$3$ عطف	$-\infty$ $\cap$										

رسم نمودار توابع



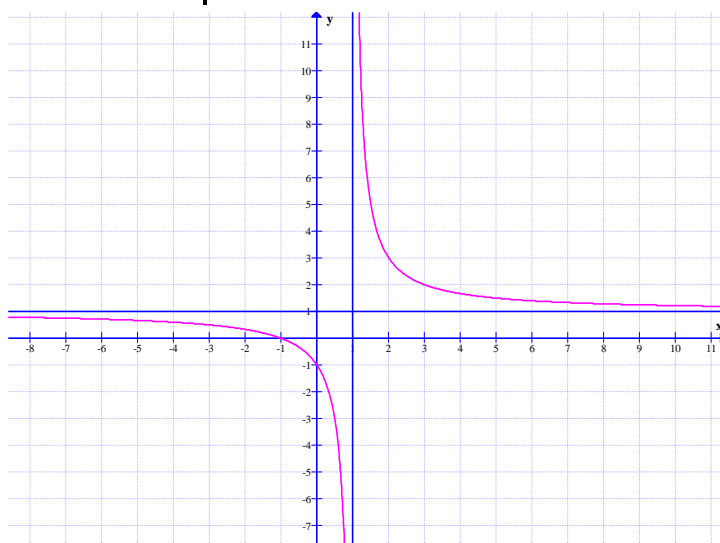
$x = 2$  مجانب قائم و  $y = 1$  مجانب افقی و  $y' = \frac{-3}{(x-2)^2}$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$y'$	—		—
$y$	$1 \searrow$	$-\infty$    $+\infty$	$1 \searrow$



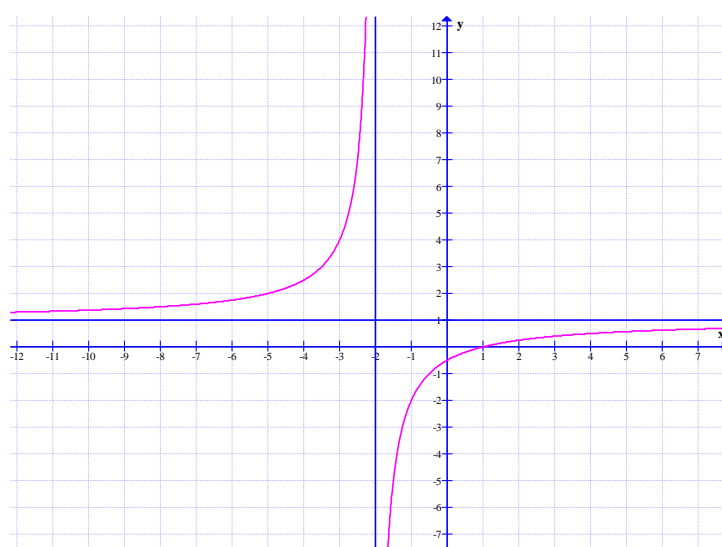
$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$  و  $y = 1$  مجانب افقی و  $x = 1$  مجانب قائم

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$y'$	—		—
$y$	$1 \searrow$	$-\infty$   $+\infty$	$1 \searrow$



$x = -2$  مجانب قائم و  $y = 1$  مجانب افقی و  $y' = \frac{3}{(x-2)^2}$

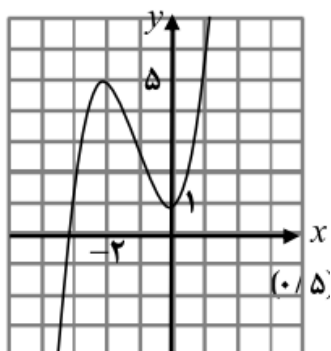
$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$y'$	+		+
$y$	1	$\nearrow +\infty$    $\nearrow$	1



$y' = 3x^2 + 6x \xrightarrow{y'=0} x = 0, x = -2$

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$	
$f'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$	$-\infty$	$\nearrow 5$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$	

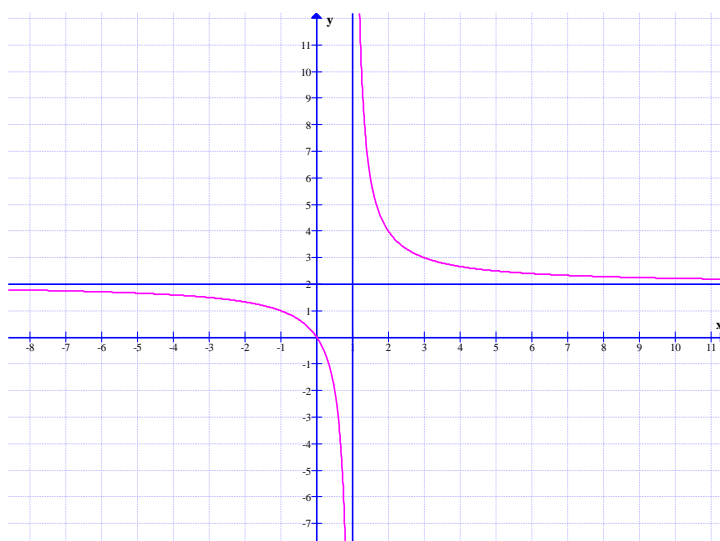
ماکزیم      مینیم



$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0.$$

مجانِب قائم  $x=1$  و مجانب افقی  $y=2$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'$	$-$		$-$
$f$	$2$	$+\infty$	$2$
		$-\infty$	



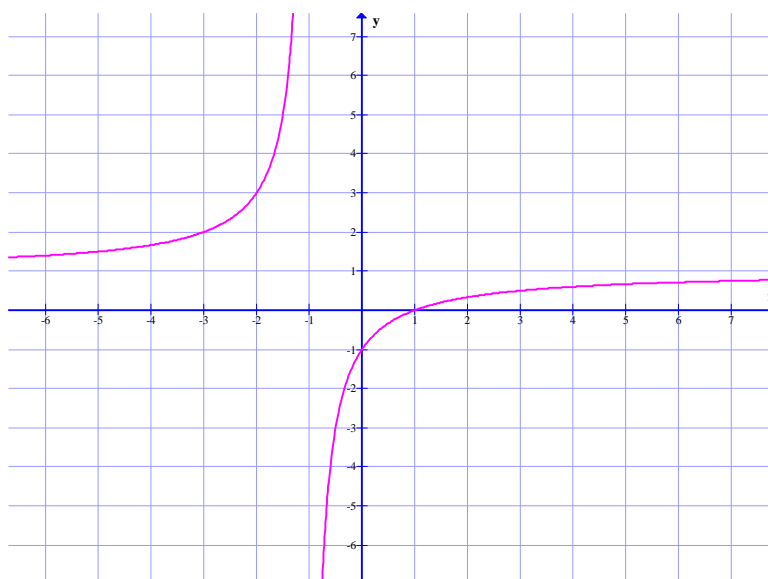
مجاذب افقی  $x = 1$

مجاذب قائم  $x = -1$

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0.$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$y'$	$+$		$+$

$\nearrow +\infty \quad \parallel \quad \searrow -\infty$



مجانِب قائم  $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$$D_f = R - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \rightarrow y = 1 \quad \text{مجانِب افقی}$$

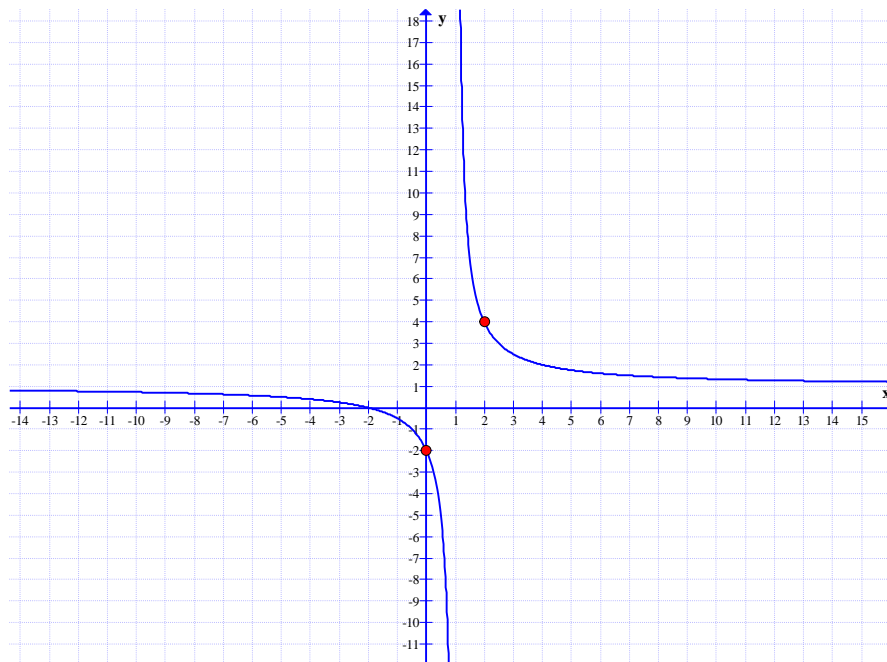
$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0.$$

نقاط کمکی  $(2, 4)$  و  $(0, -2)$

جدول تغییرات

$x$	$-\infty$		$1$		$+\infty$
$y'$		—		—	
$y$	$-1$				$1$

$\swarrow$   $\downarrow$   $\searrow$   $\downarrow$   $\swarrow$



$$D_f = R$$

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \rightarrow y' = 3x^2 + 6x \xrightarrow{y'=0} 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0$$

$$\rightarrow x = 0, \quad x = -2$$

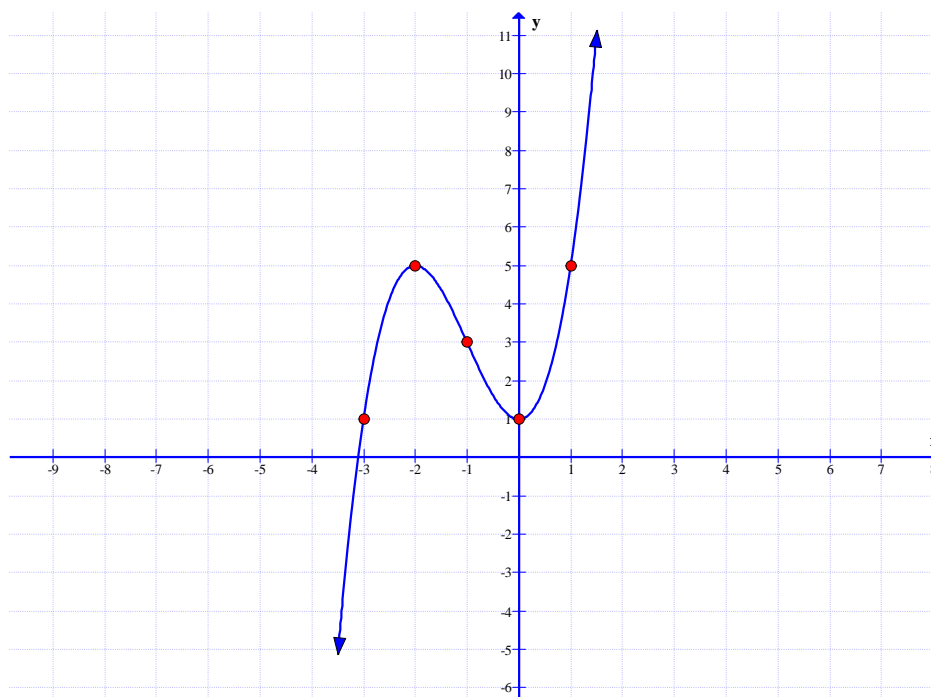
$$y'' = 6x + 6 \xrightarrow{y''=0} 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$5$	$3$	$1$	$+\infty$

$\nearrow$  max  $\searrow$  min  $\nearrow$

$$x = -3 \rightarrow y = -27 + 27 + 1 = 1 \rightarrow A(-3, 1) \quad \text{نقطه‌ی کمکی}$$

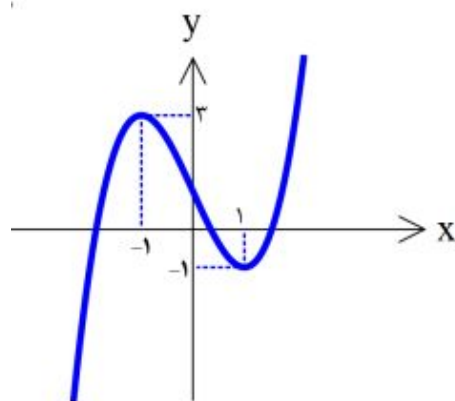
$$x = 1 \rightarrow y = 1 + 3 + 1 = 5 \rightarrow B(1, 5) \quad \text{نقطه‌ی کمکی}$$



نقاط بحرانی  $y' = 3x^2 - 3 \xrightarrow{y'=0} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

نقطه‌ی عطف  $y'' = 6x \xrightarrow{y''=0} 6x = 0 \rightarrow x = 0$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$y''$	-	-	$\circ$	+	+
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		max		min	



تهیه کننده:

جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان