به نام خدا

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده برق

کنترل مدرن

تمرین شماره 4

نام و نام خانوادگی

سارا شمس

مریم سلطانی

شماره دانشجویی

40119923

40119433

ترم بهار 1404

فهرست مطالب

سوال دوم

الف)

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = 0 \ \rightarrow \ \hat{G}(s) = H(s)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a & -3a-2 & -3-a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3a & 3+a & 1 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

می‌خواهیم مینیمال بودن این تحقق را بررسی کنیم. اگر این تحقق کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر باشد، کاهش‌ناپذیر است. همان‌طور که می‌دانیم این تحقق همیشه کنترل‌پذیر است پس رویت‌پذیری را بررسی می‌کنیم.

بررسی رویت‌پذیری:

$$\varphi_o = \begin{bmatrix} 0 \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3+a & 1 \\ -2a & -2 & 0 \\ 0 & -2a & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}\,(\varphi_o) = 3a(4-0) - (3+a)(4a) + 4a^2 = 12a - 12a - 4a^2 + 4a^2 = 0$$

با توجه به صفر بودن دترمینان، این ماتریس به ازای هیچ مقداری از a فول رنک نیست و در نتیجه به ازای تمام مقادیر a کاهش‌پذیر است.

ب)

اگر a را صفر در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{s^2+3s}{s^3+3s^2+2s} = \frac{s(s+3)}{s(s^2+3s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{(s+3)}{(s+2)(s+1)}$$

حالا می‌توانیم تحققی کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر و به عبارتی کاهش‌ناپذیر را به دست بیاوریم.

حد در بی‌نهایت سیستم مانند قبل صفر می‌باشد.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

سوال سوم

با توجه به اینکه سیستم درجه دو است و همینطور در شکل مقادیر مورد نیاز برای محاسبه MP% و tp به ما داده شده است، می‌توانیم با محاسبه مقادیر مربوط به نسبت میرایی و فرکانس طبیعی، رابطه تابع تبدیل سیستم را بنویسیم.

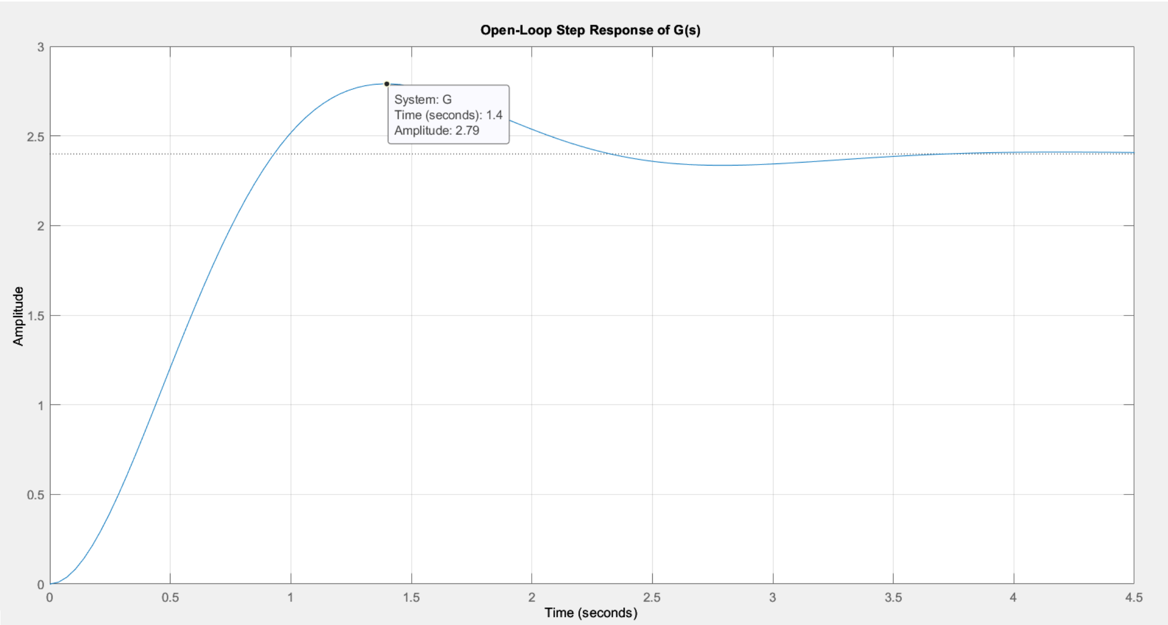
$$\%MP = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100 = \frac{1.14 - 1}{1} \times 100 = 14\%$$

$$\zeta = \frac{|\ln(MP)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(MP)^2}} = \frac{|\ln(0.14)|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(0.14))^2}} = 0.53$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{1.4\sqrt{1-0.53^2}} = 2.64$$

$$G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} = \frac{2.4(2.64)^2}{s^2 + 2(0.53)(2.64)s + 6.96}$$

برای اطمینان از اینکه آیا لزومی برای در نظر گرفتن gain در تابع تبدیل وجود دارد یا نه (با توجه به اینکه در شکل داده شده هم مقدار نهایی یک و بدون gain بنظر می‌رسد) برای هر دو حالت شبیه‌سازی انجام می‌دهیم.



شکل 2- تابع تبدیل با در نظر گرفتن **gain**

با توجه به شکل‌های حاصل از شبیه‌سازی، تابع تبدیل بدون در نظر گرفتن gain را معیار قرار می‌دهیم.

$$G(s) = \frac{6.96}{s^2 + 2.79s + 6.96}, \qquad \lim_{s\to\infty} G(s) = 0 \;\rightarrow\; \hat{G}(s) = G(s)$$

حال با استفاده از تابع تبدیل پیدا شده، تحقق‌های مورد نظر را بدست می‌آوریم.

کانونیکال کنترل‌کننده:

$$\hat{G}(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \rightarrow b_1 = 0,\ b_0 = 6.96, \qquad a_1 = 2.79,\ a_0 = 6.96$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6.96 & -2.79 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 6.96 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

کانونیکال رویت‌گر (دوگان کنترل‌کننده):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -6.96 \\ 1 & -2.79 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 6.96 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

کانونیکال رویت‌پذیری:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.79 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6.96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.96 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6.96 & -2.79 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6.96 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

کانونیکال کنترل‌پذیری (دوگان رویت‌پذیری):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -6.96 \\ 1 & -2.79 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 6.96 \end{bmatrix} x(t)$$

سوال چهارم

الف)

$$G(s) = \frac{s^2+s^4}{s^4-s^3+3s^2-s+2}\ ,\ \lim_{s\to\infty} G(s) = 1 \ \rightarrow\ \hat{G}(s) = 1 - G(s)$$

$$\hat{G}(s) = \frac{-s^3+2s^2-s+2}{s^4-s^3+3s^2-s+2}$$

$$\rightarrow\ b_3 = -1, \qquad b_2 = 2, \qquad b_1 = -1, \quad b_0 = 2$$

$$a_3 = -1, \qquad a_2 = 3, \qquad a_1 = -1, \quad a_0 = 2$$

تحقق کنترل‌کننده:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&1&-3&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}2&-1&2&-1\end{bmatrix}x(t)+u(t)$$

تحقق کنترل‌پذیر:

$$\begin{bmatrix}\beta_3\\\beta_2\\\beta_1\\\beta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\3&-1&0&0\\-1&3&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&-2\\1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}-1&1&3&1\end{bmatrix}x(t)+u(t)$$

تحقق رویتگر (دوگان کنترل‌پذیر)

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&-2\\1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}x(t)+u(t)$$

تحقق رویت‌پذیر(دوگان کنترل‌کننده)

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&1&-3&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}x(t)+u(t)$$

ب)

کنترل‌کننده:

تحقق کنترل‌کننده همواره **کنترل‌پذیر** است.

بررسی رویت‌پذیری:

$$\varphi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{Rank}(\varphi_o) = 2$

چون ماتریس رویت‌پذیری فول رنک نیست پس این تحقق **رویت‌پذیر نمی‌باشد.**

کنترل‌پذیر:

این تحقق نیز همواره **کنترل‌پذیر** است.

بررسی رویت‌پذیری:

$$\varphi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & -7 \\ 1 & -5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Rank}(\varphi_o) = 2$

چون ماتریس رویت‌پذیری فول رنک نیست پس این تحقق **رویت‌پذیر نمی‌باشد.**

رویتگر:

این تحقق همواره **رویت‌پذیر** است.

چون این تحقق دوگان تحقق کنترل‌پذیر است و چون تحقق کنترل‌پذیر رویت‌پذیر نمی‌باشد، پس این تحقق نیز **کنترل‌پذیر نمی‌باشد.**

رویت‌پذیر:

این تحقق همواره **رویت‌پذیر** است.

چون این تحقق دوگان تحقق کنترل‌کننده است و چون تحقق کنترل‌کننده رویت‌پذیر نمی‌باشد، پس این تحقق نیز **کنترل‌پذیر نمی‌باشد.**

سوال پنجم

الف) تحقق موازی: در تحقق موازی توابع تبدیل با هم جمع می‌شوند و می‌توانیم فرم فضای حالت را به صورت در کنار هم قرار گرفتن بلوک‌های هر دو سیستم قرار دهیم.

دو سیستم در حالت موازی در حال جمع شدن با یک ورودی و خروجی یکسان هستند:

$$\dot{x}(t) = A_1x_1 + A_2x_2 + B_1u_1 + B_2u_2$$
$$y(t) = C_1x_1 + C_2x_2 + D_1u_1 + D_2u_2$$

پس می‌توان نوشت:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} u(t)$$

الف) تحقق سری: در تحقق موازی توابع تبدیل با هم ضرب می‌شوند و می‌توانیم فرم فضای حالت را به صورت در کنار هم قرار گرفتن بلوک‌های هر دو سیستم قرار دهیم. در واقع یعنی ورودی اصلی به سیستم اول وارد شده و سپس خروجی سیستم اول به عنوان ورودی به سیستم دوم اعمال می‌شود. پس باید معادلات سیستم دوم را بازنویسی کنیم.

$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2(C_1x_1 + D_1u_1) = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_1u_1$$
$$y_2 = C_2x_2 + D_2(C_1x_1 + D_1u_1) = C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u_1$$

پس می‌توان نوشت:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(t) + (D_2D_1)u(t)$$

الف) تحقق موازی (با فیدبک منفی): مجددا ورودی سیستم دوم، خروجی سیستم اول است. با این تفاوت که ورودی سیستم اول، اختلاف بین خروجی سیستم دوم و ورودی اصلی است.

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1(u - y_2), \qquad y_1 = C_1x_1 + D_1(u - y_2)$$
$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2y_1, \qquad y_2 = C_2x_2 + D_2y_1$$
$$y_2 = C_2x_2 + D_2\big(C_1x_1 + D_1(u - y_2)\big) = C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u - D_2D_1y_2$$
$$\rightarrow (I + D_2D_1)y_2 = C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u$$
$$\rightarrow\ y_2 = (I + D_2D_1)^{-1}(C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u)$$

$$\rightarrow y = C_1x_1 + D_1(u - y_2) = C_1x_1 + D_1\big(u - (I + D_2D_1)^{-1}(C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u)\big)$$

با فرض وارون داشتن ماتریس $(I + D_2D_1)$، آن را به صورت مخرج کسر می‌نویسیم.

$$= C_1x_1 + D_1u - \frac{D_1C_2x_2}{I + D_2D_1} - \frac{D_1D_2C_1x_1}{I + D_2D_1} - \frac{D_1D_2D_1u}{I + D_2D_1}$$

$$= \left(C_1 - \frac{D_1D_2C_1}{I + D_2D_1}\right)x_1 + \left(-\frac{D_1C_2}{I + D_2D_1}\right)x_2 + \left(D_1 - \frac{D_1D_2D_1}{I + D_2D_1}\right)u$$

$$= \frac{C_1}{I + D_2D_1}x_1 + \left(-\frac{D_1C_2}{I + D_2D_1}\right)x_2 + \frac{D_1}{I + D_2D_1}u$$

معادله خروجی سیستم را پیدا کردیم.

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1(u - y_2) = A_1x_1 + B_1\big(u - (I + D_2D_1)^{-1}(C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u)\big)$$

$$= A_1x_1 + B_1u - \frac{B_1C_2x_2}{I + D_2D_1} - \frac{B_1D_2C_1x_1}{I + D_2D_1} - \frac{B_1D_2D_1u}{I + D_2D_1}$$

$$= \left(A_1 - \frac{B_1D_2C_1}{I + D_2D_1}\right)x_1 + \left(-\frac{B_1C_2}{I + D_2D_1}\right)x_2 + \left(\frac{B_1}{I + D_2D_1}\right)u$$

$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2y_1 = A_2x_2 + B_2\left(\frac{C_1}{I + D_2D_1}x_1 + \left(-\frac{D_1C_2}{I + D_2D_1}\right)x_2 + \frac{D_1}{I + D_2D_1}u\right)$$

$$= \frac{B_2C_1}{I + D_2D_1}x_1 + \left(A_2 - \frac{B_2D_1C_2}{I + D_2D_1}\right)x_2 + \frac{B_2D_1}{I + D_2D_1}u$$

پس می‌توان نوشت:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 - \frac{B_1D_2C_1}{I + D_2D_1} & -\frac{B_1C_2}{I + D_2D_1} \\ \frac{B_2C_1}{I + D_2D_1} & A_2 - \frac{B_2D_1C_2}{I + D_2D_1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{B_1}{I + D_2D_1} \\ \frac{B_2D_1}{I + D_2D_1} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{I + D_2D_1} & -\frac{D_1C_2}{I + D_2D_1} \end{bmatrix} x(t) + \left(\frac{D_1}{I + D_2D_1}\right)u(t)$$