



Frequency domain analysis

October 2024

*Maryam Soltani
Prof. Taghirad*

حوزه فرکانس و زمان:

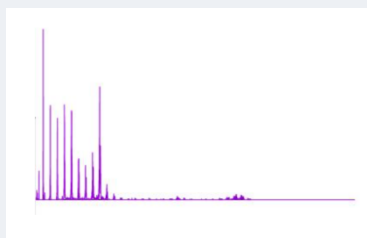
نمایش سیگنال‌ها در حوزه زمان و فرکانس امکان‌پذیر است. زمانی که سیگنال‌ها را در حوزه زمان نمایش می‌دهیم، سیگنال‌ها به صورت تابعی از زمان نمایش داده می‌شوند اما در حوزه فرکانس، به صورت تابعی از فرکانس نمایش داده می‌شوند. برخی از برتری‌های نمایش سیگنال در حوزه فرکانس نسبت به زمان، باعث شده که کاربرد تحلیل در آن، بیشتر از حوزه زمان باشد، البته این دو حوزه مکمل هم هستند و شناخت کامل هر کدام برای تحلیل سیگنال‌ها ضروری است. برای نمایش سیگنال‌ها در حوزه فرکانس، می‌توان از تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس استفاده کرد. در ادامه به تمام موارد اشاره شده در این بند به صورت مفصل‌تر می‌پردازیم.

یک مثال درباره حوزه فرکانس و زمان

همانطور که می‌دانیم تحلیل فرکانسی صداها اطلاعات بسیار مهمی را به ما می‌دهد. برای مثال نمودار زیر نشان دهنده سیگنال یک گفتار (حرف آ) در حوزه زمان می‌باشد.

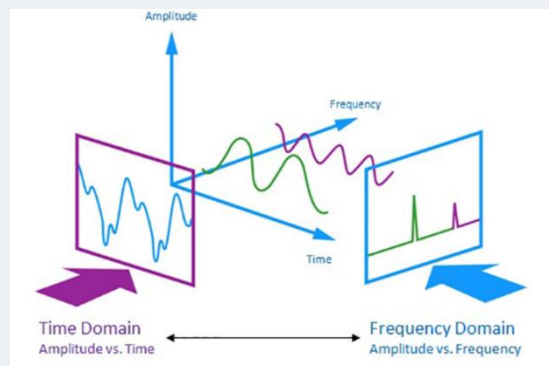
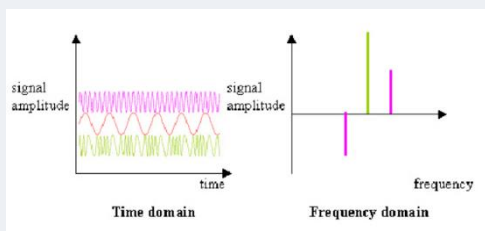


تحلیل این سیگنال در حوزه زمان و پیدا کردن فرکانس‌های مختلف آن به راحتی ممکن نیست. پس ما می‌توانیم این سیگنال را در حوزه فرکانس نشان دهیم و به راحتی فرکانس‌های مورد نظر را پیدا کنیم که به شکل نمودار دوم می‌شود.



اگر بخواهیم به تفاوت این دو حوزه و تمرکزی که هر کدام دارند بپردازیم می‌توانیم به این شکل بیان کنیم که تجزیه و تحلیل در حوزه زمان، بر پاسخ گذرای یک سیستم تاکید می‌کند و آن را در طول زمان بررسی می‌کند در حالی که تحلیل در حوزه فرکانس به پاسخ حالت پایدار می‌پردازد و بررسی می‌کند که سیستم به هر فرکانس مختلف چگونه پاسخ می‌دهد.

نمودارهای زیر به درک ما از تفاوت این دو حوزه بسیار کمک می‌کنند.



برتری‌های حوزه فرکانس نسبت به زمان:

1. **تحلیل پایداری:** تحلیل در حوزه فرکانس از طریق بررسی قطب‌ها و صفرهای تابع انتقال باعث می‌شود ارزیابی پایداری سیستم‌ها آسان‌تر شود. این موضوع به تعیین پایدار، ناپایدار یا مرزی بودن سیستم کمک می‌کند.

2. **فیلترینگ و تساوی‌سازی:** نمایش در حوزه فرکانس به مهندسان اجازه می‌دهد تا فیلترهایی را برای تقویت، تضعیف یا جدا کردن اجزای خاص فرکانس در یک سیگنال طراحی کنند و عملکرد و خروجی سیستم را بهبود بخشند.

3. **تشخیص تشدید:** تحلیل در حوزه فرکانس به مهندسان امکان شناسایی فرکانس‌های تشدید را می‌دهد که می‌توانند باعث نوسانات، ناپایداری یا ارتعاشات بیش از حد سیستم شوند و این امکان به طراحی و کنترل بهتر سیستم کمک می‌کند.

4. **تحلیل هارمونیک:** تحلیل سیگنال‌ها در حوزه فرکانس امکان مطالعه هارمونیک را فراهم می‌کند که برای درک اعوجاج سیگنال و رفتار سیستم‌های غیرخطی ضروری است.

5. **تحلیل طیفی:** نمایش در حوزه فرکانس برای تحلیل طیفی بسیار مهم است و به مهندسان اجازه می‌دهد تا اجزای فرکانسی سیگنال را شناسایی و کمی‌سازی کنند، مانند پردازش صدا یا سیستم‌های مخابراتی.

در کل می‌توان گفت که نمایش سیگنال باعث می‌شود که ویژگی‌هایی از سیگنال را مشاهده کنیم که به راحتی در حوزه زمان قابل مشاهده نیست یا اصلاً دیده نمی‌شود و این موضوع خیلی مهم و کمک‌کننده است. شناخت هر دو حوزه زمان و فرکانس و درک رفتار سیستم‌ها در هر کدام از این حوزه‌ها به مهندسين این امکان را می‌دهد که بتوانند سیستم‌های کارآمدتر و قابل اطمینان‌تری طراحی کنند.

در ادامه به بررسی تبدیل لاپلاس و فوریه، و تفاوت‌های این دو می‌پردازیم.

تبدیل فوریه:

تبدیل فوریه یک تبدیل ریاضیاتی است که تابع را از حوزه زمان به حوزه فرکانس می‌برد. این تبدیل به طور گسترده در زمینه‌های مختلفی مانند پردازش سیگنال، مخابرات و مهندسی برای تحلیل سیگنال‌ها استفاده می‌شود. تبدیل فوریه به دو نوع تقسیم می‌شود:

تبدیل فوریه پیوسته: برای سیگنال‌های زمان پیوسته استفاده می‌شود و یک سیگنال را به عنوان مجموعی از توابع سینوسی با فرکانس‌ها و دامنه‌های مختلف نمایش می‌دهد.

تبدیل فوریه گسسته: برای سیگنال‌های زمان گسسته استفاده می‌شود و سیگنال را به عنوان مجموعی از سینوس‌ها با فرکانس‌ها و دامنه‌های مختلف نمایش می‌دهد.



Joseph Fourier

تبدیل لاپلاس:

تبدیل لاپلاس نیز تبدیل لاپلاس یک تکنیک ریاضی است که یک تابع از زمان (دامنه زمان) را به یک تابع از فرکانس مختلط (دامنه لاپلاس) تبدیل می‌کند، که با متغیر s نشان داده می‌شود. تبدیل لاپلاس به ویژه در تحلیل سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) و پاسخ‌های گذرا مفید است. برخی از موارد قابل توجه در تبدیل لاپلاس عبارتند از:

تبدیل معادلات دیفرانسیل: تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل خطی را به معادلات جبری تبدیل می‌کند که حل آن‌ها را آسان‌تر می‌سازد.

قطب‌ها و صفرها: قطب‌ها ریشه‌های مخرج و صفرها ریشه‌های صورت تابع انتقال در دامنه لاپلاس هستند. این قطب‌ها و صفرها نقش مهمی در تحلیل پایداری و پاسخ سیستم دارند.

توابع انتقال: تبدیل لاپلاس برای پیدا کردن توابع انتقال استفاده می‌شود که رابطه ورودی - خروجی سیستم‌های LTI را توصیف می‌کنند و برای تحلیل و طراحی سیستم‌ها ضروری هستند.



Pierre-Simon Laplace

تفاوت‌های تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه:

1. نوع تحلیل:

- تبدیل فوریه: سیگنال‌ها را از دامنه زمان به دامنه فرکانس تبدیل می‌کند و تنها بر روی فرکانس‌های حقیقی تمرکز دارد. در این تبدیل، سیگنال به صورت مجموعی از توابع سینوسی و کسینوسی با فرکانس‌های مختلف نمایش داده می‌شود.

- تبدیل لاپلاس: سیگنال‌ها را به دامنه فرکانس مختلط ($S = \sigma + j\omega$) تبدیل می‌کند. این تبدیل نه تنها فرکانس‌های حقیقی (ω) بلکه بخش نمایی (σ) سیگنال را نیز پوشش می‌دهد که می‌تواند روندهای افزایشی یا کاهشی سیگنال را مدل کند.

2. شرایط همگرایی:

- تبدیل فوریه تنها برای سیگنال‌هایی تعریف می‌شود که انتگرال آن‌ها در تمام بازه زمان (از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت) همگرا باشد.

- تبدیل لاپلاس محدودیت کمتری در همگرایی دارد، زیرا شامل قسمت حقیقی (σ) است که امکان تحلیل سیگنال‌های ناپایدار و سیگنال‌هایی که به مرور زمان محو می‌شوند یا افزایش می‌یابند را فراهم می‌کند.

3. نوع توابع و سیستم‌هایی که تحلیل می‌کنند:

- تبدیل فوریه برای تحلیل توابع متناوب و سیگنال‌های پیوسته در زمان بسیار مناسب است و بیشتر برای تحلیل سیگنال‌های پایدار استفاده می‌شود.

- تبدیل لاپلاس برای تحلیل سیستم‌های غیرپایدار و گذرا، و همچنین برای حل معادلات دیفرانسیل خطی استفاده می‌شود، چون این تبدیل سیگنال‌های ناپایدار و گذرا را هم به خوبی مدل می‌کند.

4. کاربرد در مهندسی:

- تبدیل فوریه در زمینه‌های مانند پردازش سیگنال، تحلیل فرکانس، مخابرات و فیلتر کردن سیگنال استفاده می‌شود.

- تبدیل لاپلاس به صورت ویژه در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، مدارهای الکتریکی، و مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی استفاده می‌شود.

هر دو تبدیل فوریه و لاپلاس به ساده‌سازی مسائل ریاضی پیچیده با تبدیل توابع حوزه زمان به حوزه‌های مربوطه کمک می‌کنند و امکان تحلیل کارآمد سیگنال‌ها و سیستم‌ها را به ما می‌دهند.

***“What we know is not much. What
we don't know is enormous.”
— Pierre Simon De Laplace***