دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکدهٔ مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

درس کنترل خطی

پاسخ تمرین سری دوم

نام و نام خانوادگی	مریم سلطانی
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۱۱۹۴۳۳
تاریخ	آبان ماه ۱۴۰۳

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست برنامه‌ها

۱ سوال یک

۱.۱ حل دستی

اطلاعات داده‌شده از نمودار:

$$M_p = 0.443, \quad t_p = 0.332\,\mathrm{s}, \quad y(\infty) = 1.58$$

با استفاده از M_p، مقدار ζ را به دست می‌آوریم. رابطه‌ی بین M_p و ζ به شکل زیر است:

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

با جایگذاری $M_p = 0.443$، داریم:

$$0.443 = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

با حل این معادله، مقدار ζ به دست می‌آید:

$$\zeta \approx 0.25$$

اکنون فرکانس طبیعی ω_n را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

با جایگذاری $t_p = 0.332$ و $\zeta = 0.25$:

$$\omega_n = \frac{\pi}{0.332\sqrt{1-(0.25)^2}} \approx 9.775$$

طبق قضیه مقدار نهایی داریم:

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s)$$

چون ورودی پله واحد است، یعنی $R(s) = \frac{1}{s}$:

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} T(s)$$

از داده‌های مسئله می‌دانیم که $y(\infty) = 1.58$، پس:

$$k = y(\infty) = 1.58$$

تابع تبدیل حلقه باز $T(s)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

با جایگذاری $k = 1.58$، $\zeta = 0.25$، و $\omega_n = 9.775$:

$$T(s) = \frac{150.97}{s^2 + 2 \times 0.25 \times 9.775\,s + (9.775)^2}$$

که ساده می‌شود به:

$$T(s) = \frac{150.97}{s^2 + 4.8875\,s + 95.55}$$

اکنون تابع تبدیل حلقه بسته $G(s)$ را با استفاده از رابطه بین $T(s)$ و $G(s)$ به دست می‌آوریم:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

در نتیجه:

$$G(s) = \frac{T(s)}{1-T(s)}$$

با جایگذاری $T(s)$:

$$G(s) = \frac{\frac{150.97}{s^2+4.8875\,s+95.55}}{1-\frac{150.97}{s^2+4.8875\,s+95.55}}$$

و با ساده‌سازی:

$$G(s) = \frac{150.97}{s^2+4.8875\,s-55.47}$$

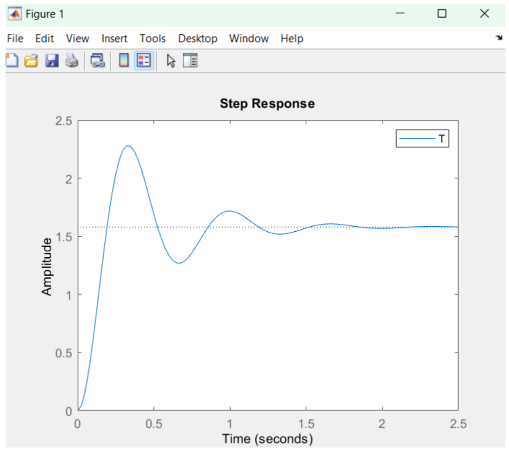
در نتیجه، تابع تبدیل حلقه بسته $G(s)$ به صورت بالا به دست می‌آید.

۲.۱ کد MATLAB

```
clc;clear;close all
s = tf('s');
hold on
T = 150.97/(s^2 + 4.8875*s + 95.55);
step (T,2.5);
legend ('T')
T_info = stepinfo(T);
```

Code 1: open loop (MATLAB)

خروجی به این شکل است:



شکل ۱: رسم در حالت حلقه باز

Field	Value
RiseTime	0.1298
TransientTime	1.4441
SettlingTime	1.4441
SettlingMin	1.2683
SettlingMax	2.2803
Overshoot	44.3234
Undershoot	0
Peak	2.2803
PeakTime	0.3392

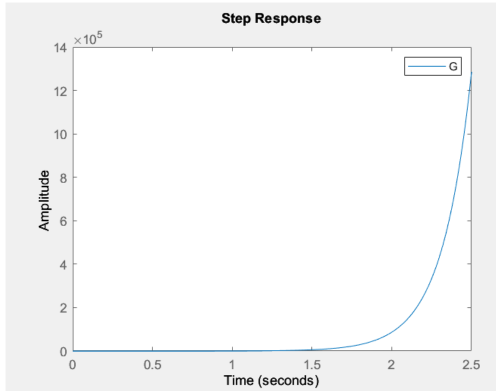
شکل ۲: مشخصات نمودار(۱)

همانطور که مشاهده می‌کنیم خروجی و مشخصات با انتظارات ما تطابق زیادی دارند.

```
clc;clear;close all
s = tf('s');
hold on
G = 150.97/(s^2 + 4.8875*s - 55.47);
step (G,2.5);
legend ('G')
G_info = stepinfo(G);
```

Code 2: closed loop (MATLAB)

خروجی به این شکل است:



شکل ۳: رسم در حالت حلقه بسته

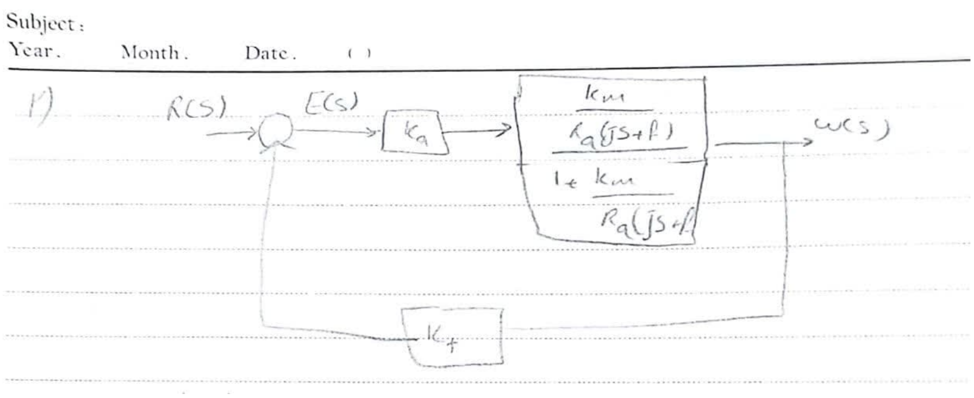
Field	Value
RiseTime	NaN
TransientTime	NaN
SettlingTime	NaN
SettlingMin	NaN
SettlingMax	NaN
Overshoot	NaN
Undershoot	NaN
Peak	Inf
PeakTime	Inf

شکل ۴: مشخصات نمودار(۲)

همانطور که در نمودارهای مربوط به حلقه باز و حلقه بسته می‌بینیم فیدبک باعث پایداری سیستم شده است.

۲ سوال دوم موتور DC

۱.۲ حل دستی



شکل ۵: نمودار بلوکی ساده شده

$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_m K_a}{R_a(Js+F)+K_m K_b}}{1+\frac{K_a K_m K_t}{R_a(Js+t)+K_m K_b}} = \frac{K_m K_a}{R_a(Js+t)+K_m K_b+K_a K_m K_t}$$

اگر $k_t = 0$ آنگاه

$$T(s) = \frac{0.8}{2(s+0.2)+0.4} = \frac{0.4}{s+0.4}$$

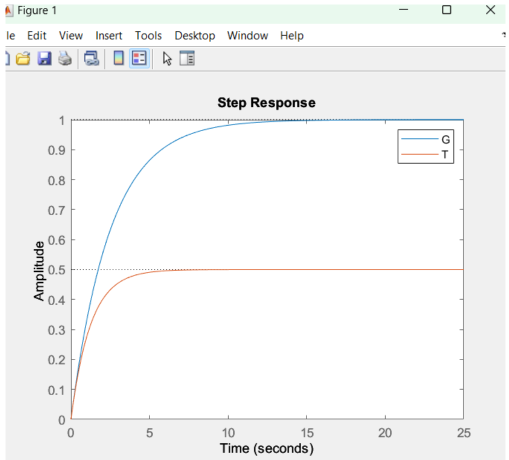
اگر $k_t = 1$ آنگاه

$$T(s) = \frac{0.8}{2(s+0.2)+1.2} = \frac{0.4}{s+0.8}$$

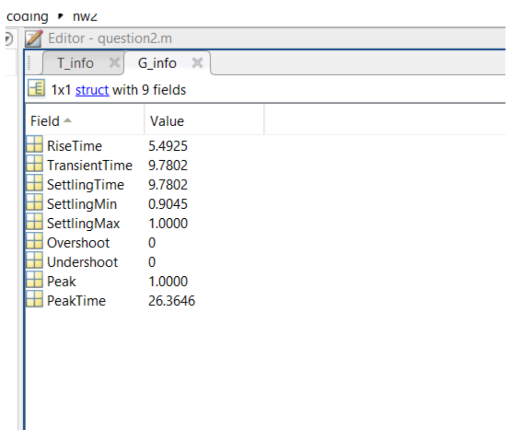
۲.۲ کد MATLAB

```
clc;clear;close all
s = tf('s');
G = 0.4/(s + 0.4); %openLoop
T = 0.4/(s + 0.8); %closeLoop
hold on
legend
step(G)
step(T)
T_info = stepinfo(T);
G_info = stepinfo(G);
```

Code 3: question2 code (MATLAB)



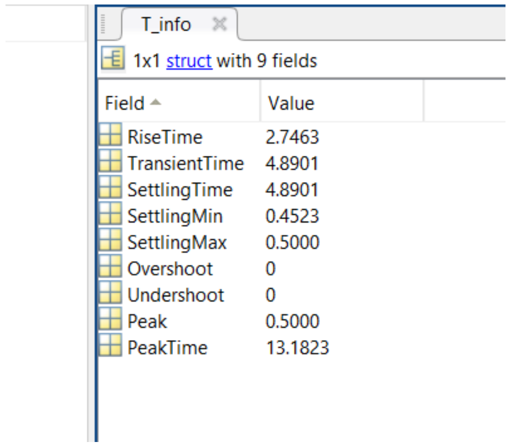
شکل ۶: نمودارها در دو حالت حلقه بسته و حلقه باز


coding ▸ hw2
Editor - question2.m
T_info G_info
1x1 struct with 9 fields

Field	Value
RiseTime	5.4925
TransientTime	9.7802
SettlingTime	9.7802
SettlingMin	0.9045
SettlingMax	1.0000
Overshoot	0
Undershoot	0
Peak	1.0000
PeakTime	26.3646

شکل ۷: پارامترهای مربوط به حلقه باز

تحلیل: همانطور که مشاهده می‌شود خطای ماندگار حالت حلقه بسته از حلقه باز بیشتر است (در حلقه باز تقریبا خطای حالت ماندگار صفر و در حالت حلقه بسته حدود ۰.۵ است.) ثابت زمانی در حالت حلقه باز بیشتر است. با توجه به نتایج کد متلب (قسمت info) زمان خیز در حالت حلقه باز بیشتر است. زمان نشست در حالت حلقه بسته کمتر است چون زودتر به ۵ درصد حالت ماندگارش می‌رسد.



شکل ۸: پارامترهای مربوط به حلقه بسته

۳ سوال سوم

۱.۳ به دست آوردن خطای ماندگار زمان نشست و و فراجهش برای ورودی پله

$$\frac{K}{s^2+4s} = L(s) \Rightarrow \lim_{s\to 0} L(s) = Kp \Rightarrow Kp = \infty$$

بنابراین، خطای حالت ماندگار:

$$E_{ss} = \frac{1}{1+Kp} = 0$$

حال، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T(s) = \frac{\frac{16}{s^2+4s}}{1+\frac{16}{s^2+4s}} = \frac{16}{s^2+4s+16}$$

می‌دانیم فرم استاندارد به شکل زیر است در نتیجه می‌توانیم با تطبیق دادن مجهولات را پیدا کنیم.

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

با فرض اینکه $\omega_n = 4$، $K = 16$ و $zeta = 0.5$ محاسبه می‌کنیم:

$$M_p = 100 \times e^{\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = 16.3\%$$

زمان نشست نیز برابر است با:

$$t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} = 1.6$$

۲.۳ به دست آوردن k به ازای Mp جدید

اکنون، سوال می‌خواهد که $M_p = 5\%$ باشد. بنابراین باید مقدار جدید ζ و سپس K جدید را محاسبه کنیم.

$$M_p = 5 \Rightarrow 5 = 100 \times e^{\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \Rightarrow \zeta = 0.69$$

حال می‌توانیم K جدید را به دست آوریم. با توجه به اینکه:

$$\omega_n = \sqrt{K}$$

$$2\omega_n\zeta = 4$$

$$so : \omega_n = 2.90$$

در نتیجه

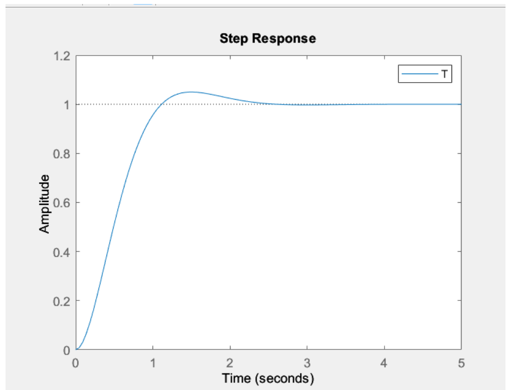
$$K_{\text{new}} = \omega_n^2$$

$$so : K_{\text{new}} = 8.40$$

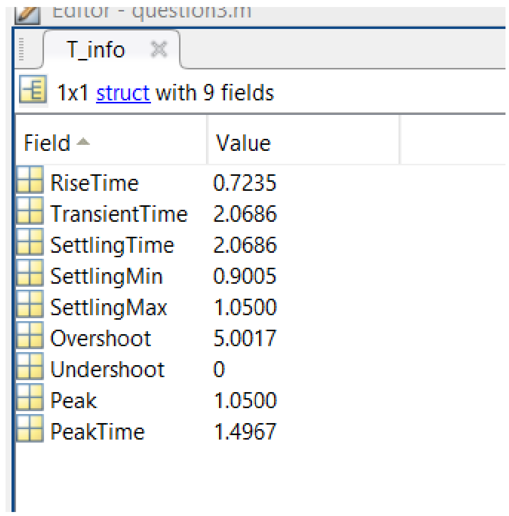
۳.۳ کد MATLAB

```
clc;clear;close all
s = tf('s');
hold on
T = 8.40/(s^2 + 4*s + 8.40);
step (T,5);
legend ('T')
T_info = stepinfo(T);
```

Code 4: question3 code (MATLAB)



شکل ۹: نمودار پاسخ پله



Editor - question3.m

T_info

1x1 struct with 9 fields

Field	Value
RiseTime	0.7235
TransientTime	2.0686
SettlingTime	2.0686
SettlingMin	0.9005
SettlingMax	1.0500
Overshoot	5.0017
Undershoot	0
Peak	1.0500
PeakTime	1.4967

شکل ۱۰: پارامترهای مربوطه

تحلیل: در این حالت مشاهده می‌شود که تابع تبدیل سیستم به مقدار ۱ میرا می‌شود در نتیجه پایدار است.

۴.۳ مقادیر به ازای k = ۴

فرض کنیم $K = 4$ باشد. در این صورت، پارامترهای سیستم به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\omega_n = \sqrt{K} = 2 \Rightarrow \zeta = 1$$

بنابراین، محاسبه فراجهش (M_p) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$M_p = e^{\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = e^{\left(-\frac{\pi}{0}\right)} = e^{-\infty} = 0$$

بنابراین در این حالت فراجهش صفر خواهد بود.

۴ سوال چهارم

روابط سیستم به صورت زیر است:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+KG(s)}D(s), \quad E(s) = D(s) - kY(s), \quad D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} = \frac{1}{s}$$

خطای ماندگار e_{ss} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s\to 0} SE(s) = \lim_{s\to 0}\left(1 - \frac{KG(s)}{1+KG(s)}\right) = -B \Rightarrow G(0) = -\frac{1+B}{BK} \quad \text{(I)}$$

برای محاسبه خطای ماندگار از ورودی پله، فرض می‌کنیم که $d(t) = 0$ و $r(t) = U(t)$ است. بنابراین:

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \cdot \frac{1}{s}, \quad L(s) = KG(s), \quad e_{\text{ss}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+L(0)}$$

با توجه به رابطه (I) داریم:

$$e_{\text{ss}} = \frac{1}{1+KG(0)} = \frac{1}{1-\frac{1+B}{B}} = -B$$

۵ سوال پنجم

داریم:

$$e(s) = \frac{1}{1+G(s)}r(s) \quad \text{(I)}$$

و

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)-Y(s)} \quad \text{(II)}$$

چن ورودی پله واحد می‌باشد، نتیجه می‌گیریم:

$$e(s) = \frac{1}{1+\frac{Y(s)}{X(s)-Y(s)}}r(s) = \frac{X(s)-Y(s)}{X(s)}r(s) = \frac{1}{s}\frac{X(s)-Y(s)}{X(s)}$$

چون سیستم پایدار است انتگرال مورد نظر به مقدار ثابتی همگرا می‌شود و از قضیه مقدار نهایی می‌توان نوشت: (برای حل حد از هوپیتال استفاده می‌شود)

$$I = \int_0^\infty e(t)\,dt = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{X(s)-Y(s)}{sX(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{X'(s)-Y'(s)}{X(s)+sX(s)} = X'(0) - Y'(0)$$

می‌توانیم X'(۰) و Y'(۰) را به صورت زیر بنویسیم:

$$Y'(0) = (A_1 + A_2 + A_3 + \dots), \quad X'(0) = (B_1 + B_2 + B_3 + \dots)$$

در نتیجه:

$$I = -(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) + (B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_m)$$