

بررسی استفاده از مشتق‌گیری در روش راث-هرویتز هنگام صفر شدن یک ردیف کامل

مقدمه

روش راث-هرویتز یکی از روش‌های تحلیلی پرکاربرد در بررسی پایداری سیستم‌های کنترلی و دینامیکی است. این روش بدون نیاز به محاسبه مستقیم ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه، امکان بررسی تعداد قطب‌های ناپایدار را فراهم می‌کند. در این روش، با تشکیل جدول راث، تعداد قطب‌های سمت راست صفحه مختلط و به تبع آن، پایداری سیستم مشخص می‌شود. یکی از چالش‌های این روش زمانی رخ می‌دهد که یک ردیف از جدول راث به‌طور کامل صفر شود. این وضعیت نشان‌دهنده وجود قطب‌های مختلط خالص روی محور موهومی است که ممکن است موجب پایداری مرزی سیستم شود. در این تحقیق به بررسی این پدیده، علت وقوع آن و راه‌حل مشتق‌گیری برای ادامه تحلیل پایداری پرداخته می‌شود.

چرا یک ردیف کامل صفر می‌شود؟

ظاهر شدن یک سطر کاملاً صفر در جدول راث معمولاً در یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

1. وجود قطب‌های مختلط خالص روی محور موهومی:

- در این حالت، سیستم دارای نوسانات پایدار بدون میرایی یا با میرایی بسیار کم است.
- صفر شدن ردیف نشان‌دهنده وجود یک چندجمله‌ای که فقط شامل توان‌های زوج است می‌باشد.

2. وجود چندجمله‌ای متقارن در ضرایب چندجمله‌ای مشخصه:

- در برخی موارد، ضرایب چندجمله‌ای مشخصه به گونه‌ای مرتب شده‌اند که باعث ایجاد ردیف صفر در جدول راث می‌شود.

چرا مشتق‌گیری لازم است؟

مشتق‌گیری در روش راث-هرویتز یک ابزار کمکی است که به ما امکان می‌دهد تحلیل پایداری را حتی در شرایطی که جدول راث دچار مشکل می‌شود (ردیف صفر) ادامه دهیم و سیستم را به‌درستی بررسی کنیم. این کار به دلایل زیر انجام می‌شود:

□ حفظ اطلاعات قطب‌های روی محور موهومی: چندجمله‌ای کمکی دارای همان ریشه‌های مختلطی

است که روی محور موهومی قرار دارند. مشتق این چندجمله‌ای به ما کمک می‌کند تا بتوانیم تغییرات را در جدول راث ادامه دهیم.

□ ایجاد ضرایب جدید غیر صفر: اگر مستقیماً از همان چندجمله‌ای استفاده کنیم، جدول به بن بست می‌رسد. اما مشتق‌گیری منجر به تولید مقادیر جدید می‌شود که می‌توانند جایگزین سطر صفر شوند و روش را ادامه دهند.

□ بررسی پایداری نسبی: مشتق‌گیری باعث می‌شود که بتوانیم سیستم را به‌طور کامل تحلیل کنیم و ببینیم که آیا قطب‌های روی محور موهومی واقعاً پایداری دارند یا خیر.

چگونه با صفر شدن یک ردیف برخورد کنیم؟

روش استاندارد برای حل این مشکل، ساختن یک چندجمله‌ای کمکی و سپس مشتق‌گیری از آن است. این فرآیند به صورت زیر انجام می‌شود:

1. تشکیل چندجمله‌ای کمکی:

○ از سطر قبل از ردیف صفر، چندجمله‌ای کمکی که شامل توان‌های زوج است، ساخته می‌شود.

2. مشتق‌گیری از چندجمله‌ای کمکی:

○ مشتق چندجمله‌ای کمکی نسبت به محاسبه شده و ضرایب جدید جایگزین ردیف صفر در جدول راث می‌شوند.

مثال کاربردی

در نظر بگیرید که چندجمله‌ای مشخصه روبرو داده شده است $P(s) = s^4 + 4s^2 + 9$

جدول راث اولیه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$s^4 \quad 1 \quad 9$$

$$s^3 \quad 0 \quad 4$$

$$s^2 \quad 4 \quad 9$$

$$s^1 \quad 0 \quad 0$$

$$s^0 \quad 9$$

در اینجا، یک سطر کاملاً صفر (s^1) ظاهر شده است. برای حل این مشکل:

1. چندجمله‌ای کمکی ساخته می‌شود

2. مشتق گرفته می‌شود

3. مقادیر حاصل جایگزین سطر صفر می‌شوند تا تحلیل ادامه یابد.

نتیجه‌گیری

روش راث-هرویتز ابزاری قدرتمند برای بررسی پایداری سیستم‌های کنترلی است. یکی از چالش‌های مهم این روش، ظاهر شدن یک سطر کاملاً صفر در جدول است که نشان‌دهنده‌ی وجود قطب‌های مختلط خالص روی محور موهومی است. برای مقابله با این مشکل، از چندجمله‌ای کمکی استفاده شده و مشتق آن محاسبه می‌شود تا ضرایب جدیدی برای ادامه تحلیل به دست آید. این تکنیک به ما اجازه می‌دهد پایداری نسبی سیستم را بررسی کرده و تأثیر قطب‌های روی محور موهومی را درک کنیم.

مریم سلطانی 40119433