Р О З Д І Л 2.

ПОЧАТКОВО-КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Початково-крайові задачі для рівнянь параболічного типу описують різноманітні дисипативні процеси у суспільних середовищах, зокрема такі як теплопровідність у пружніх тілах і перенос та дифузія домішок у газах і рідинах. Саме на цих прикладах зосередимо увагу в даному розділі, причому фізичний аспект (як один із категорій практики) буде постійно наголошуватися при побудові та обгрунтуванні чисельних схем. Цьому всюди будуть сприяти вживані нами варіаційні постановки згаданих задач.

З огляду на привабливі властивості методу Гальоркіна використовуємо його процедуру для наближеного розділення змінних так, що вихідна варіаційна задача природно дискретизується за просторовими змнними, лишаючи час і надалі неперервним. Ця обставина приводить до величезного спрощення вихідної задачі - для відшукання наближеного розв’язку. Нам необхідного тепер розв’язати задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Для інтегрування останніх, на нашу думку, в даний час не існує альтернативи проекційному методу, який ми й використовуємо для побудови рекурентних схем.

1. Постановка варіаційної задачі теплопровідності.

1.1. Початково-крайова задача.

Нехай, як і раніше, Ω - обмежена зв’язна область точок $x = (x_1, \ldots, x_n)$ евклідового простору $\boldsymbol{R}^n$ з неперервною за Ліпшицем границею Γ і час $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Розглянемо початково-крайову задачу теплопровідності: знайти функцію $u = u\,(x, t)$ таку, що

$$\begin{cases} C_V\,\rho\,(\dfrac{\partial u}{\partial t} - f) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\{\lambda_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\} = 0 & \text{в} \quad \Omega \times [0, T], \\ u = 0 & \text{на} \quad \Gamma \times [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{в} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут $u = u\,(x, t)$ - шуканий розподіл температури, що виникає в суцільному середовищі, яке займає область Ω, під дією заданої інтенсивності $f = f\,(x, t)$ внутрішніх джерел теплоти. Початковий розподіл температури описується відомою функцією $u_0 = u_0(x)$. Фізичні характеристики середовища характеризуються густиною маси $\rho = \rho\,(x) > 0$, коефіцієнтом теплоємності при постійному об’ємі $C_V = C_V\,(x) > 0$ та коефіцієнтами теплопровідності $\{\lambda_{ij}\}^n_{i,j=1}$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x) \geq 0$, які володіють звичайними властивостями симетрії та еліптичності:

$$\begin{cases} \lambda_{ij} = \lambda_{ij}\,, \\ \lambda_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geq \lambda_0\,\xi_i\,\xi_j \qquad V(\xi_i)^n_{i=1} \in \boldsymbol{R}^n\ \lambda_0 = const > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Тут і далі, де спеціально не відзначено, за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до n.

Крім цього, будемо вважати, що для даних початково-крайової задачі (1.1) мають місце включення

$$\begin{cases} \rho, C_V, \lambda_{ij} \in L^\infty(\Omega), u_0 \in L^2(\Omega) \\ f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{cases} \tag{1.3}$$

Зауваження 1.1. Лише з метою деякого спрощення запису (див. п.6 розд. 1) і без втрати загальності крайова умова Діріхле в задачі (1.1) прийнята однорідною.

В багатьох практичних задачах теплопровідності може зустрічатись такий набір крайових умов:

$$\begin{cases} u = 0 \text{ на } \Gamma_u \times [0, T], \Gamma_u \subset \Gamma, mes(\Gamma_u) > 0, \\ \lambda_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i + \alpha(u - g) = 0 \text{ на } \quad \Gamma_q \times [0, T], \quad \Gamma_q = \Gamma \mid \Gamma_u, \end{cases} \tag{1.4}$$

де $\nu = \{\nu_i\}^n{}_{i=1}$, $\nu_i = cos(\nu, x_i)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ; $\alpha = \alpha(x) \geq 0$ - коефіцієнт теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого задається функцією $g = g(x, t)$, при цьому

$$\alpha \in L^\infty(\Gamma_q), \; g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_q)). \tag{1.5}$$

Задачі даного типу також можуть бути включені у вживану нижче схему досліджень.

Вправа 1.1. Розглянемо одновимірну задачу теплопровідності з постійними коефіцієнтами і $\Omega = (a, b) \subset \boldsymbol{R}$:

$$\begin{cases} \rho C_V (\dfrac{\partial u}{\partial t} - f) - \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{в } (a, b) \times [0, T], \\ \qquad u|_{x=a} = 0, \{\lambda \dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\}|_{x=b} = \alpha g \quad \text{на } [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0 \text{ в } (a, b). \end{cases} \tag{1.6}$$

Покажіть, що перехід до безрозмірних змінних z, τ за правилом

$$x = \frac{\lambda}{\alpha} z, \qquad t = \frac{\rho C_V \lambda}{\alpha^2} \tau. \tag{1.7}$$

приводить значення кофіцієнтів задачі (1.6) до одиничних.

На далі будуть цікавити узагальнені розв'язки задачі (1.1). З цією метою зробимо варіаційну постановку цієї задачі

1.2. Варіаційна задача.

Введемо простори

$$V = H_0^1(\Omega), V' = H^{-1}(\Omega), H = L^2(\Omega) \tag{1.8}$$

і наступні позначення:

$$u(t) = u(x, t) \text{ - функція } x \to u(x, t);$$

$$u'(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t} \text{ - функція } x \to \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \tag{1.9}$$

Тоді, з огляду на перші два рівняння задачі (1.1) та формулу Гріна, знаходимо

$$0 = \int\limits_{\Omega} \{C_V\, \rho\, [u'(t) - f(t)] - \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij} \frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\} v dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \{\rho\, C_V\; [u'(t) - f(t)]\, v + \lambda_{ij} \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\} dx \qquad \forall\; v \in V \qquad (1.10)$$

Введемо білінійні форми та лінійний функціонал

$$\begin{cases} m(u, v) = \int\limits_{\Omega} \rho\, c_V\, uvdx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\; v \in V \\ a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \lambda_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \dfrac{\partial v}{\partial x_i} dx \end{cases} \qquad (1.11)$$

$$< l, v > = m(f, v) \qquad \forall\; v \in V,$$

тоді рівняння (2.1) та початкова умова задачі (1.1) дозволяє навести її варіаційну постановку:

$$\begin{cases} \text{задано } u_0 \in H, \quad l \in L^2(0, T; V'); \\ \text{знайти функцію } u \in L^2(0, T; V') \text{ таку, що} \\ m(u'(t), v) + a(u(t), v) = < l(t), v > \quad \forall\; v \in V \qquad m(u(0) - u_0, v) = 0. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Розв’язок варіаційної задачі (1.13) будемо називати узагальненим розв’язком початково-крайової задачі (1.1)

<u>Зауваження 1.2.</u> При належному запасі гладкості у функції u_0 з однаковим успіхом початкову умову задачі (1.13) можна було б прийняти у вигляді

$$a(u(0) - u_0, v) = 0 \qquad \forall\; v \in V. \qquad (1.14)$$

Все ж таки з посиланням на енергетичні рівняння (див. розд. 1, п. 2.3 та вправу 2.3) ми віддаємо перевагу постановці задачі у формі (1.13).

<u>Вправа 1.2.</u> Наведіть варіаційну постановку задачі (1.6).

<u>Вправа 1.3.</u> В теплопровідності важливу роль відіграє вектор теплового потоку $q = \{q_i\}^n_{i=1}$, який визначається через градієнт температури u таким чином:

$$q_i = - \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \qquad (1.15)$$

у застосуваннях, де температура і тепловий потік однаково важливі для характеристики температурного поля, представляє інтерес така форма початково-крайової задачі (1.1): знайти температуру $u = u(x, t)$ та вектор теплового потоку $q = q(x, t)$ такі, що

$$\begin{cases} \rho\, C_V\; (u' - f) + div\, q = 0 \\ A_{ij}\, q_j - \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, ..., n \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T\,] \\ u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0, T\,] \qquad u|_{t=0} = u_0 \text{ в } \Omega, \end{cases} \qquad (1.16)$$

де матриця $\{A_{ij}\}^n_{i,j=1}$ обернена до матриці коефіцієнтів теплопровідності $\{\lambda_{ij}\}^n_{i,j=1}$.

1. Покажіть, що за умов (1.2) матриця $\{A_{ij}\}^n_{i,j=1}$ існує, симетрична і додатно визначена.

2. Користуючись наведеною процедурою, наведіть дві різні (відповідні різним використанням формул Гріна) варіаційні форми задачі (1.16). Переконайтесь, що одна з них співпадає з такою задачею:

$$\begin{cases} \text{задано } V = H_0^1(\Omega),\, H = L^2(\Omega),\, u_0 \in H, f \in L^2(0, T; V']; \\ \text{знайти пару } (u, q) \in L^2(0, T; V) \times \in L^2(0, T; H^n) \\ \text{таку, що } m(u'(t), v) + b(q(t), v) = < l(t), v > \qquad \forall\; v \in V \end{cases} \qquad (1.17)$$

$$\begin{cases} A\,(q\,(t), \gamma\,) - b\,(\gamma, u\,(t) = 0 & \forall \gamma \in H^n \\ m\,(u\,(0) - u_0, v) = 0, & \end{cases}$$

де на додаток до (1.11) та (1.12) введені форми

$$\begin{cases} b\,(\gamma, v) = \int\limits_{\Omega} \gamma_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \partial x \\ \forall\, v \in V \quad \forall\, q,\gamma \in H^n \\ A\,(q, \gamma\,) = \int\limits_{\Omega} A_{ij}\, q_i\, q_j\, dx \end{cases} \tag{1.18}$$

1.3. Властивості білінійних форм

На цьому етапі важливо відзначити, що

$$\begin{cases} \text{симетрична неперервна білінійна форма } m\,(\,\cdot, \cdot\,) \text{ з (1.11)} \\ \text{є } H \text{ - еліптичною і породжує норму } \|\, u \,\|_H = m^{\frac{1}{2}}\,(u, u) \quad \forall\, u \in H, \\ \text{еквівалентну нормі } \|\cdot\|_{1,\Omega}\,; \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} \text{симетрична неперервна білінійна форма } a\,(\,\cdot, \cdot\,) \text{ з (1.11)} \\ \text{є } V \text{ - еліптичною і породжує норму } \|\, u \,\|_V = a^{\frac{1}{2}}\,(u, u) \quad \forall\, u \in V, \\ \text{еквівалентну нормі } \|\cdot\|_{1,\Omega}\,; \end{cases} \tag{1.20}$$

Вправа 1.4. Переконайтесь у справедливості тверджень (1.19) та (1.20).

Вправа 1.5. Якими властивостями володіють білінійні форми, визначені (1.18)?

Приклад 1.1. Варіаційна задача для одновимірної теплопровідності.

Визначимо $V = \{v \in H^1\,((a, b)) \mid v(a) = 0\}$ $H = L^2\,((a, b))$.
Тоді варіаційна форма задачі (1.6) має вигляд (1.13), де

$$m\,(u, v) = \int_a^b \rho\, c_V\, uv dx,\; a(u, v) = \int_a^b \lambda\, \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx + \alpha\,(uv)\,|_{x=b}, \tag{1.21}$$

$$< l, v > = m\,(f, v) + \alpha g v\,(b) \qquad \forall\, u, v \in V.$$

Далі (див. п. 2.3) надамо фізичного змісту нормам $\|\cdot\|_H$ та $\|\cdot\|_V$.

Потужним інструментом конструктивного дослідження варіаційної задачі (1.13) є її дискретизація Гальоркіна відносно просторових змінних.

2. Напівдискретні апроксимації Гальоркіна.

2.1. Простори апроксимацій.

Нехай послідовність скінченномірних просторів $\{V_h\}$ із простору V така, що

$$\begin{cases} dim\, V_h = N(h) = N \to \infty \text{ при } p \to 0; \\ \bigcup\limits_{h>0} V_h \text{ щільно вкладена в } V, \text{ тобто для} \\ \text{кожної функції } v \in V \text{ і довільного } \varepsilon > 0 \\ \text{знайдеться } h > 0 \text{ та } v_h \in V_h \text{ такі, що} \\ \|\, v - v_h \|_V \le \varepsilon. \end{cases}$$

У цьому випадку змінну h будемо називати параметром дискретизації за просторовими змінними, а V_h - просторами апроксимації. Через $\{\varphi_i\}^{N}_{i=1}$ будемо позначати деяким чином вибраний базис простору V_h.

2.2. Напівдискретизована задача.

По відношенню до варіаційної задачі (1.13) задачу

$$\begin{cases} \text{задано } h = const > 0,\ u_0 \in H,\ l \in L^2\,(0, T;\, V'); \\ \text{знайти функцію } u \in L^2\,(0, T;\, V_h) \text{ таку, що} \\ m\,(u'_h\,(t), v) + a\,(u_h\,(t), v) = < l\,(t), v > \forall\ v \in V_h \qquad m\,(u_h\,(0) - u_0 v) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

будемо називати напівдискретизованою (за просторовими змінними) варіаційною задачею, а її розв'язок $u_h\,(t)$ - напівдискретною апроксимацією Гальоркіна розв'язку $u\,(t)$ задачі (1.13). Введена термінологія пояснюється такими міркуваннями.

2.2.1. Включення $u_h \in L^2\,(0, T;\, V_h)$ приводить до розкладу за базисом

$$U_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N} U_j\,(t)\ \varphi_j\,(x) \tag{2.3}$$

з невідомими коефіцієнтами (функціями часу) $U\,(t) = \{U_j\,(t)\}^{N}_{j=1}$ з простору L^2 ((0, T)). Таким чином, перенесення розв'язування варіаційної задачі в скінченномірний простір V_h призводить до величезного спрощення цієї задачі - замість відшукання невідомої функції просторових змінних та часу потрібно знайти N невідомих функцій від часу. Конкретизацією задачі (2.2) лишається відшукати умови їх визначення.

Зауваження 2.1. Розклад (2.3) означає розділення змінних x і t, при якому лишається невідомою лише поведінка розв'язку в часі. Власне цю обставину ми маємо на увазі, вживаючи термін «напівдискретизація за просторовими змінними».

2.2.2. Підставляючи (2.3) у рівняння задачі (2.2) і послідовно приймаючи $v = \varphi_j\,(x)$, $i = 1, ..., N$, приходимо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} \{\, m_{i\,j}\, U'_j\,(t) + a_{i\,j}\, U_j\,(t)\} = f_i\,(t) \qquad t \in (0, T\,] \\ \\ \sum\limits_{j=1}^{N} m_{i\,j}\, U_j\,(0) = P_i \qquad i = 1, ..., N \end{cases} \tag{2.4}$$

Відносно вектора невідомих $U(t) = \{U_j\,(t)\}^{N}_{j=1}$. Тут

$$m_{i\,j} = m\,(\varphi_i, \varphi_j), \quad a_{i\,j} = a\,(\varphi_i\ \varphi_j) \qquad i, j = 1, ..., N \tag{2.5}$$

$$f_i\,(t) = < l\,(t), \varphi_i > = m\,(f\,(t), \varphi_i\,), \qquad P_i = m\,(u_0, \varphi_i\,). \tag{2.6}$$

Вживаючи матричні позначення, задачу Коші (2.4) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \text{знайти вектор } U(t) \text{ такий, що} \\ MU'(t) + AU(t) = F(t) \qquad t \in (0, T\,] \\ MU(0) = P, \end{cases} \tag{2.7}$$

де коефіцієнти матриць $M = \{m_{\,i\,j}\}^{N}_{i,\,j\,=1}$, $A = \{a_{\,i\,j}\}^{N}_{i,\,j\,=1}$ і коефіцієнти векторів $F(t)$, P обчислюються згідно з виразами (2.5) і (2.6).

Як наслідок тверджень (1.19) та (1.20) констатуємо, що матриці M та A є матрицями Грама системи лінійно незалежних функцій $\{\varphi_{\,i}\}^{N}_{i\,=1}$ відносно скалярних добутків $m\,(\,\cdot, \cdot\,)$ та $a\,(\,\cdot, \cdot\,)$. Тому

$$\begin{cases} \text{симетричні матриці} \\ \quad M = \{m\,(\varphi_i\ \varphi_j)\ \}^N_{i,j=1}, \qquad A = \{a\,(\varphi_i\ \varphi_j)\ \}^N_{i,j=1}, \\ \text{додатно визначені} \end{cases} \tag{2.8}$$

і, отже, задача Коші (2.4) розв'язується однозначно.

Таким чином, для кожного фіксованого значення параметра дискретизації $h > 0$ напівдискретні апроксимації Гальоркіна $u_h(t) \in V_h$ однозначно визначаються задачею коші (2.4) та розкладом (2.3) за базисом простору V_h.

<u>Вправа 2.1.</u> Твердження (2.8) дає більше, ніж необхідно для однозначної розв'язуваності задачі Коші (2.7). Достатньо вимагати, що $det\,M \neq 0$.

Замініть крайову умову Діріхле задачі (1.1) однорідною умовою (теплоізольованості) Неймана

$$\lambda_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma \times [0, T\,]. \tag{2.9}$$

Встановіть структуру варіаційної задачі (1.13) і покажіть, що тепер твердження (1.20) втрачає силу. Незважаючи на ці зміни переконайтеся, що напівдискретні апроксимації відшукуються однозначно.

Порівняйте цей факт з висновком вправи 2.7.

2.3. Енергетичне рівняння.

Встановимо додаткові властивості напівдискретних апроксимацій Гальоркіна $u_h \in L^2\,(0, T;\ V_h)$, що визначаються як розв'язки задачі (2.2).

Підстановка $v = u_h(t)$ у рівняння задачі (2.2) приводить їх до вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\ m\,(u_h\,(t), u_h\,(t)) + a\,(u_h\,(t), u_h\,(t)) = <l\,(t), u_h\,(t)>, \\ m\,(u_h\,(0), u_h\,(0)) = m\,(u_0, u_h\,(0)) \end{cases}$$

або з огляду на (1.19) та (1.20)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\,\|\,u_h\,(t)\|^2_H + \|\,u_h\,(t)\|^2_V = <l\,(t), u_h\,(t)> \qquad t \in (0, T\,], \\ \|\,u_h\,(0)\|^2_H = m\,(u_0, u_h\,(0)). \end{cases} \tag{2.10}$$

<u>Вправа 2.2.</u> Переконайтеся, що $\|\,u_h\,(0)\|_H \leq \|\,u_0\,\|_H$. Встановіть існування константи α такої, що

$$\|v\|_V \geq \alpha\|v\|_H \qquad \forall v \in V \qquad \alpha = const > 0. \tag{2.11}$$

Інтегруючи рівняння (2.10) по t, знайдемо

$$\frac{1}{2}\|\,u_h\,(t)\|^2_H + \int_0^t \|\,u_h\,(\tau\,)\|^2_V\,d\tau = \frac{1}{2}\|\,u_h\,(0)\|^2_H + \int_0^t <l(\tau\,), u_h\,(\tau\,)>d\tau \tag{2.12}$$

Рівняння (2.10) і (2.12) називаються енергетичними рівняннями температурного поля, при цьому кожен доданок допускає наступну фізичну інтерпретацію:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\|\,u_h\,(t)\|^2_H \text{ - енергія температурного поля;} \\ \|\,u_h\,(t)\|^2_V \quad \text{- інтенсивність дисипації,} \\ \text{зумовлена розсіянням температурного поля;} \end{cases} \tag{2.13}$$

$< l(t), u_h(t) >$- потужність джерел теплоти;
$\frac{1}{2} \| u_0 \|^2_H$ - значення початкової енергії.

Таким чином, рівняння (2.10) стверджує, що потужність розподілених в середовищі джерел теплоти витрачається на зміну енергії температурного поля та його розсіяння (незворотні втрати).

Вправа 2.3. Наведіть фізичну інтерпретацію рівняння (2.12). Чи можливе рівняння виду (2.12) при заміні початкової умови задачі (1.13) початковою умовою (1.14)?

Вправа 2.4. Побудуйте задачу Коші для знаходження напівдискретних апроксимацій Гальоркіна (u_h, q_h) варіаційної задачі (1.17). Які відмінності її структури у порівнянні з розглянутим випадком ви зауважили? Сформулюйте енергетичні рівняння для цієї задачі і порівняйте їх з (2.10), (2.12); покажіть, що значення інтенсивності дисипації енергії цілком характеризується вектором теплового потоку $q_h(t)$. Який фізичний зміст члена $b(q_h(t), u_h(t))$?

Зауваження 2.2. Енергетичне рівняння (2.2) може використовуватись як для контролю за точністю чисельних схем інтегрування в часі задачі теплопровідності, так і для верифікації розробленого програмного забезпечення.

2.4. Апріорні оцінки (I).

Використовуючи елементарну нерівність

$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2 \quad \forall a, b \in \boldsymbol{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{2.14}$$

та (2.11), обчислюємо, що

$$\begin{aligned} |< l(t), u_h(t) >| &= | m(f(t), u_h(t))| \le \| f(t)\|_H, \| u_h(t)\|_H \le \\ &\le \alpha^{-1} \| f(t)\|_H, \| u_h(t)\|_V \le \\ &\le \frac{1}{2} \| u_h(t)\|^2_V + \frac{1}{2\alpha^2} \| f(t)\|^2_H; \end{aligned} \tag{2.15}$$

тоді (2.12) разом з (2.15) дають змогу знайти наступну оцінку:

$$\begin{aligned} &\| u_h(t)\|^2_H + \int_0^t \| u_h(\tau)\|^2_V d\tau \le \| u_0 \|^2_H + \\ &\quad + \alpha^{-1} \int_0^t \| f(\tau)\|^2_H d\tau \qquad t \in [0, T] \qquad \forall h > 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Таким чином,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{напівдискретні апроксимації Гальоркіна } \{u_h\} \\ \text{утворюють обмежену множину в просторі} \\ L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \text{ при } h \to 0. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Цей факт свідчить про стійкість напівдискретних апроксимацій. Більш точно нами доведена.

Теорема 2.1 (про напівдискретні апроксимації).

Нехай задано фіксоване значення параметра дискретизації $h > 0$ і $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ - базис простору апроксимацій V_h.

Тоді напівдискретизована варіаційна задача (2.2) допускає єдиний розв'язок $U_h \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, який однозначно визначається задачею Коші (2.4) та розкладом за вибраним базисом (2.3).

Наслідок 2.1.

Для кожного $h > 0$ напівдискретизована варіаційна задача (2.2) коректно поставлена.

2.5. Апріорні оцінки ($I\,I$).

У певній мірі уточними характер обмеженості напівдискретизованих апроксимацій U_h у просторі $L^\infty(0, T; H)$.

Перепишемо перше з рівнянь (2.10) таким чином:

$$\| u_h(t)\|_H \frac{d}{dt} \| u_h(t)\|_H + \| u_h(t)\|^2_V = < l(t), u_h(t)>,$$

і скористаємось оцінками (2.11) та (2.15). В результаті отримуємо нерівність

$$\frac{d}{dt} \| u_h(t)\|_H + \alpha \| u_h(t)\|_H \le \| f(t)\|_H . \qquad (2.18)$$

Якщо зауважити, що

$$\frac{d}{dt}\{e^{at} g(t)\} = e^{at}\{\frac{d}{dt} g(t) + ag(t)\},$$

то нерівність (2.18) зводиться до вигляду

$$\frac{d}{dt}\{e^{\alpha^2 t} \| u_h(t)\|_H \} \le e^{\alpha^2 t} \| f(t)\|_H ,$$

звідки

$$\| u_h(t)\|_H \le e^{-\alpha^2 t} \| u_0\|_H + \int_0^t e^{-\alpha^2 (t-\tau)} \| f(\tau)\|_H \, d\tau \qquad \forall\, h > 0. \qquad (2.19)$$

Одержана оцінка знову показує належність напівдискретних апроксимацій u_h до простору $L^\infty(0, T; H)$; більш того, вона встановлює характер їх поведінки за відсутності внутрішніх джерел теплоти ($f \equiv 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{за рахунок дисипативного доданку (з мультиплікативною} \\ \text{константою } \alpha > 0\text{) температурне поле замикає згідно з} \\ \text{експоненціальним законом із збільшенням часу } t \to \infty. \end{array} \right. \qquad (2.20)$$

<u>Вправа 2.5.</u> Побудуйте апріорні характеристики для напівдискретних апроксимацій варіаційної задачі (1.17).

2.6. Обчислювальні аспекти МСЕ.

Зосередимо увагу на питаннях формування задачі Коші (2.7) напівдискретизації Гальоркіна. Для ознайомлення з деталями цієї процедури зупинимось на одновимірній задачі теплопровідності (1.6) і виборі просторів апроксимацій МСЕ.

2.6.1. Модельна задача. Нижче ми будемо мати справу з наступною варіаційною задачею (див. вправу 1.1 та приклад 1.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } V = \{v \in H^1((a, b)) \mid v(a) = 0\},\ H = L^2((a, b)); \\ \qquad f \in L^2(0, T; H);\ g \in L^2((0, T)),\ u_0 \in H; \\ \text{знайти } u_h \in L^2(0, T; V_h) \text{ таку, що} \\ m(u'_h(t), v) + a(u_h(t), v) = < l(t), v> \quad \forall v \in V_h, \\ \qquad\qquad m(u_h(0) - u_0, v) = 0, \end{array} \right. \qquad (2.21)$$

де

$$m(u, v) = \int_a^b \rho\, c_V\, uv dx, \qquad a(u, v) = \int_a^b \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \partial x + \alpha uv|_{x=b},$$

$$< l, v> = m\,(f, v) + \alpha g v|_{x=b}, \qquad \forall\ u, v \in V. \tag{2.22}$$

Конкретний вигляд напівдискретної апроксимації

$$u_h\,(x, t) = \sum_{j=1}^{N} U_j\,(t)\ \varphi_j\,(x) \tag{2.23}$$

характеризується вибором базису $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ простору апроксимацій V_h, $dim\ V_h=N$.

2.6.2. Кусково-лінійні простори апроксимацій МСЕ. Відрізок $[a, b]$ за допомогою послідовності вузлів

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, ..., N, \ \ h = \frac{b-a}{N},$$

покриємо сіткою скінченних елементів $[x_k, x_{k+1}]$.

Будемо вважати, що довжина h кожного відрізка (або параметра дискретизації) настільки мала, що достатньо вважати залежність апроксимації (2.23) від змінної x лінійною в межах кожного скінченного елемента. Тоді зручно домовитись, що

$$\begin{cases} U_h(x, t) = U_k(t)\ \omega\,(x_{k+1}; x) + U_{k+1}(t)\ [1 - \omega\,(x_{k+1}; x)], \\ \forall\ (x, t) \in [x_k, x_{k+1}] \times [0, T], \qquad k = 0, ..., N, \end{cases} \tag{2.24}$$

де

$$\omega\,(x_m; x) = h^{-1}\,(x_m - x). \tag{2.25}$$

Дійсно у цьому випадку

$$u_h\,(x_m, t) = U_m(t), \qquad m = 0, ..., N \tag{2.26}$$

і, таким чином, одержуємо важливу характеристику МСЕ:

$$\begin{cases} \text{кожен коефіцієнт } U_m(t) \text{ напівдискретної апроксимації} \\ \text{Гальоркіна (2.23) описує поведінку розв'язку у вузлі} \\ \text{сітки } x \text{ з плином часу } t \in [0, T]. \end{cases} \tag{2.27}$$

Припущення (2.24) фактично означає, що ми неявно вже вибрали простір V_h - це всеможливі неперервні кусково-визначені функції, які лінійно змінюються в межах кожного скінченного елемента. Порівняння (2.23) та (2.24) дозволяє встановити вигляд базисних функцій цього простору

$$\varphi_j\,(x) = \begin{cases} 0, & a \le x \le x_{j-1} \\ 1 - \omega\,(x_j; x), & x_{j-1} \le x < x_j \\ \omega\,(x_{j+1}; x), & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0, & x_{j+1} < x \le b \end{cases} \qquad j = 1, ..., N \tag{2.28}$$

іншими словами:

$$\begin{cases} \text{кожна базисна функція } \varphi_j\,(x) \text{ (за виключенням } \varphi_N\,(x)) \\ \text{відмінна від тотожного нуля над двома суміжними} \\ \text{скінченними елементами } [x_{j-1}, x_j] \text{ та } [x_j, x_{j+1}], \text{ причому} \\ \qquad\qquad \varphi_j\,(x_m) = \delta_{im}, \\ \text{де } \delta_{im} \text{ - символ Кронекера.} \end{cases} \tag{2.29}$$

2.6.3. Апроксимація даних задачі. Повертаючись до задачі (2.21), видається доцільним (і це дійсно так!) апроксимувати її дані таким чином:

$$\begin{cases} u_0(x) \cong u_0(a)\ \varphi_0\,(x) + \sum_{j=1}^{N} u_0(x_j)\ \varphi_j\,(x); \\ \end{cases} \tag{2.30}$$

$$f(x,t) \cong f(a,t)\,\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N} f(x_j,t)\,\varphi_j(x);$$

Зауваження 2.3. Дані варіаційної задачі не обов'язково мають задовольняти головній умові у вузлі $x_0 = a$, як це ми змушені були робити при виборі напівдискретної апроксимації (2.23), приймаючи $U_0(t) = 0$.

2.6.4. Структура задачі Коші. Після вибору базисних функцій $\varphi_j(x)$ у вигляді (2.28) і апроксимацій (2.30) відповідна (2.21) задача Коші записується так:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} \{m_{ij}[\,y'(t) - f(x_j,t)] + a_{ij}U_j(t)\} = \\ \qquad\qquad = m_{01} f(a,t)\,\delta_{i1} + \alpha g(t)\,\delta_{iN} \qquad i = 1, ..., N \\ \sum\limits_{j=1}^{N} m_{ij}[\,U_j(0) - u_0(x_j)] = m_{01}\,u_0(a)\,\delta_{i1}, \end{cases} \tag{2.31}$$

де з огляду на (2.29) відзначимо, що

$$\begin{cases} \text{симетричні додатно визначені матриці } M \text{ і } A \text{ з} \\ \text{коефіцієнтами } m_{ij} = m(\varphi_i, \varphi_j) \text{ та } a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \\ \text{відповідно мають тридіагональну стрічкову} \\ \text{структуру, тото} \\ m_{ij} = a_{ij} = 0 \text{ для } |\,i - j| > 1, \qquad i, j = 1, ..., N. \end{cases} \tag{2.32}$$

Зауваження 2.4. Стрічковість і мала заповненість ненульовими коефіцієнтами матриць M і A (ця особливість зберігається і в багатовимірних задачах при відповідному нумеруванні невідомих) - чи не найбільше досягнення методу скінченних елементів в практичній реалізації можливостей процедури Гальоркіна. Ці властивості, доповнені симетричністю, стають особливо важливими при розв'язуванні багатовимірних задач.

Зауваження 2.5. В більшості практичних задач початкові умови узгоджуються з крайовими на границі Γ в момент часу $t = 0$. В розглядуваній задачі ця обставина приводить, зокрема, до того, що $U_0(a) = 0$. За рахунок цього відпадає необхідність розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з (2.31) для відшукання вектора $U(0)$. Дійсно, оскільки $det\,M \neq 0$, то

$$U_j(0) = U_0(x_j) \qquad j = 1, ..., N.$$

Підкреслимо, що це спрощення досягається за рахунок інтерполяційності базисних функцій методу скінченних елементів і свідчить на користь прийнятої нами апроксимації (2.30).

2.6.5. Обчислення ненульових коефіцієнтів. Приймаючи до уваги локальність носія базисних функцій (2.28), ненульові коефіцієнти матриць M та A знайдемо згідно з правилами

$$\begin{cases} m_{ii} = \int_a^b \rho\, C_V\, \varphi_i^2\, dx = \\ \qquad = h^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho\, C_V (x - x_{i-1})^2\, dx + h^{-2} \int_x^{x_{i+1}} \rho\, C_V (x_{i+1} - x)^2\, dx, \\ m_{ii+1} = \int_a^b \rho\, C_V\, \varphi_i \varphi_{i+1}\, dx = h^{-2} \int_x^{x_{i+1}} \rho\, C_V (x - x_i)(x_{i+1} - x)\, dx; \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} a_{ii} = h^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda dx + h^{2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \lambda dx + \alpha\delta_{i\,1}, \\ \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\lfloor\ a_{ii+1} = -\ h^{-2} \int_{x}^{x_{i+1}} \lambda dx \qquad\qquad i = 1, ..., N.$$

Оскільки довжина h кожного відрізка інтегрування мала, то в загальному випадку для обчислення коефіцієнтів матриць M та A можна обмежитись квадратурною формулою трапецій.

<u>Вправа 2.6.</u> Нехай коефіцієнти ρ , C_V та λ постійні на кожному скінченному елементі $[x_i, x_{i+1}]$ довжини $h_{i+1}= x_{i+1} - x_i$. Переконайтесь, що у цьому випадку

$$\begin{cases} m_{ii} = \dfrac{2}{3}\ \{\ h_i\, \rho\, C_V\,|_{x_{i-\frac{1}{2}}} + h_{i+1}\, \rho\, C_V\,|_{x_{i+\frac{1}{2}}}\ \}, \\ \qquad m_{ii+1} = \dfrac{1}{6}\ h_{i+1}\, \rho\, C_V\,|_{x_{i+\frac{1}{2}}}\ , \\ a_{ii} = \{\ \lambda(x_{i-\frac{1}{2}})\, h_i^{-1} + \ \lambda(x_{i+\frac{1}{2}})\, h^{-1}{}_{i+1}\} + \alpha\delta_{i\,1},\ a_{ii+1} = -\ h_{i+1}\ \lambda(x_{i+\frac{1}{2}}). \end{cases} \qquad (2.35)$$

<u>Вправа 2.7.</u> Побудуйте квадратичні простори апроксимацій МСЕ для задачі (2.21) і обчисліть коефіцієнти матриць M та A для постійних значень ρ, C_V і λ [27, с. 101-102; 43, с. 70-72].

<u>Вправа 2.8.</u> Найбільш прості базисні функції МСЕ мають кусково-постійну структуру. Скористайтесь ними (а це допустимо!) для апроксимації теплового потоку $q\,(x,\ t)$ у задачі (1.17), вживаючи і далі кусково-лінійні апроксимації температури. Обчисліть коефіцієнти відповідної задачі Коші.

3. Коректність варіаційної задачі теплопровідності.

Хоча ми встановили коректність напівдискретизованої варіаційної задачі теплопровідності (2.2), для вихідної варіаційної задачі (1.13) на цей момент ми маємо лише її визначення. Переконаємось, що має місце

<u>Теорема 3.1.</u> (про коректність варіаційної задачі).

Нехай задано $u_0 \in H$, $l \in L^2\,(0, T;\ V')$.

Тоді варіаційна задача теплопровідності (1.13) має єдиний розв'язок $u \in L^\infty\,(0, T;$ $H) \bigcap L^2\,(0, T;\ V)$, причому $u' \in L^2\,(0, T;\ V')$.

Більш того, відображення $(l,\ u_0) \to u$ неперервне із $L^2\,(0, T;\ V') \times H$ у $L^2\,(0, T;\ V')$ $\bigcap L^\infty\,(0, T;\ H)$.

<u>Доведення</u> цієї теореми буде побудоване на властивостях напівдискретних апроксимацій Гальоркіна U_h, що визначаютьсяі задачею (2.2).

Згідно з (2.17) послідовність таких апроксимацій $\{U_h\}$ обмежена в просторі $G = L^\infty\,(0, T;\ H) \bigcap L^2\,(0, T;\ V)$. Тоді з огляду на її слабку компактність можна вибрати підпослідовність $\{U_\Delta\}$таку, що збігається до деякої функції $u \in G$, точніше

$$\begin{cases} u_\Delta \to u \quad \text{в } L^\infty\,(0, T;\ H) * \text{ - слабка;} \\ u_\Delta \to u \quad \text{в } L^2\,(0, T;\ V) \ \text{ - слабка;} \\ u_\Delta \to u \quad \text{в } L^2\,(0, T;\ V') \text{ - слабка,} \end{cases} \qquad (3.1)$$

де під $*$ - слабкою і слабкою збіжністю $\{u_\Delta\}$ розумітимемо

$$\int_0^T\ m(u_\Delta,v)\ dt \to \int_0^T\ m(u,v)\ dt \quad \forall v \in L^1\,(0, T;\ H),$$

$$\int_0^T\ a(u_\Delta,v)\ dt \to \int_0^T\ a(u,v)\ dt \quad \forall v \in L^2\,(0, T;\ V). \qquad (3.2)$$

Лишається показати, що визначена у (3.1) функція u задовольняє рівнянню варіаційної задачі (1.13). З цією метою виберемо простір $V_h \subset V_\Delta$ і зауважимо, що після інтегрування за часом з використанням формули інтегрування по частинах та початкової умови апроксимація u_Δ задовольняє рівнянню

$$\int_0^T \{- m(u_\Delta, v') + a(u_\Delta, v) - \langle l, v \rangle\} dt =$$
$$= m(u_0, v) \qquad \forall\, v \in W_h = \{v \in C^1(0, T; V_h) |\, v(T) = 0\}. \qquad (3.3)$$

Перейдемо в одержаному рівнянні до границі з $\Delta \to 0$ (а це можливо внаслідок (3.1)), а потім знову виконаємо інтегрування по частинах; у результаті приходимо до висновку:

$$\int_0^T \{m(u', v) + a(u, v) - \langle l, v \rangle\} dt == m(u(0) - u_0, v)\ \forall\, v \in W_h \qquad (3.4)$$

Але оскільки простори V_h щільно вкладені в V, то простори W_h утворюють щільну множину в просторі функцій $\varphi \in L^2(0, T; V)$ таких, що $\varphi(T) = 0$. Звідси випливає, що функція u з (3.2) є розв'язком варіаційної задачі (1.13). Більш того, для розв'язку лишається справедливим енергетичне рівняння вигляду (2.12)

$$\frac{1}{2} \| u(t) \|_H^2 + \int_0^T \| u(\tau) \|_V^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \| u_0 \|_H^2 + \int_0^T \langle l(\tau), u(\tau) \rangle \, d\tau \qquad (3.5)$$

і, отже, оцінка вигляду (2.16)

$$\|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u(\tau)\|_V^2 \, d\tau \le \|u_0\|_H^2 + \alpha^{-2} \int_0^T \|f(\tau)\|_H^2 \, d\tau, \ \alpha = const > 0 \qquad (3.6)$$

Покажемо тепер, що задача (1.13) має єдиний розв'язок. Допустимо протилежне: нехай u_1 та u_2 - різні розв'язки цієї задачі. Тоді внаслідок лінійності функція $u = u_1 - u_2$ також є розв'язком задачі (1.13) з $u_0 = 0$ і $f = 0$ і оцінка (3.6) приводить до висновку: $u \equiv 0$.

Твердження типу теореми 3.1 можна довести різними способами (див., наприклад, вправу 1.8). Способом доведення ми хотіли підкреслити, що напівдискретизація Гальоркіна є не лише ефективною процедурою побудови наближених розв'язків варіаційних задач, але й конструктивним природним інструментом їх якісного дослідження.

Для завершення ознайомлення з напівдискретизацією Гальоркіна охарактеризуємо швидкість збіжності її апроксимацій.

Вправа 3.1. Доведіть існування єдиного розв'язку варіаційної задачі (1.17).

4. Швидкість збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна.

Дамо характеристику швидкості збіжності похибки напівдискретизації Гальоркіна

$$e_h(t) = u_h(t) - u(t) \qquad (4.1)$$

до нуля при $h \to 0$. Тут $u(t)$ і $u_h(t)$ - розв'язки варіаційних задач (1.13) та (2.2) відповідно у просторах V і V_h. Внаслідок лінійності цих задач похибка (4.1) є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \text{знайти } e_h \in L^2(0, T; V) \text{ таку, що} \\ m(e_h'(t), v) + a(e_h(t), v) = 0 \qquad \forall\, v \in V_h, \\ \qquad m(e_h(0), v) = 0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

4.1. Інтерполяційні властивості просторів апроксимацій.

Оцінки для похибки (4.1) побудуємо в допущенні, що простори апроксимації V_h володіють такими властивостями:

$$\begin{cases} \text{для кожного } v \in V \cap H^{k+1}(\Omega),\ k \ge 0, \\ \text{знайдуться } v_h \in V_h \text{ та } C = const > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{значення яких не залежить від } h \text{ та } v, \\ \text{такі, що} \\ \|v - v_h\|_{m,\Omega} \le Ch^{k+1-m} \|v\|_{k+1,\,\Omega},\ 0 \le m \le k. \end{cases} \tag{4.3}$$

Відзначимо, що, як правило, такими властивостями володіють кусково-поліноміальні простори апроксимацій методу скінченних елементів (див., наприклад, [21; 43; 44]).

Вправа 4.1. Для ознайомлення з властивостями кусково-лінійних апроксимацій, вжитих нами в п.2.6.2, розберіть доведення теорем 1.2 та 1.3 [43, с. 58-62].

4.2. Оператори ортогонального проектування.

Нижче будуть потрібні оператори $\Pi_h : V \to V_h$ ортогонального проектування простору V на V_h відносно скалярного добутку $a(\cdot,\cdot)$, що діють за правилом

$$a(u - \Pi_k u, v) = 0 \qquad \forall u \in V \qquad \forall v \in V_h. \tag{4.4}$$

Тоді

$$\| u - \Pi_h u\|_V = \inf_{v \in V_h} \| u - v \|_V . \tag{4.5}$$

Користуючись таким оператором, можна, наприклад, оцінити близькість розв'язку $u(t)$ задачі (1.13) до своєї ортогональної проекції на V_h в кожен момент часу t. Дійсно, якщо $u(t) \in V \bigcap H^{k+1}(\Omega)$ для деякого $k \ge 0$, то (4.3) та (4.5) приводять до оцінки

$$\| u(t)- \Pi_h u(t)\|_V \le Ch^k \| u(t)\|_{k+1,\,\Omega} \qquad \forall t \in [0, T\,], \tag{4.6}$$

оскільки оператор Π_h здійснює проектування лише за просторовими змінними.

4.3. Декомпозиція похибки.

Використаємо наступну декомпозицію похибки напівдискретизації

$$e_h(t) = \varepsilon_h(t) - E_h\,(t), \tag{4.7}$$

де

$$\begin{cases} \varepsilon_h(t) = u_h(t) - \Pi_h\, u\,(t) \in V_h, \\ E_h(t) = u(t) - \Pi_h\, u\,(t) \in V. \end{cases} \tag{4.8}$$

Тоді внаслідок нерівності трикутника та (4.6) обчислюємо, що

$$\| e_h(t)\|_H \le \| \varepsilon_h(t)\|_H + Ch^k \| u(t)\|_{k+1,\,\Omega}, \tag{4.9}$$

або

$$\| e_h(t)\|_V \le \| \varepsilon_h(t)\|_V + Ch^k \| u(t)\|_{k+1,\,\Omega}, \tag{4.10}$$

де $C = const > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять.

Отже, лишається одержати оцінки для норми $\varepsilon_h(t)$.

4.4. Апріорні оцінки швидкості збіжності.

Задача (4.2) та представлення (4.7) з урахуванням (4.4) приводять до рівнянь для визначення $\varepsilon_h(t)$:

$$\begin{cases} m(\varepsilon_h{}'(t), v) + a(\varepsilon_h(t), v) = m(E_h{}'(t), v)\ \ \forall v \in V_h, \\ m(\varepsilon_h(0), v) = m(E_h(0), v) \end{cases} \tag{4.11}$$

Покладемо в цих рівняннях $v = \varepsilon_h(t)$ (а це допустимо) і обчислимо енергетичне рівняння для складової похибки $\varepsilon_h(t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,||\varepsilon_h(t)||^2{}_H + ||\varepsilon_h(t)||^2{}_V = m(E_h{}'(t),\ \varepsilon_h(t)), \tag{4.12}$$

звідки, повторюючи міркування пп. 2.4 та 2.5, приходимо до апріорних оцінок

$$||\varepsilon_h(t)||^2{}_H + \int_0^T \ ||\ \varepsilon_h(\tau)\ ||^2{}_V\, d\tau \le$$

$$\le ||\ E_h(0)||^2{}_H + \alpha^{-2}\int_0^T \ ||\ E_h{}'(\tau)||^2{}_H\, d\tau\,, \tag{4.13}$$

або $$||\varepsilon_h(t)||^2{}_H \ \le\ e^{-\alpha^2 t}\,||\ E_h(0)||^2{}_H + \int_0^T \ e^{-\alpha^2(t-\tau)}\,||\ E_h{}'(\tau)||^2{}_H\, d\tau\,, \tag{4.14}$$

Збираючи разом оцінки (4.5), (4.10) та (4.13), знайдемо

$$||\ e_h(t)||^2{}_H + \int_0^T \ ||\ e_h(\tau)||^2{}_V\, d\tau \le$$

$$\le ||\ E_h(0)||^2{}_H + ||\ E_h(t)||^2{}_H + \int_0^T \ [||\ E_h(\tau)||^2{}_V + \alpha^{-2}||\ E_h{}'(\tau)||^2{}_H]\ d\tau\ \le \tag{4.15}$$

$$\le Ch^{2k}\{||\ u_0\ ||^2 + ||\ u(t)||^2 + \int_0^T \ [||\ u(\tau)||^2 + \alpha^{-2}||\ E_h{}'(\tau)||^2]\ d\tau\ \},$$

де для спрощення запису символом $||\ \cdot\ ||$ позначимо норму $||\ \cdot\ ||_{k+1,\,\Omega}$, $C = const > 0$, значення якої не залежить від h та u.

Таким чином доведена

Теорема 4.1.

Нехай існує таке $k \ge 0$, що розв'язок $u(t)$ варіаційної задачі (1.13) характеризують включення

$$\begin{cases} u \in\ L^2\,(0,\,T;\,G)\bigcap L^\infty\,(0,\,T;\,F); \\ \\ u_0 \in F = H^{k+1}(\Omega),\ G = V\bigcap F, \end{cases} \tag{4.16}$$

і причому для побудови напівдискретних апроксимацій Гальоркіна $u_h(t)$ вживаються простори апроксимацій V_h з властивістю (4.3). Тоді послідовність апроксимацій $\{u_h(t)\}$ при $h \to 0$ збігається відносно норми

$$|||\ u\ ||| = \{||\ u||^2_{L^\infty(0,T;V)}\ {}^2{}_{L\infty\,(0,\,T;\,H)} + ||\ u||^2_{L^2\,(0,T;V)}\}^{\frac{1}{2}}$$

до розв'язку u задачі (1.13); швидкість збіжності похибки $e_h(t)$ характеризується оцінкою (4.15), показуючи, що $|||\ e_h(t)|||= 0\ (h^{\,k})$.

Вправа 4.2. Знайдіть оцінки швидкості збіжності напівдискретних апроксимацій розв'язку задачі (1.17).

Вправа 4.3. Користуючись схемою Стренга, Фікса [43, с.288-290], ми одержали більш точні оцінки, ніж оцінка [20] цієї монографії. У чому полягає це уточнення?

5. Дискретизація варіаційної задачі в часі.

Для завершення побудови чисельної схеми розв'язування варіаційної задачі теплопровідності (1.13) ми на додато до напівдискретизації Гальоркіна за просторовими змінними (див. п. 2) скористаємось проекційним методом для дискретизації даної задачі в часі. Ця процедура приведе нас до рекурентних схем інтегрування в часі задачі (1.13). Відзначимо, що вжиті процедури методу Гальоркіна і проекційного методу ніяк не зв'язані між собою і можуть використовуватися в довільному порядку. Щоб підкреслити цей факт, нижче оперуватимемо з напівдискретизованою варіаційною задачею (2.2), хоча це можна було б робити з еквівалентною їй задачею Коші (2.7).

5.1. Кусково-лінійна апроксимація.

Розіб'ємо відрізок часу $[0, T\,]$ на $(N + 1)$ рівних (хоча це не обов'язково) частин $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, N_T + 1$. Величину $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ називатимемо параметром дискретизації в часі або кроком інтегрування в часі задачі (2.2).

На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ розв'язок $u_h(t) \in V_h$ задачі (2.2) будемо апроксимувати лінійною функцією $u_{h\,\Delta t}(t) \in V_h$, що має вигляд

$$u_{h\,\Delta t}(t) = [1 - \omega\,(t_j, t)]\,u^j + \omega\,(t_j, t)]\,u^{j+1};$$
$$\omega\,(t_j, t)] = \Delta t^{-1}(t - t_j) \qquad t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, \ldots, N_T \tag{5.1}$$

з невідомими покищо функціями u^j, u^{j+1} з простору V_h. Зауважимо, що ці невідомі функції представляють собою значення вибраної апроксимації у вузлах сітки t_m, тобто

$$u_{h\,\Delta t}(t_m) = u^m \in V_h, m = 0, \ldots, N_T + 1. \tag{5.2}$$

Отже, функція $u_{h\,\Delta t}(t)$ в цілому на відрізку $[0, T\,]$ є неперервною кусково-лінійною функцією.

Кожній ланці (5.1) такої функції можна надати вигляду

$$u_{h\,\Delta t}(t_m) = u^m + \Delta t\;\omega\,(t_j; t)\;\frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} =$$
$$= \frac{1}{2}\,(u^{j+1} + u^j\,) + \Delta t\{\omega\,(t_j; t) - \frac{1}{2}\}\;\frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} =$$
$$= u^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t\{\omega\,(t_j; t) - \frac{1}{2}\}\,u^{j+\frac{1}{2}} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \tag{5.3}$$

де з метою спрощення записів вжито позначення

$$u^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^{j+1} + u^j\,),\; u^{j+\frac{1}{2}} = \Delta t^{-1}\,(u^{j+1} - u^j\,). \tag{5.4}$$

Далі можна було б скористатись і кусково-лінійними апроксаимаціями функціоналу $l(t) \in V'$, але ми будемо вживати (і, як буде з'ясовано пізніше, без втрати в точності) ще простіші кусково-постійні апроксимації

$$l_{\Delta t}(t) = l_{j+\frac{1}{2}} = l\,(t_{j+\frac{1}{2}}), t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2}\Delta t, \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]. \tag{5.5}$$

Зауважимо, що підстановка (5.1) у початкову умову задачі (2.2) приводить до рівняння

$$m\,(u^0 - u_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V_h. \tag{5.6}$$

5.2. Проекційне рівняння.

Позначимо символом $(\,\cdot, \cdot)$ скалярний добуток $L^2((t_j, t_{j+1}))$ і виберемо в цьому просторі функцію $\xi(t)$ таку, що

$$(\xi, 1) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\,dt \neq 0.$$

Підставимо апроксимації (5.1) та 5.5) у варіаційне рівняння задачі (2.2) і будемо вимагати, щоб одержана нев'язка такої підстановки була ортогональбна до функції $\xi(t)$ відносно скалярного добутку $(\,\cdot, \cdot)$; ця вимога виражається рівнянням

$$(\xi, 1)\,m\,(u^{j+\frac{1}{2}}, v) + \{(\xi, 1) - (\omega, \xi)\}\,a\,(u^j, v) + (\omega, \xi)\,a\,(u^{j+1}, v) =$$

$$= (\xi, 1) < l_{j+\frac{1}{2}}, v> \quad \forall v \in V_h, \tag{5.7}$$

яке пов'язує між собою дві невідомі u^j, $u^{j+1} \in V_h$.

Введемо позначення

$$u^{j+\theta} = u^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t\,(\theta - \frac{1}{2})\, u^{j+\frac{1}{2}} \quad \forall \theta \in [0,1] \tag{5.8}$$

та

$$\theta = (\omega, \xi)\,(\xi, 1)^{-1}. \tag{5.9}$$

Вони дозволяють записати рівняння (5.7) у вигляді

$$m\,(u^{j+\frac{1}{2}}, v) + a\,(u^{j+\theta}, v) = < l_{j+\frac{1}{2}}, v> \quad \forall v \in V_h \quad j = 0, ..., N_T, \tag{5.10}$$

подібному до рівняння задачі (2.2).

Ясно, що рівняння (5.10) або, щог більш наочно,(5.7) недостатньо для однозначного відшукання функцій u^j та u^{j+1} з V_h, але наявність початкової умови (5.6) рятує ситуацію.

Вправа 5.1. Переконатись, що рівняння (5.10) можуть бути приведені до вигляду

$$m\,(u^{j+1}, v) + \theta\Delta\, ta(u^{j+1}, v) = \Delta\, t\{< l_{j+\frac{1}{2}}, v> - (1 - \theta)\, a\,(u^j, v)\} + \\ + m(u^j, v) \quad \forall v \in V_h; \tag{5.11}$$

$$m\,(u^{j+\theta}, v) + \theta\Delta\, ta(u^{j+\theta}, v) = \Delta\, t\theta < l_{j+\frac{1}{2}}, v> + \\ + m(u^j, v) \quad \forall v \in V_h. \tag{5.12}$$

Довести, що обидва рівняння можуть бути однозначно розв'язані відносно u^{j+1} та $u^{j+\theta}$, принаймні, якщо $\theta\Delta\, t > 0$.

5.3. Однокрокова рекурентна схема.

Ясно, що рівняння (5.10) або, що більш наочно, (5.7) недостатньо для однозначного відшукання функцій u^j та u^{j+1} з простору V_h, але наявність початкової умови (5.6) рятує ситуацію. Справді, рівняння (5.6) та (5.7) разом взяті, дозволяють сформулювати наступну рекурентну послідовність обчислень:

$$\begin{cases} \text{задано параметри } \Delta\, t > 0,\ \theta \geq 0 \text{ та } u^0 \in V_h; \\ \text{знайти } u^{j+1} \in V_h \text{ таку, що } m\,(u^{j+1}, v) + \theta\Delta\, ta(u^{j+1}, v) = \Delta\, t\{< l_{j+\frac{1}{2}}, v> - \\ \ - (1 - \theta)\, a\,(u^j, v)\} + m(u^j, v) \qquad \forall v \in V_h, \quad j = 0,...,N_T, \end{cases} \tag{5.13}$$

або

$$\begin{cases} \text{задано параметри } \Delta\, t > 0,\ \theta \geq 0 \text{ та } u^0 \in V_h; \\ \text{знайти } u^{j+\theta} \in V_h \text{ таку, що} \\ \quad m\,(u^{j+\theta}, v) + \Delta\, t\theta\, a(u^{j+\theta}, v) = \Delta\, t < l_{j+\frac{1}{2}}, v> + m(u^j, v), \\ \quad u^{j+1} = u^j + \theta^{-1}(u^{j+1} - u^j) \quad j = 0,...,N_T \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{5.14}$$

З огляду на H- і V-еліптичність неперервних білінійних форм відповідно $m(\cdot,\cdot)$ $a(\cdot,\cdot)$ та лему Лакса-Мільграма рівняння (5.6) і рівняння задач (5.13), (5.14) однозначно розв'язуються відносно u^0, u^{j+1} та $u^{j+\theta}$ відповідно.

Таким чином, кусково-лінійна апроксимація $u_{h\Delta\, t}\,(t) \in V_h$ розв'язку $U_h(t) \in V_h$ варіаційної задачі (2.2) визначається однозначно за допомогою розв'язків задач (5.13) або (5.14). Оскільки дана обчислювальна схема оперує лише цими значеннями розв'язку на одному кроці інтегрування в часі, то вона носить назву однокрокової рекурентної схеми.

5.4. Обчислювальні аспекти.

Ознайомимось з основними питаннями, які слід вирішувати при організації обчислень за рекурентними схемами (5.13) чи (5.14). Оскільки проведення одного кроку інтегрування в часі передбачає розв'язування деякої варіаційної задачі в просторі V_h, то лише сумісний аналіз вибраних апроксимацій за просторовими змінними та в часі може привести до суттєвого покращення алгоритму знаходження наближеного розв'язку. Маючи це на увазі, там, де це дійсно необхідно, будемо посилатись на кусково-лінійні апроксимації МСЕ, детально розглянуті в п. 2.6.

5.4.1. Системи рекурентних рівнянь. Оскільки побудовані рекурентні схеми передбачають відшукання функцій u^j з простору V_h, то доцільно скористатись розкладами

$$u_{h\Delta t}(x,t_j) = u^j(x) = \sum_{n=1}^{N} U_n^j\, \varphi_n(x), \qquad (5.15)$$

де $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$ - базис простору V_h, $U^j = \{U_n^j\}_{n=1}^{N}$ - вектор невідомих коефіцієнтів. За допомогою цього самого базису V_h наблизимо й дані задачі теплопровідності

$$f(x,t) = F_0(x,t) + \sum_{n=1}^{N} F_n(t)\, \varphi_n(x); \qquad (5.16)$$

$$u_0(x) = Y_0(x) + \sum_{n=1}^{N} Y_n\, \varphi_n(x), \qquad (5.17)$$

де функції $F_0 \neq 0$ та $Y_0 \neq 0$ лише в тому випадку, коли дані f та u_0 не перетворюються на нуль на границі Γ (див. п.2.6).

Для знаходження вектора U^0 підставимо (5.15) та (5.17) в початкову умову (5.6) і скористаємось методом Гальоркіна; в результаті одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{N} m(\varphi_k, \varphi_n)\, \{U_n^0 - Y_n\} = m(Y_0, \varphi_k) \qquad k = 1, ..., N, \qquad (5.18)$$

яка має єдиний розв'язок U^0 в силу додатної визначеності матриці $M = \{m(\varphi_k, \varphi_n)\}_{k,n=1}^{N}$ як матриці Грама системи лінійних незалежних функцій $\varphi_1, ..., \varphi_N$ відносно скалярного добутку $m(\cdot,\cdot)$. При цьому, якщо функція $Y_0(x)$ ортогональна до цього базису, то безпосередньо з (5.18) випливає:

$$U_n^0 = Y_n \qquad n = 1, ..., N. \qquad (5.19)$$

На основі цих самих міркувань конкретизуємо задачі (5.13) та (5.14) до вигляду

$$\begin{cases} \text{задано } \Delta t > 0,\ \theta \geq 0 \text{ та } U^0 \in \boldsymbol{R}^N; \\ \text{знайти} \quad U^{j+1} \in \boldsymbol{R}^N \quad \text{такий, що} \\ \quad \{M + \Delta t\theta A\}\, U^{j+1} = \Delta t\{\phi^{j+\frac{1}{2}} + MF^{j+\frac{1}{2}} - (1-\theta)AU^j\} \\ \qquad\qquad + MU^j, \qquad j = 0, ..., N_{\mathrm{T}} \end{cases} \qquad (5.20)$$

та

$$\begin{cases} \text{задано } \Delta t > 0,\ \theta > 0 \text{ і } U^0 \in \boldsymbol{R}^N; \\ \text{знайти} \quad U^{j+1} \in \boldsymbol{R}^N \quad \text{такий, що} \\ \quad \{M + \Delta t\theta A\}\, U^{j+\theta} = \Delta t\{\phi^{j+\frac{1}{2}} + MF^{j+\frac{1}{2}}\} - (1-\theta)AU^j\} \\ \qquad\qquad + MU^j, \\ \quad U^{j+1} = U^j + \theta^{-1}\{U^{j+\theta} - U^j\}, \qquad j = 0, ..., N_{\mathrm{T}}, \end{cases} \qquad (5.21)$$

відповідно. Тут матриця $A = \{a(\varphi_k, \varphi_n)\}_{k,n=1}^{N}$ також сисметрична і додатно визначена, а вектори $\phi^{j+\frac{1}{2}}, F^{j+\frac{1}{2}}$ обчислюються за правилами

$$\begin{cases} \phi^{j+\frac{1}{2}} = \{m\,(F_0(t_{j+\frac{1}{2}}),\, \varphi_k,\}_{k=1}^{N}; \\ F^{j+\frac{1}{2}} = \{F_n(t_{j+\frac{1}{2}})\}_{k=1}^{N}; \end{cases} \qquad (5.22)$$

Слід визначити, що системи лінійних алгебраїчних рівнянь у (5.20) та (5.21) різняться лише правими частинами, що змінюються від кроку; в той самий час матриці цих систем лишаються незмінними, якщо ми не змінюємо в процесі інтегрування Δt або θ (точніше, не змінюємо добутку $\Delta t\theta$).

Зауваження 5.1. Неважко бачити, що рівняння схеми (5.20), зокрема, співпадає зі схемою Ейлера ($\theta = 0$), Кранка - Ніколсона ($\theta = \frac{1}{2}$) і повністю неявною ($\theta = 1$) схемою для інтегрування задачі Коші $MU'(t) + AU(t) = F(t)$, $U(0) = U^0$. Крім цього, вибір вагової функції $\xi(t) = \omega\,(t_j;t)$ приводить до $\theta = \frac{2}{3}$ і відповідає схемі Гальоркіна.

Відзначимо, що рівняння рекурентних схем (5.20) та (5.21) співпадають для $\theta \in (0,\ 1]$ і при такому виборі параметра θ для виконання обчислень доцільніше користуватись схемою (5.21). У цьому випадку ми не тільки уникаємо необхідності обчислення члена $(1 - \theta)\,AU^j$ на кожному кроці за часом, але й необхідності запам'ятовувати матрицю A. Додаткову можливість економії ресурсів ЕОМ надає спеціальний вибір квадратурних формул.

5.4.2. Діагоналізація матриці M. Матриця $M = \{m(\varphi_k, \varphi_n)\}_{k,n=1}^{N}$ буде мати діагональну структуру, якщо базисні функції $\varphi_1, ..., \varphi_N$ ортогональні відносно скалярного добутку $m(\cdot,\cdot)$. У цьому випадку рекурентна схема (5.20) при $\theta = 0$ стає явною - відшукання вектора U^{j+1} вимагає лише обертання діагональної матриці.

Цією важливою особливістю схема (5.21) не володіє, але діагональність матриці M і тут бажана - вона спрощує обчислення правих частин систем рекурентних рівнянь.

На жаль, вибрати ортогональний базис $(\varphi_n)_{n=1}^{N}$ складно, хоча, як показує наступна вправа, можливо.

Вправа 5.2. Розглянемо відповідну до задачі (2.2) проблему власних значень:

$$\begin{cases} \text{знайти власне число } \lambda > 0 \text{ та відповідну до нього} \\ \text{власну функцію } \varphi \in V_h \text{ такі, що} \\ \qquad m(\varphi, \varphi) = 1, \\ \quad -\lambda\, m(\varphi, \nu) + a(\varphi, \nu) = 0 \qquad \forall \nu \in V_h. \end{cases} \qquad (5.23)$$

Нехай $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N} \subset \boldsymbol{R}$ - власні числа, а $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N} \subset V_h$ - відповідні їм власні функції (5.23). Покажіть, що

I) мають місце рівності

$$m(\varphi_k, \varphi_n) = \delta_{kn},\ a(\varphi_k, \varphi_n) = \lambda_k\delta_{kn}, \qquad (5.24)$$

де δ_{kn} - символ Кронекера і, отже, власні функції $\varphi_1, ..., \varphi_N$ утворюють базис V_h;

II) якщо власні функції $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ вибрано за базис простору V_h, то рекурентні рівняння (5.21) зводяться до вигляду

$$\begin{cases} \{1 + \lambda_k\Delta t\theta\}\,\omega_k^{j+\theta} = \Delta t\{x_k^{j+\frac{1}{2}} + f_k^{j+\frac{1}{2}}\} + \omega_k^{j}, \\ \omega_k^{j+1} = \omega_k^{j} + \theta^{-1}(\omega_k^{j+\theta} - \omega_k^{j}) \qquad k = 1, ..., N \end{cases} \qquad (5.25)$$

Ще одна можливість зробити матрицю M діагональною криється у використанні певним чином вибраних квадратурних формул.

Дійсно, нехай, наприклад, розглядається одновимірне рівняння теплопровідності і для його розв'язку використовуються кусково-лінійні базисні функції φ_k на рівномірній сітці з N скінченних елементів $[x_i; x_{i+1}]$ (див. п.2.6). Тоді коефіцієнти $m_{k\,n}$ матриці M знаходяться за правилом

$$m_{k\,n} = m(\varphi_k, \varphi_n) = \sum_{i=0}^{N=1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho\, c_\nu\, \varphi_k\, \varphi_{\mathrm{n}}\, dx.$$

Використовуючи для обчислень інтегралів формулу трапецій

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx = \frac{1}{2} h\, [f(x_{i+1}) + f(x_i)],\; h = x_{i+1} - x_i,$$

знаходимо

$$m_{k\,n} = h\rho\,(x_k)\, c_\nu\,(x_k)\, \delta_{k\,n}\,, \quad k, n = 1, ..., N. \tag{5.26}$$

Отже, цей прийом дозволяє зменшити вимоги до пам'яті ЕОМ, а також дістати явну схему розв'язування задач для параболічних рівнянь.

5.4.3. Розв'язування систем рекурентних рівнянь. Симетричну стрічкову матрицю

$$M + \Delta t\theta A \tag{5.27}$$

систем рекурентних рівнянь можна зберігати в пам'яті ЕОМ різними способами (див., наприклад, [7;30].

З огляду на додатну визначеність цієї матриці для розв'язування систем рекурентних рівнянь підійдуть не тільки всі відомі ітераційні методи [38; 40], але й, скажімо, така видозміна методу виключення Гаусса, як метод Холецького.

За цим методом матриця (5.27) представляється у вигляді

$$M + \Delta t\theta A = L^{\mathrm{T}} L, \tag{5.28}$$

де L - верхня трикутна матриця, що може бути записана на місці матриці (5.27). Якщо ястання не змінюється в процесі рекурентних обчислень, то факторизація (5.28) виконується всього лише один раз на весь рекурентний процес.

Сам процес розв'язування системи рівнянь, скажімо, з (5.21) здійснюється після факторизації за схемою

$$\begin{cases} L^{\mathrm{T}} Z = \Delta t \phi^{\,j+\frac{1}{2}} + M(u^j + \Delta t F^{\,j+\frac{1}{2}}), \\ L U^{j+\theta} = Z, \end{cases} \tag{5.29}$$

що еквівалентно виконанню двох підстановок методу Гаусса.

5.4.4. Вибір параметрів рекурентної схеми. Звичайно значення параметрів Δt та θ рекурентних схем (5.20) та (5.21) вибирають з умов їх стійкості і забезпечення бажаної точності. У той самий час їх зміна в процесі розрахунку може змінити матрицю (5.27) і привести до необхідності повторної факторизації Холецького. Щоб цього уникнути, нові значення параметрів Δt_H та θ_H потрібно вибрати з умови $\Delta t_H \theta_n = \Delta t\theta$.

6. Стійкість рекурентних схем.

Одна з основних проблем, що виникає при побудові схем інтегрування задач в часі, - забезпечити обмеженість наближених розв'язків. Тоді рекурентна схема (5.20), яка допускає єдиний розв'язок принаймні для $\Delta t\theta \geq 0$, гарантує ще й коректність дтскретизованої в часі задачі (2.2). Згадану властивість рекурентної схеми прийнято називати їх стійкістю (до впливу похибок заокруглення на розв'язок задачі). Очевидно, що нестійкі схеми не гарантують збіжності наближених розв'язків до точних.

Побудуємо достатні для практики критерії стійкості. З цією метою запишемо рекурентну схему (5.13) з використанням проекційного рівняння (5.10):

$$\begin{cases} \text{задано } \Delta t > 0,\ \theta \ge 0 \text{ та } \ u_0 \in V_h; \\ \text{знайти } u^{j+1} \in V_h \text{ таку, що} \\ m(u^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(u^{j+\theta}, v) = \langle l_{j+\frac{1}{2}}, v\rangle \qquad \forall v \in V_h \qquad j = 0, ..., N_T. \end{cases} \tag{6.1}$$

6.1. Енергетичне рівняння.

Покладемо в рівнянні (6.1) $v = u^{j+\frac{1}{2}}$ і зауважимо, що з використанням енергетичних норм

$$m(u^{j+\frac{1}{2}}, u^{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\Delta t^{-1}\, m(u^{j+1} - u^j, u^{j+1} + u^j) = \frac{1}{2}\Delta t^{-1}\ \{\|u^{j+1}\|^2_H - \|u^j\|^2_H\}, \tag{6.2}$$

і подібно

$$a(u^{j+\theta}, u^{j+\frac{1}{2}}) = a(u^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t\,(\theta - \tfrac{1}{2})\, u^{j+\frac{1}{2}}, u^{j+\frac{1}{2}} =$$

$$= \|u^{j+\frac{1}{2}}\|^2_V + \frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2})\{\|u^{j+1}\|^2_V - \|u^j\|^2_V\}. \tag{6.3}$$

У результатті одержимо енергетичне рівняння

$$\frac{1}{2}\Delta t^{-1}\ \{\|u^{j+1}\|^2_H - \|u^j\|^2_H\} + \|u^{j+\frac{1}{2}}\|^2_V + \frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2})\{\|u^{j+1}\|^2_V - \|u^j\|^2_V\} =$$

$$= \langle l_{j+\frac{1}{2}}, u^{j+\frac{1}{2}}\rangle, j = 0, ..., N_T \tag{6.4}$$

або (після додавання перших рівнянь з індексами j від нуля до m)

$$\frac{1}{2}\|u^{m+1}\|^2_H + \Delta t \sum_{j=0}^{m} \|u^{j+\frac{1}{2}}\|^2_V + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|u^{m+1}\|^2_V =$$

$$= \frac{1}{2}\|u^0\|^2_H + \Delta t \sum_{j=0}^{m} \langle l_{j+\frac{1}{2}}, u^{j+\frac{1}{2}}\rangle + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|u^0\|^2_V, \quad m = 0, ..., N_T \tag{6.5}$$

Порівнюючи одержані рівняння з енергетичними рівняннями п.2.3, бачимо, що використана дискретизація в часі породжує додаткові члени, якщо параметр схеми $\theta \ne \frac{1}{2}$. При цьому додаткові члени для $\theta > \frac{1}{2}$ можна трактувати як приріст дисипації енергії, пропорційний величині $(\theta - \frac{1}{2})$; вибір же $\theta < \frac{1}{2}$ не допускає розумної фізичної інтерпретації згаданих членів.

6.2. Апріорні оцінки.

Приймаючи до уваги оцінки вигляду

$$|\langle l_{j+\frac{1}{2}}, u^{j+\frac{1}{2}}\rangle| \le \|f(t_{j+\frac{1}{2}})\|_H\, \|u^{j+\frac{1}{2}}\|_H \le \frac{1}{2}\|u^{j+\frac{1}{2}}\|^2_V + \frac{1}{2}C\,\|f(t_{j+\frac{1}{2}})\|^2_H, \tag{6.6}$$

де $C = const > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять, енергетичні рівняння (6.4) та (6.6) приводимо до нерівностей

$$\Delta t^{-1}\ \{\|u^{j+1}\|^2{}_H - \|u^j\|^2{}_H\} + \|u^{j+\frac{1}{2}}\|^2{}_V + (\theta - \frac{1}{2})\{\|u^{j+1}\|^2{}_V - \|u^j\|^2{}_V\} \leq$$
$$\leq C\,\|f(t_{j+\frac{1}{2}})\|^2{}_H, \quad j = 0, ..., N_T \tag{6.7}$$

та

$$\|u^{m+1}\|^2{}_H + \Delta t \sum_{j=0}^{m} \|u^{j+\frac{1}{2}}\|^2{}_V + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|u^{m+1}\|^2{}_V \leq$$
$$\leq \|u^0\|^2{}_H + \Delta t C \sum_{j=0}^{m} \|f(t_{j+\frac{1}{2}})\|^2{}_H + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|u^0\|^2{}_V,\ m = 0, ..., N_T. \tag{6.8}$$

6.3. Безумовно стійкі схеми.

Аналіз апріорних оцінок (6.7) і (6.8) свідчить, що однокрокова рекурентна схема (6.1) безумовно (відносно вибору значення кроку інтегрування Δt) стійка за нормами просторів H та V, якщо параметр схеми

$$\theta \geq \frac{1}{2} \tag{6.9}$$

і дані задачі (1.13) характеризуються властивостями

$$\begin{cases} f \in L^{\infty}(0, T; H),\ 0 < T < \infty, \\ \\ u_0 \in T. \end{cases} \tag{6.10}$$

Причому $\theta = \frac{1}{2}$ останнє включення в (6.9) може бути ослаблене - достатньо вимагати, щоб $u_0 \in H$.

6.4. Умовно стійкі схеми.

Якщо при виконанні умови (6.9) параметр Δt залишається в нашому розпорядженні і вибір його значення зумовлюється лише міркуваннями бажаної точності наближених розв'язків, то при

$$\theta < \frac{1}{2} \tag{6.11}$$

ситуація змінюється. Дійсно, скориставшись (2.11), приходимо до висновку, що ліва частина (6.8) містить невід'ємні доданки при умові, що $1+\alpha\Delta t(\theta - \frac{1}{2}) \geq 0$ $\alpha = const > 0$. Остання нерівність буде виконана, якщо накласти наступне обмеження на довжину кроку інтегрування в часі:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\alpha(1-2\theta)}. \tag{6.12}$$

Знову ж таки права частина (6.8) лишається обмеженою при виконанні умови (6.10).

6.5. Достатній критерій стійкості.

Підсумовуючи результати пп6.3 та 6.4, переконуємось, що має місце

<u>Теорема 6.1</u> (достатній критерій стійкості).

Нехай дані варіаційної задачі (1.13) задовільняють умовам (6.10).

Тоді однокрокова рекурентна схема (6.1) з параметрами Δt та θ:

1) безумовно (по відношенню до Δt) стійка в просторах H і V, якщо параметр θ задовільняє нерівності (6.9);

2) стійка в просторах H та V, якщо $0 \le \theta \le \frac{1}{2}$ і при цьому вибір Δt підпорядкований умові (6.12).

Вправа 6.1. Підставте в рівняння рекурентної схеми (6.1) $v = u^{j+\frac{1}{2}}$ і знайдіть умови її стійкосі. Що нового дають ці умови в порівнянні з теоремою 6.1?

Зауваження 6.1. У нашому викладі ми ніде не користувались скінченномірністю просторів V_h, зокрема, еквівалентність норм $\|\cdot\|_H$ та $\|\cdot\|_V$ у них. Тоді одержані результати лишаються справедливими і для нескінченномірного випадку, коли ми починаємо дискретизувати варіаційну задачу (1.13) безпосередньо за часом.

7. Оцінки збіжності рекурентних схем.

Ми збираємось оцінити похибку

$$\varepsilon_{\Delta t}(t) = u_{h\Delta t}(t) - u_h(t) \qquad (7.1)$$

апроксимації $u_{h\Delta t}(t)$ однокрокової рекурентної схеми (6.1) на розв'язку $u_h(t)$ задачі (2.2).

7.1. Рівняння для похибки.

Для оцінки значень похибки (7.1)

$$\varepsilon^m = \varepsilon_{\Delta t}(t_m) = u^m - u_h(t_m), \qquad (7.2)$$

на основі рівнянь задач (6.1) та (2.2) дістанемо

$$\begin{cases} m(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(\varepsilon^{j+\theta}, v) = <\gamma_j, v> & \forall v \in V_h; \\ m(\varepsilon^0, v) = 0, & j = 0, ..., N_T, \end{cases} \qquad (7.3)$$

де лінійні функціонали

$$<\gamma_j, v> = <l_{j+\frac{1}{2}}, v> - \Delta t^{-1} m(u_h(t_{j+1}) - u_h(t_j), v) -$$
$$- a(\theta U_h(t_{j+1}) + (1-\theta)\, u_h(t_j), v) \qquad \forall v \in V_h \qquad j = 0, ..., N_T. \qquad (7.4)$$

Спростимо вирази для функціонування (7.4). Для цього допустимо, що $u_h \in C^3(0,T;V_h)$, тоді, розкладаючи його в ряд Тейлора в околі точки $t = t_{j+1}$,обчислюємо:

$$\begin{cases} \Delta t^{-1}[u_h(t_{j+1}) - u_h(t_j)] = u'_h(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{24}\Delta t^2 u_h'''(\xi); \\ \frac{1}{2}[u_h(t_{j+1}) + u_h(t_j)] = u_h(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{8}\Delta t^2 u_h''(\eta); \\ \theta\, u_h(t_{j+1}) + (1-\theta)u_h(t_j) = u_h(t_{j+\frac{1}{2}}) + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})u_h'(t_{j+\frac{1}{2}}) + \\ \qquad + \frac{1}{8}\Delta t^2 \{u_h''(\eta) + \frac{1}{3}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})u_h'''(\xi)\}; \\ \qquad \xi, \eta \in (t_j, t_{j+1}) \end{cases} \qquad (7.5)$$

Підстановка (7.5) у праву частину (7.4) показує:

$$<\gamma_j, v> = \{<l_{j+\frac{1}{2}}, v> - m(u'_h, v) - a(u_h, v)\}_{t=t_{j+\frac{1}{2}}} - \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\, a(u'_h(t_{j+\frac{1}{2}}), v) - \Delta t^2 <R_j, v> =$$
$$= \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\, a(u'_h(t_{j+\frac{1}{2}}), v) - \Delta t^2 <R_j, v> \quad \forall v \in V_h \qquad (7.6)$$

з огляду на рівняння (2.2), при цьому функціонали $R_j \in V'$ визначається виразами

$$<R_j, v> = \frac{1}{8}\{a(u''_h(\eta), v) + \frac{1}{3}[\, m(u_h'''(\xi), v) + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\, a(u_h'''(\xi), v)]\} \qquad \forall v \in V_h \qquad (7.7)$$

Таким чином, рівняння для визначення похибок з огляду на (7.3) та (7.6) набувають вигляду

$$\begin{cases} m(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(\varepsilon^{j+\theta}, v) = - \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\, a(u'_h(t_{j+\frac{1}{2}}), v) - \Delta t^2 <R_j, v> \\ \qquad j = 0, ..., N_T, \\ m(\varepsilon^0, v) = 0 \qquad \forall v \in V_h \end{cases} \qquad (7.8)$$

який показує, що однокрокова рекурентна схема (6.1) має:

I) перший порядок апроксимації, якщо $\theta \neq \frac{1}{2}$;

II) другий порядок апроксимації, якщо $\theta = \frac{1}{2}$.

7.2. Апріорні оцінки.

Покладемо в (7.8) $v = \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}$ і, користуючись міркуваннями п.6.1, обчислимо:

$$\frac{1}{2}\|\varepsilon^{m+1}\|^2_H + \Delta t \sum_{j=0}^{m} \|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\|^2_V + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\varepsilon^{m+1}\|^2_V =$$

$$= \Delta t^2 \sum_{j=0}^{m} \{(\theta - \frac{1}{2})\, a(u'_h(t_{j+\frac{1}{2}}), \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}) + \Delta t <R_j, \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}>\},\ m = 0, ..., N_T.$$

Використовуючи нерівність (2.14) і той факт, що $R_j \in V'$, можна записати такі оцінки:

$$a(u'_h(t_{j+\frac{1}{2}}), \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{4}[\Delta t(\theta - \frac{1}{2})]^{-1}\|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\|^2_V + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\, u'_h(t_{j+\frac{1}{2}})\|^2_V, \qquad (7.10)$$

$$<R_j, \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}> \leq \frac{1}{4}\Delta t^{-2}\, \|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\|^2_V + \Delta t^2\|\, R_j\|^2_* \qquad (7.11)$$

(при побудові оцінки (7.10) ми допустили, що $\theta > \frac{1}{2}$; за вибору $\theta = \frac{1}{2}$ необхідність у такій оцінці відпадає).

Повертаючись до енергетичного рівняння (7.9), проходимо, нарешті, до бажаних оцінок:

$$\|\varepsilon^{m+1}\|^2_H + \Delta t \sum_{j=0}^{m} \|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\|^2_V + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\varepsilon^{m+1}\|^2_V -$$

$$- \leq 2\Delta t^3 \sum_{j=0}^{m} \{(\theta - \frac{1}{2})^2 \|\, u'_h(t_{j+\frac{1}{2}})\|^2_V + \Delta t^2\|\, R_j\|^2_*\ m = 0, ..., N_T. \qquad (7.12)$$

$$\leq 2\Delta t^2\, T\{(\theta - \frac{1}{2})\, \|\, u'_h\|^2_{C(0,T;V)} + \Delta t^2 \max_{0 \leq j \leq N_T} \|\, R_j\|^2_*\}.$$

Одержані результати підсумовує

Теорема 7.1 (про збіжність однокрокової схеми).

Нехай розв'язок $u_h(t)$ задачі (2.2) такий, що $u_h''' \in C(0, T; V)$, і нехай $u_{h\Delta t}(t)$ - його кусково-лінійна апроксимація, обчислена з допомогою безумовно стійкої однокрокової рекурентної схеми (6.1) з параметром $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Тоді значення $u_{h\Delta t}(t_m)$ при $\Delta t \to 0$ збігаються (відносно норм $\|\cdot\|_H$ і $\|\cdot\|_V$ (до значень $u_h(t_m)$, $m = 1, ..., N_T + 1$, і при цьому для похибок $\varepsilon^m = u_{h\Delta t}(t_m) - u_h(t_m)$ мають місце апріорні оцінки (7.12). Зокрема, вони показують, що оптимальний порядок збіжності (що дорівнює двом) схеми (6.1) досягається при виборі

$$\theta = \frac{1}{2} + 0(\Delta t). \tag{7.13}$$

<u>Вправа 7.1.</u> Побудуйте оцінки швидкості збіжності рекурентної схеми (6.1) з параметром $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ і переконайтеся, що вони мають перший порядок відносно Δt.