РОЗДІЛ 3

ПОЧАТКОВО-КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Початково-крайові задачі з гіперболічними рівняннями моделюють поширення хвиль в суцільному середовищі, зокрема, одне з важливих застосувань - поширення звукових хвиль в пружних тілах. На цьому прикладі ми й зупинимось в даному розділі.

Основна наша ціль - перенести, по можливості, методи і результати, одержані раніше для параболічних рівнянь, на новий клас задач. Такий підхід дозволить глибше зрозуміти принципові відмінності обох класів нестаціонарних задач.

1. Постановка варіаційної задачі теорії пружності.

Зупинимося на лінійних задачах теорії пружності для матеріалів з короткочасною пам'яттю.

1.1. Початково-крайова задача.

Нехай пружє тіло займає обмежену зв'язну область Ω точок $x=(x_1,...,x_h)$ евклідового простору $\boldsymbol{R^n}$ (в застосуваннях n = 1,2 або 3) з неперервною за Ліпшицем границею Γ ,одиничний вектор зовнішньої нормалі до якої будемо позначати, як і раніше, $\nu=\{\nu_i\}_{i=1}^n$, $\nu_i=cos(\nu,x_i)$.

Для дослідження процесу деформування такого тіла протягом інтервалу часу [0,T] під дією вектора заданих об'ємних сил $f(x,t)=\{f_i(x,t)\}_{i=1}^n$ та вектора поверхневих контактних зусиль $p(x,t)=\{p_i(x,t)\}_{i=1}^n$ необхідно визначити вектор пружніх зміщень $u(x,t)=\{u_i(x,t)\}_{i=1}^n$ такий, що задовільняє рівнянням

$$\begin{cases} \rho(u_i''-f_i) - \dfrac{\partial y_{ij}}{\partial x_j} = 0, \\ \sigma_{ij} = c_{ijkm}\, e_{km}(u) + a_{ijkm}\, e_{km}(u') \quad \text{в } \Omega\times(0,T], \\ e_{ij}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad i,j = 1, ..., n; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} u_i = 0 \text{ на } \Gamma_u\times[0,T], \qquad \Gamma_u\subset\Gamma,\ mes\,(\Gamma_u) > 0, \\ \sigma_{ij}\nu = P_i \text{ на } \Gamma_p\times[0,T], \quad \Gamma_p=\Gamma\setminus\Gamma_u; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0,\ u'|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega \tag{1.3}$$

Тут $\rho=\rho(x)>0$ – густина маси тіла, механічні властивості якого описуються коефіцієнтами пружності $\{c_{ijkm}\}$ та в'язкості $\{a_{ijkm}\}$ із звичайними властивостями симетрії та еліптичності :

$$\begin{cases} a_{ijkm} = a_{jikm} = a_{kmij},\ c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}, \\ c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \ge c_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km}\ c_0 = const > 0 \qquad \forall\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\in \boldsymbol{R}, \\ a_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \ge a_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km}\ a_0 = const > 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

У (1.1), (1.2), (1.4) і далі по індексах, що повторюються, передбачається підсумовуванням від одиниці до n ; $u'=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u''=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Введемо простори

$$V = \{v\in H^1(\Omega)^n|\ v = 0 \text{ на } \Gamma_u\}, \qquad H = L^2(\Omega)^n$$

і в загальному випадку вважатимемо, що виконані умови

$$\begin{cases} \rho \in L^{\infty}(\Omega), u_0 \in V, v_0 \in H; \\ f \in L^2(0, T; H) \qquad p \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_p)^n), 0 < T < +\infty \end{cases} \tag{1.5}$$

Зауваження 1.1.Введені в рівняннях (1.1) функції $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ та $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ називаються тензорами напружень і деформацій відповідно. Як неважко бачити з (1.1) і (1.4), вони утворюють симетричні матриці

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\ ,\ \ e_{ij} = e_{ji}.$$

Внаслідок цього, зокрема, для довільного достатньо гладкого вектора $\{u_i\}_{i,j=1}^{n}$

$$\sigma_{ij}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sigma_{ji}\ \{\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j})\} = \sigma_{ji}\ \{e_{ij}\ (u) + \omega_{ij}\ (u)\} = \sigma_{ji} e_{ij}(u), \tag{1.6}$$

оскільки (тензор поворотів) $\{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ утворює кососиметричну матрицю.

Зауваження 1.2. Перша група рівнянь з (1.1) носить назву рівнянь руху пружного тіла, друга — узагальнює закон Гука на випадок анізотропного пружного тіла з урахуванням внутрішнього тертя (в'язкості), третя — представляє собою співвідношення Коші, що зв'язують деформації з вектором переміщень. Підстановка двох останніх груп рівнянь у першу дозволяє повністю виключити з розгляду тензори напружень і деформацій. Це саме стосується і крайових умов на Γ_p.

Зауваження 1.3. Для ознайомлення з проекційно–сітковими методами розв'язування гіперболічних задач ми зупинились на рівняннях динаміки пружних тіл з двох причин. По–перше, — щоб підкреслити, що системи однотипних (у даному випадку — гіперболічних) рівнянь не вносять принципових ускладнень в порівнянні з задачами для скалярних рівнянь (почнаючи з варіаційної постановки ми однаково легко оперуємо як з векторними, так і зі скалярними величинами) і, по-друге теорія пружності надзвичайно багата на різноманітне застосування (див., наприклад, [12, розд.2, с.47–86]) і ми сподіваємось, що ознайомлення з цим класом дозволить набути корисного для практики досвіду.

Зауваження 1.4. Іноді розглядаються так звані квазістатичні задачі теорії пружності, при формуванні яких інерційними членами рівнянь руху нехтують, $U'' = 0$, і відкидають другу початкову умову в (1.3). Задачі такого типу були розглянуті в попередньому розділі.

1.2. Формулювання варіаційної задачі.

Перемножимо скалярно першу групу рівнянь (1.1) з довільним вектором $\{v_i\}_{i=1}^{n} \in V$ і проінтегруємо результат по області Ω. Використовуючи формулу Гріна, крайові умови (1.2), (1.6) і другу групу рівнянь з (1.1), обчислимо:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \{\rho\,(u_i''(t) - f_i(t))\, v_i - \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_j}\ v_i\}dx = \\ &= \int_{\Omega} \{\rho\,(u_i''(t) - f_i(t))\, v_i + \sigma_{ij}\, e_{ij}(v)\}dx - \int_{\Gamma_p} P_i(t)\, v_i\, d\gamma = \\ &= \int_{\Omega} \{\rho\,(u_i''(t)\, v_i + [a_{ijkm}\, e_{km}(u'(t)) + c_{ijkm}\, e_{km}(u)]\, e_{ij}(v)\}dx - \\ &- \int_{\Omega} \rho f_i(t)\, v_i\, dx - \int_{\Gamma_p} P_i(t)\, v_i\, d\gamma \qquad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Тепер можемо сформулювати варіаційну задачу теорії пружності:

$\lceil$ задано $u_0 \in V$, $v_0 \in H$, $f \in L^2\ (0, T; H)$,

$$
\begin{cases}
\qquad p\in L^2\,(0,T;L^2(\Gamma^p)^n); \\
\text{знайти вектор } u\in L^2\,(0,T;V) \text{ òàêèé, ùî} \\
\quad m(u''(t),v)+a(u'(t),v)+c(u(t),v)=<l(t),v> \\
\qquad c(u(0)-u_0,v)=0 \quad \forall v\in V \\
m(u'(0)-v_0,v)=0.
\end{cases}
\tag{1.8}
$$

Тут введемо такі позначення:

$$
\begin{cases}
m(u,v)=\int\limits_\Omega \rho\, u_i\, v_i\, dx, \\
c(u,v)=\int\limits_\Omega c_{ijkm}\, e_{ij}(u)\, e_{km}(v)\, dx, \\
a(u,v)=\int\limits_\Omega a_{ijkm}\, e_{ij}(u)\, e_{km}(v)\, dx \quad \forall v\in V;
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

$$
(l,v)=m(f,v)+\int\limits_{\Gamma_p} P_i\, v_i\, d\gamma \quad \forall v\in V.
\tag{1.10}
$$

Зауваження 1.5. Вжита процедура побудови варіаційного рівняння (1.7) добре відома в механіці під назвою принципу віртуальних робіт [3; 33; 42]. Для завершення формування варіаційної задачі доповнюємо цей принцип початковими умовами, вибір яких неоднозначний, але прийнятий у задачі (1.8) вигляд початкових умов допускає найслабші умови гладкості на u_0, v_0 і при цьому цілком узгоджується з енергетичними рівняннями.

Вправа 1.1. Переконайтесь у справедливості формул

$$
c(u,v)=\int\limits_\Omega c_{ijkm}\, e_{ij}(u)\, e_{km}(v)\, dx=\int\limits_\Omega c_{ijkm}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_k}{\partial x_m}\, dx.
$$

Вправа 1.2. У деяких випадках доцільно сформулювати задачі теорії пружності в термінах вектора швидкостей $\{v_i\}_{i=1}^n$ та пружних напружень $\{\tau_{ij}\}_{i,j=1}^n$, що визначаються так:

$$
v_i(t)=u'_i(t),\quad \tau_{ij}=c_{ijkm}\, e_{km}(u).
\tag{1.11}
$$

Тоді початково-крайову задачу (1.1)-(1.3) можна привести до вигляду

$$
\begin{cases}
\rho\,(v'_i-f_i)-\dfrac{\partial}{\partial x_j}\{\tau_{ij}+S_{ij}(v)\}=0, \\
A_{ijkm}\tau'_{km}-e_{ij}(v)=0 \qquad \text{в } \Omega\times(0,T], \\
S_{ij}(v)=a_{ijkm}\, e_{km}(v), \\
e_{ij}(v)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}\right),
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

$$
\begin{cases}
v=0 \qquad \text{на } \Gamma_u\times[0,T], \Gamma_u\subset\Gamma,\ mes\,(\Gamma_u)>0, \\
\{T_{ij}+S_{ij}(v)\}\nu_j=P_i \qquad \text{на } \Gamma_p\times[0,T],\ \Gamma_p=\Gamma\setminus\Gamma_u,
\end{cases}
\tag{1.13}
$$

$$
\tau_{ij}\big|_{t=0}=C_{ijkm}\, e_{km}(u_0), \qquad v\big|_{t=0}=v_0 \quad \text{в } \Omega,
\tag{1.14}
$$

де коефіцієнти $\{A_{ijkm}\}$ утворюють обернений тензор до тензора модулів пружності $\{C_{ijkm}\}$.

На основі рівнянь (1.12)-(1.14) сформулюйте варіаційну задачу теорії пружності в термінах вектора швидкостей $v=\{v_i\}_{i=1}^n$ і тензора пружних напружень $\{\tau_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Вправа 1.3. Розглянемо наступну початково-крайову задачу акустики: знайти функцію $u(x,t)$ таку, що

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{cc^2}u'' - div\dfrac{1}{c}grad\,u) = f & \text{в } \Omega \times [0,T], \\
u = 0 & \text{на } \Gamma_u \times [0,T], \Gamma_u \subset \Gamma, mes\,(\Gamma_u) > 0 \\
-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial н} = p & \text{на } \Gamma_p \times [0,T], \Gamma_p = \Gamma \setminus \Gamma_u,
\end{cases} \tag{1.15}
$$

$$
u\big|_{t=0} = u_0, \quad u'\big|_{t=0} = v_0 \quad \text{в } \Omega.
$$

Тут $u = u(x, t)$ - потенціал швидкостей (або акустичний тиск) ідеальної стисливої рідини, яка характеризується густиною маси $\rho = \rho(x)$ і швидкістю звуку $c = c(x)$; $f(x, t)$ - густина внутрішніх джерел звуку. Детальніше про задачі акустики див [4].

Наведіть варіаційну задачу акустики.

1.3. Властивості білінійних форм.

З огляду на прийняті допущення відносно області Ω, її границі Γ та властивості (1.4) констатуємо, що

$$
\begin{cases}
\text{симетричні білінійні форми} \\
C(\cdot,\cdot) : V \times V \to \boldsymbol{R} \text{ та } a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \boldsymbol{R} \\
\text{є неперервними і } V\text{-еліптичними, тобто} \\
\text{знайдеться } \alpha = const > 0, \text{ що} \\
c(u, u) \geq \alpha\, \|u\|^2_{1,\Omega},\ a(u, u) \geq \alpha\, \|u\|^2_{1,\Omega} \quad \forall u \in V.
\end{cases} \tag{1.16}
$$

Тому на просторі допустимих функцій V можна ввести норми

$$
\begin{cases}
\|u\|_V = c^{\frac{1}{2}}(u, u) \\
\qquad\qquad \forall u \in V, \\
|u| = a^{\frac{1}{2}}(u, u)
\end{cases} \tag{1.17}
$$

еквівалентні нормі $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

<u>Зауваження 1.6.</u> Твердження (1.16) відіграє фундаментальну роль у теорії пружності. Доведення цього нетривіального результату можна знайти у Дюво і Ліонса [8, розд. 3, § 3.3, с. 110-115].

Важливо відзначити, що

$$
\begin{cases}
\text{симетрична білінійна форма } m\,(\cdot,\cdot) : H \times H \to \boldsymbol{R} \\
\text{є неперервною та } H\text{-еліптичною, тобто} \\
\text{знайдеться } \rho_0 = const > 0 \text{ така, що } m\,(u, u) \geq \rho_0\, \|u\|^2_{0,\Omega} \quad \forall u \in H, \\
\text{і породжує норму (еквівалентну } \|\cdot\|_{0,\Omega}) \\
\qquad \|u\| = m^{\frac{1}{2}}(u, u) \qquad \forall u \in H.
\end{cases} \tag{1.18}
$$

На цьому етапі ми маємо лише визначення варіаційної задачі теорії пружності (1.8). Як для якісного дослідження цієї задачі, так і для побудови наближених розв’язків скористаємось напівдискретизацією Гальоркіна за просторовими змінними.

2. Напівдискретизація Гальоркіна.

Виберемо послідовність скінченномірних підпросторів $\{V_h\}$ з простору V таку, що

$$
\begin{cases}
dim\ V_h = N(h) \to \infty \text{ при } h \to 0; \\
\text{для будь-якого } \varepsilon > 0 \text{ та довільного } v \in V \\
\text{знайдеться } h > 0 \text{ та } v_h \in V_h \quad \text{такі, що} \quad \|v - v_h\|_V \leq \varepsilon,
\end{cases} \tag{2.1}
$$

і визначимо послідовність напівдискретних (за просторовими змінними) апроксимацій Гальоркіна розв’язку $u(t) \in V$ варіаційної задачі (1.8) наступним чином:

$$
\begin{cases}
\text{задано } u_0 \in V,\ v_0 \in H, f \in L^2\,(0, T; H),\ p \in L^2\,(0, T; L^2(\Gamma_p)^n) \text{ та } h = const > 0; \\
\text{знайти вектор } u_h \in L^2\,(0, T; V_h), \text{ такий, що} \\
\quad m(u''_h(t),v) + a(u'_h(t),v) + c(u_h(t),v) = < l(t),v>, \\
\qquad c(u_h(0) - u_0,v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \\
\qquad m(u'_h(0) - v_0,v) = 0.
\end{cases} \tag{2.2}
$$

2.1. Напівдискретна задача

Очевидно, що кожна з напівдискретних апроксимацій Гальоркіна одержується перенесенням роз'вязування задачі (1.8) з простору V у деякий його скінченний підпростір V_h . Цей факт - ключовий момент методу Гальоркіна, який робить його ефективним інструментом дослідження варіаційних задач.

Дійсно, зафікскийуємо деякий базис простору V_h, скажімо, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$. Тоді включення $U_h \in L^2(0,T;V_h)$ дозволяє однозначно представити апроксимацію Гальоркіна $U_h(t)$ із V_h у вигляді лінійної комбінації

$$
U_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N} U_j(t)\, y_j(x) \tag{2.3}
$$

з невідомими функціями часу $U(t)=\{U_i(t)\}_{i=1}^{N}$. Для визначення останніх підставимо розклад (2.3) у рівняння задачі (2.2) і послідовно покладемо $v = y_i$, $i = 1, ..., N$; у результаті цієї операції прийдемо до наступної задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами :

$$
\begin{cases}
\text{знайти вектор } U(t) = \{U_j(t)\}_{i=1}^{N} \text{ такий, що} \\
\sum_{j=1}^{N} \{m(y_i, y_j)U''_j(t) + a(y_i, y_j)\, U'_j(t) + c(y_i, y_j)\, U_j(t)\} = \\
\qquad\qquad = < l(t), y_j> \quad t \in (0, T]; \\
\sum_{j=1}^{N} c(y_i, y_j)\, U_j(0) = c(u_0, y_i) \qquad i = 1, ..., N; \\
\sum_{j=1}^{N} m(y_i, y_j)U'_j() = m(v_0, y_i).
\end{cases} \tag{2.4}
$$

У матричному записі дана задача Коші має вигляд

$$
\begin{cases}
MU''(t) + AU'(t) + CU(t) = L(t) \qquad t \in (0, T], \\
\qquad CU(0) = P_0, \\
\qquad MU'(0) = D_0.
\end{cases} \tag{2.5}
$$

Зауважимо, що

$$
\begin{cases}
\text{симетричні матриці} \\
M = \{m(y_i, y_j)\}_{i,j=1}^{N}, C = \{c(y_i, y_j)\}_{i,j=1}^{N}, A = \{a(y_i, y_j)\}_{i,j=1}^{N} \\
\text{додатньо визначені}
\end{cases} \tag{2.6}
$$

тому задача Коші (2.4) або, що еквівалентно, (2.5) однозначно розв'язується відносно вектора $U(t)$. Підстановка останнього в (2.3) показує, що для кожного фіксованого $h > 0$

таким чином побудована напівдискретна апроксимація Гальоркіна $U_h(t) \in V_h$ є єдиним розв'язком задачі (2.2).

Вправа 2.1. Доведіть справедливість твердження (2.6)

Вправа 2.2. Нехай система функцій $\{\varphi_j\}m_j=1$ лінійно незалежна в просторі $\Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_U\}$. Користуючись цими функціями побудуйте базис деякого підпростору в просторі V. Яка його розмірність?

2.2. **Енергетичне рівняння.**

Приймемо у варіаційному рівнянні задачі (2.2) $v = u'_h(t)$, у результаті одержимо енергетичне рівняння, яке з використанням (1.17), (1.18) набуває вигляду

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|u'_h(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_V^2\} + |u'_h(t)|^2 = <l(t), u'_h(t)> \qquad (2.7)$$

або (після інтегрування на проміжку $[0, t]$)

$$\frac{1}{2}\{\|u'_h(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_V^2\} + \int_0^t |u'_h(\tau)|^2\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\{\|u'_h(0)\|_H^2 + \|u_h(0)\|_V^2\} + \int_0^t <l(\tau), u'_h(\tau)>\, d\tau \qquad t \in [0, T]\ h > 0. \qquad (2.8)$$

Одержені енергетичні рівняння вказзують, що введені в (1.17) і (1.18) норми мають ясний фізичний смисл, а саме в кожен момент t часу

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|u'_h(t)\|_H^2 & \text{- кінетична енергія пружного тіла,} \\ \frac{1}{2}\|u_h(t)\|_V^2 & \text{- його потенціальна енергія,} \\ |u'_h(t)|^2 & \text{- інтенсивність дисипації енергії,} \\ <l(t), u'_h(t)> & \text{- потужність зовнішніх джерел енергії, зумовлених} \\ & \quad \text{об'ємними силами та поверхневими зусиллями.} \end{cases} \qquad (2.9)$$

Тепер має зміст ввести ще одну фізично виправдану норму

$$\|u(t)\| = \{\|u'(t)\|^2_H + \|u(t)\|^2_V\} \qquad \forall\ u(t), u'(t) \in V, \qquad (2.10)$$

яка стверджує, що $S\|u_h(t)\|^2$ є повною енергією пружного тіла в момент часу t.

Вправа 2.3. Переконайтесь, що повна енергія тіла лишається незмінною величиною лише за відсутності навантажень та внутрішнього тертя.

2.3. **Апріорні оцінки**

Оскільки при зроблених відносно даних задачі (2.2) припущеннях $l \in L^2(0,T,V')$, то

$$|<l(t), u'_h(t)>| \le \frac{1}{2}|u'_h(t)|^2 + \frac{1}{2}K\,\|l(t)\|_*^2, \qquad (2.11)$$

де $K = const > 0$ не залежить від інтересуючих нас величин.

Приймаючи до уваги початкові умови задачі (2.2) і останню нерівність, на основі енергетичного рівняння (2.8) обчислюємо оцінку

$$\|u_h(t)\|^2 + \int_0^t |u'_h(\tau)|^2\, d\tau \le$$

$$\|u_0\|^2_V + \|v_0\|^2_h + K\int_0^t \|l(\tau)\|_*^2\, d\tau \quad t \in (0,T] \qquad \forall h > 0 \qquad (2.12)$$

Таким чинном ,

$$\begin{cases} \text{послідовність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна } \{u_h\} \\ \text{(відповідно } \{u'_h\}\text{) утворює обмежену множину в } L^\infty(0, T; V) \\ \text{(відповідно в просторі } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)\text{),} \end{cases} \qquad (2.13)$$

іншими словами, за прийнятих допущень відносно даних задачі (2.2) напівдискретні апроксимації володіють скінченною енергією та дисипацією. Це свідчить про стійкість напівдискретизації Гальоркіна.

Одержані результати підсумовує

Теорема 2.1 (про напівдискретні апроксимації).

I. Для кожного фіксованого значення параметра дискретизації $h > 0$ розв′язки $u_h(t)$ напівдискретної (за просторовими змінними) варіаційної задачі (2.2) одночасно вибором базису $\{y_j\}_{j=1}^{N}$ простору апроксимацій V_h, $dim\ V_h = N$ та розв′язком $U(t) = \{U_t(t)\}_{j=1}^{N}$ задачі Коші (2.4) у вигляді лінійної комбінації (2.3).

II. Побудована таким чином послідовність апроксимацій $\{u_h\}$ володіє обмеженою енергією та дисипацією, більш точно, мають місце оцінки (2.12) з $K = const > 0$, значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.

<u>Вправа 2.4</u> Побудуйте задачу Коші для визначення напівдискретних апроксимацій Гальоркіна варіаційної задачі акустики (див. вправу 1.3). Знайдіть енергетичні рівняння та апріорні оцінки, які встановлюють стійкість напівдискретизації Гальоркіна. Для побудови апріорних оцінок скористаємось лемою Гронуола (15, с.298).

<u>Вправа 2.5</u> Виконайте програму попередньої вправи для змішаної варіаційної задачі теорії пружності (див. Вправу 1.2).

2.4. Обчислювальні аспекти

Питання ефективного обчислення коефіцієнтів в задачі Коші (2.4) нічим (за виключенням незначних деталей) не відрізняються від розглянутих у п.2.6 розд.2 стосовно задач теплопровідності. Слід лише відзначити, що розв′язування сутєво тривимірних задач теорії пружності залишається дуже складною задачею в плані програмної реалізації схем методу скінченних елементів.

<u>Вправа 2.6.</u> Користуючись матеріалами п.2.6 із розд.2, побудуйте основні співвідношення МСЕ для одновимірної задачі теорії пружності з використанням кусково-лінійних та кусково-квадратичних апроксимацій переміщень. Допустіть при цьому, що на лівому кінці відрізка $[a, b]$ задано закон зміни переміщення в часі, а правий кінець вільний від навантажень (задачі такого типу виникають при розрахунку, наприклад, хвилеводів, що передають коливання від деякого генератора на механічний резонатор).

3. Коректність варіаційної задачі теорії пружності

Наведемо фундаментальний результат, який виправдовує наш перехід від операторної постановки задачі теорії пружності до її варіаційного формулювання.

<u>Теорема 3.1</u> (про коректність варіаційної задачі теорії пружності).

Варіаційна задача теорії пружності (1.8) має єдиний розв′язок u, який характеризують включення

$$\begin{cases} u \in L^{\infty}(0, T; V), \\ u'\ L^{\infty}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \\ u'' \in L^2(0, T; V') \end{cases} \tag{3.1}$$

та енергетичні співвідношення

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int_0^t |u'(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 + \int_0^t <l(\tau),u'(\tau)>d\tau \tag{3.2}$$

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t |u'(\tau)|^2 d\tau \le \|u_0\|_H^2 + \|v_0\|_V^2 + K\int_0^t \|l(\tau)\|_*^2$$

для $t \in [0,T]^0$, де $K = const > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять.

<u>Доведення</u> цієї теореми проведемо з використанням напівдискретних апроксимацій Гальоркіна і наслідуючи міркування, вжиті при доведенні теореми 3.1 розд.2.

З огляду на твердження (2.13) із послідовності напівдискретних апроксимацій $\{u_h\}$, що збігається до деякого вектора $u \in L^{\infty}(0,T;V)$, а саме:

$$\begin{cases} u_{\Delta} \to u \quad \text{в} \quad L^{\infty}(0, T; V)_* \text{ - слабка} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_\Delta \to u' & \text{в} \quad L^\infty(0, T; H)_* \text{ - слабка} \\ u'_\Delta \to u' & \text{в} \quad L^2(0, T; V) \text{ - слабка} \end{cases} \tag{3.3}$$

Лишається показати, що знайдений таким чином вектор u задовольняє рівняння варіаційної задачі (1.8). Дійсно, вибравши $V_h \subset V_\Delta$, зауважимо, що апроксимація u_Δ задовольняє рівнянню

$$\int_0^t \{-m(u'_\Delta, v') + a(u'_\Delta, v) + c(u_\Delta, v) - \langle l, v\rangle\}dt =$$

$$= - m(u'_\Delta(0), v) = -m(v_0, v')\, \forall v \in W_h = \{v \in C^1(0, T; V_h) |\, v(T) = 0\}.$$

Перейдемо в цьому рівнянні до границі при $\Delta \to 0$, а пізніше виконаємо інтегрування по частинах. У результаті одержимо рівняння

$$\int_0^t \{m(u'', v) + a(u', v) + c(u, v) - \langle l, v\rangle\}dt =$$

$$= m(u'(0) - v_0, v) \qquad \forall v \in W_h \qquad \forall h > 0. \tag{3.4}$$

Внаслідок щільності просторів $\{W_h\}$ у просторі

$$\Phi = \{v \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \mid v(T) = 0\}$$

рівняння (3.4) лишається справедливим у границі при $h \to 0$. Тому вектор u задовольняє всім рівнянням варіаційної задачі (1.8) за виключенням початкової умови на $u(0)$. Але з (2.13) і (2.2) безпосередньо випливає, що

$$0 = C\,(u_\Delta(0) - u_0, v) \to C\,(u\,(0) - u_0, v) = 0 \qquad \forall\, v \in V_h.$$

Це і завершує доведення існування розв'язку варіаційної задачі теорії пружності. Співвідношення (3.2) та (3.3) дістаються з (2.8) та (2.12) шляхом граничного переходу.

Нарешті, єдиність розв'язку задачі (1.8) легко встановлюється міркуванням від супротивного.

<u>Вправа 3.1.</u> Доведіть справедливість третього з включень (3.1).

4. Оцінки збіжності напівдискретних апроксимацій.

Для побудови оцінок похибки напівдискретних апроксимацій Гальоркіна

$$e_h(t) = u_h(t) - u(t) \tag{4.1}$$

зауважимо, що з огляду на рівняння задач (1.8) та (2.2)

$$\begin{cases} m(e''_h(t), v) + a(e'_h(t), v) + c(e_h(t), v) = 0 \\ \\ m(e'_h(0), v) = 0, \quad c(e_h(0), v) = 0 \qquad \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{4.2}$$

Далі введемо оператори Π_h: $V \to V_h$ ортогонального проектування простору V на простори V_h відносно скалярного добутку $C(\cdot,\cdot)$. Тоді для кожного фіксованого моменту часу $t \in [0,T]$

$$C(u(t) - \Pi_h u(t), v) = 0 \qquad \forall u(t) \in V \quad \forall v \in V_h \tag{4.3}$$

звідки

$$\|u(t) - \Pi_h(t)\|_V = \inf_{v \in V_h} \|u(t) - v\|_V \tag{4.4}$$

Якщо простори апроксимацій V_h наділити інтерполяційними властивостями (типовими для методу скінченних елементів)

$$\begin{cases} \text{для кожного } u \in V \cap H^{k+1}(\Omega)^n,\ k \geq 0, \\ \text{знайдуться } u_h \in V_h \text{ та } K = const > 0 \text{ такі, що} \\ \|u - u_h\|_{m,\Omega} \leq K h^{k+1-m} \|u\|_{k+1,\Omega},\ 0 \leq m \leq k, \end{cases} \tag{4.5}$$

то властивість (4.4) негайно приводить до оцінки

$$\|u(t) - \Pi_h u(t)\|_V \leq K h^k \|u(t)\|_{k+1,\Omega}, \tag{4.6}$$

за умови, що вектор $u(t) \in H^{k+1}(\Omega)^n$ в кожен момент часу $t \in [0,T]$.

Більш того, порівняння (4.3) та другої з початкових умов в (4.2) приводить до висновку, що

$$\begin{cases} u_h(0) = \Pi_h\, u(0) = \Pi u_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ \|u_h(0) - u_0\|_V \le Kh^k \|u_0\|_{k+1,\Omega} \end{cases} \tag{4.7}$$

при $u_0 \in H^{k+1}(\Omega)^n$. Тут і далі одним символом K позначатимемо різні додатні константи значення яких не залежить від величин, що нас цікавлять.

Тепер стає очевидною доцільність запису похибки напівдискретизації (4.1) у вигляді

$$e_h(t) = u_h(t) - u(t) = [u_h(t) - \Pi_h u(t)] - [u(t) - \Pi_h u(t)] = \varepsilon_h(t) - E_h(t) \tag{4.8}$$

Дійсно, для частини похибки

$$E_h(t) = u(t) - \Pi_h u(t)$$

ми вже одержали оцінки (4.6) та (4.7) за умови достатньо гладкого розв'язку $u(t)$ задачі (1.8). Лишається оцінити

$$\varepsilon_h(t) = u(t) - \Pi_h u(t)$$

у просторі V_h, і з цією метою використаємо рівняння (4.2), які з урахуванням (4.8) та (4.7) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} m(\varepsilon_h''(t),v) + a(\varepsilon_h'(t),v) + 0(\varepsilon_h(t),v) = \\ \qquad = m(\varepsilon_h''(t),v) + a(\varepsilon_h'(t),v) \qquad \forall v \in V_h \\ \qquad 0(\varepsilon_h(t),v) = 0, \qquad m(\varepsilon_h'(0),v) = m(\varepsilon_h'(0),v) \end{cases} \tag{4.9}$$

Останні рівняння на основі енергетичних міркувань (ми тепер можемо покласти $v = \varepsilon_h'(t)$!) приводять до оцінки

$$\|\varepsilon_h(t)\|^2 + \int_0^t |\varepsilon_h'(t)|^2 \, d\tau \le K\{\|E_h'(0)\|_H^2 + \int_0^t [|E_h'(\tau)|^2] + \|E_h''(\tau)\|_H^2 \, d\tau\} \tag{4.10}$$

Тепер лишається скористатися еквівалентністю норм $|\cdot|$ та $\|\cdot\|_V$ у просторі V, нерівністю

$$\|v\|_H \le K\|v\|_V \qquad \forall v \in V \qquad K = const > 0$$

і оцінками (4.6) та (4.7), щоб сформулювати такий наслідок з (4.10):

$$\|\varepsilon_h(t)\|^2 + \int_0^t |\varepsilon_h'(\tau)|^2 \, d\tau \le Kh^{2k}\{\|v_0\|_{k+1,\Omega}^2 +$$

$$+\int_0^t [\|u'(\tau)\|_{k+1,\Omega}^2 + [\|u''(\tau)\|_{k+1,\Omega}^2] \, d\tau\} \qquad t \in [0,T] \qquad \forall h > 0 \tag{4.11}$$

Нарешті, з огляду на представлення (4.8) та одержані оцінки (4.6) та (4.11) остаточно знаходимо, що

$$\|u_h'(t) - u'(t)\|_H^2 + \|u_h(t) - u(t)\|_V^2 + \int_0^t |u_h'(\tau) - u'(\tau)|^2 \, d\tau \le$$

$$\le Kh^{2k} \{\|v_0\|_{k+1,\Omega}^2 + \sum_{m=0}^{1} \|u^{(m)}(t)\|_{k+1,\Omega}^2 + \int_0^t \sum_{m=1}^{2} \|u^{(m)}(\tau)\|_{k+1,\Omega}^2 \, d\tau\}. \tag{4.12}$$

Таким чином, доведено

<u>Теорему 4.1.</u>

Допустимо, що існує натуральне k, таке що

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in G = H^{k+1}(\Omega)^n, \\ u, u' \in L^\infty(0, T; V \cap G), \\ u'' \in L^2(0, T; V \cap G), \end{cases} \tag{4.13}$$

де u -розв'язок варіаційної задачі теорії пружності (1.8). Нехай напівдискретні апроксимації Гальоркіна $\{u_h\}$ визначаються як розв'язки задач (2.2) у просторах V_h, що володіють властивостями (4.5).

Тоді послідовність апроксимацій $\{u_h\}$ збігається (в сенсі енергетичної норми $\|v\|^2 + \int_0^T |v'(\tau)|^2 \, d\tau$) при $h \to 0$ до розв'язку варіаційної задачі і при цьому швидкість збіжності характеризуються апріорною оцінкою (4.12) з $K = const > 0$, що не залежить від h та u.

5. Однокрокова рекурентна схема.

Завершимо побудову чисельної схеми розв'язування варіаційної задачі, доповнивши напівдискретизацію Гальоркіна однокроковою рекурентною схемою інтегрування в часі. При цьому в ідейному плані будемо слідувати міркуванням п.5 розд.2.

5.1. Кусково-квадратичні апроксимації.

Для заданого натурального N_T розглянемо рівномірне розбиття відрізка $[0, T]$ вузлами $t_j = j\Delta t, j = 0, ..., N_T +1$, де $\Delta t = T/(N_T +1)$. На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ розв'язок $U_h(t) \in V_h$ задачі (2.2) апроксимуватимемо поліномами вигляду

$$\begin{cases} u_{h\Delta t}(t) = \{1 - \omega^2(t_j, t)\}u^j + \Delta t\,\{1 - \omega(t_j, t)\}\omega(t_j, t)v^j + \\ \qquad + \omega^2(t_j, t)u^{j+1} t \in [t_j, t_{j+1}] \quad j = 0, ..., N_T \\ \qquad\qquad \omega(t_j, t) = \Delta t^{-1}(t - t_j) \end{cases} \tag{5.1}$$

з невідомими поки що функціями u^j, u^{j+1} та v^j із простору V_h. Безпосередньо перевіркою неважко переконатись:

$$u_{h\Delta t}(t_m) = u^m,\ m = j, j+1;$$
$$u'_{h\Delta t}(t_j) = v^j. \tag{5.2}$$

Якщо ж ми додатково приймемо, що

$$v^{j+1} = u'_h(t_{j+1}) = -v^j + 2\Delta t^{-1}(u^{j+1} - u^j), \tag{5.3}$$

то тим самим визначаємо кусково-квадратичну непервно диференційовану апроксимацію $u_{h\Delta t}(t)$ розв'язку $U_h(t)$ задачі (2.2), причому невідомими функціями виступають значення переміщень та їх швидкостей у вузлах сітки $\{t_j\}_{j=0}^{N_T+1}$. Зауважимо, що при j =0 підстановка (5.1) у початкові умови задачі (2.2) приводить до рівнянь

$$\begin{cases} c(u^0 - u_0, v) = 0 \\ \qquad\qquad \forall v \in V_h, \\ m(v^0 - v_0, v) = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

які однозначно визначають u^0, $v^0 \in V_h$ (без винечення похибки апроксимації в часі). Якщо б нам вдалося з тих чи інших міркувань обчислити переміщення u^1, то використання (5.3) дозволяє знайти швидкість v^1. Отже, при переході до наступного кроку (j = 1) нам знову відомо значення переміщення u^j, v^j, а залишається знайти u^{j+1} і після цього скористатись формулою (5.3) і т.д. Таким чином, для побудови рекурентного процесу покрокового обчислення кусково-квадратичної апроксимації за відомих значень (u^j, v^j) необхідна процедура відшукання u^{j+1}. З цією метою скористаємось рівнянням задачі (2.2) та проекційним методом.

Домовимось, що далі для функціоналу $l(t) \in V'$ задачі (2.2) будемо вживати кусково-постійні апроксимації вигляду

$$l_{\Delta t}(t) = l_{j+\frac{1}{2}} = l\,(t_{j+\frac{1}{2}}) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \tag{5.5}$$

5.2. Проекційні рівняння.

Виберемо в просторі $L^2((t_j, t_{j+1}))$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ функцію $\xi(t)$ таку, що

$$(\xi, 1) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi\,(t)\,dt \neq 0,$$

і будемо вимагати, що нев'язка підстановки апроксимацій (5.1), (5.5) у рівняння задачі (2.2) була ортогональною до цієї функції $\xi(t)$ на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$. Така вимога приводить нас до рівняння

$$m(v^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(v^{j+\gamma}, v) + c(u^{j+\gamma} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta - \gamma)\, v^{j+\frac{1}{2}}, v) = <l_{j+\frac{1}{2}}, v>$$
$$\forall v \in V_h \qquad j = 0, ..., N_T,$$

з якого можна спробувати визначити u^{j+1}. Тут ми скористались позначеннями

$$\begin{cases} \omega^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\omega^j + \omega^{j+1}), \quad \omega'^{j+\frac{1}{2}} = \Delta t^{-1}(\omega^{j+1} - \omega^j), \\ \omega^{j+\gamma} = \omega^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t\,(\gamma - \frac{1}{2})\omega'^{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{5.7}$$

та

$$\beta = (\omega, \xi)(\xi, 1)^{-1}, \gamma = \frac{1}{2}\Delta t(\omega', \xi)(\xi, 1)^{-1}. \tag{5.8}$$

Вправа 5.1. Використовуючи позначення (5.7), перепишіть (5.6) у вигляді рівняння для визначення u^{j+1} і переконайтесь , що воно має єдиний розв’язок.

5.3. Рекурентні рівняння.

Аналіз рівнянь (5.3),(5.4) та (5.6) дозволяє формулювати рекурентну схему інтегрування задачі (2.2):

$$\begin{cases} \text{задано } \Delta t, \beta, \gamma = const > 0, y^j = (u^j, v^j) \in V_h^2; \\ \text{знайти пару } y^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1}) \in V_h^2 \text{ таку, що} \\ m(v^{j+\gamma}, v) + \Delta t\{\gamma a(v^{j+\gamma}, v) + \frac{1}{2}\Delta t\beta c(v^{j+\gamma}, v)\} = \\ \qquad = m(v^j, v) + \Delta t\{<l_{j+\frac{1}{2}}, v> - c(u^j, v)\} - \\ \qquad - \frac{1}{2}\Delta t^2(2\gamma^2 - \beta)\, c(v^j, v) \qquad \forall v \in V_h; \\ v^{j+1} = v^j + \gamma^{-1}(v^{j+\gamma} - v^j) \quad j = 0, ..., N_T. \\ u^{j+1} = u^j + \frac{1}{2}\Delta t(v^{j+1} + v^j) \end{cases} \tag{5.9}$$

Схема (5.9) передбачає ,що початкова пара $\varphi^0 = (u^0, v^0)$ визначається початковими умовами (5.4) .Посилаємось на властивості білінійних форм (див.п.1.3.) та лему Лакса-Мільграма , неважко переконатись , що перше рівняння схеми (5.9) має єдиний розв’язок $u^{j+\gamma} \in V_h$, який дозволяє обчислити пару $\varphi^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1})$, необхідну для переходу до наступного кроку інтегрування.

Зауваження5.1. Проекційне рівняння (5.6) з використанням формул (5.3) та (5.7) можна записати різними способами . Одну з таких можливих форм записів наведено нами у вигляді першого з рівняннь схеми(5.9). Власне їй ми віддаємо перевагу з точки зору організації проведення обчислень.

Зауваження 5.2. Рекурентна схема (5.9) дозволяє:

1) за необхідністю виконувати обчислення зі змінним кроком інтегрування Δt;

2) задовольнити початкові умови задачі (2.2) без внесення збурень за рахунок прийнятої апроксимації в часі.

Ці властивості вказують на відчутну перевагу схеми (5.9) над класичною схемою Ньюмарка (10, п.7.5.5, с.282-285).

5.4. Обчислювальні аспекти.

Оскільки шукані функції u^{j+1}, v^{j+1} належать простору V_h, то вони виражаються лінійними комбінаціями

$$u^{j+1} = \sum_{m=1}^{N} U_m^{j+1} y_m, \qquad v^{j+1} = \sum_{m=1}^{N} V_m^{j+1} y_m, \qquad (5.10)$$

базиних функцій $\{y_m\}_{m=1}^{N}$ простору V_h з невідомими коефіцієнтами $U^{j+1} = \{U_m^{j+1}\}_{m=1}^{N}$ та $V^{j+1} = \{V_m^{j+1}\}_{m=1}^{N}$. Тому з використанням матричних позначень рекурентна схема (5.9) допускає еквівалентне алгебраїчне представлення:

$$\begin{cases} \text{задано } \Delta t,\ \beta,\ \gamma = const > 0,\ \Phi^j = \{U^j, V^j\} \subset \boldsymbol{R}^N; \\ \text{знайти пару } \Phi^{j+1} = \{U^{j+1}, V^{j+1}\} \subset \boldsymbol{R}^N \text{ таку, що} \\ \{M + \Delta t\ \gamma A + \frac{1}{2}\Delta t^2 \beta C\} V^{j+\gamma} = \Delta t\{L_{j+\frac{1}{2}} - CU^j\} + \{M + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta - 2\gamma^2)C\} V^j; \\ V^{j+1} = V^j + \gamma^{-1}[V^{j+\gamma} - V^j] \qquad j = 0, ..., N_T. \\ U^{j+1} = U^j + \frac{1}{2}\Delta t[V^{j+1} + V^j]. \end{cases} \qquad (5.11)$$

Ясно , що основні моменти чисельної реалізації таких схем дуже подібні до тих питань, що були розглянуті в п.5.4.розд.2. Тому ми на них не зупиняємось.

Вправа 5.2. Стосовно схеми (5.11) розгляньте всі обчислювальні аспекти з п.5.4 розд.2. На яких суттєвих відмінностях в порівнянні з раніше розглянутими однокроковими схемами слід зупинитись?

6. Стійкість рекурентних схем.

Для встановлення умов стійкості однокрокової рекурентної схеми (5.9) знову скористаємося енергетичними міркуваннями . Для спрощення викладок введемо норми

$$\| y^m \| = \{\| u^m \|_V^2 + \| v^m \|_H^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall y^m = (u^m, v^m) \in V_H^2. \qquad (6.1)$$

6.1. **Енергетичне рівняння.**

Приймаючи в рівнянні (5.6), $v = v^{j+\frac{1}{2}}$, після нескладних обчислень знаходимо енергетичне рівняння.

$$\frac{1}{2}\Delta t^{-1}\{[\| v^{j+1}\|_H^2 + \| u^{j+1}\|_V^2] - \| v^j\|_H^2 + \| u^j\|_V^2]\} + | v^{j+\frac{1}{2}}|^2 +$$

$$+ (\gamma - \frac{1}{2})\ \{\Delta t \,\| v^{j+\frac{1}{2}}\|_V^2 + \frac{1}{2}[| v^{j+1}|^2 - | v^j|^2]\} +$$

$$+ \Delta t\,(\beta - \gamma)\{\| v^{j+1}\|_V^2 - \| v^j\|_V^2\} = \langle l_{j+\frac{1}{2}}, v^{j+\frac{1}{2}} \rangle \qquad j = 0, ..., N_T. \qquad (6.2)$$

Порівнюючи це рівняння з енергетичним рівнянням (2.7) варіаційної задачі (1.8), слід відзначити, що на відміну від методу Гальоркіна вибрана нами схема дискретизації задачі в часі приводить до суттєвих збурень вихідного енергетичного рівняння, які представлені доданками третьої та четвертої стрічки в (6.2). Причому лише при виборі параметрів схеми

$$\beta \ge \gamma \ge \frac{1}{2} \qquad (6.3)$$

ці доданки піддаються фізичній інтерпретації (типу швидкості дисапації та додаткової (схемної) дисапації).

6.2. **Апріорні оцінки.**

Оскільки знайдеться $K = const > 0$ така, що

$$| < l_{j+\frac{1}{2}}, v^{j+\frac{1}{2}} > | \le \frac{1}{2} | v^{j+\frac{1}{2}} |^2 + \frac{1}{2} K \| l_{j+\frac{1}{2}} \|_*^2 ,$$

то енергетичне рівняння приводить до оцінок

$$\|\varphi^{j+1}\|^2 + \Delta t | v^{j+\frac{1}{2}}|^2 + \Delta t\, (\gamma - \frac{1}{2})\{| v^{j+1}|^2 + 2\Delta t \| v^{j+\frac{1}{2}}\|_V^2 \} +$$

$$+ 2\Delta t^2 (p - \gamma)\| v^{j+1}\|_V^2 \} \le \|\varphi^j\|^2 + \Delta t\{(\gamma - \frac{1}{2})| v^j|^2 + 2\Delta t(\beta - \gamma)\| v^j\|_V^2 \} +$$

$$+ \Delta t K \| l_{j+\frac{1}{2}} \|_*^2 \qquad j = 0, ..., N_T. \tag{6.4}$$

або

$$|\varphi^{m+1}|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m} | v^{j+\frac{1}{2}} |^2 + \Delta t(\gamma - \frac{1}{2})\{|v^{m+1}|^2 + 2\Delta t \sum_{j=0}^{m} \|v^{j+\frac{1}{2}}\|_V^2 \} +$$

$$+ \ 2\Delta t^2(\beta - \gamma) \|v^{m+1}\|_V^2 \le \|v_0\|^2 + 2\Delta t^2(\beta - \gamma) \| v_0\|_V^2 \ +$$

$$+ \Delta t K \sum_{j=0}^{m} \| l_{j+\frac{1}{2}} \|_*^2 \quad m = 0, ..., N_T. \tag{6.5}$$

<u>Теорема 6.1</u> (про безумовну стійкість рекурентної схеми).

ßêùî $v_0 \in V$, то однокрокова рекурентна схема (5.9) розв’язування задачі (2.2) безумовно (по відношенню до вибору Δt) стійка в енергетичній нормі (6.1), якщо її параметри β і γ задовольняють умову (6.3). Більш того, при $\beta = \gamma = S$ для стійкості схеми (5.9) досить, щоб початкова швидкість належала лише простору H.

<u>Вправа 6.1.</u> Нерівність (6.5) без затруднень дозволяє виділити клас умовно стійких схем (5.9). Знайдіть умови на β, γ та Δt, що гарантують стійкість таких схем.

7. Оцінки збіжності рекурентних схем.

Виходячи з рівняння (5.6) та початкових умов задачі (2.2), для початку зауважимо, що значення похибок дискретизації в часі

$$\varepsilon^m = u^m - u_h(t_m), \ \rho^m = v^m - u_h'(t_m) \tag{7.1}$$

задовольняють рівняння

$$\begin{cases} m(\rho^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(\rho^{j+\gamma}, v) + c(\varepsilon^{j+\gamma} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta - \gamma)\rho^{j+\frac{1}{2}}, v) = <F_j, v> \ \forall v \in V_h \\ c(\varepsilon^0, v) = 0, \ m(\rho^0, v) = 0, \\ \rho^{j+\frac{1}{2}} - \varepsilon^{j+\frac{1}{2}} = Q_j, \qquad j = 0, ..., N_T, \end{cases} \tag{7.2}$$

де

$$\begin{cases} <F_j, v> = < l_{j+\frac{1}{2}}, v> - m\,(v_{j+\frac{1}{2}}, v) - a\,(v_{j+\gamma}, v) - \\ \qquad - c\,(u_{j+\gamma} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta - \gamma)\ v_{j+\frac{1}{2}}, v), \\ Q_j = v_{j+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{7.3}$$

та

$$\Big\{ u_m = u_h\,(t_m),\ v_m = u'_h(t_m),\ u_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{m+1} + u_m),$$

$$\left\{ \quad \right. \tag{7.4}$$

$$\lfloor\; u_{m+\frac{1}{2}} = \Delta t^{-1}(u_{m+1} - u_m),\ (u_{m+\gamma} = u_{m+\frac{1}{2}} + \Delta t(\gamma - \frac{1}{2})u_{m+\frac{1}{2}} \qquad \text{тощо}$$

Для того, щоб оцінити праві частини рівностей (7.3), допустимо, що розвґязок варіаційної задачі (2.2) достатньо гладкий,принаймні

$$u_h \in C^4(0, T; V_h) \tag{7.5}$$

Тоді, використовуючи розклади в ряди Тейлора вигляду

$$\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}} = u_h(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{8}\Delta t^2 u''(\eta), \\ u_{j+\frac{1}{2}} = u'_h(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{24}\Delta t^2 u'''(\xi) \quad \eta, \xi \in (t_j, t_{j+1}), \\ u_{j+\gamma} = u_h(t_{j+\frac{1}{2}}) + \Delta t(\gamma - \frac{1}{2})\, u'_h(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{8}\Delta t^2\{u''(\eta) + \frac{1}{3}\Delta t(\gamma - \frac{1}{2})\, u'''(\xi)\} \end{cases} \tag{7.6}$$

та рівняння задачі (2.2), зведемо праві частини (7.3) до вигляду

$$\begin{aligned} &\langle F_j, v\rangle = \Delta t(\gamma - \frac{1}{2})\langle L_j, v\rangle + \Delta t^2\langle R_j, v\rangle, \\ &Q_j = \Delta t^2 K_j, \end{aligned} \tag{7.7}$$

де функціонали $L_j, R_j \in V'$ та константи K_j залежать лише від розв'язку $u_h(t)$ і його похідних до четвертого порядку включно.

Таким чином,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{однокрокова рекурентна схема (5.9) розв'язування} \\ \text{задачі (2.2) має перший порядок апроксимації} \\ \text{відносно величини кроку інтегрування } \Delta t, \\ \text{якщо } \gamma \neq \frac{1}{2}\text{; при } \gamma = \frac{1}{2} \text{ ця схема володіє} \\ \text{другим порядком апроксимації.} \end{array} \right. \tag{7.8}$$

Оцінимо порядок збіжності схеми (5.9). З цією метою покладемо в рівняння (7.2) функцію $v = \rho^{j+\frac{1}{2}}$ і приведемо його до вигляду.

$$\begin{aligned} &\|\Delta^{j+1}\|^2 + 2\Delta t|\rho^{j+\frac{1}{2}}|^2 + 2\Delta t\{(\gamma - \frac{1}{2})\,[\Delta t\|\rho^{j+\frac{1}{2}}\|_V^2 + \\ &+ \frac{1}{2}|\rho^{j+1}|^2] + \Delta t(\beta - \gamma)|\rho^{j+1}|_V^2\} = \|\Delta^j\|^2 + 2\Delta t\{\frac{1}{2}(\gamma - \frac{1}{2})|\rho^j|^2 + \\ &+ \Delta t(\beta - \gamma)|\rho^j|_V^2\} + 2\Delta t\{\Delta t(\gamma - \frac{1}{2})\langle L_j, v^{j+\frac{1}{2}}\rangle + \Delta t^2\langle R_j, v^{j+\frac{1}{2}}\rangle\}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Використовуючи оцінки

$$\begin{aligned} &\langle L_j, v^{j+\frac{1}{2}}\rangle \le \frac{1}{4}[\Delta t(\gamma - \frac{1}{2})]^{-1}\,|v^{j+\frac{1}{2}}|^2 + \Delta t(\gamma - \frac{1}{2})K\|\,L_j\|_*^2 \\ &\langle R_j, v^{j+\frac{1}{2}}\rangle \le \frac{1}{4}\Delta t^{-2}\,|v^{j+\frac{1}{2}}|^2 + \Delta t\,K\|\,R_j\|_*^2, \end{aligned} \tag{7.10}$$

на основі рівняння (7.9) приходимо до нерівності

$$\|\rho^{j+1}\|_H^2 + \|\varepsilon^{j+1}\|_V^2 + \Delta t|\rho^{j+\frac{1}{2}}|^2 + 2\Delta t\{(\gamma - \frac{1}{2})[\Delta t\|\rho^{j+\frac{1}{2}}\|_V^2 +$$

$$+\frac{1}{2}|\rho^{j+1}|^2] + \Delta t(\beta-\gamma)\|\rho^{j+1}\|_V^2\} \le \|\Delta^j\|^2 + 2\Delta t\{\frac{1}{2}(\gamma-\frac{1}{2})|\rho^j|^2 +$$

$$+\Delta t(\beta-\gamma)\|\rho^j\|_V^2\} + 2\Delta t^3 K\{(\gamma-\frac{1}{2})^2\|L_j\|_*^2 + \Delta t^2\|R_j\|_*^2\} \qquad (7.11)$$

або

$$\|\rho^{m+1}\|_H^2 + \|\varepsilon^{m+1}\|_V^2 + \Delta t\sum_{j=0}^{m}|\rho^{j+\frac{1}{2}}|^2 + \Delta t\{(\gamma-\frac{1}{2})|\rho^{m+1}|^2 +$$

$$+ 2\Delta t^2\{(\beta-\gamma)\|\rho^{m+1}\|_V^2 + (\gamma-\frac{1}{2})\sum_{j=0}^{m}\|\rho^{j+\frac{1}{2}}\|_V^2\} \le$$

$$\le 2KT\Delta t^2 \max_{j=0,\dots,N_T}\{(\gamma-\frac{1}{2})^2\|L_j\|_*^2 + \Delta t^2\|R_j\|_*^2\} \quad m = 0, \dots, N_T \qquad (7.12)$$

Тут $\|\Delta^j\|^2 = \|\rho^j\|_H^2 + \|\varepsilon^j\|_V^2$ і $K = const > 0$, значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.

Таким чином нами доведено

Теорему 7.1 (про збіжність однокрокової схеми).

Нехай u_h -розв'язок задачі (2.2) такий, що

$u_h \in C^4(0, T; V_h)$, $\quad 0 < T < +\infty$.

Допустимо також, що для його наближення використовуються кусково-квадратичні апроксимації $u_{h\Delta t}(t)$ на сітках $\{t_j\}^{N+1}$ з кроком $\Delta t = T/(N+1)$, причому вузлові значення $\varphi^j = (u^j, v^j)$ цієї апрксимації визначаються од-нокроковою рекурентною схемою (5.9) з параметрами Δt, β, γ.

Тоді при виконанні умов стійкості

$$\beta \ge \gamma \ge \frac{1}{2}$$

вузлові значення $\varphi^j = (u^j, v^j)$ апроксимації $u_{h\Delta t}(t)$ при $\Delta t \to 0$ збігаються відносно енергетичної норми $\|\cdot\|$ до значень $(u_h(t_j), u'_h(t_j))$ і при цьому швидкість збіжності похибок (7.1) характеризується оцінками (7.12). Більш того, максимальний порядок збіжності схеми (дорівнює двом) досягається при виборі

$$\gamma = \frac{1}{2} + K\Delta t, \; K = const > 0.$$

Зауваження 7.1. Значення параметра β схеми (5.9) не впливає на порядок збіжності наближених розв'язків, тому для спрощення рекурентних обчислень за схемою (5.9) доцільно покласти $\beta = 2\gamma^2$.