

Teoría del Oscilador No Lineal Amortiguado

1. Introducción

En este documento se presenta la teoría utilizada para modelar un oscilador no lineal sometido a una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento y una fuerza de amortiguamiento cuadrática proporcional al cuadrado de la velocidad.

El sistema está gobernado por la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} + \lambda \dot{x}|\dot{x}| + kx = 0, \quad (1)$$

donde m es la masa, k es la constante de resorte y λ el coeficiente de amortiguamiento no lineal.

2. Conversión a un Sistema de Primer Orden

Para aplicar el método de Runge–Kutta 4 (RK4), convertimos la ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden.

Definimos:

$$y_1 = x, \quad (2)$$

$$y_2 = \dot{x}. \quad (3)$$

Las ecuaciones quedan:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (4)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{\lambda}{m}y_2|y_2|. \quad (5)$$

3. Método de Runge–Kutta de Orden 4

Para integrar un sistema de ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad (6)$$

se calcula:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad (7)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{y} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right), \quad (8)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{y} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right), \quad (9)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t + h, \mathbf{y} + h\mathbf{k}_3). \quad (10)$$

Luego:

$$\mathbf{y}(t + h) = \mathbf{y}(t) + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4). \quad (11)$$

4. Amortiguamiento No Lineal

El término disipativo:

$$F_d = -\lambda v|v|, \quad (12)$$

corresponde a amortiguamiento cuadrático, típico en sistemas con resistencia aerodinámica o fluidos. A diferencia del amortiguamiento lineal ($F = -bv$), aquí la disipación crece más rápidamente con la velocidad.

5. Conclusión

El método RK4 permite integrar de manera precisa sistemas no lineales como el oscilador amortiguado cuadráticamente. Esta teoría justifica las ecuaciones implementadas en el código y describe la dinámica física del sistema.