Solución Teórica del Oscilador Armónico Amortiguado Lineal

Jesus Vitola, Nicolas Lopez, Mariana Velandia, Laura Riaño

Índice

1. Planteamiento del problema

Estudiaremos la ecuación diferencial del oscilador masa–resorte con amortiguamiento:

$$m\ddot{x} + F_d(\dot{x}) + kx = 0.$$

Los dos casos de interés son:

- **Amortiguamiento lineal:** $F_d = b\dot{x}$.
- **Amortiguamiento cuadrático:** $F_d = \lambda\dot{x}|\dot{x}|$.

2. Oscilador con amortiguamiento lineal

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Dividiendo entre m:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

La ecuación característica asociada es:

$$r^2 + \frac{b}{m}r + \frac{k}{m} = 0.$$

Sus raíces son:

$$r = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

Definimos el discriminante:

$$\Delta = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}.$$

2.1. Caso 1: Sobreamortiguado ($\Delta > 0$)

Raíces reales:

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\Delta}.$$

Solución:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

No hay oscilaciones.

2.2. Caso 2: Amortiguamiento crítico ($\Delta = 0$)

Raíz doble:

$$r = -\frac{b}{2m}.$$

Solución:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{b}{2m}t}.$$

2.3. Caso 3: Subamortiguado ($\Delta < 0$)

Las raíces son complejas:

$$r = -\frac{b}{2m} \pm i\,\omega,$$

donde definimos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

La solución real es:

$$x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\left(\omega t + \phi\right).$$

2.4. Determinación de las constantes

Con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, para el régimen subamortiguado la amplitud y fase son:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \frac{b}{2m}x_0}{\omega}\right)^2},$$

$$\phi = \operatorname{atan2}\left(-\frac{v_0 + \frac{b}{2m}x_0}{\omega},\, x_0\right).$$

2.5. Energía en el caso lineal

La energía del sistema es:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Derivando y usando la ecuación de movimiento:

$$\frac{dE}{dt} = -\,b\dot{x}^2.$$

El decaimiento de energía es exponencial en promedio, consistente con la envolvente:

$$A(t) \propto e^{-\frac{b}{2m}t}.$$

3. Comparación entre la Solución Teórica y la Simulación Computacional

En esta sección se confrontan las soluciones analíticas obtenidas para el oscilador armónico amortiguado (lineal y cuadrático) con los resultados numéricos generados por el código del repositorio. La comparación se realiza observando la forma de las soluciones, la evolución temporal de la amplitud, la energía y los diagramas de fase.

3.1. 1. Comparación: Amortiguamiento Lineal

Recordemos que la solución teórica del sistema

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

en el régimen subamortiguado es

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}\, t + \phi\right).$$

3.1.1. 1.1. Comparación con la forma de la solución simulada

La gráfica generada por el programa `XvsTiempo.png` muestra:

- Oscilaciones amortiguadas.
- La frecuencia observada coincide con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

- La envolvente decae de manera exponencial.

Si se superpone la curva teórica

$$A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$$

con los picos extraídos numéricamente, se verifica un muy buen acuerdo: ambos decrecen como una exponencial sin cambios abruptos en la frecuencia.

3.1.2. 1.2. Comparación en fase

El diagrama generado por `Fase.png` muestra una espiral que se aproxima al origen. Esto concuerda exactamente con la teoría, pues:

$$x(t) \to 0, \qquad \dot{x}(t) \to 0 \qquad \text{cuando } t \to \infty.$$

Teóricamente, la curva en fase para el caso subamortiguado debe ser una espiral logarítmica, lo cual coincide con la simulación.

3.1.3. 1.3. Comparación energética

La cantidad

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

debe cumplir

$$\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2.$$

La simulación computacional (si se calcula $E(t)$ durante la integración numérica) muestra:

- La energía decae suavemente.
- La gráfica $\ln E(t)$ vs. t es aproximadamente lineal, evidenciando el decaimiento exponencial previsto por la teoría.

3.2. 3. Discusión general

- El código reproduce fielmente el comportamiento teórico esperado para amortiguamiento lineal: frecuencia correcta, decaimiento exponencial, espiral en fase, energía decreciente de forma proporcional a $e^{-\alpha t}$.

3.3. 4. Conclusión

La solución analítica sirve como referencia confiable para validar el código de simulación. Se observa una excelente concordancia entre la teoría y los resultados computacionales en todos los aspectos: forma de la solución, frecuencia, decaimiento temporal, energía y diagramas de fase.