پروژهٔ بهینه سازی غیرخطی

استاد درس: جناب آقای دکتر کوشکی

اعضای گروه:

مرضیه روشنی ۹۸۲۲۴۰۳

درسا عسگری ۹۸۲۳۶۸۳

❖ روش نیوتن برای مینیمم سازی توابع:

فرض کنید $f(x)$ یک تابع n متغیره حقیقی باشد که دوبار به طور پیوسته مشتقپذیر است. همچنین فرض کنید $x^{(0)} \in R^n$.

دنباله نیوتن $\{x^{(k)}\}$ با نقطهٔ آغازین $x^{(0)}$ برای مینیمم سازی تابع $f(x)$ با فرمول بازگشتی

$$[Hf(x^{(k)})](x^{(k+1)} - x^{(K)}) = -\nabla f(x^{(K)}) \quad k \geq 0$$

یا به طور معادل با

$$x^{(k+1)} = x^{(K)} - [Hf(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(K)}) \qquad k \geq 0$$

تعریف می‌شود.

مثال روش نیوتن برای مینیمم سازی توابع:

مثال زیر روش نیوتن را برای یک تابع غیر درجه دو ساده نشان می‌دهد.

مثال. در این مثال، دنباله $\{x^{(k)}\}$ حاصل از روش نیوتن را برای مینیمم سازی تابع

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4$$

به دست می‌آوریم. چون $f(x_1, x_2)$ نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 متقارن است پس برای محاسبه تکرار بعدی از نقطه‌ای به صورت (a, a) استفاده می‌کنیم. توجه داریم که

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(4x_1^3 + 4x_1x_2^2,\ 4x_1^2x_2 + 4x_2^3\right),$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 + 4x_2^2 & 8x_1x_2 \\ 8x_1x_2 & 4x_1^2 + 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\nabla f(a, a) = \left(8a^3,\ 8a^3\right), \qquad Hf(a, a) = \begin{bmatrix} 16a^2 & 8a^2 \\ 8a^2 & 16a^2 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، معادله (۵) در نقطه فعلی (a, a) به صورت

$$16a^2(x_1 - a) + 8a^2(x_2 - a) = -8a^3$$

$$8a^2(x_1 - a) + 16a^2(x_2 - a) = -8a^3$$

یا

$$2x_1 + x_2 = 2a$$

$$x_1 + 2x_2 = 2a$$

می‌باشد. جواب دستگاه بالا برابر است با $(x_1, x_2) = (2a/3\,,\,2a/3)$. پس، دنباله حاصل از روش نیوتن برای مینیمم سازی $f(x_1, x_2)$ با نقطه آغازین، مثلاً، $x^{(0)} = (1, 1)$ به صورت

$$x^{(k)} = \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^k, \left(\tfrac{2}{3}\right)^k\right)$$

است. واضح است که، این دنباله همگرا به $x^* = (0, 0)$ می‌باشد که مینیمم کننده سراسری $f(x_1, x_2)$ است، چون

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2.$$

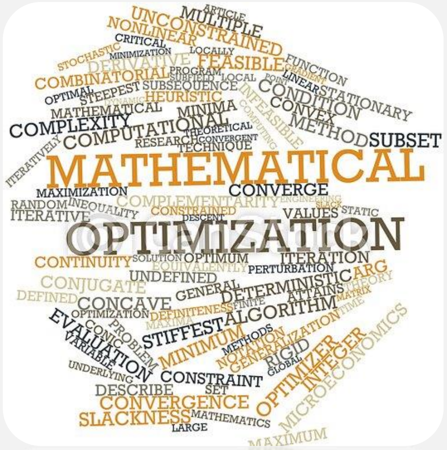
❖ روش سریع‌ترین کاهش(S.D) برای مینیمم سازی توابع:

فرض کنید تابع $f(x)$ مشتق‌های نسبی مرتبه اول پیوسته بر R^n داشته باشد و $x^{(0)} \in R^n$. در این صورت دنبالهٔ سریع‌ترین کاهش $\{x^{(k)}\}$ با نقطهٔ آغازین $x^{(0)}$ برای مینیمم سازی تابع $f(x)$ با رابطه بازگشتی زیر تعریف می‌شود:

$$x^{(k+1)} = x^{(K)} - t_k \nabla f\left(x^{(K)}\right)$$

که در آن t_k مقداری برای $t \geq 0$ است که تابع

$$\varphi_k(\mathrm{t}) = \mathrm{f}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{k}} - \mathrm{t}\nabla f\left(x^{(K)}\right)\right) \quad \mathrm{t} \geq 0$$



الگوریتم روش سریع‌ترین کاهش برای مینیمم سازی توابع:

۱. K=0

۲. مقدار $x^{(K)}$ را به عنوان ورودی دریافت می‌کنیم.

۳. مقدار $\nabla f\left(x^{(K)}\right)$ را محاسبه می‌کنیم و فرض می‌کنیم t_k مقدار بهینهٔ مسالهٔ تک متغیرهٔ $min_{t>0}\, \varphi_k(\mathrm{t}) = \mathrm{f}\left(\mathrm{x^k} - \mathrm{t}\nabla f\left(x^{(K)}\right)\right)$ باشد.

۱. قرار میدهیم $x^{(k+1)} = x^{(K)} - t_k \nabla f\left(x^{(K)}\right)$

۲. به k یک واحد اضافه میکنیم و به مرحله ۳ برمیگردیم (تا زمانی که الگوریتم شرط توقف را داشته باشد.)

مثال برای روش سریع‌ترین کاهش برای مینیمم سازی توابع:

مثال. در زیر به محاسبه سه تکرار اول روش سریع‌ترین کاهش برای مینیمم سازی تابع

$$f(x,y) = ۴x^۲ - ۴xy + ۲y^۲$$

از نقطه آغازین $x^{(\circ)} = (۲,۳)$ می‌پردازیم. توجه داریم که

$$\nabla f(x,y) = (۸x - ۴y\,,\, -۴x + ۴y)\,.$$

در نتیجه، $\nabla f(۲,۳) = (۴,۴)$ و بنابراین

$$\varphi_\circ(t) = f(۲ - ۴t\,,\, ۳ - ۴t)\,.$$

چون

$$\begin{aligned}
\varphi'_\circ(t) &= -\nabla f(x^{(\circ)} - t\nabla f(x^{(\circ)}))\cdot\nabla f(x^{(\circ)})\\
&= -\nabla f(۲ - ۴t\,,\, ۳ - ۴t)\cdot(۴,۴)\\
&= -([۸(۲ - ۴t) - ۴(۳ - ۴t)]۴ + [-۴(۲ - ۴t) + ۴(۳ - ۴t)]۴)\\
&= -۱۶(۲ - ۴t)
\end{aligned}$$

پس $\varphi_\circ(t)$ فقط یک نقطه بحرانی در $t = \frac{۱}{۲}$ دارد و این نقطه بحرانی یک مینیمم کننده سراسری است زیرا $\varphi''(\frac{۱}{۲}) = ۶۴ > \circ$. بنابراین $t_\circ = \frac{۱}{۲}$ و

$$x^{(۱)} = x^{(\circ)} - \frac{۱}{۲}\nabla f(x^{(\circ)}) = (۲,۳) - \frac{۱}{۲}(۴,۴) = (\circ,۱)\,.$$

تکرار دوم $x^{(2)}$ روش سریع‌ترین کاهش را به طور مشابه محاسبه می‌کنیم. چون $\nabla f(x^{(1)}) = (-4, 4)$ پس

$$\varphi_1(t) = f(x^{(1)} - t\nabla f(x^{(1)})) = f(4t,\ 1 - 4t).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\varphi'_1(t) &= -\nabla f(x^{(1)} - t\nabla f(x^{(1)})) \cdot \nabla f(x^{(1)}) \\
&= -\nabla f(4t,\ 1 - 4t) \cdot (-4, 4) \\
&= -([8(4t) - 4(1 - 4t)](-4) + [-4(4t) + 4(1 - 4t)](4)) \\
&= -16(2 - 20t).
\end{aligned}$$

بنابراین، $t = \frac{1}{10}$ تنها نقطه بحرانی $\varphi_1(t)$ است و این نقطه بحرانی یک مینیمم کننده است؛ چون $\varphi''_1(\frac{1}{10}) = 320 > 0$. پس $t_1 = \frac{1}{10}$ و

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{1}{10}\nabla f(x^{(1)}) = (0, 1) - \frac{1}{10}(-4, 4) = (\frac{4}{10}, \frac{6}{10}).$$