UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO CARLO BO

Dipartimento di Scienze Pure e Applicate
Corso di Laurea in Informatica Applicata

Tesi di Laurea

# UN ALGORITMO DI PARSING NELLA LOGICA PREDICATIVA

Relatore:
Chiar.mo Prof. Giovanni Molica Bisci

Candidato:
Marzio Della Bosca

Correlatrice:
Chiar.ma Prof.ssa Raffaella Servadei

Anno Accademico 2022-2023

Ai miei genitori

# Indice

# Introduzione

Un linguaggio è definibile come un sottoinsieme dell'insieme di stringhe di lunghezza finita ottenute tramite la concatenazione di simboli, i quali appartengono ad un insieme finito detto alfabeto del linguaggio. Le regole di costruzione delle parole e frasi del linguaggio sono definite dalla grammatica del linguaggio.

Nel corso della tesi studieremo una particolare classe di linguaggi, ovvero i linguaggi formali. Un linguaggio è formale quando presenta una rappresentazione matematicamente rigorosa per la definizione del suo alfabeto e delle sue regole di formazione (produzioni).

In informatica i linguaggi formali sono usati per la definizione dei linguaggi di programmazione e, in particolare, nello sviluppo di compilatori. I linguaggi possono venire classificati mediante le proprietà della loro grammatica. Per grammatica, in informatica, intendiamo un oggetto matematico finito descritto dalla 4-upla $G = (V, T, S, P)$, in cui V è l'insieme delle variabili, T è l'insieme dei terminali, S è l'insieme dei simboli iniziali e P è l'insieme delle produzioni.

Nel lavorare con i linguaggi ci viene in aiuto la classificazione di Chomsky dei linguaggi in cui si è implementata una classificazione gerarchica dei linguaggi attraverso lo studio delle loro grammatiche. In particolare si dividono i linguaggi in classi con capacità espressiva sempre maggiore.

| Chomsky | Grammatica | Linguaggi |
|---|---|---|
| Tipo 0 | libera | $L_0$: ricorsivamente numerabile |
| Tipo 1 | dipendente dal contesto | $L_1$: dipendente dal contesto |
| Tipo 2 | libera dal contesto | $L_2$: libera dal contesto |
| Tipo 3 | lineare sx/dx | $L_3$: regolare |

La logica predicativa è un potente strumento utilizzato per definire in maniera rigorosa teoremi e proposizioni e per dedurre nuove proposizioni a partire da proposizioni date. Per fare ciò mette a disposizione delle regole per "costruire" il proprio linguaggio (formale) e mette a disposizione delle regole di inferenza utilizzate per dedurre nuovi concetti e per definire delle relazioni tra oggetti.

Alcuni esempi di come la logica dei predicati può venire utilizzata sono:

**Dimostrazione di teoremi**. Ad esempio la logica predicativa può essere utilizzata per dimostrare il teorema di Pitagora o il teorema di Euclide.

**Costruzione di modelli scientifici**. Ad esempio può essere utilizzata per costruire modelli di evoluzione, di fisica o di economia.

**Analisi di argomenti filosofici**. La logica predicativa può essere utilizzata per analizzare l'argomento relativo all'esistenza di Dio o l'argomento della libertà.

Di seguito lavoreremo con la logica predicativa del primo ordine, che si differenzia dalla logica predicativa del secondo ordine in quanto i quantificatori (esistenziali e universali) fanno riferimento solo a delle variabili individuali cioè a oggetti specifici dell'universo del discorso. Inoltre la logica del primo ordine non consente di quantificare sugli insiemi di predicati o sulle relazioni tra i predicati.
La logica predicativa del primo ordine è più comunemente usata nella matematica e nella scienza, mentre la logica predicativa del secondo ordine è comunemente usata nella filosofia e nella logica.

# Capitolo 1

# Logica predicativa

## 1.1 Linguaggi del primo ordine

Molte persone, quando si parla della logica dei predicati, tendono ad avere difficoltà nel capire cosa sia. Il fatto è che i linguaggi della logica dei predicati sono molto più comuni di quanto non si pensi. Ad esempio, la definizione di limite, che viene studiata sin dalle scuole superiori, può essere scritta usando il linguaggio della logica dei predicati:

$$\forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists \delta(\delta > 0 \land \forall x(|x - a| < \delta \to |fx - L| < \varepsilon)))$$

Il significato di questa formula può essere interpretato (in linguaggio naturale) come "la funzione $f$ converge a $L$ quando $x$ si avvicina ad $a$". Questa è, a prescindere da quello che riguarda la notazione, una formula che utilizza simboli di predicato per l'ordinamento, simboli di funzione per $f$, sottrazione, valori assoluti, simboli di costante per 0, $a$ e $L$.

Iniziamo col definire la sintassi di un linguaggio nella logica dei predicati del primo ordine definendo l'oggetto che sta alla base di un linguaggio, ovvero il suo alfabeto. Un alfabeto è un insieme non vuoto di simboli che, attraverso le regole date dalla grammatica del linguaggio permette di costruire delle parole (o stringhe), ovvero delle sequenze finite di simboli messe a disposizione dall'alfabeto. Gli oggetti (simboli) presenti in un alfabeto della logica dei predicati possono essere elencati come segue:

- Simboli logici:
    1. Parentesi: (, ).
    2. Simboli connettivi: $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\land$ e $\lor$.
    3. Variabili (una per ogni $n \in \mathbb{N}$): $v_1, v_2, \ldots$.
    4. Simbolo di ugualianza (opzionale): $=$.
- Parametri:

1. Quantificatore universale: $\forall$.
2. Quantificatore esistenziale: $\exists$.
3. Simboli di predicato: alcuni insiemi (possibilmente vuoti) di simboli sono chiamati simboli di predicato a $n$-parametri ($n \in \mathbb{N}$).
4. Simboli di costante: alcuni insiemi (anche vuoti) di simboli.
5. Simboli di funzione: alcuni insiemi (anche vuoti), sono chiamati simboli di funzione a $n$-parametri ($n \in \mathbb{N}$).

L'insieme delle formule ben formate di un linguaggio della logica predicativa è definito come il più piccolo linguaggio su $Ter \cup Pred \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, (,)\}$, di cui $Ter$ è l'insieme dei termini, $Pred$ l'insieme dei simboli di predicato, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ sono connettivi logici, $\{\forall, \exists\}$ sono quantificatori e $\{(,)\}$ sono simboli ausiliari (che a seconda della notazione utilizzata si possono omettere o meno).

Quando si definisce un nuovo linguaggio della logica predicativa si ha molta libertà rispetto a quali simboli utilizzare e a quale notazione fare riferimento, ad esempio, il simbolo di uguaglianza, in un linguaggio del primo ordine, può essere evitato. Il simbolo di uguaglianza è particolare, in quanto è riconducibile ad un simbolo di predicato a 2 parametri (binario o di arietà 2). Questo è diverso dagli altri predicati perché può essere visto come un simbolo logico in quanto viene utilizzato per esprimere delle relazioni tra degli oggetti, ad esempio la proposizione

$$v_0 = v_1$$

afferma che gli oggetti $v_0$ e $v_1$ sono gli stessi oggetti. Questa è una proposizione logica in quanto non si fa riferimento a degli oggetti specifici, la proposizione è vera o falsa a prescindere dagli oggetti a cui si fa riferimento. I simboli di costante possono essere visti come dei simboli di funzione a 0 parametri in quanto assumono un particolare valore a prescindere al contesto in cui si trovano.

Alcuni esempi di linguaggio del primo ordine. Come si è già affermato, si nota la notevole libertà di scelta (dei simboli da includere) nella costruzione del proprio linguaggio, la quale è una delle "feature" che rende la logica dei predicati uno strumento così potente e versatile.

1. Logica predicativa pura
   - Simbolo di ugualianza: NON PRESENTE
   - Simboli di predicato a $n$-parametri: $A_1^n, A_2^n, \ldots$
   - Simboli di costante: $a_1, a_2, \ldots$
   - Simboli di funzione a $n$-parametri: NO

2. Linguaggio della teoria degli insiemi
   - Simbolo di ugualianza: PRESENTE (di solito)
   - Simboli di predicato a $n$-parametri: simbolo di predicato binario $\in$
   - Simboli di costante: occasionalmente si usa il simbolo $\emptyset$
   - Simboli di funzione a $n$-parametri: NO
3. Linguaggio della teoria elementare dei numeri
   - Simbolo di ugualianza: PRESENTE
   - Simboli di predicato a $n$-parametri: simbolo di predicato binario $<$
   - Simboli di costante: il simbolo 0
   - Simboli di funzione a $n$-parametri: un simbolo di funzione a singolo parametro $S$ (successore) e due simboli di funzione binari $+$ e $*$ rispettivamente per definire la somma e la moltiplicazione.

È importante definire ogni volta cosa significano i quantificatori, questa pratica consente di garantire che le proposizioni che si stanno affermando siano vere. Ad esempio, se non si definisce cosa si intende per "essere umano", la proposizione "Tutti gli esseri umani sono mortali" potrebbe non essere vera perché potrebbe essere possibile che esistano esseri che non sono umani ma che hanno la proprietà di essere mortali. Definire il significato dei quantificatori aiuta anche a evitare ambiguità. Ad esempio: "Alcuni esseri umani sono mortali" potrebbe essere interpretata in due modi diversi, la si può interpretare come un'affermazione in cui si dice che esiste almeno un essere umano che è mortale, oppure potrebbe essere interpretata come affermare che esiste un gruppo di esseri umani che sono immortali. Formalmente la differenza nel significato tra quantificatore universale e unificatore esistenziale può essere espressa tramite le seguenti sostituzioni sintattiche:

- $\forall x(\alpha)$ è vera sse $\forall t \in \text{Ter}$ con $\text{var}(t) = \emptyset$ risulta che $\alpha[t/x]$ è vera
- $\exists x(\alpha)$ è vera sse esiste $t \in \text{Ter}$ con $\text{var}(t) = \emptyset$ tale che $\alpha[t/x]$ è vera

Per fissare meglio la differenza semantica tra i quantificatori si riportano degli esempi in cui si utilizzano linguaggi della logica dei predicati:

**Esempio** nel linguaggio della teoria degli insiemi. Qui il simbolo $\forall$ significa "per tutti gli insiemi" e il simbolo $\in$ significa "è un elemento di".

- "Non esiste un insieme di cui ogni altro insieme ne sia un membro". Andremo a tradurre questa affermazione nel linguaggio della teoria degli insiemi:

$\neg$[Esiste un insieme di cui ogni altro insieme ne sia un membro]
$\neg\exists v_1$[di cui ogni altro insieme sia un membro di $v_1$]
$\neg\exists v_1 \forall v_2\ v_2 \in v_1$]

- Ora dobbiamo rimpiazzare $v_2 \in v_1$ con $\in v_2 v_1$ dato che i simboli di predicato vanno sempre messi a sinistra in questi contesti, inoltre $\exists v_1$ deve essere cambiato con $\neg\forall v_1 \neg$, sempre per gli stessi motivi. Dobbiamo anche usare il numero corretto di parentesi ottenendo

$$(\neg(\neg\forall v_1(\neg\forall v_2 \in v_2 v_1)))$$

**Esempio** nella teoria elementare dei numeri. In questo caso con il simbolo $\forall$ intendiamo "per tutti i numeri naturali", mentre il significato dei simboli $<, 0, S, +, *$ e $\exists$ resta quello a cui siamo abituati.

- In questo caso ci stiamo riferendo al quinto dei postulati di Peano, ovvero il principio di induzione con cui siamo in grado di definire in maniera assiomatica l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Grazie a questo principio siamo in grado di riferirci a qualunque numero appartenente a $\mathbb{N}$ solamente con un simbolo di costante (0) e un simbolo di funzione ($S$), la funzione successore. In questo modo per definire il numero che vogliamo rappresentare basta contare il numero di volte che viene applicata la funzione successore allo 0, ad esempio $S0 = 1$, $SS0 = 2$, $SSS0 = 3$ e così via. Per definire l'affermazione "$2+2$" è possibile utilizzare la notazione standard, riducendo al massimo l'utilizzo delle parentesi (notazione polacca per i simboli di funzione), invece della notazione infissa utilizzata in precedenza per l'operatore $+$. In questo modo il termine corrispondente che definisce l'affermazione "2 + 2" è $+SS0SS0$. Quindi la traduzione finale dell'affermazione, in linguaggio naturale, "due più due è uguale a quattro" sarà

$$= +SS0SS0SSSS0$$

- Dalla definizione dell'insieme dei naturali $\mathbb{N}$ mediante la funzione successore (funzione totale e chiusa rispetto a $\mathbb{N}$) si deriva che ogni numero naturale, diverso da 0, è un successore di un altro numero. Attueremo la traduzione attraverso 3 passi:
  $\forall v_1$[Se $v_1$ è diverso da 0 allora $v_1$ è il successore di un altro numero]
  $\forall v_1(v_1 \neq 0 \to \exists v_2 v_1 = Sv_2)$
  $\forall v_1((\neg = v_1 0) \to (\neg\forall v_2(\neg = v_1 S v_2)))$

**Esempi** per linguaggi "ad hoc"

1. Se volessimo dire, in un linguaggio del primo ordine, "Tutti i pirati hanno la benda", la formula corretta sarebbe:

$$\forall v_1(Pv_1 \to Bv_1).$$

Invece per affermare "Alcuni pirati hanno la benda" dovremmo seguire i seguenti passi:

Passo intermedio: $\exists v_1(Pv_1 \land Bv_1)$
Prodotto finale: $(\neg\forall v_1(\neg(\neg(Pv_1 \to (\neg Bv_1)))))$

Il predicato $P$ significa "è un pirata" e il predicato $B$ significa "indossa una benda". Un'affermazione che in linguaggio naturale afferma che "ogni oggetto assimilabile ad una certa categoria possiede determinate proprietà" può essere tradotto con:

$$\forall v(\_\_ \to \_\_)$$

Invece per affermare che esiste un oggetto (o esistono degli oggetti) in una certa categoria che ha una certa proprietà è tradotto con:

$$\exists v(\_\_ \land \_\_)$$

Bisogna fare attenzione a non confondere i due schemi. Ad esempio,

$$\forall v_1(Pv_1 \land Bv_1)$$

traduce "Ogni cosa è un pirata e indossa una benda", il che la rende un'affermazione più forte rispetto al primo esempio. Allo stesso modo $\exists v_1(Pv_1 \to Bv_1)$ traduce "Esiste qualcosa che indossa una benda, se è un pirata". Questa invece è un'affermazione molto più debole rispetto al secondo esempio in quanto è vera anche nel caso in cui esista qualcosa che non sia un pirata.

2. "Il padre di Rob è in grado di darle al padre di qualunque altro bambino del quartiere". Stabilito un linguaggio in cui $\forall$ significhi "per tutte le persone", $B\ v_1$ significhi "$v_1$ è un bambino del quartiere, $r$ significa "Rob", $D\ v_1\ v_2$ significhi "$v_1$ è in grado di darle a $v_2$" e $P\ v_1$ significhi "il padre di $v_1$", la traduzione porterebbe ad avere

$$\forall v_1(Bv_1 \to ((\neg = v_1 r) \to DPrPv_1))$$

## 1.2 Formule e termini

Un'espressione è una sequenza finita di simboli sintatticamente corretta. In questa sezione vedremo le espressioni che ricadono sotto l'insieme delle formule ben formate e dei termini. Per spiegare meglio cosa significa il fatto che un'espressione, anche se sintatticamente corretta, non ha senso possiamo fare un esempio nel linguaggio naturale: consideriamo la frase

"Il mio gatto ha preso la patente ed è un asso a scala quaranta".

A prescindere dal fatto se sia possibile che un gatto sia in grado di prendere la patente, siamo tutti d'accordo che giocare a scala quaranta (ed essere bravo) senza pollici opponibili è impossibile, in quanto si vedrebbero le carte.

Nella sezione precedente abbiamo definito l'insieme delle formule ben formate di un linguaggio della logica predicativa del primo ordine come il più piccolo linguaggio su $Ter \cup Pred \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, (,)\}$, adesso andiamo a definire meglio l'insieme dei termini. L'insieme $Ter$ è il più piccolo linguaggio su $Cos \cup Var \cup Fun \cup \{(,)\}$ tale che

- $Cos \subseteq Ter$
- $Var \subseteq Ter$
- $f(t_1, \ldots, t_n) \in Ter$ per ogni $f \in Fun$ con $n = 1$ argomenti e $t_1, \ldots, t_n \in Ter$.

I termini quindi sono costituiti da simboli di variabili, simboli di costante e simboli di funzione, oltre che i simboli ausiliari ( e ). Ad esempio $f(v_0, v_1)$ è un termine composto dal simbolo di funzione $f$, i simboli di variabile $v_0$ e $v_1$ e i simboli di parentesi, che a seconda della notazione utilizzata possono essere omesse o meno.

Se non ci sono simboli di funzione allora i termini sono composti solamente da simboli di costante e variabili. In questo caso non c'è bisogno di una definizione induttiva. Usando la notazione polacca per i termini, mettendo i simboli di funzione a sinistra, i termini non contengono parentesi o virgole. Grazie al Teorema della leggibilità unica (vedi Teorema 2.4.1) è sempre possibile decomporre un termine in maniera non ambigua, ovvero unica. I termini sono espressioni che identificano degli oggetti, a differenza delle formule ($FBF$) che identificano delle affermazioni costruite sugli oggetti. Alcuni esempi di termini nel linguaggio della teoria degli insiemi sono:

$+v_2S0$

$SSSS0$

$+Ev_1SS0Ev_2SS0$

Una definizione alternativa di termine è la seguente:

**Definizione 1.2.1.** *L'insieme dei termini è l'insieme delle espressioni che possono essere composte partendo dai simboli di costante e variabili attraverso l'applicazione (una o più volte) delle operazioni* $F_f$*.*

I termini sono quindi i nomi e i pronomi del nostro linguaggio mentre le formule atomiche saranno tutte quelle formule ben formate che non contengono né simboli connettivi né quantificatori e che descrivono le proprietà di cui un oggetto gode.

Sia i termini che le formule ben formate sono delle stringhe di simboli, la differenza sta nella loro natura e utilizzo. Le formule ben formate sono delle proposizioni, ovvero delle affermazioni che possono essere o vere o false mentre i termini rappresentano degli oggetti. Le formule ben formate si costruiscono a partire dai termini, infatti si costituiscono di tutti quei simboli che compongono i termini, simboli di predicato e simboli di quantificazione. Ad esempio $\forall v_0 P(v_0)$ è una formula ben formata, che in particolare afferma che il predicato $P$ vale per tutti gli oggetti a cui fa riferimento il quantificatore $\forall$.

L'insieme delle $FBF$ può essere suddiviso in formule atomiche e formule composte, tutte quelle formule ben formate che non contengono né simboli connettivi né quantificatori fanno parte delle formule atomiche, le restanti $FBF$ sono formule composte.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Termini | Formule Atomiche | Formule composte | Altre espressioni |

FBF

Una formula atomica è un'espressione del tipo:

$$Pt_1, \dots, t_n$$

dove $P$ è un simbolo di predicato a $n$ parametri e $t_1, \dots, t_n$ sono termini. Per esempio $= v_1 v_2$ è una formula atomica, dato che $=$ è un simbolo di predicato binario e ogni variabile è un termine. Nel linguaggio della teoria degli insiemi abbiamo la formula atomica $\in v_5 v_3$.

Le formule sono definite in maniera esplicita come espressioni da considerarsi formule atomiche, senza ricorrere a induzioni. Le formule composte e/o quantificate sono quelle espressioni che possono essere composte a partire dalle formule atomiche attraverso (0 o più volte) l'uso di connettivi logici e quantificatori.

Data una formula non atomica $\alpha \in FBF$ diciamo che è:

- Composta con connettivo primario $\neg$ e sottoformula immediata $\alpha'$ sse è nella forma $(\neg\alpha')$.
- Composta con connettivo primario $\wedge$ e sottoformule immediate $\alpha'_1$ e $\alpha'_2$ sse è nella forma $(\alpha'_1 \wedge \alpha'_2)$.
- Composta con connettivo primario $\vee$ e sottoformule immediate $\alpha'_1$ e $\alpha'_2$ sse è nella forma $(\alpha'_1 \vee \alpha'_2)$.
- Composta con connettivo primario $\rightarrow$ e sottoformule immediate $\alpha'_1$ e $\alpha'_2$ sse è nella forma $(\alpha'_1 \rightarrow \alpha'_2)$.
- Composta con connettivo primario $\leftrightarrow$ e sottoformule immediate $\alpha'_1$ e $\alpha'_2$ sse è nella forma $(\alpha'_1 \leftrightarrow \alpha'_2)$.
- Quantificata esistenzialmente rispetto a $x$ con sottoformula immediata $\alpha'$ sse è nella forma $(\exists x)(\alpha')$.
- Quantificata unversalmente rispetto a $x$ con sottoformula immediata $\alpha'$ sse è nella forma $(\forall x)(\alpha')$.

Possiamo spiegare meglio la differenza tra le formule atomiche e le formule composte definendo qualche operazione di costruzione delle formule sulle espressioni:

$$\varepsilon_\neg(\gamma) = (\neg\gamma)$$

$$\varepsilon_\rightarrow(\gamma, \delta) = (\gamma \rightarrow \delta)$$

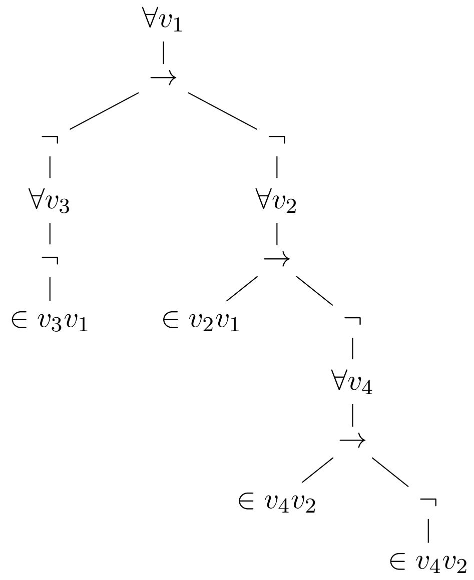
$$Q_i(\gamma) = \forall v_i \gamma$$

**Definizione 1.2.2.** *L'insieme delle formule ben formate (o semplicemente formule) è l'insieme delle espressioni che possono essere costruite partendo dalle formule atomiche attraverso l'applicazione (0 o più volte) l'operazione $\varepsilon_\neg$, $\varepsilon_\rightarrow$ e $Q_i (i = 1, 2, \dots)$.*

Per esempio se da una parte $\neg v_3$ non è una FBF, in quanto i connettivi logici si applicano alle formule e non ai termini (una variabile è un termine non una formula), dall'altra parte

$$\forall v_1((\neg\forall v_3(\neg \in v_3 v_1)) \rightarrow (\neg\forall v_2(\in v_2 v_1 \rightarrow (\neg\forall v_4(\in v_4 v_2 \rightarrow (\neg \in v_4 v_1))))))$$

è una formula ben formata e lo si può verificare visualizzando l'albero di sintassi astratta per questa formula:



Esistono diverse tipologie di termini, ovvero i termini liberi e i termini chiusi. I termini liberi sono termini che non contengono variabili non legate, mentre i termini chiusi sono tutti quei termini che contengono almeno una variabile legata, ad esempio $v_0 + 1$ è un termine libero mentre $(v_0 + 1) * v_1$ è un termine chiuso perché $v_1$ è una variabile non legata.

Similmente per le costanti, esistono tre diverse tipologie di esse ovvero ci sono le costanti individuali, predicative e logiche. Le costanti individuali sono le "lettere" che vengono utilizzate nel calcolo logico per formalizzare i nomi propri. Le costanti predicative vengono utilizzate nel calcolo logico per formalizzare i predicati ovvero le proprietà degli individui, mentre le costanti logiche sono utilizzate per formalizzare i termini che determinano la forma logica di una proposizione, ad esempio i connettivi logici come $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.

## 1.3 Variabili libere

I quantificatori non sono solo degli operatori logici di arietà uno, ma si comportano anche come legatori per la sua variabile che ha come campo d'azione la sottoformula immediata a cui è applicato. Due esempi di formule ben formate sono $\forall v_2 \in v_2 v_1$ e $(\neg \forall v_1 (\neg \forall v_2 \in v_2 v_1))$. La differenza tra le due formule è che il primo esempio può essere tradotto solo attraverso un'affermazione incompleta:

Ogni insieme è un elemento di _

mentre il secondo dovrebbe essere tradotto in linguaggio naturale come:

C'è un insieme tale che tutti gli insiemi sono elementi di esso.

Per quanto riguarda il primo esempio non siamo in grado di completare l'affermazione senza sapere cosa fare con $v_1$: in questo caso diciamo che $v_1$ occorre libera in $(\neg\forall v_1(\neg\forall v_2 \in v_2 v_1))$.

Consideriamo una qualunque variabile $v$. Definiamo, per ogni FBF $\alpha$, cosa significa dire che $v$ occorre libera in $\alpha$.Tramite ricorsione definiamo:

1. Per una formula atomica $\alpha$, $v$ occorre libera in $\alpha$ se e solo se occorre (quindi è un simbolo di) in $\alpha$.

2. $v$ occorre libera in $(\neg\alpha)$ se e solo se $v$ occorre libera in $\alpha$.

3. $v$ occorre libera in $\alpha \to \beta$ se e solo se $v$ occorre in $\alpha$ o in $\beta$.

4. $v$ occorre libera in $\forall v_i \alpha$ se e solo se $v$ occorre libera in $\alpha$ e $v \neq v_i$.

Questa definizione dell'insieme delle variabili libere che occorrono in una formula $\alpha$ è una definizione induttiva sulla struttura sintattica di $\alpha$. Possiamo riassumere utilizzando il concetto di funzione, iniziamo con la funzione $h$ definita sulle formule atomiche:

$$h(\alpha) = \text{l'insieme di tutte le variabili, se ce ne sono, nella formula atomica } \alpha.$$

La funzione $h$ restituisce l'insieme delle variabili che occorrono in $\alpha$. Adesso abbiamo bisogno di estendere $h$ con la funzione $\bar{h}$ in modo da avere una funzione che restituisce solo le variabili che occorrono libere in $\alpha$ tale che

$$\bar{h}(\varepsilon_{\neg}(\alpha)) = \bar{h}(\alpha).$$

$$\bar{h}(\varepsilon_{\to}(\alpha, \beta)) = \bar{h}(\alpha) \cup \bar{h}(\beta).$$

$$\bar{h}(Q_i(\alpha)) = \bar{h}(\alpha) \text{ dopo la rimozione di } v_i \text{ se presente.}$$

Quindi diremo che $v$ occorre libera in $\alpha$ (o anche $v$ è una variabile libera di $\alpha$) sse $x \in \bar{h}(\alpha)$. L'esistenza di un unico $\bar{h}$ segue dal Teorema di ricorsione (vedi Teorema A.1.1) e dal fatto che ogni formula ben formata ha un'unica decomposizione.

Se nessuna variabile occorre libera in $\alpha$ (quindi se $\bar{h}(\alpha) = \emptyset$), allora $\alpha$ è un'affermazione (le affermazioni sono intuitivamente le formule ben formate traducibili in linguaggio naturale, una volta che si capisce come interpretare i parametri). Per esempio $\forall v_2(Av_2 \to Bv_2)$ e $\forall v_3(Pv_3 \to \forall v_3 Qv_3)$ sono delle affermazioni, invece dato che $v_1$ occorre libera in $(\forall v_1 Av_1 \to Bv_1)$ l'ultimo esempio non è riconducibile ad un'affermazione.

Nella traduzione dal linguaggio naturale a un linguaggio della logica predicativa del primo ordine la scelta di quali simboli utilizzare come variabili perde di importanza. Ad esempio nella sezione precedente avevamo "Tutti i pirati portano la benda" come $\forall v_1(Pv_1 \to Bv_1)$. Si sarebbe potuto tradurre anche attraverso la formula

$$\forall v_{27}(Pv_{27} \to Bv_{27})$$

Le variabili sono effettivamente usate come dei pronomi, così come in linguaggio naturale diremmo "Per ogni oggetto, se *questo* è un pirata, allora *questo* indossa una benda". Data la scarsa rilevanza della scelta di una variabile rispetto ad un'altra non è necessario specificare il motivo di tale scelta. Invece scriveremo, per esempio, $\forall v_0(Av_0 \to Bv_0)$, dove si capisce che $v_0$ è una variabile. Anche in algebra le variabili vengono utilizzate allo stesso modo:

$$\sum_{i=1}^{7} a_{ij}$$

qui $i$ è una variabile di integrazione mentre $j$ occorre libera, da notare il fatto che se al posto della $i$ o della $j$ avessimo usato $k$ o una qualunque altra lettera il senso della formula non sarebbe cambiato.

Ovviamente nell'utilizzo delle variabili è importante la coerenza, ovvero se nella stessa proposizione ci si riferisce ad un particolare oggetto con il simbolo $v$ si deve utilizzare sempre lo stesso simbolo per fare riferimento a quell'oggetto.

## 1.4 Notazione

Definiamo una formula ben formata in maniera estesa, quindi senza l'utilizzo della notazione polacca, in cui si omettono tutti quei simboli come virgole e parentesi che, anche se sono utili per questione di leggibilità, non hanno uno scopo dal punto di vista della semantica. La definiamo così in modo che faccia vedere esplicitamente ogni simbolo. Ad esempio

$$\forall v_1((\neg = v_1 0) \to (\neg \forall v_2(\neg = v_1 S v_2))).$$

Questa modalità di espressione, anche se completa, potrebbe essere pesante da leggere. Per ovviare al problema andremo ad accettare quei metodi che ci consentono di definire le formule ben formate in modi più indiretti, ma più comprensibili. Queste convenzioni ci permettono di riscrivere la formula come

$$\forall v_1(v_1 \neq 0 \to \exists v_2 v_1 = S v_2).$$

Va notato che non stiamo modificando la nostra definizione di cosa una formula ben formata sia, ma stiamo aggiustando il modo in cui i simboli delle formule ben formate vengono identificati. Nei (rari) casi in cui l'esatta sequenza di simboli diventa importante, potrebbe essere necessario lasciare queste nuove convenzioni e ritornare alla notazione precedente. Adottando le seguenti convenzioni e abbreviazioni, qui $\alpha$ e $\beta$ sono formule, $v$ è una variabile e $u$ e $t$ sono dei termini.

$(\alpha \vee \beta)$ abbrevia $((\neg\alpha) \to \beta)$.

$(\alpha \wedge \beta)$ abbrevia $(\neg(\alpha \to (\neg\beta)))$.

$\alpha \leftrightarrow \beta)$ abbrevia $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$ quindi
$(\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \rightarrow \alpha))))$

$\exists x\alpha$ abbrevia $(\neg \forall x(\neg \alpha))$

$u = t$ abbrevia $= ut$. Una simile abbreviazione si applica anche ad altri predicati binari e simboli di funzione. Per esempio $1 < 2$ semplifica $< 12$ e $2 + 2$ semplifica $+22$.

$u \neq t$ abbrevia $(\neg = ut)$, allo stesso modo $u \not< t$ abbrevia $(\neg < ut)$

Per quanto riguarda le parentesi, facciamo presente che possono essere utilizzate anche [, ], {, } oltre che ( e ). Utilizzando invece delle convenzioni come la notazione polacca si vanno ad ottenere delle formule così scritte:

1. La maggior parte delle parentesi possono essere tralasciate, ad esempio $\forall x\alpha \rightarrow \beta$ è $(\forall x\alpha \rightarrow \beta)$.

2. $\neg, \forall$ e $\exists$ si applicano il meno possibile, per esempio:

   $\neg\alpha \wedge \beta$ è $((\neg\alpha \wedge \beta)$ e non $\neg(\alpha \wedge \beta)$;
   $\forall x\alpha \rightarrow \beta$ è $(\forall x\alpha \rightarrow \beta)$ e non $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$;
   $\exists x\alpha \wedge \beta$ è $\exists x\alpha \wedge \beta)$ e non $\exists x(\alpha \wedge \beta)$

   In questi casi potremmo aggiungere parentesi gratuite, come in $(\exists x\alpha) \wedge \beta$

3. $\wedge$ e $\vee$ vanno usati il meno possibile, per esempio:

$$\neg\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma \text{ è } ((\neg\alpha) \wedge \beta) \rightarrow \gamma$$

4. Quando un connettivo viene usato ripetutamente, l'espressione viene raggruppata a destra, esempio:

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \text{ è } \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$$

**Esempi** di come possiamo eliminare le abbreviazioni, riscrivendo le formule in maniera non abbreviata che elenca esplicitamente i simboli nell'ordine

1. $\exists x(Ax \wedge Bx)$ è $((\neg\forall x(\neg Ax)) \rightarrow Bx)$.
   Anche se $(\neg\forall x(Ax \rightarrow (\neg Bx)))$ sarebbe una formula equivalente

2. $\exists x Ax \rightarrow Bx$ è $((\neg\forall x(\neg Ax)) \rightarrow Bx)$.
   $\exists x(Ax \rightarrow Bx)$ è $(\neg\forall x(\neg(Ax \rightarrow Bx)))$.

# Capitolo 2

# Teorema di leggibilità unica

## 2.1 Un algoritmo di parsing

L'operazione di parsing si basa sul concetto che possiamo decomporre le formule (e i termini) in un unico modo facendo emergere le loro regole di formazione. L'unicità è necessaria per giustificare la nostra definizione, costruita attraverso la ricorsione. L'operazione di parsing, concettualmente, consiste nel verificare se un termine, formula o proposizione appartiene o meno ad un dato linguaggio. In informatica i parser sono dei moduli utilizzati soprattutto nella verifica, da parte di un compilatore (o da un interprete) della correttezza sintattica di un comando. Quando si scrive del codice questo non viene scritto in un linguaggio direttamente "leggibile" da una macchina, ma in un linguaggio di alto livello che poi deve essere tradotto per poter essere eseguito. Sarebbe molto oneroso da parte di un umano scrivere in linguaggi di basso livello direttamente interpretabili da un processore, dato che i processori lavorano utilizzando la logica booleana applicata a delle transizioni di potenziale che sono la rappresentazione fisica dei "bit". Quindi, a meno che non si voglia scrivere programmi lunghissimi utilizzando come simboli 0 e 1, abbiamo bisogno di linguaggi più espressivi, ad un livello di astrazione più elevato. La fase di parsing di un brano di codice valuta solo la sintassi del codice senza fare riferimento alla sua semantica. Tornando ai linguaggi della logica predicativa del primo ordine, adottiamo un approccio al problema "Divide et Impera", iniziamo col verificare un algoritmo di parsing per i termini, ovvero andiamo a considerare un metodo per decomporre i termini così da mostrare la **leggibilità unica**. Successivamente estenderemo la procedura alle formule.

Ricordando che i termini sono costruiti a partire da simboli di variabili e simboli di costanti attraverso le operazioni corrispondenti ai simboli di funzione, definiamo una funzione $K$ sui simboli coinvolti tale che per un simbolo $s$, $K(s) = 1 - n$, dove $n$ rappresenta il numero di termini che devono susseguirsi a $s$ per ottenere un termine:

$K(v) = 1 - 0 = 1$ per una variabile $v$

$K(c) = 1 - 0 = 1$ per un simbolo di costante $c$

$K(f) = 1 - n$ per un simbolo di funzione a $n$ parametri.

Estendiamo ora $K$ all'insieme delle espressioni:

$$K(s_1 s_2 \dots s_n) = K(s_1) + K(s_2) + \cdots + K(s_n)$$

Dato che in precedenza abbiamo imposto che nessun simbolo è una sequenza di altri simboli, questa definizione non è soggetta a contraddizioni.

**Lemma 2.1.1.** *Per ogni termine $t$, $K(t) = 1$*

*Dimostrazione.* Attuando l'induzione su $t$ il passo induttivo per una funzione $f$ a $n$ parametri è

$$K(ft_1 \dots t_n) = (1 - n) + \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{\text{n volte}} = 1$$

□

Dal Lemma 2.1.1 segue poi che se $\varepsilon$ è una concatenazione di $m$ termini, allora $K(\varepsilon) = m$. Attraverso un segmento terminale di una stringa $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$ di simboli noi intendiamo una sequenza della forma $\langle s_k, s_{k+1}, \dots, s_n \rangle$ dove $1 \leq k \leq n$.

**Corollario 2.1.1.** *Un qualunque segmento terminale di un termine è una concatenazione di uno o più termini.*

*Dimostrazione.* Applichiamo l'induzione sui termini, per un simbolo di termine (ovvero una variabile o un simbolo di costante) la conclusione segue banalmente. Per un termine $ft_1, \dots, t_n$, ogni segmento terminale (oltre al termine stesso) deve corrispondere a

$$t'_k t_{k+1} \dots t_n$$

dove $k \leq n$ e $t'_k$ è un segmento terminale di $t_k$. Attraverso l'ipotesi induttiva $t'_k$ è una concatenazione di $m$ termini, dove $m \leq 1$. Quindi in tutto abbiamo $m + (n - k)$ termini. □

## 2.2 Parsing dei termini

Andiamo a definire un algoritmo che in input prende un'espressione e in output costruisce l'unico albero sintattico che mostra come il termine è stato costruito se l'espressione, in questo caso un termine, appartiene al nostro linguaggio, ovvero se il termine è legale. Nel caso in cui l'espressione non appartiene al linguaggio l'algoritmo si blocca. L'albero sintattico è originato a partire dall'espressione data, ovvero il termine viene posto alla radice dell'albero. All'inizio, il termine sarà l'unico vertice presente nell'albero, ma con il procedere dell'algoritmo l'albero cresce verso il basso formando nuovi nodi. L'algoritmo consiste nei seguenti due passi:

Caso Base Se ogni foglia dell'albero presenta un simbolo singolo (che deve essere una variabile o un simbolo di costante), allora la procedura è completa, (l'espressione data allora è un termine e ne abbiamo costruito l'albero sintattico). Altrimenti si seleziona la foglia contenente l'espressione con uno o più simboli e la si esamina.

Caso induttivo Il primo simbolo deve essere un simbolo di funzione a $n$ parametri (se non lo è non è un termine, quindi rigettiamo l'espressione come un non-termine e ci fermiamo), definiamolo quindi come $f$, con $n > 0$. Si andrà poi a estendere l'albero creando $n$ nuovi nodi. Poi si analizza l'espressione dopo $f$, fino a trovare una stringa $t$ (di variabili, simboli di costante e simboli di funzione) con $K(t) = 1$ (se la fine dell'espressione è raggiunta prima di trovare tale $t$, allora l'espressione non è un termine, quindi rigettiamo l'espressione come un non-termine e ci fermiamo). Quindi $t$ è l'espressione che va al nuovo nodo senza etichetta più a sinistra. Si ripete con il resto dell'espressione fino a che tutti i nuovi $n$ nodi sono stati etichettati, e l'espressione è stata esaurita. Si ritorna al caso base.

Alla base del concetto vi è che l'albero sintattico, per ciascun termine, deve essere unico. Nel caso induttivo abbiamo selezionato la prima stringa $t$ trovata con $K(t) = 1$. Non possiamo usare meno di $t$ (perché dal Lemma 2.1.1. abbiamo visto che avevamo posto $K(t) = 1$). Non possiamo nemmeno più di $t$ (perché la stringa più lunga avrebbe avuto il segmento iniziale proprio $t$ con $K(t) = 1$ contraddicendo il Corollario 2.1.1.). La scelta di $t$ è l'unica scelta possibile. Quando l'algoritmo si ferma, è perché o rigetta l'espressione come un non-termine, o ne produce l'albero sintattico dimostrando che l'espressione è un termine legale.

**Teorema 2.2.1** (Teorema della leggibilità unica per i termini). *L'insieme dei termini è liberamente generato dall'insieme delle variabili e dei simboli di costante attraverso l'applicazione delle operazioni $F_f$.*

*Dimostrazione.* Se e solo se $f \neq g$, allora $F_f$ è disgiunto da $F_g$, questo richiede di controllare solamente il primo simbolo. Inoltre, entrambi gli intervalli sono disgiunti dall'insieme di variabili e simboli di costanti. Rimane solo da mostrare che $F_f$, quando è ristretta ai termini, è una relazione 1 a 1. Supponiamo che per una funzione $f$ a due parametri abbiamo

$$ft_1t_2 = ft_3t_4$$

Eliminando il primo simbolo da entrambi i lati dell'equazione rimane:

$$t_1t_2 = t_3t_4$$

Se $t_1 \neq t_3$ allora un termine sarebbe il segmento iniziale dell'altro, il che è impossibile per i termini stando al Corollario 2.1.1. Quindi $t_1 = t_3$ e rimaniamo con $t_2 = t_4$. □

## 2.3 Parsing delle formule

Ricordiamo che le formule sono formate da un "range" di simboli più ampio dei termini, perché, oltre che essere formate da termini, sono composte anche dai simboli di predicato, quantificatori universali ($\forall$) ed esistenziali ($\exists$). Definiamo quindi la funzione $K$ per i simboli che non abbiamo incontrato durante lo studio dei termini:

$K(() = -1;$

$K()) = 1;$

$K(\forall) = -1;$

$K(\neg) = 0;$

$K(\rightarrow) = -1;$

$K(P) = 1 - n$ per un predicato $P$ a $n$ parametri;

$K(=) = -1;$

L'idea dietro la definizione è che $K(s)$ ($s$ simbolo generico) deve essere $1 - n$, dove $n$ è il numero di simboli (parentesi destre, termini o formule) richieste per andare oltre a $s$. Estendiamo $K$ ottenendo l'insieme di tutte le espressioni:

$$K(s_1, \dots, s_n) = K(s_1) + \dots + K(s_n).$$

**Lemma 2.3.1.** *Per ogni formula ben formata $\alpha$, $K(\alpha) = 1$*

**Lemma 2.3.2.** *Per qualsiasi segmento iniziale proprio $\alpha'$ di una fbf $\alpha$, $K(\alpha')$ $< 1$*

**Corollario 2.3.1.** *Nessun segmento iniziale proprio di una formula è anch'esso una formula.*

In questo modo, al posto di affermazioni ai vertici minimali abbiamo delle formule atomiche distinte dal fatto che hanno un simbolo di predicato a $n$ parametri come primo elemento, seguito da altri $n$ termini, in cui non sono presenti dei simboli connettivi, ovvero $\wedge$ e $\vee$. Una formula ben formata che non è atomica deve iniziare o con $\forall v_i$ o con il simbolo (. Nel caso precedente avevamo un nuovo vertice mentre nel caso successivo vedremo che sarà necessario controllare se il simbolo successivo sia $\neg$. Se non lo è allora potremmo o contare le parentesi o usare di nuovo la funzione $K$, entrambi i metodi sono corretti.

## 2.4 Teorema di leggibilità unica per le formule ben formate

**Teorema 2.4.1** (Leggibilità unica per le formule ben formate)**.** *Le formule ben formate non sono ambigue, cioè esiste un unico modo di leggere ogni $\alpha \in FBF$.*

Il Teorema di leggibilità unica è un teorema che dimostra che ogni formula ben formata nella logica predicativa del primo ordine ha sempre una sola forma normale prenessa che la rappresenta. Una forma normale prenessa è una formula sempre corretta dal punto di vista sintattico ed equivalente dal punto di vista semantico alla formula ben formata di partenza che è nella forma

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m)$$

in cui $x_1, x_n$ sono variabili libere e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sono formule atomiche in cui non occorrono variabili libere. Il Teorema 2.4.1 consente di riscrivere qualunque formula ben formata in maniera più concisa e semplice. La prova di questo teorema è sviluppato per induzione sulla lunghezza della formula. Nel caso base, se la formula è una formula atomica allora è già in forma normale prenessa in quanto nelle formule atomiche non occorrono delle variabili vincolate, per mancanza dei quantificatori. Nel caso induttivo invece se la formule per esempio è nella forma $\alpha \wedge \beta$ allora o $\alpha$ o $\beta$ è già in forma normale prenessa e quindi possiamo applicare la proprietà di chiusura della forma normale prenessa per concludere che anche la formula $\alpha \wedge \beta$ è nella sua forma normale prenessa.

Le variabili vincolate spariscono nella forma normale prenessa perché sono quantificate a priori, questo significa che il loro dominio è limitato a tutti i valori che rendono vera la formula nel senso che le variabili vincolate non possono assumere valori che rendono falsa la formula. Ad esempio la formula ben formata

$$\forall x_1(P(x_1) \wedge \forall x_2(Q(x_2)))$$

può essere riscritta in forma normale prenessa

$$\forall x_1 \forall x_2(P(x_1) \wedge Q(x_2))$$

La variabile $x_2$ è vincolata dalla prima affermazione in quanto il suo dominio è limitato a tutti i valori che rendono vera la formula $P(x_1)$. In altre parole, la variabile $x_2$ non può assumere valori che rendono falsa la formula $P(x_1)$.

**Il Teorema di leggibilità unica** è equivalente alla richiesta che l'insieme delle formule ben formate sia liberamente generato dalle formule atomiche tramite le funzioni connettivo (tale insieme di funzioni connettivo può essere in generale infinito). Tale procedura permette dunque l'applicazione del Teorema di ricorsione generalizzato (vedi Teorema A.2.2). Tale procedura permette la buona positura nella semantica di Tarski della nozione di interpretazione, come vedremo nella sezione successiva.

## 2.5 Applicazione della semantica di Tarski

Fino ad ora abbiamo lavorato con la sintassi nella logica dei predicati, per quanto riguarda la semantica vedremo adesso cosa vuol dire assegnare un valore di verità ad una formula nella logica dei predicati del primo ordine. Prendiamo l'esempio che fece Tarski per definire il concetto di verità:

La neve è bianca.

Questa frase potrebbe essere tradotta in logica dei predicati mediante la formula

$$\forall x(\mathit{neve}(x) \to \mathit{bianca}(x))$$

in cui il predicato *neve* significa "è neve" mentre il predicato *bianca* significa "è bianca", quindi in maniera più colloquiale la formula che abbiamo definito significa che per qualunque cosa che sia neve, questa ha tra le sue proprietà anche quella di essere bianca. La formula è vera o falsa?

Effettivamente ci verrebbe da dire subito che è vera, però qualcun altro potrebbe fare presente che su Titano la neve è arancione. Non sarebbe giusto affermare che uno dei due ha torto, in quanto hanno entrambi ragione, il problema sta nel fatto che si sta cercando di dare un valore di verità, nella logica predicativa, senza definire il "mondo" a cui ci stiamo riferendo. Per poter dire se una formula è vera o falsa abbiamo bisogno prima di definire quale sia l'interpretazione su cui vogliamo basarci.

Nella logica dei predicati una struttura è un'interpretazione in termini di oggetti e relazioni in un modello. Una struttura può includere oggetti specifici, relazioni tra quegli oggetti, funzioni su quegli oggetti, ecc. Una struttura per un linguaggio del primo ordine dice:

1. A quale collezione di oggetti l'unificatore universale $\forall$ si riferisce.

2. Cosa denotano gli altri parametri (funzioni e simboli di predicato).

Formalmente una struttura $\mathfrak{A}$ per un linguaggio del primo ordine è una funzione il cui dominio è l'insieme dei parametri tale che:

1. $\mathfrak{A}$ assegna al simbolo di quantificatore universale un insieme non vuoto $|\mathfrak{A}|$ chiamato universo (o dominio) di $\mathfrak{A}$.

2. $\mathfrak{A}$ assegna ad ognuno dei predicati a $n$-parametri $P$ una relazione $n$-area $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|$, quindi $P^{\mathfrak{A}}$ è l'insieme di $n$-uple dei membri dell'universo.

3. $\mathfrak{A}$ assegna ad ogni simbolo di costante $c$ un membro $c^{\mathfrak{A}}$ dell'universo $|\mathfrak{A}|$.

4. $\mathfrak{A}$ assegna ad ogni simbolo di funzione $f$ a $n$-parametri un'operazione $n$-area $f^{\mathfrak{A}}$ su $|\mathfrak{A}|$, quindi $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$.

$\mathfrak{A}$ si riferisce ai parametri, $\forall$ è da considerarsi come "per ogni cosa in $\mathfrak{A}$", il simbolo $c$ è il nome del punto $c^{\mathfrak{A}}$ mentre la formula atomica $Pt_1 \dots t_n$ è da considerarsi come la $n$-upla dei punti $t_1 \dots t_n$ che sono nella relazione $P^{\mathfrak{A}}$. L'insieme universo $|\mathfrak{A}|$ non può essere vuoto o avremmo il problema di provare ad assegnare dei valori di verità a formule che vanno a descrivere oggetti in un mondo, per così dire, "vuoto".
Consideriamo il linguaggio del primo ordine per la **teoria degli insiemi**, in cui l'unico parametro (oltre a $\forall$) è $\in$. Definiamo la struttura $\mathfrak{A}$ con

$|\mathfrak{A}| =$ l'insieme dei numeri naturali,

$\in \mathfrak{A} =$ l'insieme delle coppie $m, n$ tali che $m < n$.

Considerando $\in$ come "è minore di", in presenza di una struttura possiamo tradurre le frasi dal linguaggio formale in linguaggio naturale cercando di stabilire se queste traduzioni sono vere o false, in quanto solo in presenza di una struttura possiamo dare un significato. Ad esempio la formula

$$\exists x \forall y \neg (y \in x)$$

utilizzando un'altra possibile interpretazione afferma l'esistenza di un insieme vuoto, mentre nel nostro insieme universo $\mathfrak{A}$ viene interpretata come:

esiste un numero naturale tale che nessun numero naturale è più piccolo, il che è vero. A causa di ciò diremo che $\exists x \forall y \neg (y \in x)$ è vero in $\mathfrak{A}$, o che $\mathfrak{A}$ è un modello per questa formula. D'altra parte, $\mathfrak{A}$ non è un modello dell'assioma delle coppie,

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y),$$

perché la sua interpretazione in $\mathfrak{A}$ è falsa. Infatti, non esiste alcun numero naturale $m$ tale che per ogni $n$,

$$n < m, \text{ lo è solo se } n = 1.$$

Il valore di verità di una formula è strettamente dipendente alla struttura cui è legata, in altre parole, una formula ben formata può essere vera in alcune strutture e falsa in altre. Per definire matematicamente $\sigma$ è vera in $\mathfrak{A}$ dobbiamo farlo in termini matematici, quindi rigorosi e non in termini del linguaggio naturale. Riscriviamo $\sigma$ è vera in $\mathfrak{A}$ formalmente attraverso

$$\models_{\mathfrak{A}} \sigma,$$

inoltre siano

1. $\varphi$ una formula ben formata di un linguaggio della logica dei predicati del primo ordine
2. $\mathfrak{A}$ una struttura per il linguaggio dato
3. $s : V \to |\mathfrak{A}|$ una funzione che va dall'insieme $V$ di tutte le variabili nell'universo $|\mathfrak{A}|$ di $\mathfrak{A}$

Andiamo successivamente a definire cosa significa dire $\mathfrak{A}$ soddisfa $\varphi$ tramite $s$

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s].$$

Informalmente diciamo che $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ se e solo se l'interpretazione di $\varphi$ determinata da $\mathfrak{A}$, dove la variabile $x$ è interpretata come $s(x)$ ovunque occorra libera, $x$ è vera.

La definizione formale di soddisfacimento procede come segue:

I. Per i *termini* definiamo l'estensione

$$\bar{s} : T \to |\mathfrak{A}|$$

che è una funzione dall'insieme $T$ di tutti i termini nell'universo di $\mathfrak{A}$. L'idea è che $\bar{s}(t)$ dovrebbe essere l'elemento dell'universo $|\mathfrak{A}|$ che è nominato dal termine $t$. $\bar{s}$ è definita per ricorsione come segue:

   1. Per ogni variabile $x$, $\bar{s}(x) = s(x)$.

2. Per ogni simbolo costante $c$, $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.
3. Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini e $f$ è un simbolo di funzione $n$-aria, allora

$$\bar{s}(ft_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)).$$

L'esistenza di un'unica tale estensione $\bar{s}$ di $s$ segue dal Teorema di ricorsione (vedi Teorema A.1.1), utilizzando il fatto che i termini hanno decomposizioni uniche, $\bar{s}$ dipende sia da $s$ che da $\mathfrak{A}$.

II. Le *formule atomiche* vengono definite esplicitamente, non ricorsivamente:

(a) $\models_{\mathfrak{A}} = t_1 t_2[s]$ se e solo se $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$.

(b) Per un predicato $P$ a $n$ parametri

$$\models_{\mathfrak{A}} Pt_1 \ldots t_n[s] \text{ se e solo se } \langle \bar{s}(t_1), \ldots \bar{s}(t_n) \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$$

III. Dato che le altre *formule ben formate* si costruiscono ricorsivamente partendo dalle formule atomiche attraverso le operazioni di $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, viene usata la ricorsione anche per dimostrare il Teorema di soddisfacimento per le formule ben formate composte:

1. $\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s]$ se e solo se $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$.
2. $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \wedge \psi)[s]$ se e solo se $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ e $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$.
3. $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \vee \psi)[s]$ se e solo se $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$, $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$ o valgono entrambi.
4. $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \rightarrow \psi)[s]$ se e solo se $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$, $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$ o valgono entrambi.
5. $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \leftrightarrow \psi)[s]$ se e solo se $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ e $\not\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$ oppure $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$ e $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$.
6. $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi[s]$ se e solo se per ogni $d \in |\mathfrak{A}|$, abbiamo $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s(x|d)]$.

Qui $s(x|d)$ è la funzione che è esattamente come $s$ tranne per una cosa: alla variabile $x$ assume il valore $d$. Questo può essere espresso dall'equazione:

$$s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y) & \text{se } y \neq x, \\ d & \text{se } y = x. \end{cases}$$

Si può dedurre che la definizione di soddisfacimento è un'altra applicazione del Teorema di ricorsione, insieme al fatto che le formule ben formate hanno decomposizioni uniche. La definizione può essere riformulata in termini di funzioni:

1. Consideriamo un $\mathfrak{A}$ fisso.

2. Definiamo una funzione $\bar{h}$ (estendendo una funzione $h$ definita sulle formule atomiche) in modo tale che, per ogni formula ben formata $\varphi$, $\bar{h}(\varphi)$ sia un insieme di funzioni da $V$ nell'universo $|\mathfrak{A}|$.
3. Definiamo $\models \mathfrak{A}\varphi[s]$ se e solo se $s \in \bar{h}(\varphi)$.

Quando lavoriamo con formule complesse dobbiamo considerare come i quantificatori influenzano la verità della formula. Ad esempio, se prendiamo una formula come

per ogni $x$, $x$ è un numero positivo

questa sarà vera se tutti i valori di $x$ soddisfano la proprietà di essere numeri positivi. Tarski estese la definizione di verità alle formule contenenti quantificatori attraverso un processo chiamato "induzione sulla struttura" delle formule, ovvero, la verità di una formula composta dipende dalla verità delle sue parti costituenti. Quindi, sapendo come definire la verità per le formule atomiche e come i connettivi logici influenzano la verità, possiamo estendere questa definizione a formule più complesse.

Ad esempio la verità di una formula congiuntiva come "$P$ e $Q$" dipende dalla verità di entrambi $P$ e $Q$. Tarski dimostrò che un linguaggio non è tuttavia in grado di definire la sua stessa verità in modo coerente, il problema sorge quando prendiamo in considerazione affermazioni che parlano della propria verità. Ad esempio, se prendiamo l'affermazione "Questa frase è falsa", ci troviamo di fronte a una contraddizione perché se la frase è vera, allora deve essere falsa, ma se è falsa allora deve essere vera: questo è un esempio del "Paradosso del mentitore", ovvero, data una proposizione auto-negante nessuno riuscirà mai a dimostrare se l'affermazione sia vera o falsa.

Il lavoro di Tarski sui linguaggi formali e sulla definizione della verità ha costituito un contributo fondamentale alla logica e alla filosofia. Ha dimostrato come definire la verità per formule all'interno di un linguaggio, garantendo al contempo che il linguaggio stesso non cada vittima di paradossi come il paradosso del mentitore. Per evitare paradossi è necessario considerare il metalinguaggio, cioè un linguaggio più ampio e ricco in cui è possibile parlare del linguaggio stesso. Nel metalinguaggio possiamo esprimere affermazioni sulla verità delle formule nel linguaggio originale, ad esempio, nel metalinguaggio possiamo dire

l'affermazione 'La neve è bianca' è vera se e solo se la neve è effettivamente bianca.

In questo modo, possiamo parlare della verità delle affermazioni nel linguaggio originale senza cadere nei paradossi. Tarski ha formulato ciò che oggi è noto come la **Convenzione T**, che stabilisce come esprimere la verità di una formula del linguaggio originale nel metalinguaggio. La Convenzione T afferma che una formula del linguaggio originale è vera se e solo se trova riscontro nella realtà che descrive.

Un altro concetto importante introdotto da Tarski è la **gerarchia della verità**: ha dimostrato che la verità delle formule può essere organizzata in diverse gerarchie, ciascuna delle quali corrisponde a un livello di complessità sintattica. Ogni livello della gerarchia contiene formule che parlano della verità delle formule al livello inferiore.

# Appendice

## A.1 Elementi della teoria degli insiemi e argomenti ricorsivi

**L'insieme dei numeri naturali** $\mathbb{N}$. Il nostro obiettivo iniziale è trovare alcuni insiemi adatti da utilizzare come numeri naturali. Seguendo una costruzione attribuita a von Neumann nel 1923, è di uso comune prendere:

$$0 := \emptyset,\ 1 := \{0\},\ 2 := 1 \cup \{1\} = \{0,\ 1\},\ 3 := 2 \cup \{2\} = \{0,\ 1,\ 2\},\ \ldots$$

e così via[1], il successore $S(n)$ del numero $n$ è definito come

$$S(n) := n \cup \{\mathrm{n}\}$$

Ad esempio, $S(3) := 3 \cup \{3\} = \{0,1,2\} \cup \{3\} = \{0,1,2,3\}$, cioè 4. La discussione precedente fornisce una definizione formale precisa per qualsiasi dato numero naturale. Non fornisce però una precisa nozione formale dell'insieme dei numeri naturali. A tale scopo, è necessario l'Assioma dell'infinito. Questo afferma l'esistenza di almeno un insieme X (detto insieme induttivo) tale che:

$(i_1)$ $\emptyset \in X$;

$(i_2)$ $x \in X \Rightarrow x \cup \{x\} \in X$

Infine, per fornire una definizione precisa dell'insieme dei numeri naturali, consideriamo la classe $F$ di tutti gli insiemi $X$ tale che valgano $(i_1)$ e $(i_2)$. Poiché $F \neq \emptyset$, grazie all'assioma dell'infinito, poniamo $\omega := \bigcap_{X \in F} X$. Se $X$ soddisfa $(i_1)$ e $(i_2)$ allora $\omega \subseteq X$. Pertanto, $\omega$ è un insieme come conseguenza dell'Assioma della Comprensione. L'insieme $\omega$ è un modello per gli Assiomi di Dedekind-Peano: Esiste un insieme $N$ e una funzione $\sigma : N \to N$ tale che:

$(p_1)$ $0 \in \mathbb{N}$;

$(p_2)$ $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è iniettiva;

$(p_3)$ Vale il principio di induzione: Se $X \subseteq \mathbb{N}$ tale che
$0 \in X$;
$\forall n : n \in X \Rightarrow \sigma(n) \in X$,
allora $X = \mathbb{N}$.

[1] La procedura iterativa che genera i numeri naturali nel modello di Von Neumann è formalizzata matematicamente dal Teorema della Ricorsione A.1.1

Secondo il teorema classico di categoricità di Ax-Kochen, è possibile dimostrare che il modello $\omega$ per gli assiomi di Peano è unico fino alle identificazioni. Pertanto, possiamo definire $\omega$ come l'intersezione di tutti gli insiemi $X$ appartenenti alla classe $F$. Questo insieme rappresenta i numeri naturali. Invece di $\omega$, per il nostro scopo, utilizziamo il simbolo $\mathbb{N}$ nella teoria assiomatica. Una conseguenza diretta e significativa del principio di induzione è il seguente (Debole) Teorema di Ricorsione[2], valido nell'Aritmetica di Dedekind-Peano;

**Teorema A.1.1.** *Sia $X$ un insieme non vuoto. Se $g : X \to X$ è una funzione e $a \in X$, esiste una funzione unica (sequenza in $X$) $f : \mathbb{N} \to X$ tale che:*

*($r_1$)* $\quad f(0) = a \in X$;

*($r_2$)* $\quad f(\sigma(n)) = g(f(n)) \quad$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

*Dimostrazione.* Dividiamo la dimostrazione in due passi: Esistenza e Unicità. **Esistenza.** Sia $C$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi $S$ di $\mathbb{N} \times X$ tale che

($s_1$) $\quad (0, a) \in$ S,

($s_2$) $\quad (\sigma(n), g(b)) \in S \quad$ ogni volta che $(n, b) \in S$.

Poiché $N \times X$ soddisfa le assunzioni precedenti, l'insieme $C$ non è vuoto. Consideriamo

$$Gr(f) := \bigcap_{S \in C} S \subseteq N \times X.$$

È evidente che $Gr(f)$ soddisfa ($s_1$) e ($s_2$). Pertanto, $Gr(f) \in C$ e $Gr(f) \subseteq S$ per ogni $S \in C$. Dimostriamo che $Gr(f)$ è il grafico di una funzione $f$ per la quale valgono ($r_1$) e ($r_2$). A questo scopo, definiamo l'insieme

$$M := \{n : n \in N \wedge \exists! b \in X, (n, b) \in Gr(f)\}.$$

Dimostriamo che $M$ è un insieme induttivo:

- Affermazione 1 - $0 \in M$. Poiché $Gr(f) \in C$, si ha $(0, a) \in Gr(f)$ per ($s_1$). Per contraddizione, supponiamo che $(0, b) \in Gr(f)$ per qualche $b \neq a$. Sia $Gr(f)b := Gr(f) \setminus \{(0, b)\}$. Poiché $(0, b) \neq (0, a) \in Gr(f)$, $(0, a) \in Gr(f)b$. Se $(n, c) \in Gr(f)b$, allora $(\sigma(n), g(c)) \in Gr(f)$ e poiché $\sigma(n) \neq 0$ si ha $(\sigma(n), g(c)) \in Gr(f)b$. Di conseguenza, $Gr(f)b \in C$ e $Gr(f) \subset Gr(f)b = Gr(f) \setminus \{(0, b)\}$, il che è assurdo.

[2] Il teorema di ricorsione è ancora valido se $X$ è una classe anziché un insieme.

- Affermazione 2 - Se $n \in M$, allora $\sigma(n) \in M$. Infatti, sia $n \in M$. Allora esiste $b \in X$ tale che $(n, b) \in Gr(f)$. Poiché $Gr(f) \in C$, si ha $(\sigma(n), g(b)) \in Gr(f)$. Per contraddizione, supponiamo che $(\sigma(n), c) \in Gr(f)$ per qualche $c \neq g(b)$, e sia $Gr(f)c := Gr(f) \setminus \{(\sigma(n), c)\}$. Poiché $(\sigma(n), c) \neq (0, a) \in Gr(f)$, $(0, a) \in Gr(f)c$. Se $(m, d) \in Gr(f)c$, allora $(\sigma(m), g(d)) \neq (\sigma(n), c)$. Altrimenti, $\sigma(m) = \sigma(n)$, $g(d) = c \neq g(b)$, quindi (per $(p2)$) $m = n$, $d \neq b$, e $(n, b), (n, d) \in Gr(f)$, contrariamente all'ipotesi che $n \in M$. Di conseguenza, si deduce che $(\sigma(m), g(d)) \in Gr(f)c$. Pertanto, $Gr(f)c \in C$ e $Gr(f) \subset Gr(f)c = Gr(f) \setminus \{(\sigma(n), c)\}$, il che è assurdo.

- Da Affermazioni 1 e 2, il principio di induzione $(p_3)$ implica $M = N$. Pertanto, per ogni $n \in N$, esiste $b \in X$ tale che $(n, b) \in Gr(f)$. Sia quindi $f : N \to X$ la funzione definita da $Gr(f)$. Poiché $(0, a) \in Gr(f)$, si ha $f(0) = a$. Inoltre, per definizione, $f(\sigma(n)) = g(b)$ se e solo se $f(n) = b$. Allora, $f(\sigma(n)) = g(f(n))$ per ogni $n \in N$. In conclusione, $(r_1)$ e $(r_2)$ sono verificate.

**Unicità.** Sia $h : N \to X$ tale che

$$h(0) = a \text{ e } h(\sigma(n)) = g(h(n)),$$

per ogni n $\in \mathbb{N}$
Sia $T \subseteq \mathbb{N}$ tale che $h = f$ su $T$. Ora, poiché $h(0) = f(0)$, segue che $0 \in T$. Inoltre, sia $n \in T$ tale che $h(n) = f(n)$. Allora

$$h(\sigma(n)) = g(h(n)) = g(f(n)) = f(\sigma(n)).$$

Pertanto, il principio di induzione $(p_3)$ implica che $T = \mathbb{N}$. In conclusione, si ha che $h = f$ su $\mathbb{N}$, ovvero si raggiunge l'unicità della funzione $f$. □

Attraverso il Teorema di ricorsione (vedi Teorema A.1.1) definiamo in $\mathbb{N}$ le leggi associative e commutative della somma $+_\mathbb{N}$ e della moltiplicazione $\cdot_\mathbb{N}$. Più precisamente, per un valore fisso di $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &0 +_\mathbb{N} m = m; \\ &\sigma(n) +_\mathbb{N} m = \sigma(n +_\mathbb{N} m); \end{aligned}$$

mentre per l'operazione '.' si ha:

$$\begin{aligned} &0 \cdot_\mathbb{N} m = 0; \\ &\sigma(n) \cdot_\mathbb{N} m = (n \cdot_\mathbb{N} m) + Nm \end{aligned}$$

In $\mathbb{N}$ definiamo l'ordine totale $\leq_\mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \leq_\mathbb{N} m \Leftrightarrow \forall X \subseteq \mathbb{N} \text{ stabile rispetto a } \sigma, \text{ se } n \in X \text{ allora } m \in X.$$

L'ordine $\leq_\mathbb{N}$ è compatibile con l'addizione $+_\mathbb{N}$ e la moltiplicazione $\cdot_\mathbb{N}$, ovvero: per ogni $n \leq_\mathbb{N} m$ si ha

$$n +_{\mathbb{N}} t \leq_{\mathbb{N}} m +_{\mathbb{N}} t,$$

e

$$n \cdot_{\mathbb{N}} t \leq_{\mathbb{N}} m \cdot_{\mathbb{N}} t, \text{ per ogni } t \in \mathbb{N}.$$

Chiaramente, nel modello di Von Neumann, il ruolo della mappa iniettiva $\sigma$ dei postulati di Dedekind-Peano è svolto dalla funzione successore $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $S(n) = n \cup \{n\} = n +_{\mathbb{N}} 1$. In questo caso, $n \leq_{\mathbb{N}} m$ significa semplicemente $n \subseteq m$. Notiamo che, come conseguenza del Teorema A.1.1, la funzione fattoriale $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è ben definita in modo ricorsivo come segue:

$$0! = 1;$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot_{\mathbb{N}} n! \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

La struttura $(\mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, \leq_{\mathbb{N}})$ è un semianello ordinato. Semplificando la notazione, scriviamo $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ quando non sorgono confusioni. Inoltre, indicheremo anche con $\mathbb{N}^* := (\mathbb{N} \setminus \{0\}, +, \cdot, \leq)$. Una caratterizzazione del principio di induzione si enuncia come segue.

**Teorema A.1.2.** *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

$(a_1)$ *Il principio di induzione dato in ($p_3$)*

$(a_2)$ *Il principio del buon ordinamento: ogni insieme non-vuoto $X \subseteq \mathbb{N}$ ammette un minimo.*

*Dimostrazione.* $(a_1) \Rightarrow (a_2)$ - Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ un insieme non vuoto e, argomentando per assurdo, supponiamo che $X$ non abbia un minimo. Consideriamo quindi l'insieme $N \setminus X$. Chiaramente, $0 \in N \setminus X$, altrimenti $0 = \min(\mathbb{N}, X)$. Ora, sia $n > 0$. Siccome $X$ non ha un minimo, segue che $0, 1, \ldots, n \cap X = \emptyset$ e $n + 1 \in N \setminus X$. Di conseguenza, il principio di induzione ($p3$) implica che $N \setminus X = \mathbb{N}$, cioè $X = \emptyset$, il che è assurdo.
$(a_2) \Rightarrow (a_1)$ - Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ un insieme non vuoto tale che:

$(i_1)$ $0 \in X$;

$(i_2)$ $\forall n : n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$.

Argomentando per assurdo, supponiamo che $X \neq \mathbb{N}$. Poiché $Y := \mathbb{N} \setminus X \neq \emptyset$, per (a2) esiste $mY := \min_{\mathbb{N}} Y \in Y$. Chiaramente, per $(i_1)$, $m_Y \neq 1$ e $m_Y - 1 \notin Y$. Di conseguenza, $mY - 1 \in X$ e, per $(i_2)$, segue che $m_Y \in X$. Poiché $X \cap Y = \emptyset$, abbiamo una contraddizione. $\square$

Infine, sottolineiamo che $(p_3)$ può essere formulato in diverse forme (deboli). Di seguito viene riportato un tipico esempio.

**Teorema A.1.3.** *Sia $P(n)$ un predicato in $\mathbb{N}$. Assumendo che:*

$(g_1)$ *Esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $P(n_0)$ è vero.*

$(g_2)$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : P(n)$ *vero* $\rightarrow P(n+1)$ *vero.*

*Allora si ottiene che $P(n)$ è vero per ogni $n \geq n_0$*

*Dimostrazione.* Consideriamo l'insieme

$$X := \{n : n \in \mathbb{N} \wedge P(n + n_0)\} \subseteq \mathbb{N}$$

Da $(g_1)$ e $(g_2)$ otteniamo che $(p_3)$ è vera. Quindi abbiamo $X = \mathbb{N}$, tale per cui $P(n + N_0)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\square$

## A.2 Induzione generalizzata

Sia $X$ un insieme non vuoto e sia $k \in \mathbb{N}^*$, sia

$$f_i : \underbrace{X \times \cdots \times X}_{r_i \text{ termini}} \to X$$

una funzione di arietà $r_i \in \mathbb{N}^*$ e l'insieme

$$\mathscr{F} := f_i : i = 1, \ldots, k$$

Inoltre, sia $\mathscr{I} \subset X$ con $A \neq \emptyset$. Diremo che $B \subseteq X$ è $(A, \mathscr{F})$-induttivo se e solo se:

1. $A \subseteq B$;
2. $B$ è chiuso rispetto ad ogni $f_i \in F$, ovvero se per ogni $i = 1, \ldots, k$, si ha $f_i(b_1, \ldots, b_{r_i}) \in B$ per ogni $b_1, \ldots, b_{r_i} \in B$.

Sia $\mathscr{I}$ l'insieme dei sottoinsiemi $(A, \mathscr{F})$-induttivi di $X$. Definiamo

$$I(A, \mathscr{F}) := \bigcap_{B \in \mathscr{I}} B. \tag{1}$$

Dato che $X \in \mathscr{I}$ da (1), segue che $I(A, \mathscr{F}) \neq \emptyset$. L'insieme[3] $I(A, \mathscr{F})$ è detto l'insieme generato da $A$ tramite le funzioni in $\mathscr{F}$. Il **principio di induzione generalizzato** si formula come segue.

**Teorema A.2.1.** *Siano $A$ e $\mathscr{F}$ come sopra e sia $T \subseteq X$ tale che:*

*Induzione di base: $A \subseteq T$;*

*Passo induttivo: $\forall i = 1, \ldots, k$, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in T$, allora $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in T$.*

*Allora $I(A, \mathscr{F}) \subseteq T$.*

*Dimostrazione.* L'induzione di base e il passo induttivo garantiscono che $T \in \mathscr{I}$, cioè $T \subseteq X$ è induttivo rispetto ad $(A, \mathscr{F})$. Di conseguenza, da (1), si ha $I(A, \mathscr{F}) \subseteq T$, come richiesto. □

Il Teorema A.1.3 è un caso particolare del Teorema A.2.1. Infine, introducendo alcune nuove nozioni, vale un teorema di ricorsione generalizzato (vedi Teorema A.2.2).

[3] Sottolineiamo che $I(A, \mathscr{F})$ è $(A, \mathscr{F})$-induttivo e, in particolare, che per ogni $i = 1, \ldots, k$ e $x_1, \ldots, x_{r_i} \in I(A, \mathscr{F})$, $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i}) \in I(A, \mathscr{F})$.

**Definizione A.2.1.** *Diciamo che $I(A, \mathscr{F})$ è generato liberamente da $A$ tramite $\mathscr{F}$ se e solo se:*

1. *$f_i \restriction_{I(A,\mathscr{F})}$ è iniettiva per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$;*
2. *Per ogni $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ con $i \neq j$, si ha $f_i \restriction_{I(A,\mathscr{F})} (I(A, \mathscr{F})) \cap f_j \restriction_{I(A,\mathscr{F})} (I(A, \mathscr{F})) = \emptyset$, e per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, $f_i \restriction_{I(A,\mathscr{F})} (I(A, \mathscr{F})) \cap A = \emptyset$,*

*dove il simbolo $f_i \restriction_{I(A,\mathscr{F})}$ indica la restrizione di $f_i$ a $I(A, \mathscr{F})$.*

Sia $V \neq \emptyset$ dotato di $k$ operazioni

$$F_i : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r_i \text{termini}} \to V \ (i = 1, \ldots, k)$$

con arità $r_i$.

Il risultato principale qui sotto afferma che se $I(A, \mathscr{F})$ è generato liberamente da $A$ tramite $\mathscr{F}$, allora ogni funzione $v : A \to V$ ammette sempre un'estensione unica di omomorfismo

$$\bar{v} : (I(A, \mathscr{F}), f_1, \ldots, f_k) \to (V, F_1, \ldots, F_k).$$

Più precisamente, vale il seguente **Teorema di Ricorsione Generalizzata**.

**Teorema A.2.2.** *(Teorema di Ricorsione Generalizzata) Sia $k \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ sia $f_i$ una funzione di arietà $r_i \in \mathbb{N}^*$ su $X$. Sia $\emptyset \neq A \subset X$ e $\mathscr{F} = \{f_i : i = 1, \ldots, k\}$. Se $I(A, \mathscr{F})$ è generato liberamente da $A$ tramite $\mathscr{F}$, allora ogni funzione $v : A \to V$, con $V$ un insieme non vuoto dotato di $k$ operazioni $F_i$, ciascuna con arietà $r_i$, ammette un'estensione unica*

$$\bar{v} \ : I(A, \mathscr{F}) \to V$$

*tale che:*

*i.* *per ogni $x$ in $A$, $\bar{v} \ (x) = v(x)$;*

*ii.* *per ogni $i = 1, \ldots, k$*
$\bar{v}(f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})) = F_i(\bar{v}(x_1), \ldots, \bar{v}(x_{r_i}))$,

*se $x_1, \ldots, x_{r_i} \in I(A, \mathscr{F})$*

Il grafico della funzione $\bar{v}$ dato dal tesi del Teorema A.2.2. della Ricorsione Generalizzata sarà costruito unendo i grafici delle funzioni che chiamiamo funzioni accettabili rispetto a $v$. Più precisamente, diremo che una funzione $f$ è accettabile rispetto a $v$ se e solo se il dominio $\mathrm{Dom}(f)$ di $f$ è un sottoinsieme di $I(A, \mathscr{F})$, l'immagine $\mathrm{Im}(f) := f(\mathrm{Dom}(f))$ è un sottoinsieme di $V$, e valgono le seguenti condizioni:

$(i_1)$ se $x \in A \cap \mathrm{Dom}(f)$, allora $f(x) = v(x)$;

$(i_2)$ per ogni $i = 1, \ldots, k$,

$$\text{se } fi(x_1, \ldots, x_{r_i}) \in \mathrm{Dom}(f), \text{ allora } (x_1, \ldots, x_{r_i}) \in (\mathrm{Dom}(f))^{r_i}$$

e

$$f(fi(x_1, \ldots, x_{r_i})) = F_i(f(x_1), \ldots, f(x_{r_i})).$$

Nota che, a causa della Definizione A.2.1 - Parte 2., non solo la condizione $(i_1)$ ma anche $(i_2)$ è banalmente soddisfatta da $f = v$, cioè la funzione $v$ è accettabile per se stessa.

*Dimostrazione.* (del Teorema A.2.2) Fissiamo su $V \neq \emptyset$ le operazioni $F_i$ e sia $v : A \to V$ una funzione fissata. Sia $\mathscr{C}_v$ la collezione di tutte le funzioni accettabili rispetto a $v$, e sia

$$G := \bigcup_{f \in \mathscr{C}_v} Gr(f) \tag{2}$$

l'unione dei grafici di ogni funzione accettabile $f \in \mathscr{C}_v$. Pertanto,

$$\begin{aligned} (x, z) \in G \text{ se e solo se } (x, z) \in Gr(f) \text{ per qualche } f \in \mathscr{C}_v, \\ \text{se e solo se } z = f(x) \text{ per qualche } f \in C_v. \end{aligned} \tag{3}$$

Sosteniamo che $G$ è il grafico di una funzione $\bar{v} : I(A, \mathscr{F}) \to V$ per la quale valgono le condizioni $(i)$ e $(ii)$ del Teorema A.2.2. L'argomento è di natura insiemistica e comprende quattro passaggi:

1. $G$ è il grafico di una funzione $\overline{v} : C \to V$, dove $A \subseteq C \subseteq I(A, \mathscr{F})$.
   Definiamo:

   $$\begin{aligned} S &:= \{x \in I(A, \mathscr{F}) : \text{ per al più un } z \in V, (x, z) \in G\} \\ &= \{x \in I(A, \mathscr{F}) : \text{ ogni } h \in \mathscr{C}_v \text{ definita in } x \text{ converge a } x\}, \end{aligned} \tag{4}$$

   Verifichiamo che $S = I(A, \mathscr{F})$ dimostrando che $S$ è $(A, \mathscr{F})$-induttivo. Inizialmente fissiamo $x \in A$ e supponiamo che $f$ e $g$ siano funzioni accettabili definite in $x$. Allora, per $(i_1)$, sia $f(x)$ che $g(x)$ devono essere uguali a $v(x)$, quindi otteniamo $f(x) = g(x)$. Ciò dimostra che $x \in S$; quindi, poiché $x \in A$, abbiamo $A \subseteq S$.
   In secondo luogo, dobbiamo verificare che $S$ sia chiuso rispetto alle operazioni $f_i \in \mathscr{F}$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Supponiamo quindi che alcuni punti

$x_1, \ldots, x_{r_i}$ siano in $S$ e che dunque lo siano anche $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})$. Supponiamo quindi che $f$ e $g$ siano funzioni accettabili definite in $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})$; dimostriamo che vi convergono. Infatti, per la condizione $(i_2)$ segue che

$$\begin{aligned} f(f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})) &= F_i(f(x_1), \ldots, f(x_{r_i})) \text{ e} \\ g(f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})) &= F_i(g(x_1), \ldots, g(x_{r_i})). \end{aligned} \tag{5}$$

Poiché $x_1, \ldots, x_{r_i}$ sono in $S$, abbiamo $f(x_1) = g(x_1), \ldots, f(x_{r_i}) = g(x_{r_i})$. Di conseguenza, l'equazione (5) implica che

$$f(f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})) = g(f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})).$$

Questo dimostra che $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i}) \in S$. Quindi, $S$ è chiuso rispetto a $f_i \in \mathscr{F}$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Pertanto, $S$ è $(A, \mathscr{F})$-induttivo e poiché $S \subseteq I(A, \mathscr{F})$ otteniamo $S = I(A, \mathscr{F})$. Ricordando che $v$ è accettabile per se stesso, deduciamo da (3) che $(x, v(x)) \in G$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(v)$ e, in particolare, sfruttando la definizione di grafico di una funzione, esiste una funzione (a valore singolo) $\bar{v} : C \to V$, dove[4] $A \subseteq C \subseteq S = I(A, \mathscr{F})$, tale che $G = \mathrm{Gr}(\bar{v})$. In particolare[5], possiamo affermare

$$\bar{v}(x) := f(x) \in V \text{ per ogni } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ qualunque sia } f \in C_v. \tag{6}$$

2. La funzione $\bar{v}$ è una funzione accettabile rispetto a $v$, ossia $\bar{v} \in \mathscr{C}_v$. Questo segue facilmente dalla definizione di $G$ e dal fatto che $\bar{v}$ è una funzione. Più precisamente, per costruzione, $\bar{v}$ è una funzione con $A \subseteq C := \mathrm{Dom}(\bar{v}) \subseteq I(A, \mathscr{F})$ e $\bar{v}(C) \subseteq V$. Rimane da verificare che $\bar{v}$ soddisfi le condizioni $(i_1)$ e $(i_2)$.

   La condizione $(i_1)$ segue banalmente poiché $A \cap \mathrm{Dom}(\bar{v}) = A = \mathrm{Dom}(v)$ e $v$ è una funzione che è accettabile rispetto a se stessa. Ora dobbiamo dimostrare $(i_2)$, ossia: se, per un dato $i$, $f_i(x_1, ..., x_{r_i}) \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$ allora $(x_1, ..., x_{r_i}) \in (\mathrm{Dom}(\bar{v}))^{r_i}$ e

   $$\bar{v}(f_i(x_1, ..., x_{r_i})) = F_i(\bar{v}(x_1), ..., \bar{v}(x_{r_i})).$$

   Quindi, supponiamo che $f_i(x_1, ..., x_{r_i}) \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$. Di nuovo, dalla definizione di $\bar{v}$ (vedere equazioni (2) e (6)), deve esistere una funzione accettabile $f$ rispetto a $v$ tale che

---

[4] Sottolineiamo che $A \subseteq C$ poiché, per ogni $x \in A$, la funzione il cui grafico è dato da $(x, v(x))$ è accettabile rispetto a $v$. Infatti, in tal caso, la condizione $(i_1)$ è verificata banalmente e la condizione $(i_2)$ è verificata (debolmente) tenendo conto che $f_i|_{I(A,\mathscr{F})}(A) \cap \{x\} = \emptyset$ per ogni $i = 1, \ldots, k$.

[5] Notiamo che $(x, \bar{v}(x)) \in \mathrm{Gr}(\bar{v})$ se e solo se esiste una funzione accettabile $f$ rispetto a $v$ tale che $\bar{v}(x) = f(x)$.

$$\bar{v}(f_i(x_1, ..., x_{r_i})) = f(f_i(x_1, ..., x_{r_i}))$$

Pertanto, $f_i(x_1, ..., x_{r_i}) \in \mathrm{Dom}(f)$ e, poiché $f$ soddisfa $(i_2)$, abbiamo che $(x_1, ..., x_{r_i}) \in (\mathrm{Dom}(f))^{r_i}$ e

$$f(f_i(x_1, ..., x_{r_i})) = F_i(f(x_1), ..., f(x_{r_i})).$$

Ora, poiché $f \in \mathscr{C}_v$ e $(x_1, ..., x_{r_i}) \in (\mathrm{Dom}(f))^{r_i}$, da (6), segue che

$$\bar{v}(x_1) = f(x_1), ..., \bar{v}(x_{r_i}) = f(x_{r_i}),$$

quindi $(x_1, ..., x_{r_i}) \in (\mathrm{Dom}(\bar{v}))^{r_i}$ e

$$\begin{aligned}
&\bar{v}(f_i(x_1, ..., x_{r_i})) = f(f_i(x_1, ..., x_{r_i})) \\
&= F_i(f(x_1), ..., f(x_{r_i})) \\
&= F_i(\bar{v}(x_1), ..., \bar{v}(x_{r_i})).
\end{aligned}$$

3. La funzione $\bar{v}$ è definita su tutto $I(A, \mathscr{F})$, ossia $C := \mathrm{Dom}(\bar{v}) = I(A, \mathscr{F})$. Poiché $A \subseteq \mathrm{Dom}(\bar{v}) \subseteq S = I(A, \mathscr{F})$, è sufficiente mostrare[6] che $\mathrm{Dom}(\bar{v})$ è $(A, \mathscr{F})$-induttivo e, in particolare, che è chiuso sotto $f_i \in \mathscr{F}$ per ogni $i = 1, ..., k$, ossia che per ogni $i = 1, ..., k$, se $x_1, ..., x_{ri} \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$ allora $f_i(x_1, ..., x_{ri}) \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$. Fissiamo $i \in 1, ..., k$. Ragionando per assurdo, supponiamo che $x_1, ..., x_{ri} \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$, ma $f_i(x_1, ..., x_{ri}) \notin \mathrm{Dom}(\bar{v})$ e sia

$$H_i := Gr(\bar{v}) \cup (f_i(x_1, ..., x_{ri}), F_i(\bar{v}(x_1), ..., \bar{v}(x_{ri})). \tag{7}$$

È facile vedere che $H_i$ è il grafico di una funzione $h_i$ tale che $A \subseteq C' := \mathrm{Dom}(h_i) \subseteq I(A, \mathscr{F})$ e $h_i(C') \subseteq V$. Infatti, si ha $\mathrm{Dom}(H_i) = \mathrm{Dom}(\bar{v}) \cup f_i(x_1, ..., x_{ri}) \subseteq I(A, \mathscr{F})$ con $f_i(x_1, ..., x_{ri}) \notin \mathrm{Dom}(\bar{v})$. Quindi, per ogni $x \in \mathrm{Dom}(H_i)$, si definisce $h_i(x)$ come:

$$h_i(x) = \begin{cases} F_i(\bar{v}(x_1), ..., \bar{v}(x_{ri})) \in V & \text{se } x = f_i(x_1, ..., x_{ri}), \\ \bar{v}(x) \in V & \text{se } x \in \mathrm{Dom}(\bar{v}). \end{cases} \tag{8}$$

Dimostreremo che $h_i$ è accettabile per $v$ dimostrando che soddisfa le condizioni $(i_1)$ e $(i_2)$.

Parte $(i_1)$ - Se $x \in A \cap \mathrm{Dom}(h_i) = A$, allora $x \neq f_i(x_1, ..., x_{ri})$ per libertà, come indicato nella Definizione A.2.1 - parte 2. Di conseguenza, $x \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$ e otteniamo da (8), $h_i(x) = \bar{v}(x) = v(x)$ poiché $\bar{v} \in \mathscr{C}_v$

[6] Anche qui che viene utilizzata l'ipotesi di libertà.

(come dimostrato dal passo 2.).

Parte $(i_2)$ - Dimostreremo che se $f_j(y_1, ..., y_{rj}) \in \text{Dom}(h_i)$, allora $(y_1, ..., y_{rj}) \in (\text{Dom}(h_i))^{rj}$ e

$$h_i(f_j(y_1, ..., y_{rj})) = F_j(h_i(y_1), ..., h_i(y_{rj}))$$

per ogni $j = 1, ..., k$. Fissato $j$, supponiamo che $f_j(y_1, ..., y_{rj}) \in \text{Dom}(h_i)$ per qualche $y_1, ..., y_{rj}$ in $C' = \text{Dom}(h_i)$. Si verificano le seguenti possibilità:

Caso 1 - $j = i$ e $fi(y_1, ..., y_{rj}) \in \text{Dom}(\bar{v})$. Allora, poiché $\bar{v} \in \mathscr{C}_v$, abbiamo, come in $(i_2)$, che $(y_1, ..., y_{rj}) \in (\text{Dom}(\bar{v}))^{rj} \subseteq (\text{Dom}(h_i))^{rj}$ e, come in (8),

$$\begin{aligned} h_i(f_i(y_1, ..., y_{rj})) &= \bar{v}(f_i(y_1, ..., y_{rj})) \\ &= F_i(\bar{v}(y_1), ..., \bar{v}(y_{rj})) \\ &= F_i(h_i(y_1), ..., h_i(y_{rj})), \end{aligned}$$

poiché $h_i = \bar{v}$ in $\text{Dom}(\bar{v})$;

Caso 2 - $j = i$ e $fi(y_1, ..., y_{rj}) = fi(x_1, ..., x_{ri})$. Allora, per libertà (come indicato nella Definizione A.2.1 - Parte 1.), abbiamo $x_1 = y_1, ..., x_{ri} = y_{ri}$, quindi $(y_1, ..., y_{rj}) = (x_1, ..., x_{ri}) \in (\text{Dom}(\bar{v}))^{rj} \subseteq (\text{Dom}(h_i))^{rj}$. Quindi, grazie a (8) e poiché $\bar{v} \in C_v$, otteniamo

$$\begin{aligned} h_i(f_i(y_1, ..., y_{rj})) = h_i(fi(x_1, ..., x_{ri})) = \bar{v}(f_i(x_1, ..., x_{ri})) \\ = F_i(\bar{v}(x_1), ..., \bar{v}(x_{ri})) = F_i(h_i(x_1), ..., h_i(x_{ri})), \end{aligned}$$

poiché $h_i = \bar{v}$ in $\text{Dom}(\bar{v})$.

Caso 3 - Infine, supponiamo $j \neq i$ e che $f_j(y_1, ..., y_{rj}) \in \text{Dom}(h_i)$ per qualche $y_1, ..., y_{rj}$ in $I(A, \mathscr{F})$. Ancora una volta, per libertà, abbiamo

$$f_j(y_1, ..., y_{rj}) \neq fi(x_1, ..., x_{ri}).$$

Pertanto, $f_j(y_1, ..., y_{rj}) \in \text{Dom}(\bar{v})$ secondo (7). Di conseguenza, poiché $\bar{v} \in Cv$, si ha che $(y_1, ..., y_{rj}) \in (\text{Dom}(\bar{v}))^{rj} \subseteq (\text{Dom}(h_i))^{rj}$ e

$$\begin{aligned} h_i(f_j(y_1, ..., y_{rj})) &= \bar{v}(f_j(y_1, ..., y_{rj})) \\ &= F_j(\bar{v}(y_1), ..., \bar{v}(y_{rj})) \\ &= F_j(h_i(y_1), ..., h_i(y_{rj})), \end{aligned}$$

tenendo presente nuovamente che $h_i = \bar{v}$ in $\mathrm{Dom}(\bar{v})$.

Pertanto, $h_i \in \mathscr{C}_v$ e, in base a (7), otteniamo $H_i \subseteq \mathrm{Gr}(\bar{v})$, quindi $f_i(x_1, ..., x_{ri}) \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$ contro l'ipotesi. In conclusione, $\mathrm{Dom}(\bar{v})$ è $(A, \mathscr{F})$-induttivo e, come già osservato, è sufficiente garantire che $\mathrm{Dom}(\bar{v}) = I(A, \mathscr{F})$.

4. $\bar{v}$ è unica. Date due funzioni $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$, l'insieme $Z$ in cui esse coincidono, cioè

$$Z := \{x \in I(A, \mathscr{F}) : \bar{v}_1(x) = \bar{v}_2(x)\}$$

è $(A, \mathscr{F})$-induttivo. Infatti, $A \subseteq Z$ poiché se $x \in A$ allora $\bar{v}_1(x) = \bar{v}_1(x) = v(x)$. Inoltre, fissato $i$, se $x_1, ..., x_{ri} \in Z$ allora $x_1, ..., x_{ri} \in I(A, \mathscr{F})$ e $\bar{v}_1(x_j) = \bar{v}_2(x_j)$ per ogni $j = 1, ..., r_i$. Siccome $I(A, \mathscr{F})$ è chiuso rispetto alle operazioni in $F$, allora $fi(x_1, ..., x_{ri}) \in I(A, \mathscr{F})$ e

$$\bar{v}_1(f_i(x_1, ..., x_{ri})) = Fi(\bar{v}_1(x_1), ..., \bar{v}_1(x_{ri})) = Fi(\bar{v}_2(x_1), ..., \bar{v}_2(x_{ri})) = \bar{v}_2(fi(x_1, ..., x_{ri}))$$

per ogni $i = 1, ..., k$. Di conseguenza, $f_i(x_1, ..., x_{ri}) \in Z$ per ogni $i = 1, ..., k$. In conclusione, $Z$ è $(A, \mathscr{F})$-induttivo e di conseguenza $\bar{v}$ è unica come affermato. La dimostrazione è ora completa.

□

Dal punto di vista astratto, la conclusione del Teorema A.2.2 afferma che qualsiasi funzione $v$ da $A$ a $V$ può essere estesa in modo unico a un omomorfismo di struttura $\bar{v}$ dalla struttura algebrica $(I(A, \mathscr{F}), \mathscr{F})$ nella struttura $(V, F_1, \ldots, F_k)$.

Concludiamo questa sottosezione dando una diversa costruzione, "bottom-up" significativa dell'insieme $I(A, \mathscr{F})$. Più precisamente il prossimo risultato è una diretta conseguenza del principio di induzione.

**Proposizione A.2.1.** *Utilizzando le notazioni precedenti sia*

$$C_{j+1} = C_j \cup \bigcup_{i=1}^{k} f_i(C_{r_i^j}) \text{ dove } C_{r_i^j} = \underbrace{C_j \times \cdots \times C_j}_{r_i}, \tag{9}$$

*per ogni $j \in \mathbb{N}$. Definiamo*

$$C^\star = \bigcup\nolimits_{j \in \mathbb{N}} C_j.$$

*Allora*

$$I(A, \mathscr{F}) = C^\star.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo che $C^\star$ è $(A, \mathscr{F})$-induttivo. Chiaramente $A = C_0 \subseteq C^\star$. Inoltre, per $i = 1, \ldots, k$, se $x_1, \ldots, x_{r_i} \in C^\star$, allora $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i}) \in C^\star$. Infatti, per la definizione di $C^\star$, se $x_1, \ldots, x_{r_i} \in C^\star$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i}) \in C_m$, e di conseguenza $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i}) \in C^\star$ come richiesto. Quindi $I(A, \mathscr{F}) \subseteq C^\star$. Viceversa, dimostriamo che $C^\star \subseteq I(A, \mathscr{F})$. Infatti, sia

$$C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_\ell = \bigcup_{j=0}^{\ell} C_j = C_\ell.$$

e poi procediamo per induzione su $\ell \in \mathbb{N}$. Per $\ell = 0$ (passo base) $C_0 = A \subseteq I(A, \mathscr{F})$. Ora dimostriamo (passo induttivo) che, per un $\ell$ fissato, se $\bigcup_{j=0}^{\ell} C_j = C_\ell \subseteq I(A, \mathscr{F})$, allora $\bigcup_{j=0}^{\ell+1} C_j = C_{\ell+1} \subseteq I(A, \mathscr{F})$. Infatti, per ogni $i = 1, \ldots, k$, se $x_1, \ldots, x_{r_i} \in C_\ell \subseteq I(A, \mathscr{F})$, allora $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i}) \in I(A, \mathscr{F})$ poiché $I(A, \mathscr{F})$ è chiuso rispetto alle operazioni in $\mathscr{F}$. Di conseguenza, $C_{\ell+1} \subseteq I(A, \mathscr{F})$ come richiesto. Pertanto, il principio di induzione enunciato nel Teorema A.1.3 implica che $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j = C^\star \subseteq I(A, \mathscr{F})$. □

Questo risultato è cruciale nella logica predicativa e proposizionale per descrivere matematicamente le f.b.f. (formule ben formate) di una data lunghezza (vedere [1, Capitolo 1]).

## A.3 Teoria NGB e ricorsione generalizzata

## Elementi della teoria degli insiemi

*L'analisi del meccanismo delle dimostrazioni in testi matematici ben scelti ha permesso di individuare la struttura, dal duplice punto di vista del vocabolario e della sintassi. Si arriva così alla conclusione che un testo matematico sufficientemente esplicito potrebbe essere espresso in un linguaggio convenzionale che comprende solo un piccolo numero di "parole" invariabili assemblate secondo una sintassi che consisterebbe in un piccolo numero di regole inviolabili: un tale testo è detto formalizzato"* (Nicolas Bourbaki, Eléments de Mathématiques, Théorie des ensembles)

Nel 1874 George Cantor ha gettato le basi di ciò che ora è noto nella letteratura come Teoria ingenua degli Insiemi. Questa teoria è stata assiomatizzata attraverso il lavoro di altri matematici con l'obiettivo di superare le contraddizioni che si generano al suo interno. Ci sono tre principali assiomatizzazioni (o teorie) attribuibili a:

Skolem, Zermelo e Fraenkel (**ZF** o anche **ZFC**);
von Neumann, Gödel e Bernays (**NGB**);
Morse e Kelley (**MK**).

La differenza sostanziale tra queste teorie riguarda il modo in cui viene affrontato il problema della distinzione tra il concetto di insieme e quello di classe. Di seguito presentiamo brevemente lo schema degli assiomi della teoria NGB[7] (vedi [5] per una introduzione accessibile alla teoria ZFC più popolare).

Una classe universale $\mathbb{U}$ chiamata Universo di ogni sottoclasse e oggetto (o elemento) è assegnata fornendo assiomi che raccolgono informazioni su $\mathbb{U}$, i suoi oggetti e le sue sottoclassi chiamate semplicemente classi. Ciò significa che tutte le classi X sono sottoclassi di $\mathbb{U}$, che sono incluse nella classe universale $\mathbb{U}$. Alcune delle classi di $\mathbb{U}$ sono esse stesse oggetti di $\mathbb{U}$ e sono chiamate "insiemi". Dire che $x \in \mathbb{U}$ è equivalente a dire che $x$ è un oggetto dell'universo $\mathbb{U}$.

**Teoria elementare NGB**. Nella teoria NGB si postulano le seguenti regole di formazione per classi, insiemi[8] e oggetti:

I. Assioma dell'Estensionalità: Siano $X$ e $Y$ delle classi. Sono uguali se $X$ e $Y$ contengono gli stessi insiemi come oggetti, ossia la formula ben formata $\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y)$ è dimostrabile[9] in NGB. In tal caso, scriviamo

$$X = Y$$

II. Schema di Assiomi dell'Astrazione: Sia $\varphi(X, Y_1, \ldots, Y_m)$ una formula ben formata predicativa[10]. Allora la sua estensione

$$Z := \{x : \varphi(x, Y_1, \ldots, Y_m)\}$$

[7]NGB può essere correttamente codificato come una teoria formale in un Linguaggio del Primo Ordine (FOL, dall'inglese First-Order Language) con l'uguaglianza, ossia un sistema formale in cui è possibile esprimere frasi e dedurre le loro conseguenze in modo formale e meccanico.

[8]Un insieme $X$ è una classe che è anche un oggetto. Seguendo Bernays (1937–1954) e Gödel (1940), utilizzeremo lettere maiuscole corsive come variabili e lettere minuscole come variabili speciali limitate per gli insiemi.

[9]Utilizzando la notazione standard valida in qualsiasi teoria formale, scriviamo anche $\vdash \forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y)$.

[10]Per "formula ben formata predicativa" intendiamo una formula ben formata (fbf) in un linguaggio del primo ordine le cui variabili compaiono tra $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$, e in cui solo le variabili degli insiemi sono quantificate (ossia $\varphi$ può essere abbreviato, cioè "riformulato", in modo tale che solo le variabili degli insiemi siano quantificate); si veda il classico libro di Mendelson 2015, Capitolo 4. Più precisamente, dopo l'Assioma V, seguendo Mendelson 2015, Proposizione 4.4 (Teorema dell'Esistenza delle Classi), assegnata una fbf predicativa $\varphi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$, si ha che $\vdash \exists Z \forall x_1 \ldots \forall x_n((x_1, \ldots, x_n) \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m))$. Inoltre, in base all'Assioma I, la classe $Z$ sopra è unica e scriviamo $Z = \{(x_1, \ldots, x_n) : \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)\}$. Sottolineiamo che per costruire formule ben formate in un linguaggio del primo ordine, è necessaria la nozione di insieme. Fortunatamente, solo una parte minima di NGB è necessaria per definire la sintassi e la semantica dei linguaggi del primo ordine. Di conseguenza, assumiamo questa parte minima della Teoria degli Insiemi come fondamento dei Linguaggi del Primo Ordine; un argomento di bootstrap secondo Hilbert. La parte rimanente può essere costruita formalmente come descritto brevemente in questa sottosezione. In questo modo, è possibile evitare definizioni circolari nella costruzione formale della Teoria NGB.

è una classe.

III. Assioma della Comprensione: Se $Y$ è un insieme, allora qualsiasi sottoclasse[11] $X \subseteq Y$ è un insieme;

IV. Assioma dell'Insieme Vuoto: La classe vuota[12] $\emptyset$ è un insieme;

V. Assioma della Coppia: Siano $x$, $y$ degli oggetti e l'insieme $\{x, y\}$ sia la classe (coppia) data da

$$\{z : z = x \wedge z = y\}.$$

La coppia $\{x, y\}$ è un insieme;

VI. Assioma dell'Unione[13]: Se X è un insieme di insiemi, allora:

$$\bigcup X := x : \exists y(y \in X \wedge x \in y)$$

è un insieme;

VII. Assioma degli Oggetti: Ogni oggetto è un insieme[14];

VIII. Assioma dell'Infinito: Esiste un insieme $X$ tale che:

i. $\varnothing \in X$,

ii. Se $x \in X$, allora $x \cup x \in X$;

IX. Assioma dell'Insieme delle Parti: Dato un insieme $X$, la classe

$$\mathcal{P}(X) := Y : Y \subseteq X$$

dei sottoinsiemi di $X$ è un insieme;

X. Assioma della Sostituzione: Sia $f : X \to Y$ una funzione tra le classi $X$ e $Y$. Se il dominio $X$ di $f$ è un insieme, allora la sua immagine

---

[11] Dato una classe $Y$, diciamo che $X$ è una sottoclasse di $Y$ (e scriviamo $X \subseteq Y$) se $\forall x(x \in X \to x \in Y)$. Scriveremo $X \subset Y$, dicendo che la classe $X$ è strettamente inclusa in $Y$, se $X \subseteq Y$ e $X \neq Y$ (ossia $\neg(X = Y)$).

[12] La classe vuota $\varnothing$ è l'unica classe che non ha elementi. Più precisamente, $\vdash \exists x \forall y(y \notin x)$. Pertanto, possiamo introdurre una nuova costante individuale $\varnothing$ mediante la seguente condizione $\forall y(y \notin \varnothing)$.

[13] Dato una classe di insiemi $X$ (ovvero una classe i cui elementi sono insiemi) definiamo $\bigcup X$ (unione di $X$) come la classe degli oggetti che appartengono almeno a un elemento di $X$. Analogamente, dato una classe di insiemi $X$, definiamo anche la classe (intersezione) $\bigcap X$. Più precisamente: $x \in \bigcap X$ se e solo se $x \in Y$ per ogni $Y \in X$. Notiamo che se $X = \varnothing$, allora $\bigcap X = U$.

[14] L'Assioma VI - sulla base dell'Assioma VII - può essere riscritto come segue: se $X$ è un insieme, allora $\bigcup X$ è un insieme.

$$f(X) := y : \exists x(x \in X \wedge f(x) = y)$$

è un insieme;

XI. Assioma della Scelta: Se $(X_\alpha)\{\alpha \in J\}$ è una famiglia disgiunta di insiemi non vuoti, allora esiste un insieme $S$ tale che

$$S \cap X\alpha = x_\alpha \text{ per ogni } \alpha \in J,$$

dove $J$ è un insieme di indici.

XII. Assioma della Fondazione: Per ogni insieme $X$ diverso da $\varnothing$, esiste un elemento $a \in X$ tale che

$$X \cap a = \varnothing.$$

Fatti:

L'universo $\mathbb{U}$ contiene classi.
Ogni classe contiene oggetti.
Le classi che sono anche oggetti sono chiamate insiemi.
Esistono classi proprie, cioè classi che non sono insiemi.
$x \in Y$ è ben definito se $x$ è un insieme e $Y$ è una classe.

Gli Assiomi NGB garantiscono che le seguenti classi abbiano senso:

| | |
|---|---|
| $X \cup Y := x : x \in X \vee x \in Y$ | (Unione) |
| $X \cap Y := x : x \in X \wedge x \in Y$ | (Intersezione) |
| $X \setminus Y := x : x \in X \wedge x \notin Y$ | (Differenza) |
| $X^c := U \setminus X$ | (Insieme complementare) |
| $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ | (Differenza simmetrica) |

dove $X$ e $Y$ sono classi.

I seguenti fatti sono veri (nell'algebra booleana delle classi):

| | |
|---|---|
| $X \cup Y = Y \cup X$ | (Commutativa di $\cup$) |
| $X \cap Y = Y \cap X$ | (Commutativa di $\cap$) |
| $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ | (Associativa di $\cup$) |
| $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ | (Associativa di $\cap$) |
| $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ | (Distributiva di $\cap$ rispetto a $\cup$) |
| $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ | (Distributiva di $\cup$ rispetto a $\cap$) |
| $X \cup \varnothing = X$ e $X \cap \varnothing = \varnothing$ | (Identità) |
| $X \cup X^c = U$ e $X \cap X^c = \varnothing$ | (Completamento) |

dove $X$, $Y$ e $Z$ sono classi.

Ora i paradossi a cui siamo abituati non portano più a risultati contraddittori, ma solo all'individuazione di diverse classi che sono classi proprie, cioè non sono insiemi. Ad esempio, consideriamo la classe di Russell:

$$\Psi := \{x : x \notin x\}.$$

Otteniamo il seguente risultato.

**Teorema A.3.1.** *La classe di Russell non è un insieme.*

*Dimostrazione.* Per definizione, un oggetto $x \in \Psi$ se e solo se $x \notin x$. Supponiamo per assurdo che $\Psi$ sia un oggetto, cioè $\Psi$ è un insieme. Pertanto, $\Psi \in \Psi$ se e solo se $\Psi \notin \Psi$, il che chiaramente porta a una contraddizione. $\square$

Chiaramente, il Teorema A.3.1 assicura che la classe $\Psi$ non è un oggetto. Una conseguenza diretta è la seguente proprietà significativa.

**Corollario A.3.1.** *La classe $C_{Obj}$ di tutti gli oggetti non è un insieme.*

*Dimostrazione.* Ogni classe $X$ è inclusa in $CObj$, in particolare $\Psi \subseteq CObj$. Supponiamo per assurdo che $CObj$ sia un insieme. Per l'Assioma III, la classe $\Psi$ è un insieme in contrasto con il Teorema A.3.1. $\square$

La Proposizione A.3.1 e i Corollari A.3.2 e A.3.3 sono essenzialmente conseguenze dell'Assioma X.

**Proposizione A.3.1.** *Se $X$ e $Y$ sono insiemi, allora $X \times Y$ è un insieme.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $y \in Y$. Per l'Assioma X (della Sostituzione) esiste l'insieme

$$\{(x, y) : x \in X\} = X \times \{y\}.$$

Inoltre, la seguente classe

$$\{X \times \{y\} : y \in Y\}$$

è di nuovo un insieme per l'Assioma X. Infine, poiché

$$\bigcup\{X \times \{y\} : y \in Y\} = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\} = X \times Y,$$

per l'Assioma VI, la classe $X \times Y$ è un insieme come richiesto. $\square$

Secondo la notazione classica di Kuratowski, possiamo definire[15]

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

[15] La definizione di coppia di Kuratowski implica immediatamente che $(x, y) \neq (y, x)$ quando $x \neq y$.

In tal caso, la Proposizione A.3.1 segue facilmente dagli Assiomi IX e III anziché dall'Assioma X, grazie a

$$X \times Y \subseteq \wp(\wp(X \cup Y)).$$

I seguenti corollari sono di fondamentale importanza in Analisi Matematica.

**Corollario A.3.2.** *Siano $X$ e $Y$ delle classi e sia $f : X \to Y$ una funzione. Supponiamo che $X$ sia un insieme, allora $Gr(f)$ è un insieme.*

*Dimostrazione.* Per l'Assioma X, la classe $f(X)$ è un insieme. Di conseguenza, dalla Proposizione A.3.1, la classe $X \times f(X)$ è un insieme. Poiché $\mathrm{Gr}(f) \subseteq X \times f(X)$, la conclusione segue dall'Assioma III. $\square$

Un'analisi attenta della Proposizione A.3.1, così come degli Assiomi IX e III, ci porta al seguente risultato.

**Corollario A.3.3.** *Siano $X$ e $Y$ insiemi. La classe $Y^X$ di tutte le funzioni $f : X \to Y$ è un insieme.*

*Dimostrazione.* Siccome $X$ e $Y$ sono insiemi, dalla Proposizione A.3.1, la classe $X \times Y$ è un insieme. Inoltre, secondo l'Assioma IX, la classe $\wp(X \times Y)$ è un insieme. Sia $f \in Y^X$. Per definizione, $\mathrm{Gr}(f) \subseteq X \times Y$, quindi $\mathrm{Gr}(f) \in \wp(X \times Y)$. Di conseguenza, $Y^X \subseteq \wp(X \times Y)$ e, grazie all'Assioma III, $Y^X$ è un insieme come richiesto. $\square$

# Bibliografia


[1] H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Los Angeles, pp.69-80, pp.105-108, (2001).

[2] G. Devillanova e G. Molica Bisci, *Elements of Set Theory and Recursive Arguments*, Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, ISSN 1825-1242 - Vol. 99, No. S1, (2021).

[3] G. Devillanova e G. Molica Bisci, *The Faboulous Destiny of Richard Dedekind*, Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, ISSN 1825-1242 - Vol. 98, No. S1, (2021).

[4] E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic*, Sixth edition, Textbooks in Mathematics, Boca Raton, FL: CRC Press, (2015).

[5] D. Garling, *A course in Mathematical Analysis*, Vol. 1 Foundations of Elementary Real Analysis, Cambridge: Cambridge University Press, (2013).

[6] R. Zach, *Sets, Logic, Computation: An Open Introduction to Metalogic*, Calgary, pp.100-200, (2021).

[7] M. Bernardo, A. Aldini e L. Padovani *Dispense di insegnamento del corso di Programmazione Logica e Funzionale*, Università degli Studi di Urbino Carlo Bo, pp.59-64, (2023).

[8] A. Aldini, *Chomsky Classification of sentential form grammars*, Università degli Studi di Urbino Carlo Bo, pp.1-13, (2021).

# Ringraziamenti

A conclusione del mio elaborato di tesi vorrei ringraziare per primi i miei genitori, mia sorella e mio fratello. Grazie per aver creduto in me e per avermi sostenuto nei momenti di sconforto, senza di voi non so se ce l'avrei fatta, sicuramente non con queste tempistiche.

Ringrazio il mio relatore Giovanni Molica Bisci e la mia correlatrice Raffaella Servadei, mi avete aperto una finestra sul mondo della logica e messo a disposizione degli strumenti grazie ai quali sono in grado di comprendere meglio il mondo in cui vivo. Dire che lo studio della definizione di verità di Tarski è stato un piacere, è dir poco.

Infine vorrei dedicare questo traguardo a me stesso, traguardo raggiunto grazie alla costanza e all'impegno che ho riversato nel percorso di studi derivati dalla fiducia in un futuro migliore.