به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مدیریت و اقتصاد

پروژه درس اقتصاد محاسباتی

نرخ بهره بدون ریسک در اقتصادی با بازار بیمه ناکامل و بازیگران ناهمگن

نگارش

مرضیه آقائی، محمدحسام احمدیان، محسن زارع

استاد درس

دکتر مدنی‌زاده

مرداد ماه ۱۴۰۰

نرخ بهره بدون ریسک در اقتصادی با بازار بیمه ناکامل و بازیگران ناهمگن

چکیده

نرخ بهره حقیقی بدون ریسک در اقتصاد آمریکا با پیشبینی مدل‌های اقتصادی مبتنی بر کارگزار نمونه سازگار نیست. در حالی که میانگین نرخ بهره حقیقی بدون ریسک در آمریکا کمتر از یک درصد است، مدل‌های مبتنی بر کارگزار نمونه نرخ بهره بالاتری را پیشبینی می‌کنند. ناسازگاری میان نرخ بهره حقیقی مشاهده شده و پیشبینی مدل‌های مبتنی بر کارگزار نمونه موضوع مقاله مورد بررسی است.

بدین منظور مدل ارائه شده توسط مقاله، مدلی با کارگزاران ناهمگن است که هر یک با شوک درآمدی غیرقابل پرهیز و بیمه کردن رو به رو بوده و جهت هموارسازی مصرف خود برای دوره‌های آتی، دارایی بدون ریسکی را ذخیره می‌کند.

در ادامه مدل برای اقتصاد آمریکا کالیبره شده و نرخ بهره بدون ریسک تعادلی محاسبه شده است. نتایج مدل نشان می‌دهد در صورتی که میزان محدودیت استقراض به میزان درآمد یک سال فرض شود، برای اقتصادی مشابه نرخ بهره بدون ریسک محاسبه شده توسط مدل با کارگزاران ناهمگن بیش از یک درصد کمتر از مدل کارگزار نمونه است و تطابق بیشتری با میانگین نرخ بهره بدون ریسک مشاهده شده دارد.

کلیدواژه: نرخ بهره بدون ریسک، مدل کارگزاران همگن، محدودیت استقراض، شوک درآمدی

مرضیه آقائی، محمدحسام احمدیان، محسن زارع، «نرخ بهره بدون ریسک در اقتصادی با بازار بیمه ناکامل و بازیگران ناهمگن»، پروژه درس اقتصاد محاسباتی، استاد درس: دکتر مدنی‌زاده، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مدیریت و اقتصاد، مرداد ماه ۱۴۰۰.

فهرست مطالب

صفحه

۱ مقدمه ۴
۲ چارچوب مدل ۶
۳ کالیبراسیون ۸
۴ نتایج ۱۲
۵ نتیجه‌گیری ۱۴
۵.۱ پیشنهادات برای ادامه کار ۱۴
منابع و مراجع ۱۵
پیوست‌ها ۱۶

فهرست علائم

علائم لاتین

e مقدار موهبت که کالایی فساد پذیر است

c میزان مصرف کارگزار

a اعتبار کارگزار

q قیمت اعتبار برای انتقال به دوره بعد

علائم یونانی

β نرخ تنزیل دوره ای

σ ضریب ریسک گریزی

۱ مقدمه

پژوهش ((Prescott, (1985) جهت تخمین نرخ بازده دارایی و نرخ بهره وام بدون بهره به کالیبراسیون مدل‌هایی بر پایه کارگزار نمونه پرداخته است. در حالی که داده‌های تجربی نشان می‌دهد میانگین نرخ بازده دارایی ۷ درصد و نرخ بهره وام بدون ریسک ۰.۸ درصد است، نتایج پژوهش مذکور برای نرخ بهره بدون ریسک مقدار بسیار بزرگ‌تر و برای بازده دارایی مقدار بسیار کوچک‌تری را تخمین می‌زند.

لذا عدم تطابق نتایج مدل‌های بر پایه کارگزار نمونه با مشاهدات در تخمین نرخ بهره حقیقی بدون ریسک به عنوان پازلی در ادبیات مطرح می‌شود. تلاش‌های بعدی که همچنن بر پایه مدل کارگزار نمونه است، در زمینه اصلاح تخمین بازده دارایی به موفقیت‌هایی دست می‌یابد ((Weil, (1989)، اما همچنان بیش‌برآورد مدل‌ها برای نرخ بهره حقیقی بدون ریسک محل ابهام باقی می‌ماند.

مقلله مورد بررسی این فرضیه را مطرح می‌کند که ناکارایی بازار، به طور خاص وجود کارگزارانی که شوک‌های ناهمگنی را دریافت می‌کنند اما امکان خنثی‌سازی اثر آن توسط بیمه را ندارند، بر میزان نرخ بهره بدون ریسک اثرگذار است. لذا در راستای اعمال اثر ناکارایی بازار و بهبود تخمین از نرخ بهره بدون ریسک، مقاله مدل تعادل عمومی با کارگزاران ناهمگن را ارائه می‌دهد که در آن هر یک از کارگزاران به صورت دوره‌ای با شوک‌های ناهمگنی در درآمد مواجه شده و به دلیل وجود شوک‌ها جهت هموارسازی مصرف خود، برای دوره‌های آتی دارایی بدون ریسکی را ذخیره می‌نماید. بدین ترتیب جهت هموارسازی مصرف، کارگزاران در زمانی که با شوک مثبت مواجه می‌شوند اقدام به ذخیره اعتبار و در زمانی که با شوک منفی مواجه می‌شوند اقدام به برداشت اعتبار می‌کنند. همچنین هر کارگزار با محدودیت استقراض مواجه بوده و سطح اعتبار هر کارگزار لازم است بالاتر از میزان مشخصی باقی بماند.

به طور شهودی نیز می‌توان انتظار داشت اعمال محدودیت استقراض، تخمین مدل از نرخ بهره بدون ریسک را کاهش دهد. چرا که برای میزان اعتبار کارگزاران حد پایینی وجود دارد، در حالی که سقفی برای اعتبار منظور نشده است. لذا با توجه به آن که بخشی از اعتبار ذخیره شده به صورت عرضه وام

می‌باشد و قرار دادن محدودیت استقراض میزان تقاضای وام را کاهش می‌دهد، لذا کاهش نرخ بهره بدون ریسک جهت برقراری شرط تسویه بازار لازم خواهد بود.

به منظور تخمین نرخ بهره بدون ریسک در چارچوب مدل ارائه شده، از کالیبره کردن مدل به کمک روش‌های محاسباتی استفاده شده است.

۲ چارچوب مدل

در فصــل حاضــر به تبیین مدل ارائه شــده در مقاله پرداخته شــده اســت. به منظور تدوین چارچوب مدل فروض زیر انجام شده است:

- اقتصاد دارای گسترهای پیوسته از کارگزاران است که تجمیع انها برابر یک واحد میباشد.
- در هر دوره هر یک از کارگزاران یک واحد کالای فسادپذیر جهت مصرف دریافت میکند. میزان این کالا میتواند زیاد (e_h) و یا کم (e_l) باشـــد. لذا مجموعه مقادیر ممکن برای کالا به صـــورت $E=\{ e_h , e_l \}$ است.
- تخصـــیص هر یک از دو حالت کالا به یک کاگزار طی یک فرایند مارکو[1] اتفاق میافتد که دارای توزیع پایدار احتمال انتقال به صـــورت زیر میباشـــد. توزیع احتمال برای کارگزاران مختلف از یکدیگر مستقل است.

$$\pi(e'|e) = Pr\,o\,b(e_{t+1} = e'|e_t = e) > 0. e, e' \in E$$

- ترجیحات و تابع مطلوبیت هر کارگزار نیز به صورت زیر است:

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\right], \beta \in (0,1)$$

$$u(c) = \frac{c^{(1-\sigma)}}{(1-\sigma)}. \sigma > 1$$

- در این چارچوب، کارگزاران متمایل به هموارســـازی مصـــرف خود در بین دورههای مختلف میباشـند که بدین منظور اعتبار کارگزاران به مدل وارد شـده اسـت. بدین ترتیب در صـورتی که یک کارگزار دارای اعتباری به میزان a باشـــد قادر اســـت در دوره حاضـــر a واحد از کالا را تهیه نماید. به منظور انتقال a' واحد اعتبار به دوره آتی، کارگزار بایســـتی به میزان $a'q$ واحد کالا در این دوره پرداخت کند که q قیمت مانده اعتبار در دوره آتی است.

[1] Markov process

- برای حد پایین اعتبار محدودیت وجود دارد و میزان اعتبار لازم است همواره از $0 <$ $\underline{a}$ بیشتر باشد.
- بدین ترتیب محدودیت بودجه برای کارگزاری که در دوره جاری به میزان e کالا و به میزان a اعتبار دارد و قصد دارد در دوره جاری به میزان c واحد مصرف کرده و a' را نیز به دوره آتی ببرد، به صورت زیر است:

$$c + a'q \leq a + e \quad where \quad c \geq 0, a' \geq \underline{a}$$

- موقعیت هر کارگزار شامل میزان اعتبار و کالای در اختیار در دوره حاضر به صورت بردار x = (a,e) و $\bar{X}$ شامل تمامی x های ممکن است. لذا فضای حالت X به صورت X=A×E که A = $[\underline{a}, \infty)$ و E ={ e_h , e_l } و $e_h > e_l$.
- در صورتی که q>0 هزینه تأمین اعتبار در یک دوره باشد، مسأله بهینه‌سازی کارگزار مطابق **معادله ۱** است:

$$v(x;q) = \max_{(c,a')\in \Gamma(x;q)} u(c) + \beta \sum_{e'} v(a',e';q)\,\pi(e' \mid e)$$

معادله ۱

که گاما مطابق **معادله ۲** تعیین می‌گردد:

$$\Gamma(x;q) = \{(c,a'):\ c + a'q \leq a + e;\ c \geq 0;\ a' \geq \underline{a}\}$$

معادله ۲

معادله ۱ یک فرم بلمن است، لذا شیوه حل به کمک برنامه‌ریزی پویا[1] می‌باشد. با حل برنامه‌ریزی پویا حاضر، تابع ارزش (v) و بردار سیاست ((x=(a,e)) حاصل می‌گردد.

[1] Dynamic Programming

۳ کالیبراسیون

اقتصـاد را بر اسـاس پروسـه ارائه شـده در مقاله Lucas (1981) کالیبره کردیم. برای تعیین متغیر های $\{e_h, e_l; \pi(e_h|e_h), \pi(e_h|e_l);\ \beta;\ \sigma;\ \underline{a}\}$ از مشـاهدات اقتصـاد خرد و کلان اسـتفاده شـد. ما برای تفسـیر e_l, e_h به عنوان درآمد هنگام اشـتغال و بیکاری مقاله Imrohoroglu را دنبال کردیم. به عنوان یک شاخص برای متغیر بودن درآمد نیروی کار، داده های گزارش شده در Kydland (1984) را در نظر گرفتیم. وی انحراف از معیار ساعت کار سالانه مردان بالغ را از سال ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ محاسبه می‌کند. او متوجه می‌شـود که انحراف از معیار به عنوان درصـدی از میانگین سـاعت از ۱۶ درصـد برای گروه با تحصـیلات بالا تا ۳۲ درصـد برای گروه با تحصـیلات پایین متغیر اسـت. به عنوان معیار اندازه گیری، میانگین دوره بیکاری مردان در سال های ۱۹۴۸-۱۹۸۸ از داده های کتاب راهنمای آمار کار ۱۲.۳ هفته محاسـبه شـده اسـت. در نهایت متغیر ها بصـورت $e_h = 1, e_l = 0.1; \pi(e_h|e_h) = 0.925, \pi(e_h|e_l) = 0.5$ قرار داده شد. مدل به صورت ۶ دوره در سال فرض شده و متغیر β برابر با ۰.۹۹۳۲۲ قرار گرفت که در نتیجه نرخ تنزیل سالانه ۰.۹۶ خواهد بود. همچنین مطالعات خرد Mehra and Prescott (1985) ضـریب ریسـک گریزی σ را حدود ۱.۵ تخمین زده‌اند. حد اعتبار[1] بصـورت $\underline{a} \in \{-2, -4, -6\}$ در نظر گرفته شده است تا حساسیت نتایج را به حد اعتبار بررسی کنیم.

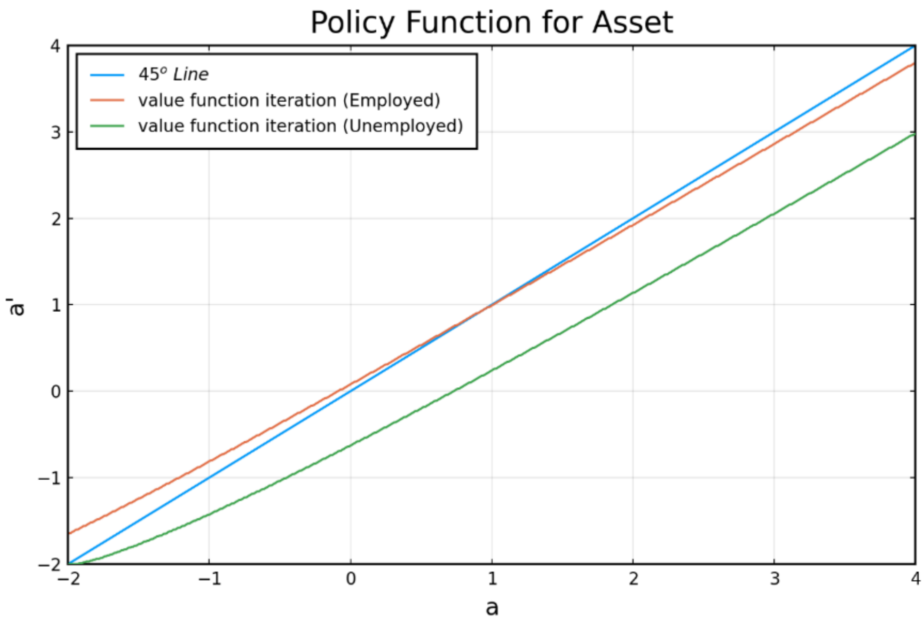
برای بدست آوردن نرخ بهره به ازای پارامتر های مشخص شده و برای هر حد اعتباری، در ابتدا یک نرخ بهره فرضی را متصور می شویم و با استفاده از الگوریتم بلمن، رفتار مناسب نماینده اقتصاد را بدست می آوریم. سپس در ادامه با استفاده از توزیع ایستای اعتبار[2] مساله (که آن را با ضرب چندین باره ماتریس گذار در خود بدست می آوریم) میانگین دارایی اعتبار افراد را بررسی می کنیم و در صورت قرار گیری در فاصله ۰.۰۰۲۵ از مقدار صفر، آن نرخ بهره را به عنوان نرخ بهره ای که بازار اعتبار را تسویه می کند می پذیریم. اگر نرخ بهره در فاصله مذکور قرار نداشت، به علامت میانگین اعتبار نماینده ها نگاه می کنیم و در صورت مثبت بودن، نرخ بهره را کاهش و در صورت منفی بودن، نرخ بهره را افزایش می دهیم. پیش فرض چنین الگوریتمی افزایش (کاهش) مجموع دارایی های اعتباری افراد در اثر افزایش (کاهش) نرخ

[1] Credit limit

[2] Stationary distribution of credit

بهره می باشد. به جهت همگرا شدن به نرخ بهره مشخصی، افزایش یا کاهش نرخ بهره به صورت پله ای آرام تر می شود.

منحنی تابع سیاست نماینده اقتصاد در دو حالت بیکار (کم درآمد) و شاغل (پر درآمد) به ازای پارامتر ریسک گریزی برابر با ۱.۵ و حد اعتبار ۲- بصورت زیر می شود:

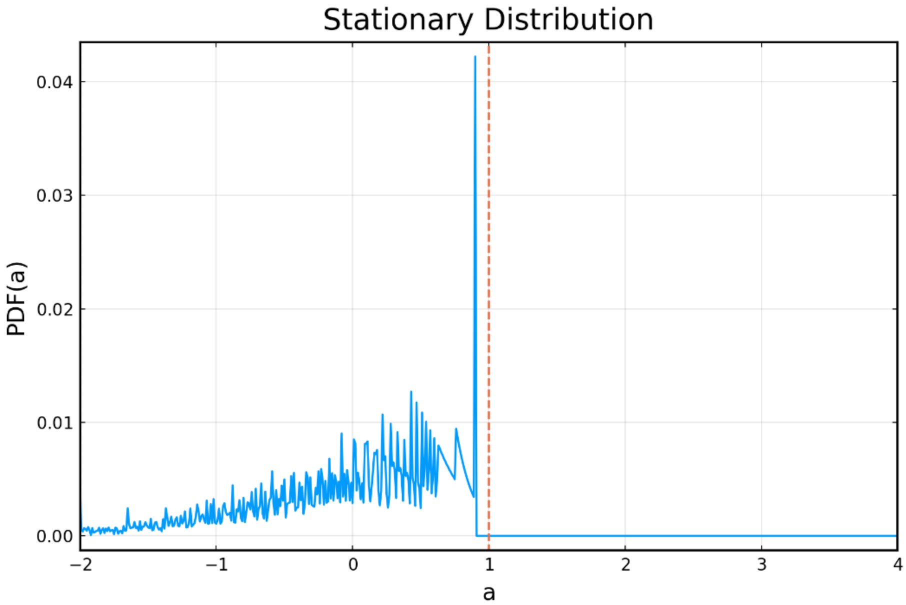


همانطور که می بینید، نماینده به هنگام بیکار بودن و داشتن دست درآمد دوره ای حداقلی اقدام به اخذ بیشترین (وام) اعتبار ممکن می کند تا با هموارسازی مصرف خود تابع بهره وری خود را بیشینه کند.

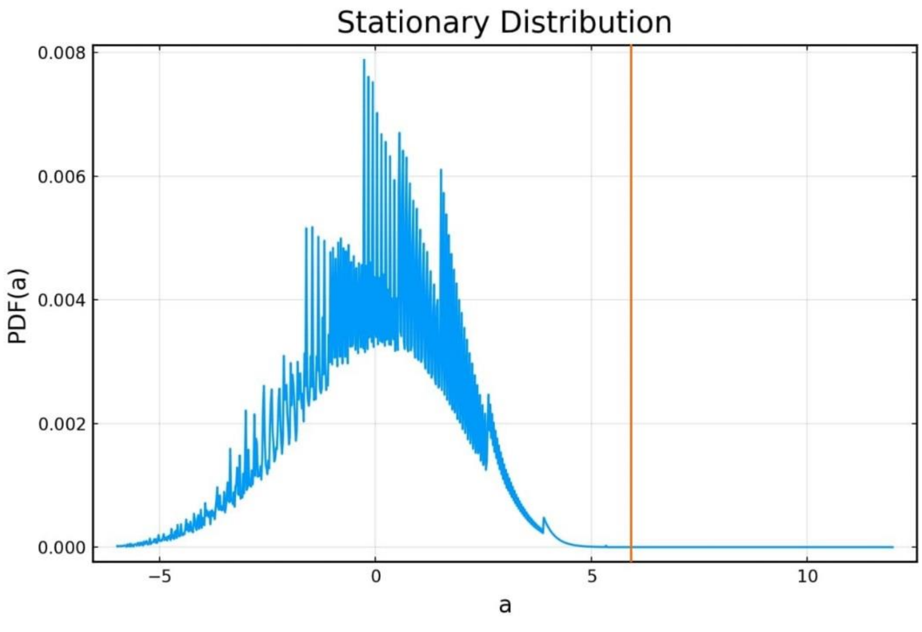
همچنین شاهد هستیم که تابع سیاست به هنگام شاغل بودن خط ۴۵ درجه را در نقطه ای بالاتر از حد اعتبار قطع می کند و به هنگام بیکار بودن آن را در نقطه حد اعتبار قطع می نمیاد. بنابرین مجموعه ارگودیک این مساله بین دو نقطه مذکور می شود و توزیع ایستای مساله می بایستی بین این دو مقدار مثبت و خارج از این بازه صفر باشد.

در ادامه دو تابع توزیع ایستای دارایی (اعتبار) برای دو مساله مختلف را آورده ایم.

- به ازای پارامتر ریسک گریزی برابر با ۱.۵ و حد اعتباری ۲- داریم:



- و به ازای پارامتر ریسک گریزی برابر با ۳ و حد اعتباری ۶- نیز بدست می آوریم:



در شکل توزیع ایستای اول می بینید که در تمام طول مجموعه ارگودیک مساله، چگالی احتمال دارایی اعتباری مثبت و افزایشی می باشد و خارج از این بازه در تمامی نقاط صفر است. در شکل توزیع ایستای دوم نیز تصویر مشابهی را شاهد هستیم اما به دلیل پارامتر های جدید تعیین شده این توزیع در طول مجموعه ارگودیک مساله خود همواره بصورت افزایشی نمی باسد بلکه در نقطه ای نزدیک صفر به ببشینه چگالی احتمال می رسد و سپس کاهش می یابد تا در انتهای مجموعه ارگودیک خود به صفر برسد. سطح زیر نمودار های توزیع ایستا نیز دقیقا برابر با ۱ می شوند.

قابل ذکر است که اعوجاجات شانه-مانند در توزیع های ایستای بدست آمده که بر روی توزیع های ایستای اصلی سوار شده اند را نگارنده در توزیع های ایستای مسائل دیگری (در منابعی در اینترنت) نیز مشاهده کرده است و به همین دلیل نشان از اشتباه بودن کد نمی باشد چرا که نتایج بدست آمده نیز بسیار مشابه مقاله اصلی می باشد.

۴ نتایج

نتایج در جداول ۱ و۲ آمده است. در جداول نرخ بهره (r) بصورت سالانه است اما قیمت (q) برای هر دوره است. همچنین توجه کنید که حد اعتبار5.3- برابر است با میانگین موهبت های یک سال. نتایج نشان می‌دهد که نرخ بهره با افزایش حد اعتبار کاهش می‌یابد. شهود آن از این می‌آید که اگر حد اعتبار افزایش یابد، برای متقاعد کردن مشتریان به دریافت اعتبار بیشتر باید نرخ بهره کمتری به آن ها پیشنهاد داد. جدول ۲ نسبت به جدول ۱ حساسیت نرخ بهره به تغییر ضریب ریسک گریزی را نشان می‌دهد. هرچه این ضریب بیشتر باشد، نرخ بهره برای هر حد اعتباری کاهش می‌یابد. این نتیجه جالب است زیرا مدلهای کالیبره شده کارگزار نماینده معمولاً به سطوح بالایی از ریسک گریزی نیاز دارند تا بازده مازاد زیادی از سهام طلب کند، اما این امر همچنین منجر به نرخ بدون ریسک بسیار زیاد می شود. به عنوان مثال ، ویل (۱۹۸۹) نشان می دهد وقتی ضریب ریسک پذیری نسبی از ۰ به ۲۰ افزایش یابد نرخ بدون ریسک از حدود ۵٪ به ۱۸٪ می رسد.

قیمت	نرخ بهره (دوره ای)	نرخ بهره (سالانه)	محدودیت اعتبار
۱.۰۱۳۳	-۱.۳۱۲٪	-۷.۶۲٪	-۲
۰.۹۹۸	۰.۲٪	-۱.۲۰۷٪	-۴
۰.۹۹۵	۰.۵۰۱٪	۳.۰۴۸٪	-۶

جدول ۱. ضریب ریسک گریزی $\sigma = ۱.۵$

قیمت	نرخ بهره (دوره ای)	نرخ بهره (سالانه)	محدودیت اعتبار
۱.۰۴۹۶	-۴.۷۲۸٪	-۲۵.۲۲٪	-۲
۱.۰۰۷۶	-۰.۷۵۶٪	-۴.۴۵٪	-۴
۰.۹۹۸۷	۰.۱۳۳٪	۰.۸۰۴٪	-۶

جدول ۲. ضریب ریسک گریزی $\sigma = ۳$

با توجه به جداول بالا در ابتدا می توانیم متوجه شـــویم که با تســـهیل حد اعتباری نمایندگان، نرخ بهره بدون ریسـک افزایش می یابد. نتایج بدسـت آمده دارای شـهود قابل توجهی می باشـد: در صـورت تسـهیل اعتبار گیری (کاهش حد اعتباری) در بازار، باید نرخ بهره بدون ریسـک افزایش یابد تا نمایندگان تشـویق به نگهداری اعتبار بیشـتر، به منظور تسویه بازار اعتباری، شـوند. همچنین مشـاهده می کنیم که با افزایش ریسـک گریزی نمایندگان اقتصـاد، نرخ بهره بدون ریسـک برای تمامی حدود اعتباری کاهش می یابد که چنین مشاهده ای قابل توجه می باشد چرا که در مسایل مدلسازی نماینده-نمونه کالیبره شده معمولا به ریسک گریزی های بالایی نیاز است تا سود دهی اضافی دارایی های سهام قابل توجیه باشد اما از طرفی دیگر همین افزایش ریسـک گریزی در آن مدل سـازی ها موجب افزایش نرخ بهره بدون ریسـک نیز می شوند که در واقع خلاف نتایج این مقاله می باشد.

اقتصاد تعریف شده در این مقاله را می توان مشابه اقتصاد نماینده-نمونه کالیبره شده ای دانست که آن نیز دارای نرخ تنزیل ۰.۹۹۳۲۲ دوره ای و در نتیجه نرخ تنزیل ۰.۹۶ سـالیانه باشـد و مطابق آن نرخ بهره بدون ریســـک معادل (۰.۹۶/(۰.۹۶-۱)) ۴.۲٪ بدســـت می آید. بنابرین در تمامی آزمایش های مد نظر صـــورت پذیرفته، اقتصـــاد بیمه-ناقص نماینده-متنوع این مقاله ترخ بهره بدون ریســـک به مراتب کوچک تری را حاصل شده است. همچنین می توان نشان داد که نرخ بهره بدست آمده در این حالات باید از نرخ بهره بدسـت آمده صـرفا از نرخ تنزیل کوچک تر باشـد چرا که اگر برابر با آن یا بیشـتر باشـد، تراز اعتباری نمایندگان اقتصاد به سمت بینهایت متمایل می شود که در واقعیت امکان پذیر نیست.

۵ نتیجه‌گیری

این پژوهش بررســـی می کند که چرا نرخ بهره بدون ریســـک واقعی این چنان پایین بوده اســـت. نتیجه گیری اصـلی این اسـت که شـوک متمایز فردی نمی‌تواند به طور کامل بیمه شـود در عوض می‌تواند یک نرخ بهره بدون ریسکی کمتر از مدل کارگزار نماینده با همان نوسانات کل ایجاد کند.

۵.۱ پیشنهادات برای ادامه کار

پیشنهاداتی که برای ادامه این کار وجود دارد، شامل موارد زیر است:

- اضافه کردن سرمایه به مدل. اضافه کردن یک شرکت به مدل که سرمایه اجاره می‌دهد.
- بررسی مدل در حالتی که موهبت ها تصادفی باشند.
- بررسی مازاد بازده سهام با توجه به نااطمینانی های تجمعی.

منابع و مراجع

[۱] Huggett, M. (1993). The risk-free rate in heterogeneous-agent incomplete-insurance economies. Journal of economic Dynamics and Control, 17(5-6), 953-969.

[۲] Caraiani, P. (2018). Introduction to Quantitative Macroeconomics Using Julia: From Basic to State-of-the-Art Computational Techniques. Academic Press.

[۳] https://stackoverflow.com/

[۴] https://docs.julialang.org/en/v1/

پیوست‌ها

کد های به کار رفته در شبیه سازی های این پژوهش در این قسمت (ادامه صفحات) ضمیمه شده اند.

Huggett (1993)

July 30, 2021

[88]:
```julia
using SparseArrays, LinearAlgebra, Plots, LaTeXStrings
```

[2]:
```julia
pyplot()
```

[2]:
```
Plots.PyPlotBackend()
```

[95]:
```julia
# parameter values
sigma  = 1.5;                     # risk aversion
beta   = 0.99322;                 # discount factor
prob   = [0.925 0.075; .5 .5];    # prob(i,j) = probability (s(t+1)=sj | s(t) =␣
↪si)
theta  = 0.1;                     # non-interest income if unemployed
wage   = 1.00;                    # non-interest income if employed
Rstart = 1;                       # initial gross interest rate
F      = -2.0;                    # borrowing constraint parameter

# initialization
A      = 1.0;
Aold   = 1.0;
Anew   = 1.0;
meanA  = 1.0;

# asset grid
maxast = 4;                       # maximum value of asset grid
minast = F;                       # minimum value of asset grid
incast = 0.01;                    # size of asset grid increments
nasset = trunc(Int,((maxast-minast)/incast+1)); # number of grid points
assetp = 1.0;

# global variables
decis    = zeros(nasset,2);
tdecis   = zeros(nasset,2);
lambda   = zeros(nasset,2);
probk_copy  = zeros(nasset,1);
```

[96]:
```julia
liter   = 1;
maxiter = 1000;
```

```
toler   = 0.00000000001;
step    = 0.05;
R = Rstart;
Q = Qstart;
flag = 1;

println("Iterating On r");
println("");
println("Iter       r                              A                               newstep");
while  (flag != 0) && (liter <= maxiter);

    util1=-10000*ones(nasset,nasset);     # utility when employed
    util2=-10000*ones(nasset,nasset);     # utility when unemployed

    for i=1:nasset
        asset=(i-1)*incast + minast;
        for j=1:nasset
            assetp = (j-1)*incast + minast;
            cons = wage + R*asset - assetp;
            if assetp >= F && cons > 0;
                util1[j,i]=(cons)^(1-sigma)/(1-sigma);
            end;
        end
        for j=1:nasset
            assetp = (j-1)*incast + minast;
            cons = theta*wage + R*asset - assetp;
            if assetp>= F && cons > 0;
                util2[j,i]=(cons)^(1-sigma)/(1-sigma);
            end;
        end;
    end;

#  initialize some variables
    v       = zeros(nasset,2);
    tdecis1 = zeros(nasset,2);
    tdecis2 = zeros(nasset,2);

    test1   = 10;
    test2   = 10;
    rs,cs   = size(util1);
    r1      = zeros(nasset,nasset);
    r2      = zeros(nasset,nasset);

    while (test2 > 1e-3);
        for i=1:cs;
            r1[:,i]=util1[:,i]+beta*(prob[1,1]*v[:,1]+ prob[1,2]*v[:,2]);
```

```
            r2[:,i]=util2[:,i]+beta*(prob[2,1]*v[:,1]+ prob[2,2]*v[:,2]);
        end;

        (tv1,inds1)= findmax(r1,dims=1);
        tdecis1    = map(x->Base._ind2sub(r1, x)[1], inds1)
        (tv2,inds2)= findmax(r2,dims=1);
        tdecis2    = map(x->Base._ind2sub(r2, x)[1], inds2)

        tdecis=[tdecis1' tdecis2'];
        tv=[tv1' tv2'];

        test1=maximum((tdecis.-decis));
        test2 = norm(tv.-v);
        #test2 = maximum(abs.(tv.-v));

        copy!(v, tv);
        copy!(decis, tdecis);
    end;
    decis=(decis.-1)*incast .+ minast;

    g2=spzeros(cs,cs);
    g1=spzeros(cs,cs);
    for i=1:cs
        g1[i,tdecis1[i]]=1;
        g2[i,tdecis2[i]]=1;
    end
    trans=[ prob[1,1]*g1 prob[1,2]*g1; prob[2,1]*g2 prob[2,2]*g2];
    trans=trans';
    probst = (1/(2*nasset))*ones(2*nasset,1);
    test = 1;
    while test > 10.0^(-8);
        probst1 = trans*probst;
        test = maximum(abs.(probst1-probst));
        copy!(probst, probst1);
    end;

    aa=vec(decis);
    meanA=(probst'*aa)[1];

    lambda=reshape(probst, cs,2)


    lambda=reshape(probst, cs,2)
    probk=sum(lambda',dims=1);            # stationary distribution of capital␣
↪- sum by each column
    probk=probk'
    probk_copy = probk
```

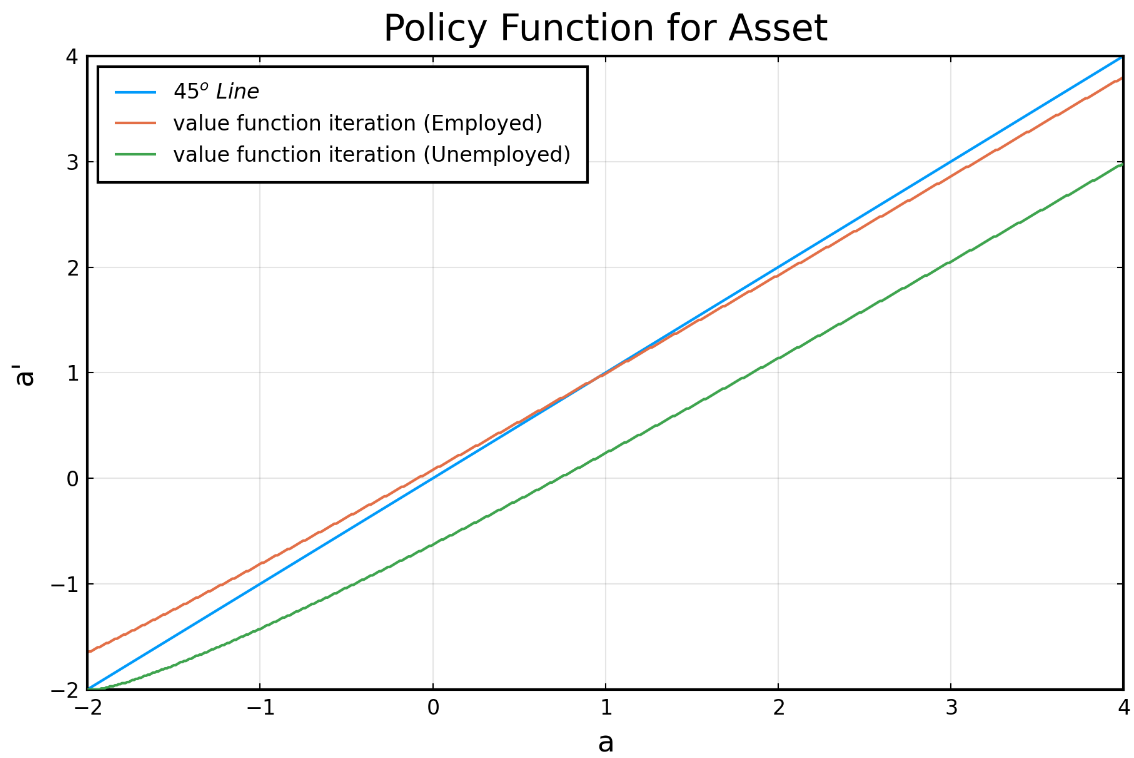
```
    if liter == 1;
        A=copy(meanA);;
        if meanA > 0.0;
            step=copy(-step);
        end;
    end;

    Aold = copy(A);
    Anew = copy(meanA);

    if sign(Aold) != sign(Anew)
        step = copy(-.5*step);
    end;
    println(liter,"       ",R^6-1,"                             ",meanA,"      
                ",step);

    R=copy(R+step);
    if abs.(Anew) < 0.0025
        flag = 0;
    end;

    A=copy(Anew);
    liter = liter+1;

end;
```

```
Iterating On r

Iter       r                              A                              newstep
1       0                            1.4248177627045235
-0.05
2       -0.2649081093750002                            -1.100088465803383
0.025
3       -0.14093169897460944                            -0.5254131982821371
0.025
4       0.0                            1.4248177627045235
-0.0125
5       -0.07269494811630228                            0.03480101481107727
-0.0125
6       -0.1409316989746089                            -0.5254131982821371
0.00625
7       -0.10735655835574831                            -0.2873594040309214
0.00625
8       -0.07269494811630228                            0.03480101481107727
-0.003125
9       -0.0901632960740244                            -0.13948291660551
```

```
0.0015625
10       -0.08146372638515764                          -0.05794854221261193 4
0.0015625
11       -0.07269494811630228                          0.03480101481107727
-0.00078125
12       -0.07708801575967894                          -0.013236919452261697
0.000390625
13       -0.07489365500191925                          0.010139312263206912
-0.0001953125
14       -0.07599137821687629                          -0.0010995076854222047
9.765625e-5
```

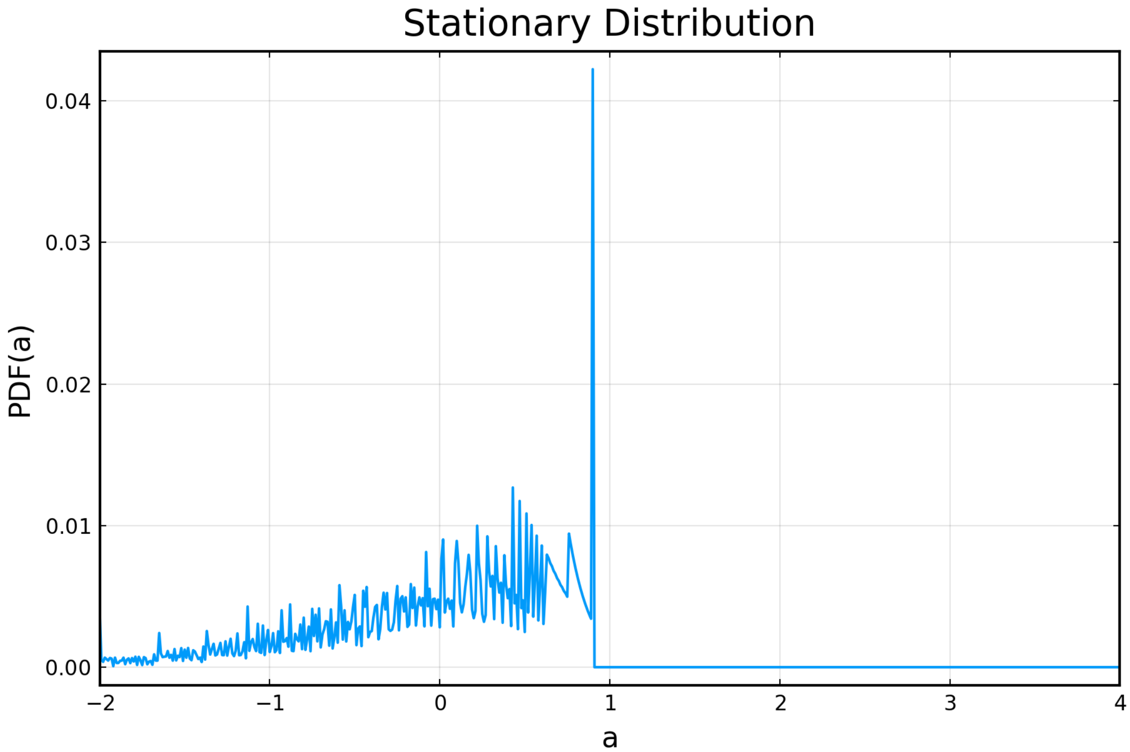
[101]:
```
grid = collect(minast:incast:maxast);

plot(grid, grid, xlabel = "a", ylabel = "a'", title = "Policy Function for␣
↪Asset (Credit)", label = L"45^o~Line", framestyle = :box)
plot!(grid, grid[tdecis[:,1]], label = "value function iteration (Employed)",␣
↪xlabel = "a", ylabel = "a'", title = "Policy Function for Asset", framestyle␣
↪= :box,legend=:topleft)
p1 = plot!(grid, grid[tdecis[:,2]], label = "value function iteration␣
↪(Unemployed)", xlabel = "a", ylabel = "a'", title = "Policy Function for␣
↪Asset", framestyle = :box,legend=:topleft)
plot(p1, layout = 1, dpi=300)
xlims!((-2,4))
ylims!((-2,4))

#savefig("main.png")
```

[101]:



[102]:
```
p1 = plot(grid, probk_copy, xlabel = "a", ylabel = "PDF(a)", title =␣
 ↪"Stationary Distribution", legend = false, framestyle = :box)
plot(p1, layout = 1, dpi=300)
#vline!([-2,1], linestyles=:dash)
xlims!((-2,4))
#savefig("3_6.png")
```

[102]:



Stationary Distribution
PDF(a)
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
−2
−1
0
1
2
3
4
a