Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Session 2009
Série : C et E
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 h Coefficient : 5(C) ; 4(E)

L'épreuve comporte trois exercices et un problème

EXERCICE 1 (série E uniquement) (4points)

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, On considère les points :

A (–4 ; 6 ; –1) ; B (1 ; 2 ; 2) ; C (–1 ; 4 ; 3).

1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. 0,5pt
   b) Calculer l'aire du triangle ABC 0,5pt
2. Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC) 1pt
3. Soit I le milieu de [AC], et $D = S_I(B)$ où S_I désigne la symétrie de centre I.
   a) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires. 1pt
   b) Donner la nature du quadrilatère ABCD et puis calculer son aire. 1pt

EXERCICE 1 (Série C uniquement) (4points)

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4 où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de p 0,5pt
2. Démontrer que $(2p^2+p)^2 < 4S < (2p^2+p+2)^2$ 1pt
3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.
   a) Etablir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. (On pourra utiliser la question 2) 0,5pt
   b) Exprimer n en fonction de p. 0,5pt
   c) Etablir que p vérifie la relation $3+2p-p^2=0$. (on utilisera le fait que $4S = 4n^2$) 1pt
   d) Déduire de c), p et puis n. 0,5pt

EXERCICE 2 (4 points)

Un dé cubique pipé est tel que :

Deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4, et une face est marquée 6.

La probabilité p_i d'apparition de la face marquée i est proportionnelle au nombre i.

1. Calculer les nombres p_2, p_4, p_6 1,5pt
2. On suppose dans la suite que $p_2 = \frac{1}{6}$;$p_4 = \frac{1}{3}$ et $p_6 = \frac{1}{2}$.

   On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i le résultat du premier lancer et j le résultat du 2ème lancer.

   On définit la variable aléatoire X qui au couple (i, j) associe le nombre $i-j$.
   a) Déterminer l'univers –image de X. 1pt
   b) Déterminer la loi de probabilité de X :. 1,5pt

PROBLEME : 12 points

Le problème comprend trois parties A, B et C obligatoires. La partie C est indépendante.

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan

1. a) Calculer la dérivée f ' de f et dresser le tableau de variation de f. 0,75pt
   b) Etudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de (C_f) par rapport à sa tangente T_0 en O. 0,75pt

c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe (C_f). 0,5pt

2. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. 0,5pt

b) Soit g la bijection réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative. 0,5pt

Montrer que pour tout x de I, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

3. Construire dans le même graphique les courbes (C_f) et (C_g). (on prendra 2cm comme unité sur les axes de coordonnées) 1,5pt

4. Pour tout entier naturel n strictement positif, on définit la suite numérique (U_n) par :

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} (\ln(1+x) - \ln(1-x))\,dx$$

a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul, 1pt

$$U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}$$

b) Calculer la limite de la suite U_n et interpréter graphiquement le résultat. 0,75pt

Partie B

5. Soit S la symétrie orthogonale d'axe (Δ) : $y = x$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

On pose $\varphi = T \circ S$.

a) Donner la nature de l'application φ. 0,5pt

b) Construire l'image par φ de la courbe (C_f). 0,75pt

6. On considère les vecteurs $\vec{e_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$,
la droite (Δ') : $x - y - 1 = 0$, et S' la symétrie orthogonale d'axe (Δ')

a) Vérifier que le triplet $(O ; \overrightarrow{e_1}\ \overrightarrow{e_2})$ forme un repère orthogonal du plan. 0,25pt

b) Montrer que dans la base $(\vec{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$, où $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{e_1}$ et à $\overrightarrow{e_2}$ que l'on précisera. 0,5pt

c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ'). 1pt
Montrer que $\overrightarrow{V_2} = 2\,\overrightarrow{HH'}$. En déduire que $T = T_1 \circ S' \circ S$ où T_1 est une translation dont on donnera le vecteur.

d) Montrer que $\varphi = T_1 \circ S'$ 0,25pt

Partie C

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit (D) la droite d'équation x = 2. Les points M et F du plan (P) ont pour affixes respectives z et $1-i$.

1. Exprimer en fonction de z, la distance de M à la droite (D). 0,5pt

2. On suppose $z + \bar{z} - 4 \neq 0$. Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation (E_m) suivante :

$$|z - 1 + i| - m|\bar{z} + z - 4| = 0.$$

a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m). 1pt

b) Pour $m = 1$, donner les éléments caractéristiques de (Γ_1) 1 pt