BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Program linier *(Linier Programming)*

Pemrograman linier merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan biaya. Program linier banyak diterapkan dalam masalah ekonomi, industri, militer, sosial dan lain-lain. Program linier berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linier dengan beberapa kendala linier.

2.1.1 Karakteristik Pemrograman Linier

Adapun karakteristik pemrograman linier adalah sebagai berikut (Siringo-ringo, 2005) :

Sifat linearitas suatu kasus dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa cara. Secara statistik, dapat memeriksa kelinearan menggunakan grafik (diagram pencar) ataupun menggunakan uji hipotesa. Secara teknis, linearitas ditujukan oleh adanya sifat proporsionalitas, additivitas, divisibilitas dan kepastian fungsi tujuan dan pembatas.

Sifat proporsional dipenuhi jika kontribusi setiap variabel pada fungsi tujuan atau penggunaan sumber daya yang membatasi proporsional terhadap level nilai variabel. Jika harga per unit produk misalnya adalah sama berapapun jumlah yang dibeli, maka sifat proporsianal dipenuhi. Atau dengan kata lain, jika pembelian dalam jumlah besar mendapatkan diskon, maka sifat proporsional tidak dipenuhi. Jika penggunaan sumber daya per unitnya tergantung dari jumlah yang diproduksi, maka sifat proporsionalitas tidak dipenuhi.

Sifat additivitas mengasumsikan bahwa tidak ada bentuk perkalian silang diantara berbagai aktivitas, sehingga tidak akan ditemukan bentuk perkalian silang pada model. Sifat additivitas berlaku baik bagi fungsi tujuan maupun pembatas (kendala). Sifat additivitas dipenuhi jika fungsi tujuan merupakan penambahan langsung kontribusi masing-masing variabel keputusan. Untuk fungsi kendala, sifat additivitas dipenuhi jika nilai kanan merupakan total penggunaan masing-masing variabel keputusan. Jika dua variabel keputusan misalnya merepresentasikan dua produk subsitusi, di mana peningkatan volume penjualan salah satu produk akan mengurangi volume penjualan produk lainnya dalam pasar yang sama, maka sifat additivitas tidak dipenuhi. Sifat divisibilitas berarti unit aktivitas dapat dibagi ke dalam sembarang level fraksional, sehingga nilai variabel keputusan non integer dimungkinkan.

Sifat kepastian menunjukkan bahwa semua parameter model berupa konstanta. Artinya koefisien fungsi tujuan maupun fungsi pembatas merupakan suatu nilai pasti, bukan merupakan nilai peluang tertentu.

2.1.2 Formulasi Permasalahan

Agar dapat menyusun dan merumuskan suatu persoalan atau permasalahan yang dihadapi ke dalam model program linier, maka dimintakan lima syarat yang harus dipenuhi sebagai berikut ini (Nasendi, 1984) :

a. *Tujuan*

   Apa yang menjadi tujuan permasalahan yang dihadapi yang ingin dipecahkan dan dicari jalan keluarnya. Tujuan ini harus jelas dan tegas yang disebut *fungsi tujuan*. Fungsi tujuan tersebut dapat berupa dampak positif, manfaat-manfaat, keuntungan-keuntungan, dan kebaikan-kebaikan yang ingin dimaksimumkan, atau dampak negatif, kerugian-kerugian risiko-risiko, biaya-biaya, jarak, waktu, dan sebagainya yang ingin diminimumkan.

b. *Alternatif Perbandingan*

Harus ada sesuatu atau berbagai alternatif yang ingin diperbandingkan; misalnya antara kombinasi waktu tercepat dan biaya tertinggi dengan waktu terlambat dan biaya terendah; atau antara alternatif terpadat modal dengan padat karya; atau antara kebijakan A dengan B; atau antara proyeksi permintaan tinggi dengan rendah; dan seterusnya.

c. *Sumber daya*

Sumber daya yang dianalisis harus berada dalam keadaan yang terbatas. Misalnya, keterbatasan waktu, keterbatasan biaya, keterbatasan tenaga, keterbatasan luas tanah, keterbatasan ruangan, dan lain-lain. Keterbatasan dalam sumber daya tersebut dinamakan sebagai *kendala* atau *syarat ikatan*.

d. *Perumusan kuantitatif*

Fungsi tujuan dan kendala tersebut harus dapat dirumuskan secara kuantitatif dalam apa yang disebut *model matematika*.

e. Keterkaitan peubah

Peubah-peubah yang membentuk fungsi tujuan dan kendala tersebut harus memiliki hubungan fungsional atau hubungan keterkaitan. Hubungan keterkaitan tersebut dapat diartikan sebagai hubungan yang saling mempengaruhi, hubungan interaksi, interdependensi, timbal-balik, saling menunjang, dan sebagainya.

Bentuk umum pemrograman linier adalah sebagai berikut :

Funsi tujuan :

Maksimumkan atau minimumkan $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (2.1)

Sumber daya yang membatasi :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = / \leq / \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = / \leq / \geq b_2$$

(2.2)

$$\vdots$$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = / \leq / \geq b_m$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ (2.3)

Bentuk di atas juga dapat ditulis sebagai berikut :

Fungsi tujuan :

Maksimum dan minimumkan :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \tag{2.4}$$

Kendala :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \;\leq \text{atau} \;\geq\; b_i \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.5}$$

Dan $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (2.6)

Simbol x_1, x_2, …, x_n menunjukkan variabel keputusan. Jumlah variabel keputusan oleh karenanya tergantung dari jumlah kegiatan atau aktivitas yang dilakukan untuk mencapai tujuan. Simbol c_1, c_2, …, c_n merupakan kontribusi masing-masing variabel keputusan terhadap tujuan, disebut juga koefisien fungsi tujuan pada model matematiknya. Simbol a_{11}, ..., a_{1n}, ...,a_{mn} merupakan penggunaan per unit variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi, atau disebut juga sebagai koefisien fungsi kendala pada model matematiknya. Simbol b_1, b_2, …, b_n menunjukkan jumlah masing-masing sumber daya yang ada. Jumlah fungsi kendala akan tergantung dari banyaknya sumber daya yang terbatas.

Pertidaksamaan terakhir (x_1, x_2, …, $x_n \geq 0$) menunjukkan batasan non negatif. Membuat model matematik dari suatu permasalahan bukan hanya menuntut kemampuan metematik tapi juga menuntut seni pemodelan. Menggunakan seni akan membuat pemodelan lebih mudah dan menarik.

2.1.3 Metode Simpleks

Apabila suatu masalah linear programming hanya mengandung dua kegiatan (variabel-variabel keputusan) saja, maka dapat diselesaikan dengan metode grafik. Bila terdapat lebih dari dua variabel maka metode grafik tidak dapat digunakan lagi, sehingga diperlukan metode simpleks. Metode ini lazim dipakai untuk menentukan kombinasi dari tiga variabel atau lebih.

Masalah program linier yang melibatkan banyak variabel keputusan dapat dengan cepat dipecahkan dengan bantuan komputer. Bila variabel keputusan yang dikandung tidak terlalu banyak, masalah tersebut dapat diselesaikan dengan suatu algoritma yang biasanya sering disebut metode tabel simpleks. Disebut demikian karena kombinasi variabel keputusan yang optimal dicari dengan menggunakan tabel-tabel.

Tabel 2.1 Bentuk Tabel Simpleks

C_j		C_1	…	C_k	…	C_n	Jawab Basis
Variabel Basis	Harga Basis	X_{B1}	…	X_n	…	X_m	
X_{B1}	C_{B1}	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	$\overline{b_1}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
X_{Br}	C_{Br}	a_{r1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}	$\overline{b_r}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
X_{Bm}	C_{Bm}	a_{m1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	$\overline{b_m}$
Z_j - C_j = imbalan		$Z_1 - C_1$	…	$Z_k - C_k$	…	$Z_n - C_n$	$c_B\ \overline{b}$

Sebelum menyelesaikan suatu tabel simpleks terlebih dahulu menginisialisasikan dan merumuskan suatu persoalan keputusan ke dalam model matematik persamaan linier, caranya sebagai berikut :

1. Konversikan semua ketidaksamaan menjadi persamaan

Agar persamaan garis batasan memenuhi persyaratan penyelesaian pada daerah kelayakan (*feasible*) maka untuk model program linier diubah menjadi suatu model yang sama dengan menambahkan variabel slack, surplus dan variabel buatan (*artificial variable*) pada tiap batasan (*constraint*) serta memberi harga nol pada setiap koefisien *c*-nya. Batasan dapat dimodifikasi sebagai berikut :

1) Untuk batasan bernotasi (≤) dapat dimodifikasi kepada bentuk persa maan dengan menambahkan variabel slack ke dalamnya.
2) Untuk batasan bernotasi (≥) dapat dimodifikasi kepada bentuk persamaan dengan mengurangi variabel surplus dan kemudian menambahkan variabel buatan (*artificial variable*) ke dalamnya.
3) Untuk batasan bernotasi (=) diselesaikan dengan menambahkan variabel buatan (*artificial variable*) ke dalamnya.

Dengan penambahan variabel buatan ini akan merusak sistem batasan, hal ini dapat diatasi dengan membuat suatu bilangan besar M sebagai harga dari variabel dengan buatan tersebut dalam fungsi tujuan. Jika persoalan maksimasi maka dibuat –M sebagai harga, dan jika persoalan minimal dibuat +M sebagai harga dari variabel buatan. Cara pendekatan ini dikenal dengan metode M besar (*Big M Method*).

Penambahan variabel slack dan variabel buatan (*artificial variable*) pada tiap batasan (*constraint*) untuk persoalan maksimal dapat dirumuskan sebagai berikut :

Maksimalkan :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j - M \sum_{i=m_{1+1}}^{n} B_i \tag{2.7}$$

Dengan batasan :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m_1 \text{ (untuk batasan bernotasi } \leq) \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + B_i = b_i, \qquad i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2 \text{ (untuk batasan bernotasi =)} \tag{2.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_i + B_i = b_i, \qquad i = m_1 + m_2 + 1, \dots, m \text{(untuk batasan bernotasi } \geq) \tag{2.10}$$

$x_j \geq 0$, $x_i \geq 0$, $B_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ untuk semua harga i dan j

$x_j = 0$, $j = 1, 2, ..., n$

$x_i = b_i$, $i = 1, 2, ..., m_1$

$B_i = b_i$, $i = m_1 + 1, ..., m$

2. Menyusun persamaan-persamaan di dalam tabel awal simpleks.

Tabel 2.2 Bentuk Awal Tabel Simpleks Sebelum Pivoting

C_j		C_1		C_r		C_m	…	C_j	…	C_k	Jawab Basis
Variabel Basis	Harga Basis	X_{B1}	…	X_{Br}	…	X_{Bm}	…	X_j	…	X_k	
X_{B1}	C_{B1}	1	…	0	…	0	…	a_{1j}	…	a_{1k}	$\overline{b_1}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
X_{Br}	C_{Br}	0	…	1	…	0	…	a_{rj}	…	a_{rk}	$\overline{b_r}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
X_{Bm}	C_{Bm}	0	…	0	…	1	…	a_{mj}	…	a_{mk}	$\overline{b_m}$
Z_j - C_j = imbalan		*0*		0		0	…	$Z_j - C_j$	…	$Z_k - C_k$	$c_B\ \bar{b}$

Langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan suatu tabel simpleks adalah sebagai berikut :

Langkah 1 : Mengecek nilai optimal imbalan.

Untuk persoalan maksimal : $z_j - c_j$ = minimal { $z_j - c_j : j \epsilon R$ }. Jika $z_k - c_k \geq 0$ maka selesai, berarti jawab atau solusi sudah optimal. Untuk persoalan minimal $z_j - c_j$ = minimal { $z_j - c_j : j \epsilon R$ }. Jika $z_k - c_k \leq 0$ maka selesai, berarti jawab atau solusi sudah optimal.

Harga-harga imbalan ($z_j - c_j$) dapat diperoleh dengan rumus :

$$z_j - c_j = \sum_{j=1}^{m} c_{Bi}\, x_{ij} - c_j \qquad (2.11)$$

Untuk : c_j = Harga dari semua variabel dalam z.

a_{ij} = Koefisien dari semua variabel dalam sistem batasan.

c_{Bi} = Harga dari variabel basis.

Langkah 2 : Menentukan variabel yang akan masuk dalam basis.

Untuk persoalan maksimalkan jika terdapat beberapa $z_j - c_j \leq 0$ maka kolom yang menjadi kolom pivot adalah kolom dengan $z_j - c_j$ terkecil, dan variabel yang sehubungan dengan kolom pivot adalah variabel yang akan masuk ke dalam basis. Untuk persoalan minimal jika terdapat beberapa $z_j - c_j \geq 0$ maka kolom yang menjadi kolom pivot adalah kolom dengan $z_j - c_j$ terbesar, dan variabel yang sehubungan dengan kolom pivot adalah variabel yang masuk dalam basis.

Jika pada baris $z_j - c_j$ terdapat lebih dari satu kolom yang mempunyai nilai negatif yang angkanya terbesar dan sama pada persoalan maksimal atau terdapat lebih dari satu kolom yang mempunyai nilai positif terbesar dan sama pada persoalan minimal maka terdapat dua kolom yang bisa terpilih menjadi kolom pivot. Untuk mengatasi hal ini, dapat dipilih salah satu dari $z_j - c_j$ secara sembarang.

Langkah 3 : Menentukan variabel yang akan keluar dari basis.

Menetapkan variabel yang keluar dari basis yaitu : $\frac{\overline{b_r}}{a_{rk}}$ = minimum $\left\{\frac{\overline{b_r}}{a_{ik}} : \; a_{ik} > 0\right\}$ variabel yang sehubungan dengan baris pivot yang demikian adalah variabel yang keluar dari basis. Jika terdapat dua baris atau lebih nilai $\frac{\overline{b_r}}{a_{rk}}$ maka ada beberapa baris yang dapat terpilih sebagai baris pivot. Dapat dipilih baris pivot secara bebas di antara keduanya dan hasilnya akan sama.

Langkah 4 : Menyusun tabel simpleks baru.

Untuk menyusun tabel simpleks yang baru, maka harus mencari koefisien elemen pivot dari tabel simpleks sebelumnya. Koefisien elemen pivot dapat dicari dengan menghubungkan kolom pivot dengan baris pivot sedemikian rupa sehingga titik potong kedua pivot ini menunjukkan koefisien, yang disebut elemen pivot.

Koefisien-koefisien baris pivot baru dapat dicari dengan menggunakan rumus sebagai berikut : $\frac{a_{rj}}{a_{rk}}$ (2.12)

Untuk menghitung nilai baris baru lainnya dilakukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut : a_{ij} - $\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\, a_{ik}$ (2.13)

Langkah 5 : Mengecek nilai optimal imbalan dari tabel simpleks yang baru.

Jika imbalan sudah optimal maka tafsirkan hasil penyelesaian, jika belum optimal maka kembali kepada langkah 2.

Tabel 2.3 Bentuk Awal Tabel Simpleks Sesudah Pivoting

C_j		C_1		C_r		C_m	…	C_j	…	C_k	Jawab Basis
Variabel Basis	Harga Basis	X_{B1}	…	X_{Br}	…	X_{Bm}	…	X_j	…	X_k	
X_{B1}	C_{B1}	1	…	$\frac{-a_{rj}}{a_{rk}}$	…	0	…	$a_{1j} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{1k}$	…	0	$\overline{b_1} - \frac{a_{1j}}{a_{1k}} \overline{b_r}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
X_{Br}	C_{Br}	0	…	$\frac{1}{a_{rk}}$	…	0	…	$\frac{a_{rj}}{a_{rk}}$	…	1	$\frac{\overline{b_r}}{a_{rk}}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
X_{Bm}	C_{Bm}	0	…	$\frac{-a_{mk}}{a_{rk}}$	…	1	…	$a_{mj} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{mk}$	…	0	$\overline{b_m} - \frac{a_{mj}}{a_{mk}} \overline{b_r}$
Z_j - C_j = imbalan		*0*		$\frac{c_k - z_k}{a_{rk}}$		0		$(z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$		0	$c_B \, \bar{b}$

Contoh 2.1 :

Maksimumkan : $Z = 8x_1 + 9x_2 + 4x_3$

Kendala : $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$

$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Agar persamaan di atas memenuhi persyaratan penyelesaian dalam daerah kelayakan (*feasible*), maka pada sisi kiri persamaan batasan ditambahkan variabel slack. Sehingga bentuk bakunya sebagai berikut :

Maksimumkan : $Z = 8x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

Kendala : $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 3$

$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 = 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Model di atas dapat dibawa ke dalam tabel simpleks sebagai berikut :

Tabel 2.4 Tabel Simpleks untuk Solusi Awal (Iterasi 0)

C_j		8	9	4	0	0	0	Harga Jawab
Variabel Basis	Harga Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	1	1	2	1	0	0	2
x_5	0	2	3	4	0	1	0	3
x_6	0	7	6	2	0	0	1	8
$z_j - c_j$		-8	-9	-4	0	0	0	0

Dari tabel 2.4, tampak bahwa penyelesaian opitimal belum dicapai di mana harga $z_j - c_j$ terkecil dari tabel 2.4 adalah -9, sehingga variabel yang masuk basis adalah variabel x_2. Kolom variabel x_2 menjadi kolom pivot dan perhitungan untuk indeks (I) adalah :

$$I_{\min} = \left\{\frac{2}{1} = 2, \frac{3}{3} = 1, \frac{8}{6} = 1{,}33\right\}$$

Diperoleh $I_{\min} = 1$, maka variabel yang akan meninggalkan basis adalah variabel x_5 kemudian digantikan dengan variabel x_2. Angka kunci (elemen pivot) yang diperoleh = 3, maka tabel simpleks yang baru adalah :

Tabel 2.5 Tabel Simpleks untuk Solusi yang Baru (Iterasi 1)

C_j		8	9	4	0	0	0	Harga Jawab
Variabel Basis	Harga Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	9	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
x_6	0	3	0	-6	0	-2	1	2
z_j - c_j		-2	0	8	0	3	0	9

Dari tabel 2.5 tampak bahwa penyelesaian optimal belum tercapai di mana harga $z_j - c_j$ terkecil dari tabel di atas adalah -2, sehingga variabel yang masuk basis adalah variabel x_1. Kolom variabel x_1 menjadi kolom pivot dan perhitungan untuk indeks (I) adalah :

$$I_{\min} = \left\{ \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3;\ \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1{,}5;\ \frac{2}{3} = 0{,}67 \right\}$$

Diperoleh $I_{\min}$ = 0,67 maka variabel yang akan meninggalkan basis adalah variabel x_6 kemudian digantikan oleh variabel x_1. Angka kunci (elemen pivot) yang diperoleh = 3, maka tabel simpleks yang baru adalah :

Tabel 2.6 Tabel Simpleks untuk Solusi Akhir (Iterasi 2)

C_j		8	9	4	0	0	0	Harga Jawab
Variabel Basis	Harga Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$
x_2	9	0	1	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{7}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$
x_1	8	1	0	-2	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
z_j - c_j		0	0	4	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{31}{3}$

Dari tabel 2.6 tidak ada lagi $z_j - c_j < 0$, dengan demikian telah dicapai penyelesaian optimal yaitu :

$x_1 = \frac{2}{3} = 0{,}67$

$x_2 = \frac{5}{9} = 0{,}56$

$x_3 = 0$

$Z = 8\left(\frac{2}{3}\right) + 9\left(\frac{5}{9}\right) + 4(0) = 8(0{,}67) + 9(0{,}56) = 5{,}36 + 5{,}04 = 10{,}04$

2.2 Teori Himpunan *Fuzzy*

Himpunan A dikatakan crisp jika sebarang anggota-anggota yang ada pada himpunan A tersebut dikenakan suatu fungsi, akan bernilai 1 yakni jika $a \in$ A maka fungsi a = 1. Namun jika $a \notin$ A, maka nilai fungsi yang dikenakan pada a adalah 0. Nilai fungsi yang dikenakan pada sebarang anggota himpunan A dikatakan sebagai nilai keanggotaan. Jadi pada himpunan crisp, hanya mempunyai 2 nilai keanggotaan yaitu 0 dan 1. Tetapi pada himpunan fuzzy, nilai keanggotaan dari anggota-anggotanya tidak hanya 0 dan 1 saja. Tapi berada pada interval tertutup [0,1]. Dengan kata lain himpunan A dikatakan fuzzy selama fungsi : $A \rightarrow [0,1]$.

Misalkan diketahui klasifikasi harga dari sebuah barang sebagai berikut :

MURAH	harga < 35.000
STANDARD	35.000 ≤ harga ≤ 55.000
MAHAL	harga > 55.000

Dengan menggunakan pendekatan crisp, amatlah tidak adil untuk menetapkan harga STANDARD. Pendekatan ini bisa saja dilakukan untuk hal-hal yang bersifat diskontinu. Misalkan klasifikasi untuk harga 55.000 dan 56.000 sangat jauh berbeda, harga 55.000 termasuk STANDARD, sedangkan harga 56.000 sudah termasuk MAHAL. Demikian pula untuk kategori MURAH dan MAHAL. Barang yang seharga 34.000 dikatakan MURAH, sedangkan barang yang berharga 35.000 sudah TIDAK MURAH lagi. Barang yang berharga 55.000 termasuk STANDARD, barang yang berharga 55.000 lebih 1 rupiah sudah TIDAK STANDARD lagi. Dengan demikian pendekatan crisp ini sangat tidak cocok diterapkan pada hal-hal yang bersifat kontinu, missal harga barang. Selain itu, untuk menunjukkan suatu harga pasti termasuk STANDARD atau tidak termasuk STANDARD, dan menunjukkan suatu nilai kebenaran 0 dan 1, dapat digunakan nilai pecahan, dan menunjukkan 1 atau nilai yang dekat 1 untuk harga 45.000, kemudian pecahan menurun menuju ke 0 untuk harga di bawah 35.000 dan di atas 55.000.

Terkadang kemiripan antara keanggotaan *fuzzy* dengan probabilitas menimbulkan kerancuan. Keduanya memiliki interval [0,1], namun interpretasi nilainya sangat berbeda. Keanggotaan *fuzzy* memberikan suatu ukuran terhadap pendapat atau keputusan, sedangkan probabilitas mengindikasikan proporsi terhadap keseringan suatu hasil bernilai besar dalam jangka panjang. (Kusumadewi, 2004)

2.3.1 Fungsi Keanggotaan *Fuzzy*

Sebuah himpunan *fuzzy* A dari bilangan riil $\Re$ didefinisikan oleh fungsi keanggotaan (dinotasikan oleh A)

$$\mu_A : \Re \rightarrow [\,0,1\,]$$

Jika $x \in \Re$ maka $\mu_A(x)$ dikatakan sebagai derajat keanggotaan x dalam A. Himpunan *fuzzy* dalam $\Re$ disebut normal jika terdapat $x \in \Re$ sehingga $\mu_A(x) = 1$. Himpunan *fuzzy* A adalah himpunan *fuzzy* dari bilangan riil dengan normal, (*fuzzy*) convex dan fungsi keanggotaan yang kontinu dari penyokong yang terbatas.

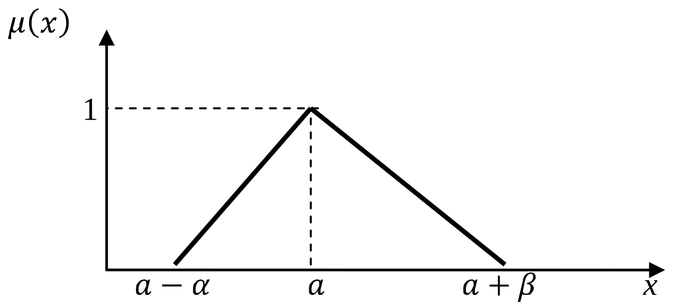
2.3.2 Bilangan *Fuzzy* Triangular

Sebuah himpunan *fuzzy* A disebut bilangan *fuzzy* triangular dengan nilai tengah a, sebelah kiri $\alpha > 0$, dalam $\Re$ disebut konvex jika A adalah unimodal (sebagai sebuah fungsi). Bilangan *fuzzy* dan sebelah kanan $\beta > 0$.

Fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut :

$$\mu_A\,(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & a - \alpha \le x \le a \\ 1 - \frac{x-a}{\beta} & a \le x \le a + \beta \\ 0 & lainnya \end{matrix} \right\} \tag{2.14}$$

Penyokong A adalah $(a - \alpha,\ a + \beta)$. Bilangan *fuzzy* triangular dengan nilai tengah a dilihat sebagai nilai kwantitas *fuzzy*. “ x dekat terhadap a “atau” x hampir sama dengan a”.



Gambar 2.1 Bilangan *Fuzzy* Triangular

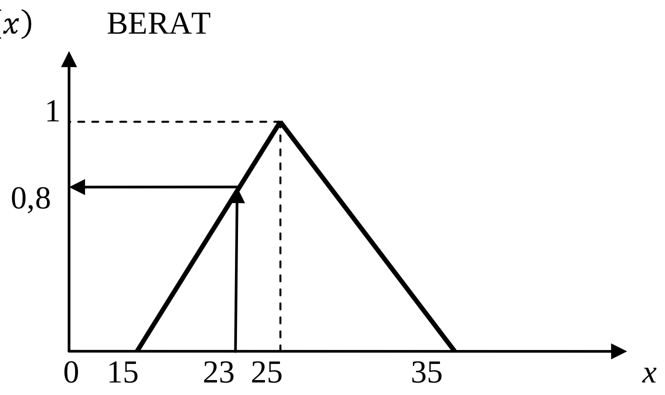
Contoh 2.2 :

Fungsi keanggotaan triangular untuk himpunan BERAT pada variabel berat badan (kg) seperti terlihat pada gambar 2.2.

$$\mu_{BERAT}\ [23] = \frac{(23-15)}{(25-15)}$$

$$= \frac{8}{10}$$

$$= 0{,}8$$



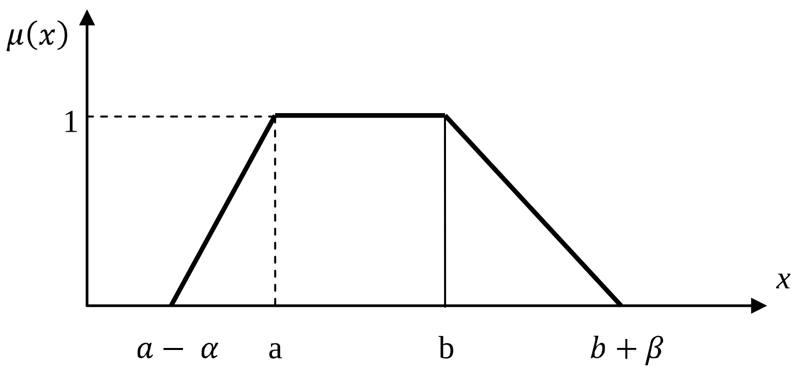
Gambar 2.2 Himpunan *Fuzzy* : BERAT (Kurva Triangular)

2.1.3. Bilangan *Fuzzy* Trapezoidal

Sebuah himpunan *fuzzy* A disebut bilangan *fuzzy* trapezoidal dengan interval toleransi [a,b], sebelah kiri α dan kanan β. Fungsi keanggotaannya adalah sebagai berikut :

$$\mu_A\,(x) = \left\{\begin{array}{cc} 1-\frac{a-x}{\alpha} & a-\alpha \le x \le a \\ 1 & a \le x \le b \\ 1-\frac{x-a}{\beta} & a \le x \le b+\beta \\ 0 & lainnya \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

Penyokong A adalah $(a-\ \alpha,\ a+\beta)$. Bilangan *fuzzy* trapezoidal dapat dilihat sebagai nilai kwantitas *fuzzy*. " *x* mendekati pada interval [a,b] ".



Gambar 2.3 Bilangan *Fuzzy* Trapezoidal

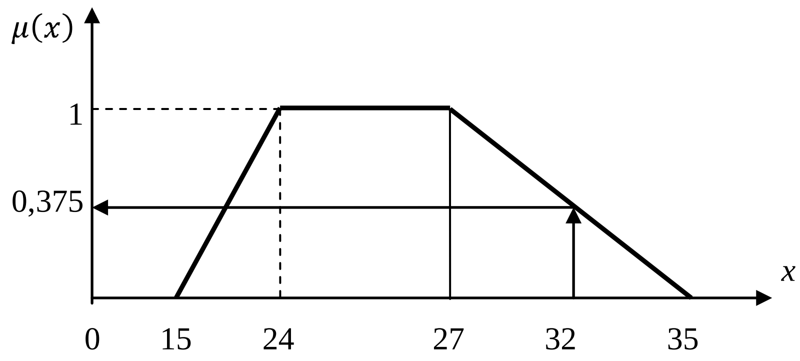
Contoh 2.3 :

Fungsi keanggotaan trapezodial untuk himpunan BERAT pada variabel berat badan (kg) terlihat pada gambar 2.4.

$$\mu_{BERAT}\ [32] = \frac{(35-32)}{(35-27)}$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$= 0{,}375$$

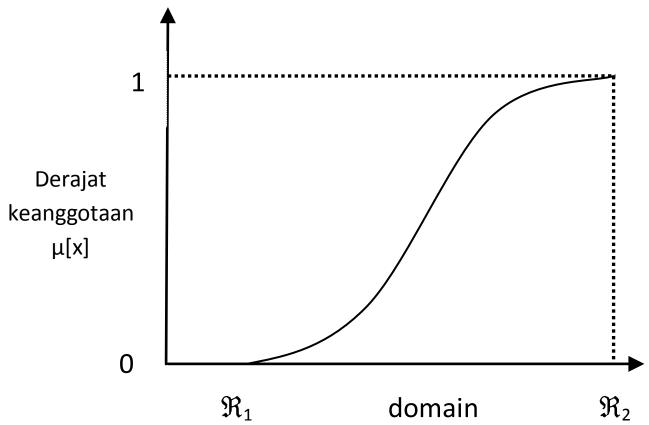


Gambar 2.4 Himpunan *Fuzzy* : BERAT (Kurva Trapezoidal)

2.1.4. Bilangan *Fuzzy* Kurva-S

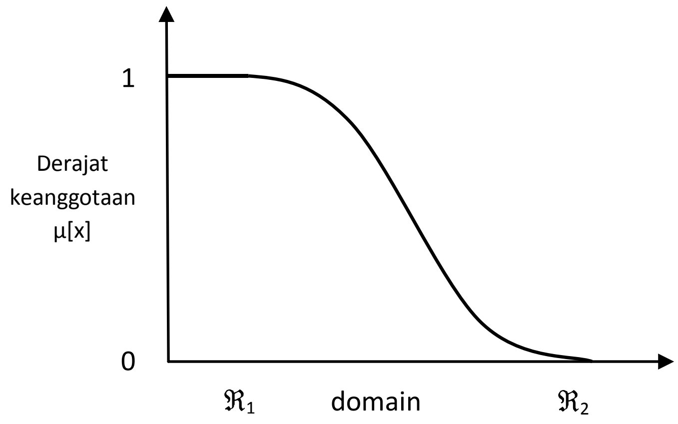
Kurva PERTUMBUHAN dan PENYUSUTAN merupakan kurva-S atau sigmoid yang berhubungan dengan kenaikan dan penurunan permukaan secara tak linier.

Kurva-S untuk PERTUMBUHAN akan bergerak dari sisi paling kiri (nilai keanggotaan = 0) ke sisi paling kanan (nilai keanggotaan = 1). Fungsi keanggotaannya akan bertumpu pada 50% nilai keanggotaannya yang sering disebut dengan titik infleksi (gambar 2.5).



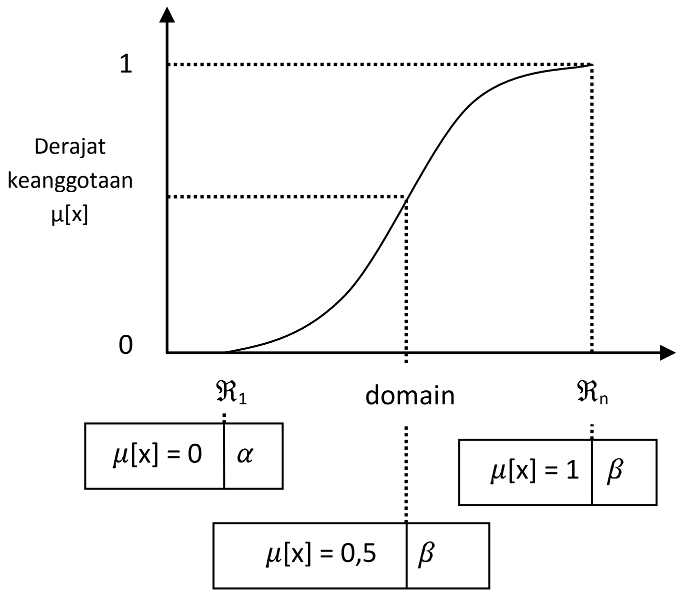
Gambar 2.5 Bilangan *Fuzzy* Kurva-S : PERTUMBUHAN

Kurva-S untuk PENYUSUTAN akan bergerak dari sisi paling kanan (nilai keanggotaan = 1) ke sisi paling kiri (nilai keanggotaan = 0) seperti terlihat pada gambar 2.6.



Gambar 2.6 Bilangan *Fuzzy* Kurva-S : PENYUSUTAN

Kurva-S didefinisikan dengan menggunakan 3 parameter, yaitu : nilai keanggotaan nol (α), nilai keanggotaan (γ), dan titik infleksi atau crossover (β) yaitu titik yang memiliki domain 50% benar. Gambar 2.7 menunjukkan karakteristik kurva-S dalam bentuk skema.



Gambar 2.7 Karakteristik Fungsi Kurva-S

Fungsi keanggotaan pada kurva PERTUMBUHAN adalah :

$$S(x;\alpha;\beta;\gamma) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ 2((x-\alpha)/(\gamma-\alpha))^2 & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1-2((\gamma-x)/(\gamma-\alpha))^2 & \beta \leq x \leq \gamma \\ 1 & x \geq \gamma \end{cases}$$

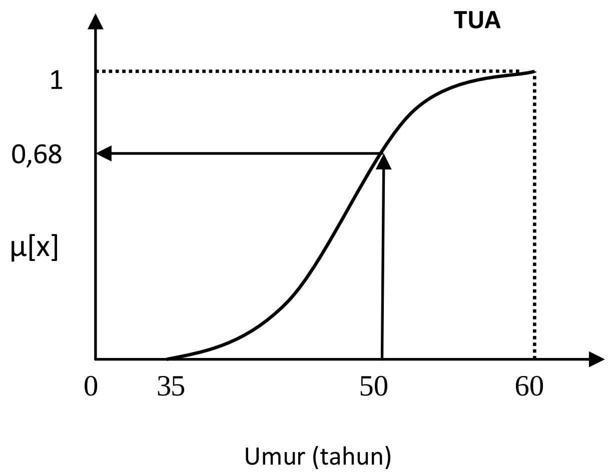
Contoh 2.4 :

Fungsi keanggotaan untuk himpunan TUA pada variabel umur seperti terlihat pada gambar 2.7.

μ_{TUA} [50] $= 1 - 2((60\text{-}50) / (60\text{-}35))^2$

$= 1 - 2(10 / 25)^2$

$= 0{,}68$



Gambar 2.8 Bilangan *Fuzzy* Kurva-S : TUA

Sedangkan fungsi keanggotaan pada kurva PENYUSUTAN adalah :

$$S(x;\alpha;\beta;\gamma) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ 1-2((x-\alpha)/(\gamma-\alpha))^2 & \alpha \leq x \leq \beta \\ 2((\gamma-x)/(\gamma-\alpha))^2 & \beta \leq x \leq \gamma \\ 1 & x \geq \gamma \end{cases}$$

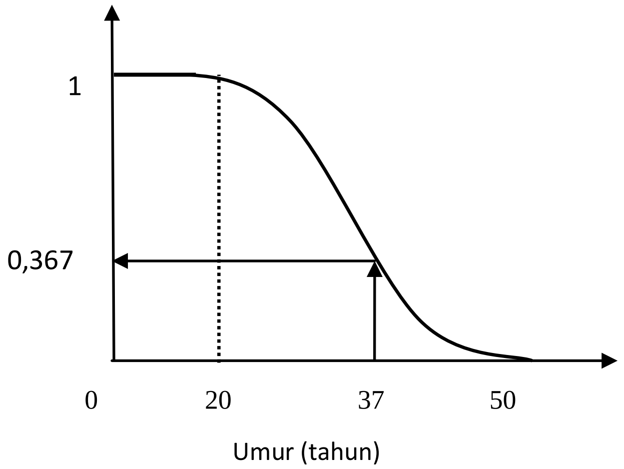
Contoh 2.5 :

Fungsi keanggotaan untuk himpunan MUDA pada variabel umur seperti terlihat pada gambar 2.8.

μ_{TUA} [50] = 2((50-37) / (50-20))^2

= 2(13 / 30)^2

= 0,376



Gambar 2.9 Bilangan *Fuzzy* Kurva-S : MUDA

2.3 *Multi Objective Fuzzy Linear Programming*

Multi objective linear programming adalah metode optimasi dengan beberapa fungsi tujuan yang tunduk pada beberapa batasan. Solusi permasalahan ini diperoleh seperti penyelesaian optimasi dengan 1 fungsi tujuan.

Selama ini ada 2 cara untuk menyelesaikan *multi objective linear programming*, yaitu :

1. **Metode penjualan terbobot**

   Misalkan untuk permasalahan :

Max f_1;

Max f_2;

…

Max f_n.

Dikombinasikan menjadi :

Max : $w_1 f_1 + w_2 f_2 + \ldots + w_n f_n$.

2. **Lexicographics ordering method.**

   Pertama kali obyek-obyek diurutkan berdasarkan pentingnya. Obyek pertama diselesaikan sebagai :

   F_1 = max {$f_1(x)$ dengan batasan yang telah diberikan}

   Kemudian, untuk setiap $i > 1$ diselesaikan F_i = max {$f_i(x)$, $f_k(x) = F_k$ untuk i = 1, 2, …,i-1}. Metode ini akan cocok jika sebelumnya telah diketahui derajat pentingnya tiap-tiap fungsi tujuan.

Metode lain yang dapat digunakan adalah dengan menggunakan Himpunan *Fuzzy*. Dengan menggunakan metode ini, tidak perlu menggunakan kalibrasi bobot atau melakukan seleksi terhadap derajat pentingnya objek. Metode ini hanya menggunakan preferensi (pilihan) khusus pada tujuan yang dapat dimodelkan dengan menggunakan fungsi-fungsi keanggotaan *fuzzy*.