

Modelowanie wielokryterialnych systemów decyzyjnych z wykorzystaniem miar uwzględniających niepewność

Barbara Pękała

Uniwersytet Rzeszowski, Kolegium Nauk Przyrodniczych,
Instytut Informatyki

2023

Zajmiemy się sytuacją, gdy decydent określił skończony, m -elementowy zbiór wariantów decyzyjnych $\{a_1, \dots, a_m\}$ oraz ustalił n -elementowy zbiór kryteriów oceny $\{f_1, \dots, f_n\}$.

Wtedy decydent dąży do jednego z wymienionych poniżej celów:

- wyboru wariantu najlepiej odpowiadającego jego preferencjom (problem wyboru),
- uszeregowania rozpatrywanych wariantów decyzyjnych od najlepszego do najgorszego (problem szeregowania),
- przyporządkowania rozpatrywanych wariantów do jednej z góry predefiniowanych klas (problem klasyfikacji wielokryterialnej).

Ocena wariantu decyzyjnego a_i ze względu na kryterium f_k jest przeprowadzana za pomocą wartości rozmytej.

Motywacja dla wykorzystania metod i teorii przedziałowych zbiorów rozmytych w konstruowaniu modeli decyzyjnych

- Niepewność jest poważnym problemem w wielu procesach decyzyjnych.
- Niedokładności/nieścistości można podzielić na obiektywne (spowodowane złożonością lub charakterem zjawiska) lub subiektywne (spowodowane osobistą opinią lub interpretacją eksperta) lub spowodowane niską jakością informacji, np. z powodu niekompletności danych.
- Dzięki wykorzystaniu metod i teorii przedziałowych zbiorów rozmytych możliwe jest konstruowanie modeli, które przy właściwym uwzględnieniu niepewności zwiększają efektywność podejmowania decyzji.

Zbiór rozmyty A na przestrzeni $X \neq \emptyset$ określony jako zbiór uporządkowanych par $A = (x, M_A(x)) : x \in X$, gdzie $M_A : X \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją przynależności, a $M_A(x)$ oznacza stopień przynależności elementu x do zbioru A .

Oznacza on zbiór rozmyty w którym $\mu_A(x_i) = a_i$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ oraz $\mu_A(x) = 0$ dla pozostałych $x \in X$.

Rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych w danym uniwersum X oznaczamy przez $FS(X)$.

- Przedziałowe zbiory rozmyte (ang. Interval-valued fuzzy sets)
- Intuicjonistyczne zbiory rozmyte (ang. Intuitionistic fuzzy sets)
- L-zbiory rozmyte (ang. L-fuzzy sets)
- i inne

Przez L' oznaczamy rodzinę wszystkich przedziałów zawartych w $[0,1]$. Do reprezentacji dowolnego przedziałowego zbioru rozmytego A na X można użyć kraty L' , gdzie

$$L' = \{[\underline{x}, \bar{x}] : \underline{x}, \bar{x} \in [0, 1], \underline{x} \leq \bar{x}\}. \quad (1)$$

Skupmy się teraz na tym jak porównać ze sobą dowolne przedziałowe zbiory rozmyte $A(x)$ i $B(x)$, gdzie dla dowolnego $x \in X$, przyjmijmy uproszczoną notację:

$$A(x) = [\underline{A}(x), \bar{A}(x)] = [\underline{a}, \bar{a}], \quad B(x) = [\underline{B}(x), \bar{B}(x)] = [\underline{b}, \bar{b}]. \quad (2)$$

Relacje porządkujące w L' (zbiore przedziałów)

Dobrze znanym i często używanym do porównywania wartości przedziałowych jest porządek częściowy w L' i ma on postać

$$[\underline{a}, \bar{a}] \leq_2 [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow \underline{a} \leq \underline{b} \text{ i } \bar{a} \leq \bar{b}, \quad (3)$$

gdzie w szczególności **mamy**

$$[\underline{a}, \bar{a}] <_2 [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow [\underline{a}, \bar{a}] \leq_2 [\underline{b}, \bar{b}] \text{ i } (\underline{a} < \underline{b} \text{ lub } \bar{a} < \bar{b}).$$

Operacje sumy (*ang. join*) i iloczynu (*ang. meet*) definiuje się następująco:

$$[\underline{a}, \bar{a}] \vee [\underline{b}, \bar{b}] = [\max(\underline{a}, \underline{b}), \max(\bar{a}, \bar{b})],$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] \wedge [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\underline{a}, \underline{b}), \min(\bar{a}, \bar{b})].$$

Zauważmy, że struktura $(L^I; \vee; \wedge)$ jest ponadto kratą zupełną, z częściowym porządkiem \leq_2 i z największym elementem oraz elementem najmniejszym $1_{L^I} = [1, 1]$ i $0_{L^I} = [0, 0]$, odpowiednio.

Definition (BUSTINCE 2013)

Porządek \leq_{Adm} w L^I nazywany porządkiem dopuszczalnym jeśli jest on liniowy i dla wszystkich $x, y \in L^I$, takich, że $x \leq_2 y$, wtedy $x \leq_{Adm} y$.

Proposition (BUSTINCE 2013)

Niech $B_1, B_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ będą dwiema ciągłymi agregacjami takimi, że dla wszystkich $x = [\underline{x}, \bar{x}], y = [\underline{y}, \bar{y}] \in L^I$, zachodzą równości $B_1(\underline{x}, \bar{x}) = B_1(\underline{y}, \bar{y})$ i $B_2(\underline{x}, \bar{x}) = B_2(\underline{y}, \bar{y})$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = y$. Jeśli $x \leq_{B_{1,2}} y$ wtedy i tylko wtedy gdy

$B_1(\underline{x}, \bar{x}) < B_1(\underline{y}, \bar{y})$ lub $(B_1(\underline{x}, \bar{x}) = B_1(\underline{y}, \bar{y}) \text{ i } B_2(\underline{x}, \bar{x}) \leq B_2(\underline{y}, \bar{y}))$,
wtedy $\leq_{B_{1,2}}$ jest porządkiem dopuszczalnym w L^I .

Example

Oto szczególne przypadki dopuszczalnych porządków liniowych w L^I :

- porządek Xu i Yagera

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{XY} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \underline{x} + \bar{x} < \underline{y} + \bar{y} \text{ lub}$$

$$(\bar{x} + \underline{x} = \bar{y} + \underline{y} \text{ i } \bar{x} - \underline{x} \leq \bar{y} - \underline{y}),$$

- pierwszy porządek leksykograficzny (pierwsza zmienna)

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{Lex1} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \underline{x} < \underline{y} \text{ lub } (\underline{x} = \underline{y} \text{ i } \bar{x} \leq \bar{y}),$$

- drugi porządek leksykograficzny (drugiej zmienna)

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{Lex2} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \bar{x} < \bar{y} \text{ lub } (\bar{x} = \bar{y} \text{ i } \underline{x} \leq \underline{y})$$

- porządek $\alpha\beta$, $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$ i $K_\alpha : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$,
 $K_\alpha(x, y) = \alpha x + (1 - \alpha)y$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{\alpha\beta} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow K_\alpha(\underline{x}, \bar{x}) < K_\alpha(\underline{y}, \bar{y}) \text{ lub} \\ (K_\alpha(\underline{x}, \bar{x}) = K_\alpha(\underline{y}, \bar{y}) \text{ i } K_\beta(\underline{x}, \bar{x}) \leq K_\beta(\underline{y}, \bar{y})).$$

Porządki epistemiczne. Konieczności i możliwości

- Porządek konieczności - pesymistyczny (*ang. necessary*) - relacja koniunktywna, gdzie jeden przedział zawiera zbiór wartości prawdziwych każdej zmiennej mniejszych lub równych wszystkim wartościom prawdziwym z drugiego przedziału

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{nec} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \bar{x} \leq \underline{y}.$$

- Porządek możliwości - optymistyczny (*ang. possible*) - odpowiada epistemicznemu (dysjunktywnemu) podejściu:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{pos} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \underline{x} \leq \bar{y},$$

Jeśli $[\underline{x}, \bar{x}]$ jest nieprecyzyjnym opisem zmiennej x , a $[\underline{y}, \bar{y}]$ jest nieprecyzyjnym opisem zmiennej y , to $[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{pos} [\underline{y}, \bar{y}]$ oznacza, że jest możliwe, iż prawdziwa wartość x jest mniejsza lub równa od prawdziwej wartości y . Możemy zauważyć, że

$$x \leq_{nec} y \Rightarrow x \leq_2 y \Rightarrow x \leq_{pos} y.$$

Operacje w rachunku przedziałowym

Przejdźmy teraz do pojęcia funkcji agregacji w L^I . Rozważamy początkowo agregację zarówno względem \leq_2 , jak i \leq_{Adm} . W dalszej części pracy używamy notacji \leq zarówno dla częściowego, jak i dopuszczalnego porządku liniowego, przy czym 0_{L^I} i 1_{L^I} oznaczają odpowiednio minimalny i maksymalny element w L^I .

Agregacje zgodne z porządkiem częściowym lub liniowym

Definition (ZAPATA 2017, KOMORNIKOVA 2011)

Operacja $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ nazywana przedziałową funkcją agregacji, jeśli jest rosnąca względem porządku \leq (częściowego lub liniowego) i

$$\mathcal{A}(\underbrace{[0, 0], \dots, [0, 0]}_{n \times}) = [0, 0], \quad \mathcal{A}(\underbrace{[1, 1], \dots, [1, 1]}_{n \times}) = [1, 1].$$

Specjalną klasą przedziałowych funkcji agregujących jest reprezentowalna funkcja agregacji.

Definition (Deschrijver 2011)

Przedziałowa funkcja agregacji $\mathcal{A} : (L')^n \rightarrow L'$ nazywa się reprezentowalną, jeśli istnieją agregacje $A_1, A_2 : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ taka, że

$$\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = [A_1(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n), A_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)]$$

dla wszystkich $x_1, \dots, x_n \in L'$, pod warunkiem, że

$$A_1(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \leq A_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Example

Operacje kratowe \vee i \wedge na L^I (reprezentowalne funkcje agregacji):

$$[\underline{x}, \bar{x}] \vee [\underline{y}, \bar{y}] = [\max(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})],$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \wedge [\underline{y}, \bar{y}] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})].$$

Produkt reprezentowalny:

$$\mathcal{A}_{prod}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = [\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}].$$

Reprezentowalna średnia arytmetyczna:

$$\mathcal{A}_{mean}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = \left[\frac{\underline{x} + \underline{y}}{2}, \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right].$$

Reprezentowalna średnia geometryczna:

$$\mathcal{A}_{gmean}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = [\sqrt{\underline{x}\underline{y}}, \sqrt{\bar{x}\bar{y}}].$$

Example

Reprezentowalna średnia harmoniczna:

$$\mathcal{A}_{hmean}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = \begin{cases} [0, 0], & \text{jeśli } x = y = [0, 0], \\ [\frac{2\underline{x}\underline{y}}{\underline{x}+\underline{y}}, \frac{2\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}], & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Reprezentowalna średnia kwadratowa:

$$\mathcal{A}_{powermean}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = [\sqrt{\frac{\underline{x}^2 + \underline{y}^2}{2}}, \sqrt{\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2}}].$$

Reprezentowalność nie jest jedynym możliwym sposobem konstruowania przedziałowych funkcji agregujących względem porządku \leq_2 lub \leq_{Adm} .

Example

Niech $A : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją agregującą.

Funkcja $\mathcal{A}_1 : (L')^2 \rightarrow L'$, gdzie

$$\mathcal{A}_1(x, y) = \begin{cases} [1, 1], & \text{gdy } (x, y) = ([1, 1], [1, 1]), \\ [0, A(\underline{x}, \overline{y})], & \text{w innym przypadku,} \end{cases}$$

jest niereprezentowalną funkcją agregacji przedziałowej zgodną z \leq_2 .

Example

Funkcja $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 : (L')^2 \rightarrow L'$, gdzie

$$\mathcal{A}_2(x, y) = \begin{cases} [1, 1], & \text{gdy } (x, y) = ([1, 1], [1, 1]) \\ [0, A(\underline{x}, \underline{y})], & \text{w innym przypadku,} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_3(x, y) = \begin{cases} [0, 0], & \text{gdy } (x, y) = ([0, 0], [0, 0]) \\ [A(\underline{x}, \underline{y}), 1], & \text{w innym przypadku,} \end{cases}$$

jest niereprezentowalną funkcją agregacji przedziałowej zgodną z \leq_{Lex1} .

Example

Funkcja $\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5 : (L')^2 \rightarrow L'$, gdzie

$$\mathcal{A}_4(x, y) = \begin{cases} [1, 1], & \text{gdy } (x, y) = ([1, 1], [1, 1]) \\ [0, A(\bar{x}, \bar{y})], & \text{w innym przypadku,} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_5(x, y) = \begin{cases} [0, 0], & \text{gdy } (x, y) = ([0, 0], [0, 0]) \\ [A(\bar{x}, \bar{y}), 1], & \text{w innym przypadku,} \end{cases}$$

jest niereprezentowalną funkcją agregacji przedziałowej zgodną z \leq_{Lex2} .

IV-OWA Operator

Często dyskutowanym w literaturze i stosowanym w praktyce jest operator OWA wprowadzony przez Yagera 1988. Koncepcja OWA została rozszerzona do przedziałowych zbiorów

Definition

Niech \leq będzie dopuszczalnym porządkiem na L^I , a $w = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$, przy czym $w_1 + \dots + w_n = 1$. Przedziałowy operator uśredniania ważonego uporządkowanego IVOWA (*ang. Interval-Valued Ordered Weighted Averaging Operator*) związany z \leq i w jest odwzorowaniem $IVOWA_{\leq, w} : (L^I)^n \rightarrow L^I$, przez

$$IVOWA_{\leq, w}([\underline{x}_1, \overline{x}_1], \dots, [\underline{x}_n, \overline{x}_n]) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot [\underline{x}_i, \overline{x}_i],$$

gdzie $[\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $i = 1, \dots, n$, oznacza i -tą największą wartość wejść w odniesieniu do porządku \leq , i

$$w \cdot [\underline{x}, \overline{x}] = [w\underline{x}, w\overline{x}], [\underline{x}_1, \overline{x}_1] + [\underline{x}_2, \overline{x}_2] = [\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \overline{x}_1 + \overline{x}_2].$$

Remark

Operator $IVOWA_{\leq_{\alpha\beta}, w}$ jest agregacją w L^I z uwzględnieniem porządku $\leq_{\alpha\beta}$.

W szczególności,

\mathcal{A}_{mean} jest funkcją agregacji w odniesieniu do $\leq_{\alpha\beta}$.

Uogólniając funkcja

$$\mathcal{A}_{\alpha}(x, y) = [\alpha \underline{x} + (1 - \alpha) \underline{y}, \alpha \bar{x} + (1 - \alpha) \bar{y}]$$

jest przedziałową funkcją agregacji w L^I względem \leq_{Lex1} , \leq_{Lex2} i \leq_{XY} for $x, y \in L^I$ i $\alpha \in [0, 1]$.

Kolejne interesujące klasy agregacji są klasy agregacji zgodne z porządkiem optymistycznym (*ang. possible*) lub pesymistycznym (*ang. necessary*).

Definition

Przedziałowa funkcja agregacji $\mathcal{A} : (L')^n \rightarrow L'$ pos-agregacją (*ang. possible aggregation*) jeśli

$$\forall_{x_i, y_i \in L'} x_i \leq_{pos} y_i \Rightarrow \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) \leq_{pos} \mathcal{A}(y_1, \dots, y_n)$$

i \mathcal{A} posiada warunki brzegowe $1_{L'} = [1, 1]$, $0_{L'} = [0, 0]$.

Poniżej przedstawiono kilka przykładów:

$$\mathcal{A}_{pos1}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = \begin{cases} [1, 1], & \text{jeśli } x = y = [1, 1], \\ \left[\frac{y \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}}{2}, \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right], & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{pos2}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = \begin{cases} [1, 1], & \text{jeśli } x = y = [1, 1], \\ \left[\frac{\underline{x} \frac{\underline{y} + \bar{y}}{2}}{2}, \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right], & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{pos3}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = \begin{cases} [1, 1], & \text{jeśli } x = y = [1, 1], \\ [0, A(\bar{x}, \bar{y})], & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{pos4}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = \begin{cases} [0, 0], & \text{jeśli } x = y = [0, 0], \\ [A(\underline{x}, \underline{y}), 1], & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie A w agregacjach \mathcal{A}_{pos3} i \mathcal{A}_{pos4} to np. średnia geometryczna lub potęgowa.

Definition

Przedziałowa funkcja agregacji $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ nec-agregacją (*ang. necessary aggregation*) jeśli

$$\forall_{x_i, y_i \in L^I} x_i \leq_{nec} y_i \Rightarrow \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) \leq_{nec} \mathcal{A}(y_1, \dots, y_n)$$

i \mathcal{A} posiada warunki brzegowe $1_{L^I} = [1, 1]$, $0_{L^I} = [0, 0]$.

Przykłady nec-agregacji:

$$\mathcal{A}_{nec1}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = \left[\frac{\underline{x} + \underline{y}}{2}, \max \left(\frac{\underline{x} + \bar{y}}{2}, \frac{\bar{x} + \underline{y}}{2} \right) \right],$$

$$\mathcal{A}_{nec2}([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) = \left[\min \left(\frac{\bar{x} + \underline{y}}{2}, \frac{\underline{x} + \bar{y}}{2} \right), \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right].$$

Przedstawmy definicję przedziałowej negacji rozmytej.

Definition

Przedziałowa negacja rozmyta jest funkcją $N : L^I \rightarrow L^I$ malejącą zgodnie z porządkiem \leq i z $N_{IV}(1_{L^I}) = 0_{L^I}$ i $N_{IV}(0_{L^I}) = 1_{L^I}$. Przedziałową negację rozmytą uważa się za **inwolutywną** (silną), jeżeli jest ona $N_{IV}(N_{IV}(x)) = x$ dla każdego $x \in L^I$.

Example

Funkcję $N_{IV}(x) : L^I \rightarrow L^I$ określony przez

$$N_{IV}([\underline{x}, \bar{x}]) = [1 - \bar{x}^2, 1 - \underline{x}^2]$$

jest przedziałową negacją rozmytą w odniesieniu do porządku \leq_2 .

Example

$$N_{XY}([\underline{x}, \bar{x}]) = \begin{cases} [1, 1], & \text{jeśli } x = [0, 0], \\ [0, 0], & \text{jeśli } x = [1, 1], \\ \left[\frac{1-x}{2}, 1 - \frac{\bar{x}}{2}\right], & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

jest przedziałową negacją rozmytą zgodną z porządkami \leq_{XY} i $\leq_{\alpha\beta}$.

$$N_{lex1}([\underline{x}, \bar{x}]) = \begin{cases} [0, 0], & \text{jeśli } x = [1, 1], \\ [1 - \underline{x}, 1], & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

jest przedziałową negacją rozmytą zgodną z porządkiem \leq_{lex1} .

$$N_{lex2}([\underline{x}, \bar{x}]) = \begin{cases} [1, 1], & \text{jeśli } x = [0, 0], \\ [0, 1 - \bar{x}], & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

jest przedziałową negacją rozmytą zgodną z porządkiem \leq_{lex2} .

Definition

Optymistyczna przedziałowa negacja rozmyta jest funkcją $N : L' \rightarrow L'$ malejącą zgodnie z porządkiem \leq_{pos} i z $N_{IV}(1_{L'}) = 0_{L'}$ i $N_{IV}(0_{L'}) = 1_{L'}$.

Definition

Pesymistyczna przedziałowa negacja rozmyta jest funkcją $N : L' \rightarrow L'$ malejącą zgodnie z porządkiem \leq_{nec} i z $N_{IV}(1_{L'}) = 0_{L'}$ i $N_{IV}(0_{L'}) = 1_{L'}$.

Przykłady negacji zgodnych z różnymi porządkami:

$$N_1(x) = [1 - \bar{x}, 1 - \underline{x}]$$

jest zgodna z następującymi porządkami: $\leq_2, \leq_{pos}, \leq_{nec}$.

$$N_2(x) = [1 - \bar{x}^2, 1 - \underline{x}^2]$$

jest zgodna z następującymi porządkami: $\leq_2, \leq_{pos}, \leq_{nec}$.

$$N_3(x) = \begin{cases} [1, 1], & \text{jeśli } x = [0, 0], \\ [0, 1 - \bar{x}], & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

jest zgodna z następującymi porządkami: $\leq_2, \leq_{pos}, \leq_{lex2}$.

$$N_4(x) = \begin{cases} [0, 0], & \text{jeśli } x = [1, 1], \\ [1 - \underline{x}, 1], & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

jest zgodna z następującymi porządkami: \leq_{pos}, \leq_{lex1} .

Definition

Niech \leq będzie porządkiem liniowym lub częściowym w L' .
Przedziałową implikacją zgodną z \leq jest funkcja $I_{IV} : (L')^2 \rightarrow L'$ spełniająca własności:

- (i) I_{IV} jest malejąca względem pierwszej zmiennej i rosnąca względem drugiej dla \leq ,
- (ii) $I_{IV}(0_{L'}, 0_{L'}) = I_{IV}(1_{L'}, 1_{L'}) = 1_{L'}$,
- (iii) $I_{IV}(1_{L'}, 0_{L'}) = 0_{L'}$.

Theorem

Niech $\mathcal{A} : (L')^2 \rightarrow L'$ będzie agregacją przedziałową i niech N_{IV} będzie negacją przedziałową w L' , obie zgodne z \leq , $x, y \in L'$.

1. Jeśli $\mathcal{A}(1_{L'}, 0_{L'}) = \mathcal{A}(0_{L'}, 1_{L'}) = 0_{L'}$, to funkcja $I_{IV} : (L')^2 \rightarrow L'$ określona przez

$$I_{IV}(x, y) = N_{IV}(\mathcal{A}(x, N_{IV}(y)))$$

jest przedziałową implikacją rozmytą zgodną z \leq .

2. Jeśli $\mathcal{A}(1_{L'}, 0_{L'}) = \mathcal{A}(0_{L'}, 1_{L'}) = 1_{L'}$, to funkcja $I_{IV} : (L')^2 \rightarrow L'$ określona przez

$$I_{IV}(x, y) = \mathcal{A}(N_{IV}(x), y)$$

jest przedziałową implikacją rozmytą zgodną z \leq .

Przedziałowe zbiory rozmyte

Koncepcja przedziałowego zbioru rozmytego pojawiła się w 1975. Sambuc w swojej pracy (1975) nazwał ją jako H-zbiór rozmyty (H-fuzzy set) natomiast Zadeh w tym samym czasie zaproponował pojęcie przedziałowego zbioru rozmytego w swojej pracy (Zadeh 1975) jako szczególny przypadek zbiorów rozmytych typu 2.

Definition

Przedziałowym zbiorem rozmytym (IVFS) A w X jest odwzorowanie $A : X \rightarrow L'$ takie, że $A(x) = [\underline{A}(x), \overline{A}(x)] \in L'$ gdzie $x \in X$.

$$A \cup B = \{ \langle x, [\max\{\underline{A}(x), \underline{B}(x)\}, \max\{\overline{A}(x), \overline{B}(x)\}] \rangle : x \in X \},$$

$$A \cap B = \{ \langle x, [\min\{\underline{A}(x), \underline{B}(x)\}, \min\{\overline{A}(x), \overline{B}(x)\}] \rangle : x \in X \},$$

$$A^N = \{ \langle x, [N(\overline{A}(x)), N(\underline{A}(x))] \rangle : x \in X \},$$

gdzie N jest negacją rozmytą, w przypadku negacji standardowej mamy

$$A^c = \{ \langle x, [1 - \overline{A}(x), 1 - \underline{A}(x)] \rangle : x \in X \}.$$

$(IVFS(X), \cap, \cup)$ tworzy kratę rozdzielczą spełniającą prawa de Morgana.

Agregacja przedziałowych zbiorów rozmytych:

$$\mathcal{A}(A, B) = \{ \langle x, \mathcal{A}(A, B)(x) \rangle : x \in X \}.$$

Dla $\mathcal{A} = [A_1, A_2]$ mamy

$$\mathcal{A}(A, B) = \{ \langle x, [A_1(\underline{A}(x), \underline{B}(x)), A_2(\overline{A}(x), \overline{B}(x))] \rangle : x \in X \}.$$

Definition

Przedziałową relacją rozmytą na X, Y jest funkcja $R : X \times Y \rightarrow L'$ taka, że

$$R(x, y) = [\underline{R}(x, y), \overline{R}(x, y)] \text{ dla } (x, y) \in X \times Y,$$

gdzie $\underline{R} \leq \overline{R}, \underline{R}, \overline{R} : X \times Y \rightarrow [0, 1]$.

Rodzinę przedziałowych relacji rozmytych na X, Y oznaczmy $IVFR(X \times Y)$, lub $IVFR(X)$ gdy $X = Y$.

W rodzinie $IVFR(X \times Y)$ możemy rozważać częściowy porządek \leq_{IV} , zdefiniowany następująco:

$$R \leq_{IV} S \Leftrightarrow \underline{R}(x, y) \leq \underline{S}(x, y) \text{ i } \overline{R}(x, y) \leq \overline{S}(x, y) \quad (4)$$

dla $R, S \in IVFR(X \times Y)$ i $x \in X, y \in Y$.

Uogólnione złożenie przedziałowych zbiorów rozmytych

Dla dowolnych, niepustych zbiorów X, Y, Z zdefiniowanych dla $P \in IVFR(X \times Y)$, $R \in IVFR(Y \times Z)$ i \mathcal{B} operację przedziałową możemy rozpatrywać:

- $\sup - \mathcal{B}$ kompozycja relacji P i R oznaczane jest przez $P \circ_{\vee \mathcal{B}} R \in IVFR(X \times Z)$, gdzie

$$(P \circ_{\vee \mathcal{B}} R)(x, z) = \sup_{y \in Y} \mathcal{B}(P(x, y), R(y, z)).$$

- $\inf - \mathcal{B}$ kompozycja relacji P i R oznaczane jest przez $P \circ_{\wedge \mathcal{B}} R \in IVFR(X \times Z)$, gdzie

$$(P \circ_{\wedge \mathcal{B}} R)(x, z) = \inf_{y \in Y} \mathcal{B}(P(x, y), R(y, z)).$$

Ponadto, bardziej ogólne w odniesieniu do operacji, ale dla zbiorów skończonych $X, Y, Z \neq \emptyset$, Przedziałowe agregacje $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ oraz operacja $\mathcal{B} : (L^I)^2 \rightarrow L^I$ w odniesieniu do tego samego porządku \leq otrzymujemy $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ układ relacji P i R , oznaczany przez $P \circ_{\mathcal{AB}} R \in IVFR(X \times Z)$, gdzie

$$(P \circ_{\mathcal{AB}} R)_{ik} = \mathcal{A}_{j=1}^n (\mathcal{B}(P_{ij}, R_{jk})).$$

Opracowanie algorytmu wnioskowania przybliżonego

- Wykorzystanie
uogólnionego złożenia przedziałowych relacji rozmytych,
idei uogólnionej reguły odrywania w warunkach niepewności
w zagadnieniu prognozowania ryzyka wystąpienia u pacjenta problemu
sercowo–naczyniowego w najbliższych 10 latach.

*B. Pękała, Uncertainty Data in Interval-Valued Fuzzy Set Theory. PROPERTIES, ALGORITHMS AND APPLICATIONS, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, 2018

Algorytm wielowartościowego wnioskowania przybliżonego z niepewnością

R_1 : *Jezeli x jest \mathcal{D}_1 to y jest \mathcal{E}_1*

R_2 : *Jezeli x jest \mathcal{D}_2 to y jest \mathcal{E}_2*

.....

R_n : *Jezeli x jest \mathcal{D}_n to y jest \mathcal{E}_n*

fakt : x jest \mathcal{D}'

y jest \mathcal{E}' ,

gdzie $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n, \mathcal{D}' \in IVFS(X)$, $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}' \in IVFS(Y)$.

Dane wejściowe: Przestanki $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n, \mathcal{D}' \in IVFS(X)$; Wnioski $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \in IVFS(Y)$; Przedziałowe funkcje agregacji $\mathcal{A}, \mathcal{A}_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Dane wyjściowe: \mathcal{E}' .

Dla każdej reguły budowana jest powiązana przedziałowa relacja rozmyta R_i , gdzie $R_i \in IVFR(X \times Y)$,

$$R_i(x, y) = \mathcal{A}_2(N_{IV}(\mathcal{D}_i(x)), \mathcal{E}_i(y))$$

dla $i = 1, \dots, n$, \mathcal{A}_2 jest przedziałową funkcją agregacji i N_{IV} jest przedziałową negacją.

Bierzemy przedziałowe funkcje agregacji $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ i \mathcal{A}_3 .

Dla każdej reguły jest wyliczane:

$$\mathcal{E}'_i(y) = \mathcal{A}_{x \in X}(\mathcal{A}_1(\mathcal{D}'(x), R_i(x, y))), \quad i = 1, \dots, n.$$

Wyznaczamy: $\mathcal{E}' = \mathcal{A}_{3i=1, \dots, n}(\mathcal{E}'_i)$.

Przykład użycia uogólnionej reguły wnioskowania w prognozowaniu ryzyka sercowo-naczyniowego.

Opis problemu

Rozważenie problemu, który polega na przewidywaniu ryzyka cierpienia z powodu choroby sercowo-naczyniowej (CVD) w ciągu dziesięciu lat.

Potencjalne zmienne wejściowe:

- płeć, wiek, cukrzyca, skurczowe i rozkurczowe ciśnienie krwi, całkowity, cholesterol HDL, dane socjo-demograficzne, fizjologiczne, biochemiczne, genetyka.

Ryzyko cierpienia z CVD: **niskie, średnie, wysokie.**

W szczególności, zostały uwzględnione:

- Dwie zmienne wejściowe: **wiek i skurczowe ciśnienie krwi pacjenta**.
- Zmienna wyjściowa: **ryzyko** wystąpienia CVD w następnych dziesięciu latach.
- Zbiór danych obejmujący **898 przypadków klinicznych** uzyskanych z rejestrów siedmiu ośrodków opieki podstawowej Pampeluna (Navarra, Hiszpania).

Po uzyskaniu ryzyka pacjenci są podzieleni według trzech kategorii:

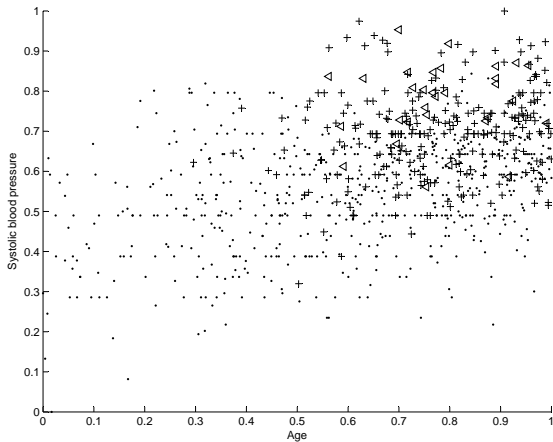
Pacjenci niskiego ryzyka (LR), których zakres ryzyka wynosi ≤ 5 ;

Pacjenci ze średnim ryzykiem (MR), których zakres ryzyka wynosi (5, 10);

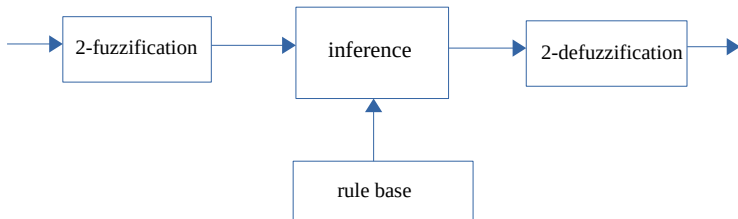
Pacjenci wysokiego ryzyka (HR), których zakres ryzyka wynosi ≥ 10 .

Wartość ryzyka zależna od wieku i skurczowego ciśnienia krwi

· - ryzyko niskie; + - ryzyko średnie; ◁ - ryzyko wysokie.



Model decyzyjny oparty o przedziałowe zbiory rozmyte



2-fuzzification

1. Generujemy zbiory rozmyte, biorąc pod uwagę funkcje przynależności:

$$\mu_L(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

- Funkcja typu L z parametrami (25,35) dla wieku i (120,130) dla skurczowego ciśnienia krwi (dla niskich wartości).

$$\mu_R(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

- Funkcja typu R z parametrami (45,65) dla wieku i (140,160) dla skurczowego ciśnienia krwi (dla wysokich wartości).

$$\mu_T(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ lub } x > d \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d \end{cases}$$

- Funkcja trapezoidalna z parametrami (25,35,45,65) dla wieku i (120,130,140,160) dla skurczowego ciśnienia krwi (dla średnich w.).

2. Dla każdego zbioru rozmytego tworzymy odpowiadający mu przedziałowy zbiór rozmyty w następujący sposób:

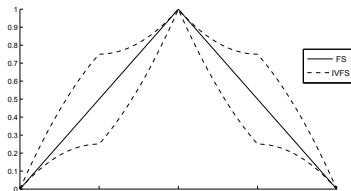
Dla zbioru rozmytego $A \in FS(U)$ bierzemy słabą funkcję ignorancji g (i.e., ciągła funkcja $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ taka, że $g(0) = g(1) = 0$, $g(0.5) = 1$, $g(x) = g(1 - x)$ dla $x \in [0, 1]$).

$$G(x, y, \delta, \gamma) = [x \cdot (1 - \delta \cdot y), x \cdot (1 - \delta \cdot y) + \gamma \cdot y].$$

Sugerujemy: $\delta(u_i) = \gamma(u_i) = 0.25$ dla $u_i \in U$ oraz

$$y = g(x) = 2\min(x, 1 - x).$$

Rezultat podwójnej fuzyfikacji



Linia ciągła: początkowy zbiór rozmyty;

Linia przerywana: wygenerowany IVFS.

Użycie algorytmu ApprResComp i zaproponowanie następującej metody do wyznaczania \mathcal{E}' , gdzie $\mathcal{A} = \mathcal{A}_3 = \vee$:

Dla każdej reguły budujemy skojarzoną przedziałową relację rozmytą

$$R_i \in IVFR(X \times Y), \quad i = 1, \dots, n;$$

Bierzemy przedziałową funkcję agregacji \mathcal{A}_1 ;

Dla każdej reguły liczymy:

$$\mathcal{E}'_i(y) = \bigvee_{x \in X} \mathcal{A}_1(\mathcal{D}'(x), R_i(x, y)), \quad i = 1, \dots, n;$$

Wyznaczamy: $\mathcal{E}' = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{E}'_i$.

Ponieważ mamy dwie zmienne wejściowe i rozważamy trzy etykiety lingwistyczne dla każdej zmiennej, otrzymujemy łącznie 9 reguł:

Reguła1: Jeśli wiek jest niski i skurczowe ciśnienie krwi jest niskie, to ryzyko jest niskie

Reguła2: Jeśli wiek jest średni i skurczowe ciśnienie krwi jest niskie, to ryzyko jest niskie

.....
Reguła9: Jeśli wiek jest wysoki i skurczowe ciśnienie krwi jest wysokie, to ryzyko jest wysokie

Age	Systolic blood pressure		
	Low	Medium	High
Low	LR	LR	LR
Medium	LR	MR	MR
High	LR	MR	HR

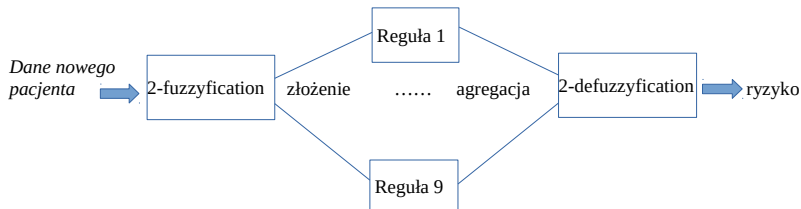
Ryzyko zachorowania nowego pacjenta

Gdy przewidujemy ryzyko nowego pacjenta, stosujemy:

Tworzymy zestaw przedziałowych wartości rozmytych jako dane wejściowe dla każdego atrybutu;

Następnie obliczane jest złożenie z każdą regułą (macierzą), co oznacza uzyskanie przedziałowych zbiorów rozmytych;

Zbiory te są agregowane przy użyciu maksimum, w wyniku czego wyjściem z systemu będzie kolejny przedziałowy zbiór rozmyty.



2-Defuzzification

Na koniec dokonujemy wyostrzania, tak aby obliczyć wartość, która będzie przewidywaną liczbą reprezentującą ryzyko cierpienia na CVD dla badanego pacjenta:

$$\underline{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \underline{R}_k(\bar{y}_k) \bar{y}_k}{\sum_{k=1}^N \underline{R}_k(\bar{y}_k)},$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{R}_k(\bar{y}_k) \bar{y}_k}{\sum_{k=1}^N \bar{R}_k(\bar{y}_k)},$$

gdzie \bar{y}_k jest wartością centralną zbioru z maksymalnymi wartościami ryzyka w k-tej regule, $\underline{R}_k(\bar{y}_k)$ jest maksymalną wartością w k-tej regule przy danym ryzyku.

Ostatecznie

$$y' = \frac{\underline{y} + \bar{y}}{2}.$$

Table: Procent błędnych diagnoz uzyskany przy użyciu różnych operatorów agregacji agregacji zarówno do generowania macierzy reprezentującej regułę, jak i w procesie wnioskowania.

Composition	Low	Medium	High	Total
Minimum	13.25	1.33	22.58	10.23
Product	13.11	1.33	22.61	10.13
Harmonic Mean	14.52	1.52	20.96	11.10
Geometric Mean	14.69	1.55	20.78	11.21
Sine	15.28	1.64	20.18	11.62
Łukasiewicz	12.92	1.32	22.76	10.01
OWA	15.28	1.64	20.18	11.62

Gdzie Sine: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\right)$

Problem w prognozowaniu ryzyka sercowo-naczyniowego został również rozważony w pracy (Sanz i in. ¹), gdzie zastosowano metodę klasyfikacji.

Jeśli używamy operatora OWA (IVOWA), poprawiamy wyniki klasyfikacji o około 6 punktów procentowych (wysokie ryzyko) w porównaniu do systemu klasyfikacji opartego na rozmytych wartościach przedziałowych.

¹Sanz, J., Galar, M., Jurio, A., Brugos, A., Pagola, M., Bustince, H.: Medical diagnosis of cardiovascular diseases using an interval-valued fuzzy rule-based classification system. *Applied Soft Computing Journal* 20, 103–111 (2014)

Regresja logitowa ze zmiennymi porządkowymi

Jeśli zastosowaliśmy do naszego problemu decyzyjnego jedną z metod statystycznych, tj. model regresji porządkowej, wyniki nie były zadowalające. Stosowanie modelu regresji porządkowej, pomimo że jest statystycznie istotny w przypadku klasyfikacji, nie odróżnia wysokiego ryzyka od średniego (niski jest dobrze rozróżniany).

Classification of cases

Real class	Odds ratio: 0.000000, log odds ratio: infinity			
	Predicted class			
	1	2	3	percentage correct
1	561	54	0	91
2	122	129	1	51
3	6	25	0	0

Cardiovascular risk (10 years)

Age:

Systolic
blood
pressure:

Risk: Low

Miary uwzględniające niepewność

- Miara zawierania przedziałów (wskaźnik pierwszeństwa) i przedziałowych zbiorów rozmytych
- Miara podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych
- Miara entropii przedziałowego zbioru rozmytego
- Miara równoważności przedziałowych zbiorów rozmytych
-

Zawieranie przedziałowych wartości i przedziałowych zbiorów rozmytych

Definition

Funkcja $\text{Prec} : (L^I)^2 \rightarrow L^I$ jest postrzegany jako miara zawierania (wskaźnik pierwszeństwa) (pos-, nec-miara zawierania) (*ang. precedence indicator*) jeżeli spełnia następujące warunki dla każdego $p, q, u \in L^I$:

- P1** Jeśli $p = 1_{L^I}$ i $q = 0_{L^I}$ wtedy $\text{Prec}(p, q) = 0_{L^I}$;
- P2** Jeśli $p < q$, wtedy $\text{Prec}(p, q) = 1_{L^I}$ dla każdego $p, q \in L^I$;
- P3** $\text{Prec}(p, p) = [1 - w(p), 1]$ dla każdego $p \in L^I$;
- P4** if $p \leq q \leq u$, wtedy $\text{Prec}(u, p) \leq \text{Prec}(q, p)$ i $\text{Prec}(u, p) \leq \text{Prec}(u, q)$, dla każdego $p, q, u \in L^I$, gdzie $w(p) = \bar{p} - \underline{p}$ jest szerokością przedziału $p \in L^I$ oraz $\leq \in \{\leq_2, \leq_{Adm}, \leq_{pos}, \leq_{nec}\}$.

Remark

Jeśli Prec jest miarą zawierania, to jest przedziałową implikacją I_{IV} .

Proposition

Niech $\leq \in \{\leq_2, \leq_{Adm}, \leq_{pos}\}$. Dla $p, q \in L^I$ operacja $\text{Prec}_{\mathcal{A}} : (L^I)^2 \rightarrow L^I$ jest miarą zawierania (pos-miarą zawierania)

$$\text{Prec}_{\mathcal{A}}(p, q) = \begin{cases} [1 - w(p), 1], & p = q, \\ 1_{L^I}, & p < q, \\ \mathcal{A}(N_{IV}(p), q), & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

dla $p, q \in L^I$ i przedziałowej negacji rozmytej N_{IV} (pos-negacji) takiej, że

$N_{IV}(p) = [n(\bar{p}), n(\underline{p})] \leq [1 - \bar{p}, 1 - \underline{p}]$, gdzie n jest negacją rozmytą oraz reprezentowalnej przedziałowej agregacji (pos-agregacji) \mathcal{A} takiej, że $\mathcal{A} \leq \vee$.

Niech $\leq = \leq_{nec}$.

Dla $r(a, b) = \max(|\underline{a} - \underline{b}|, |\bar{a} - \bar{b}|)$:

Proposition

Operacja Prec_ν jest nec-miarą zawierania,

$$\text{Prec}_\nu(a, b) = \begin{cases} [1 - w(a), 1], & \text{jeśli } a = b \\ 1_{L'}, & \text{jeśli } a <_{nec} b \\ [1 - \max(w(a), r(a, b)), 1 - r(a, b)], & \text{w p. razie} \end{cases}.$$

Poniższe funkcje są wskaźnikami pierwszeństwa względem \leq_2 :

$$\text{Prec}_{\mathcal{A}_{\text{mean}L'}}(x, y) = \begin{cases} [1 - w(x), 1], & x = y, \\ 1_{L'}, & x <_2 y, \\ [\frac{1-\bar{x}+y}{2}, \frac{1-x+\bar{y}}{2}], & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$\text{Prec}_{\mathcal{A}_{\text{meanpow}}}(x, y) = \begin{cases} [1 - w(x), 1], & x = y, \\ 1_{L'}, & x <_2 y, \\ [\frac{1-\bar{x}+y}{2}, \sqrt{\frac{(1-x)^2 + \bar{y}^2}{2}}], & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$\text{Prec}_{\mathcal{A}_{\text{meanmax}}}(x, y) = \begin{cases} [1 - w(x), 1], & x = y, \\ 1_{L'}, & x <_2 y, \\ [\frac{1-\bar{x}+y}{2}, \max(1 - \underline{x}, \bar{y})], & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie $N_{IV}(x) = [1 - \bar{x}, 1 - \underline{x}]$.

Ponadto, poniższa funkcja jest wskaźnikiem pierwszeństwa zgodnym z \leq_{Lex2}

$$\text{Prec}_{\mathcal{A}_{meanLex2}}(x, y) = \begin{cases} [1 - w(x), 1], & x = y, \\ 1_{L'}, & x <_{Lex2} y, \\ [\frac{y}{2}, \frac{1-\bar{x}+\bar{y}}{2}], & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

Wykorzystując przedziałową funkcję agregacji \mathcal{A}_α dla $\alpha \in [0, 1]$, otrzymujemy wskaźnik pierwszeństwa

$$\text{Prec}_{\mathcal{A}_\alpha Lex2}(x, y) = \begin{cases} [1 - w(x), 1], & x = y, \\ 1_{L'}, & x <_{Lex2} y, \\ [(1 - \alpha)\underline{y}, \alpha(1 - \bar{x}) + (1 - \alpha)\bar{y}], & \text{wpr,} \end{cases}$$

gdzie

$$N_{IV}(x) = \begin{cases} 1_{L'}, & x = [0, 0], \\ [0, 1 - \bar{x}], & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

jest przedziałową negacją rozmytą zgodną z \leq_{Lex2} .

Niech $X \neq \emptyset$ i $\text{card}(X) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Dla $A, B \in IVFS(X)$ będziemy posługiwać się następującym pojęciem częściowego porządku

$$A \preceq B \Leftrightarrow a_i \leq b_i$$

dla $i = 1, \dots, n$, gdzie \leq jest tym samym rodzajem porządku (częściowy lub liniowy lub możliwości lub konieczności) dla każdego i i $a_i = A(x_i)$, $b_i = B(x_i)$.

Rozpatrzmy także następujące pojęcie ścisłego porządku między przedziałowymi zbiorami rozmytymi

$$A \prec B \Leftrightarrow A \preceq B \text{ i } \exists_{1 \leq k \leq n} a_k < b_k.$$

Definition

Niech $A_1 : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją agregacji. Wówczas operacja $S : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow L^I$, spełniająca następujące warunki:

(SIMv1) $S(A, B) = S(B, A)$ for $A, B \in IVFS(X)$;

(SIMv2) $S(A, A) = [1 - A_1(w_A(x_1), \dots, w_A(x_n)), 1]$;

(SIMv3) $S(A, B) = 0_{L^I}$, jeśli $\{A(x_i), B(x_i)\} = \{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$;

(SIMv4) Jeśli $A \preceq B \preceq C$, wtedy $S(A, C) \leq S(A, B)$ i

$S(A, C) \leq S(B, C)$

jest nazywany miarą podobieństwa (pos-, nec-podobieństwa) dla

$i = 1, \dots, n$ oraz $\leq \in \{\leq_2, \leq_{Adm}, \leq_{pos}, \leq_{nec}\}$.

Proposition

Niech Prec będzie miarą zawierania (pos-, nec-miarą zawierania).
Jeśli $\mathcal{A} = [A_1, A_2]$, $\mathcal{B} = [B_1, B_2]$ są reprezentowalnymi przedziałowymi funkcjami agregacji (pos-, nec-agregacji), dla których A_1 jest jak w definicji i samo-dualny, \mathcal{B} jest symetryczna z elementem neutralnym 1_{L^I} i B_1 jest idempotentną funkcją agregacji, to operacja $S : \text{IVFS}(X) \times \text{IVFS}(X) \rightarrow L^I$:

$$S(A, B) = \mathcal{A}_{i=1}^n (\mathcal{B}(\text{Prec}(A(x_i), B(x_i)), \text{Prec}(B(x_i), A(x_i))))$$

jest miarą podobieństwa (pos-, nec-podobieństwa).

Example

Operacja $S : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow L^I$:

$$S_\nu(A, B) = \mathcal{A}_{i=1}^n (\text{Prec}_\nu(A(x_i), B(x_i)) \wedge \text{Prec}_\nu(B(x_i), A(x_i))))$$

jest miarą nec-podobieństwa, gdzie $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{mean}$ lub

$$S(A, B) = \mathcal{A}_{i=1}^n ((\text{Prec}_\mathcal{A}(A(x_i), B(x_i)) \wedge \text{Prec}_\mathcal{A}(B(x_i), A(x_i))))$$

jest miarą podobieństwa, gdzie $\mathcal{A} \in \{\mathcal{A}_{mean}, \mathcal{A}_{meanpow}, \mathcal{A}_{meanmax}\}$.

Zastosowanie miary podobieństwa: Klasyfikacja - Schemat IV-kNN

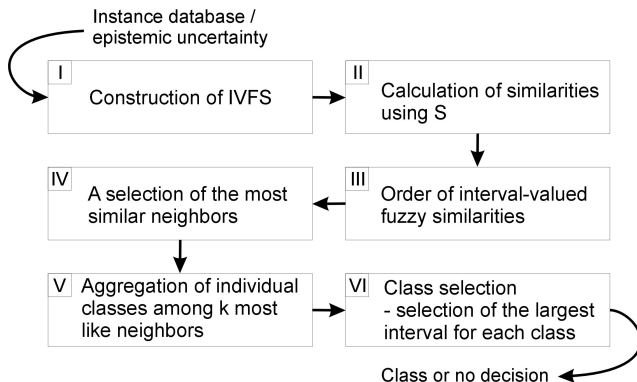


Figure: Algorithm IV-kNN

- I. IVFS is constructed for each instance/object.
- II. In this part of the algorithm, we use one of the similarity measures to measure the similarity of the tested object to every other object.
- III. Selection of the I-V fuzzy similarities is made using one of the orders: $\{\leq_2, \leq_{XY}, \leq_{Lex1}, \leq_{Lex2}, \dots\}$.
- IV. Choosing the most similar objects with respect to given k , $k \in \{1, \dots, n\}$, $n \in N$.
- V. Aggregation of similarity measure values of the element from each class individually, e.g. $\mathcal{A}_{mean}, \vee, \wedge, \dots$.
- VI. For the two obtained intervals matching to to each class, we use the following method leading to the decision. The interval classes "0" and "1" are marked by k_0 and k_1 . In addition, we may refrain from making decisions ("No Decision"). The method of searching for decisions consists in comparing the width of the intervals (the smaller the width, the better) and the location of the intervals against to the value 0.5 (we take it that a higher value of the ends of the compartment than 0.5, which suggests greater clarity of decision).

Data set description - rak piersi

The dataset is a wisconsin (diagnostic) breast cancer dataset. Ten real-valued features are computed for each cell nucleus:

- radius (mean of distances from center to points on the perimeter)
- texture (standard deviation of gray-scale values)
- perimeter
- area
- smoothness (local variation in radius lengths)
- compactness ($\frac{\text{perimeter}^2}{\text{area} - 1.0}$)
- concavity (severity of concave portions of the contour)
- concave points (number of concave portions of the contour)
- symmetry
- fractal dimension (*coastline approximation* – 1)

The decision attribute stores information about the diagnosis: malignant or benign represented by values of 0 or 1. The dataset consists of 212 objects with malignant diagnosis and 357 objects with benign diagnosis.

Results and discussion

We will focus on presenting the conclusions of the algorithm analysis in three aspects:

modification of the value of k ;

the selection of aggregation in the construction of the similarity measure;

the selection of ordering relations ($\leq_2, \leq_{XY}, \leq_{Lex1}, \leq_{Lex2}$), where

- Xu and Yager order: $[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{XY} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow$

$$\underline{x} + \bar{x} < \underline{y} + \bar{y} \text{ or } (\bar{x} + \underline{x} = \bar{y} + \underline{y} \text{ and } \bar{x} - \underline{x} \leq \bar{y} - \underline{y}).$$

- The first lexicographical order, \leq_{lex1} defined as:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{lex1} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \underline{x} < \underline{y} \text{ or } (\underline{x} = \underline{y} \text{ and } \bar{x} \leq \bar{y}).$$

- The second lexicographical order, \leq_{lex2} defined as:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{lex2} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \bar{x} < \bar{y} \text{ or } (\bar{x} = \bar{y} \text{ and } \underline{x} \leq \underline{y}).$$

k=3, $Prec_w$

accuracy	sensitivity	specificity	precision	S_A	O
0.927188	0.977216	0.903770	0.946142	\mathcal{A}_{mean}	\leq_{Lex2}
0.914093	0.966544	0.895268	0.941158	$\mathcal{A}_{meanpow}$	\leq_{Lex2}
0.908623	0.980723	0.859971	0.923881	\mathcal{A}_{mean}	\leq_{XY}
0.884529	0.976170	0.816262	0.901525	$\mathcal{A}_{meanpow}$	\leq_2
0.873287	0.986096	0.773879	0.882572	$\mathcal{A}_{meanmax}$	\leq_{Lex1}
0.856706	0.988296	0.731050	0.864038	$\mathcal{A}_{meanpow}$	\leq_{Lex1}
0.850010	0.990591	0.711260	0.855724	\mathcal{A}_{mean}	\leq_{Lex1}
0.789597	0.924097	0.672000	0.829244	$\mathcal{A}_{meanmax}$	\leq_{Lex2}

k=3, $Prec_A$

accuracy	sensitivity	specificity	precision	S_A	O
0.924491	0.957286	0.931892	0.960729	$\mathcal{A}_{meanmax}$	\leq_{Lex1}
0.902183	0.942547	0.912231	0.949249	$\mathcal{A}_{meanpow}$	\leq_2
0.902179	0.952512	0.895032	0.940448	$\mathcal{A}_{meanpow}$	\leq_{Lex2}
0.901164	0.938012	0.917968	0.952032	$\mathcal{A}_{meanpow}$	\leq_{XY}
0.896202	0.933100	0.916215	0.950736	$\mathcal{A}_{meanpow}$	\leq_{Lex1}
0.887169	0.958927	0.851131	0.917875	$\mathcal{A}_{meanmax}$	\leq_2
0.840037	0.927569	0.796373	0.887644	$\mathcal{A}_{meanmax}$	\leq_{XY}
0.824183	0.915723	0.777194	0.877020	$\mathcal{A}_{meanmax}$	\leq_{Lex2}

Przedziałowy Relief.

Jako dane wejściowe do algorytmu mamy n -elementowy zbiór danych P , każdy wektor danych posiada a cechy (atrybuty) o wartościach z L^I i ma przypisaną decyzję pozytywną lub negatywną.

Najpierw zbiór P dzieli się na dwa rozłączne zbiory:

P^+ wektorów z decyzją pozytywną oraz

P^- wektorów z decyzją negatywną.

input : a n element data set P composed of vectors of size a

output: a vector W of size a

$W \leftarrow (0, 0, \dots, 0)$

for all $x \in P$ **do**

 find closest vector "nearHit" from P^+ using D find closest
 vector "nearMiss" from P^- using D

for $j \leftarrow 1$ **to** a **do**

$W_j \leftarrow W_j - \text{diff}(x_j, \text{nearHit}_j)/n + \text{diff}(x_j, \text{nearMiss}_j)/n$

Algorytm rozpoczyna się od wektora W o wadze długości a wypełnionego zerami. Dla każdego rekordu P szukamy najbardziej podobnego wektora z P^+ (przy użyciu podanej miary podobieństwa) - który jest oznaczony jako "nearHit" a najbardziej podobny wektor z P^- który jest oznaczony jako "nearMiss". W przypadku dużych zbiorów danych, zamiast używać wszystkich rekordów z P , można losowo wybrać wektory m .

Następnie wektor wag jest aktualizowany za pomocą funkcji diff:

$$\text{diff}(a, b) = \begin{cases} 0, & D(a, b) \leq \gamma, \\ 1, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie $a, b \in L^I$ i γ to stały mały parametr określający margines, w którym przedziały są nie do odróżnienia. Co więcej, D jest miarą odległości opartą na mierze podobieństwa S , ponieważ $D = N_{IV}S$. W wyniku działania algorytmu otrzymujemy wektor W ocen szacujących istotność cech.

Wybieramy atrybuty do przyszłej klasyfikacji, jeśli ich wartość istotności jest większa niż próg istotności θ , gdzie $0 \leq \theta \leq 1$.

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
0.012	0.042	0.007	0.075	-0.05	0.04	0.054	0.117	0.128	-0.035

The presented results refer to the algorithm working for $k = 5$ (we tested $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$). We consider two analysis cases:

- I. concerns removing all attributes indicated by the θ parameter;
- II. concerns removing the attribute with the lowest weight among those indicated by the θ parameter.

Thus in case I we removing 3rd, 5th and 10th attributes, while in case II we remove 5th attribute only.

Aggregation	Case of test		ACC	SENS	SPEC	PREC
\mathcal{A}_{mean}	No feature removal		0.958	0.934	0.987	0.988
	With feature removal (IVRelief)	I	0.951	0.918	0.988	0.98
		II	0.961	0.946	0.980	0.983
$\mathcal{A}_{0.4}$	No feature removal		0.961	0.927	0.993	0.992
	With feature removal (IVRelief)	I	0.931	0.870	0.988	0.986
		II	0.964	0.934	0.993	0.993
$\mathcal{A}_{0.6}$	No feature removal		0.758	0.684	0.879	0.902
	With feature removal (IVRelief)	I	0.758	0.640	0.956	0.961
		II	0.762	0.691	0.879	0.903

Przedstawimy teraz klasę miar entropii dla IVFS. Aby skonstruować nową entropię o wartościach przedziałowych, potrzebujemy funkcji agregacji i miary inkluzji (wskaźnikiem pierwszeństwa) zw. z szerokością przedziałów.

Dla $p \in L^I$ oznaczamy przez $P \in IVFS(X)$ takie, że $P(x) = p$ dla wszystkich $x \in X$. Inspirując się (Bustince 2019) rozważymy następującą definicję entropii dla porządku częściowego lub liniowego.

Definition

Niech N będzie silną (inwolutywną) negacją przedziałową (pos-, nec-negacją) ($N(N(x))=x$) z punktem równowagi $e \in L'$ ($N(e)=e$). Funkcja $E : IVFS(X) \rightarrow L'$ jest entropią przedziałową (pos-, nec-entropią), jeśli dla $A, B \in IVFS(X)$:

(E1) $E(A) = 0_{L'}$ jeśli A jest ostry;

(E2) $E(E_e) = [1 - w(e), 1]$;

(E3) $E(A) \leq E(B)$, jeśli $A(x) \leq B(x) \leq e$ lub $A(x) \geq B(x) \geq e$, gdzie $E_e(x) = [e, e]$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $\leq \in \{\leq_2, \leq_{Adm}, \leq_{pos}, \leq_{nec}\}$.

Metody konstrukcji entropii przedziałowych zbiorów rozmytych

Proposition

Niech Prec będzie miarą zawierania (wskaźnikiem pierwszeństwa) (pos-, nec-miarą zawierania), N będzie silną (inwolucyjną) negacją I-V (pos-, nec-negacją) z punktem równowagi e , a \mathcal{A} będzie I-V idempotentną funkcją agregacji (pos-, nec-agregacją). Następnie funkcja $E : IVFS(X) \rightarrow L^I$:

$$E(A) = \mathcal{A}_{i=1}^n \text{Prec}_{\mathcal{A}}(A(x_i) \vee A_N(x_i), N(A(x_i) \vee A_N(x_i))) \quad (5)$$

jest entropią (pos-, nec-entropią) w odniesieniu do N , gdzie

$$A_N = \{ \langle x, [N(\overline{A}(x)), N(\underline{A}(x))] \rangle \}.$$

Example

Stosując funkcję agregacji \mathcal{A}_{mean} i wskaźnik pierwszeństwa

$$\text{Prec}_{\mathcal{A}} = \text{Prec}_{\mathcal{A}_{mean}} (\text{Prec}_{\mathcal{A}} = \text{Prec}_{\nu})$$

otrzymujemy pos-entropię (nec-entropię) zgodną ze standardową negacją przedziałową $N(x) = [1 - \bar{x}, 1 - \underline{x}]$.

Druga metoda konstrukcji entropii oparta jest na mierze podobieństwa.

Proposition

Niech S będzie miarą podobieństwa (*pos-,nec-podobieństwa*), gdzie A_1 będzie idempotentną funkcją agregacji. Następnie funkcja $E : IVFS(X) \rightarrow L^I$:

$$E(A) = S(A, A_N) \quad (6)$$

jest entropią (*pos-,nec-entropią*) IV względem N (inwolutywna negacja (*pos-,nec-negacja*) IV z punktem równowagi e).

Example

Jeśli użyjemy miar podobieństwa (pos-,nec-podobieństwa):

$S : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow L^I$:

$$S(A, B) = \mathcal{A}_{i=1}^n (\text{Prec}(A(x_i), B(x_i)) \wedge \text{Prec}(B(x_i), A(x_i))),$$

gdzie $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{mean}$ z $\text{Prec}_{\mathcal{A}_{mean}}(\text{Prec}_{\nu})$, wtedy otrzymujemy miarę entropii (pos-,nec-entropii) spełniającą równanie (6) w odniesieniu do $N(x) = [1 - \bar{x}, 1 - \underline{x}]$, którą ozn. E_I .

Entropia II (Bustince, Birullo 1996):

$$E_{II}(F) = \sum_{i=1, \dots, n} w_{F(x_i)} \text{ dla } F \in IVFS(X), \text{ card}(X) = n.$$

Entropia III (Smidt 2001):

$E(f) = \frac{a}{b}$, gdzie a jest odległością $(f; f_{near})$ od f do bliższego punktu f_{near} pomiędzy $1_{L'}$ i $0_{L'}$ oraz b to odległość $(f; f_{far})$ od f do dalszego punktu f_{far} pomiędzy $1_{L'}$ i $0_{L'}$. Dla n punktów należących do IVFS mamy $E(F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(f_i)$, gdzie $f_i = F(x_i)$.

W szczególności mamy: gdy $d(F, 1_{L'}) > d(F, 0_{L'})$, wtedy

$$E_{III}(F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\overline{F}(x_i)}{1 - \underline{F}(x_i)} \text{ w przeciwnym wypadku,}$$

$$E_{III}(F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1 - \underline{F}(x_i)}{\overline{F}(x_i)}, \text{ gdzie dla } A, B \in IVFS(X):$$

$$d(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)| + |w_A(x_i) - w_B(x_i)|).$$

Przykładowe zastosowanie entropii-metody uzupełnienia brakujących danych

Różne metody uzupełnienia brakujących danych:

Metoda I W przypadku braku wartości wstawiamy interwał $[0, 1]$.

Metoda II Wyszukaj najbardziej podobne obiekty k i wybierz ich wartość dla brakującego atrybutu i wstaw minimalną, maksymalną lub średnią z wybranych wartości dla brakującego atrybutu:

$[min(a_1, \dots, a_k), max(a_1, \dots, a_k)], [avg(a_1, \dots, a_k), avg(a_1, \dots, a_k)]$.

Metoda III Znajdowanie najbardziej podobnych obiektów / podobnie jak Metoda II, ale z tej samej klasy decyzyjnej co obiekt z brakiem wartości.

Metoda IV - Entropia Używamy Algorytmu z wykorzystaniem Entropii do uzupełnienia brakujących wartości (dla najbardziej podobnych obiektów z tej samej klasy decyzyjnej do danego obiektu z brakiem wartości znajdujemy wartość obiektu o minimalnej entropii).

Algorytm - uzupełnianie danych z wykorzystaniem Entropii

input : Object O_z with missing value on the attribute t ;
 l - no. most similar objects from the same decision class;

output: Completed value $O_z(t)$;

$minEntropy = MaxInteger$; \triangleright Initialization $minEntropy$ value as some big value

$noObject = -1$; \triangleright storage number object with smallest entropy

for $i := 1, 2, \dots, l$ **do**

\triangleright check decision O_z is the same in O_i

if $dec(O_z) = dec(O_i)$ **then**

$minEntropy \leftarrow E(O_i)$

$noObject \leftarrow i$

if $\exists_{1 \leq p, q \leq l, p \neq q}$ and $E(O_p) = E(O_q)$ **then**

$minEntropy \leftarrow E(O_p)$

$noObject \leftarrow i$

$O_z(t) \leftarrow O_{noObject}(t)$

\triangleright Finally, the value for the missing attribute is completed from the attribute of the won object

Testy wykonane na danych "Diagnostyka raka piersi" w pracy ² wykazały, że metody uzupełniania braków danych za pomocą naszego zmodyfikowanego IV-kNN charakteryzują się wolniejszym spadkiem dokładności klasyfikacji dla metody trzeciej w porównaniu z pierwszą i drugą, przy wzroście liczby braków danych w danych.

Dlatego porównujemy Metodę IV tylko z Metodą III.

Przez *MS* oznaczamy procent brakujących wartości w danych. Obserwujemy postęp w każdym aspekcie, stosując metodę IV.

Do porównania wybieramy najlepsze reprezentatywne wyniki według następujących parametrów:

dla Metody III: $C_A = \mathcal{A}_{meanpow}$, $S_A = \mathcal{A}_{mean}$ i kolejności \leq_{lex2} oraz dla Metody IV: $C_A = S_A = \mathcal{A}_{MeanMax}$ i porządek \leq_{XY} i oba z $k = 5$.

²D. Kosior, B. Pękała, "Wpływ miar przedziałowych na metody klasyfikacji z brakami danych", IWIFSGN'2020, Springer

Method	ACC	SENS	SPEC	PREC	MS
Meth.III	0,8555894	0,9531871	0,7877616	0,8871398	5%
	0,8450197	0,9529377	0,7587463	0,8750599	25%
	0,8399786	0,9511847	0,7513039	0,8683283	50%
Meth.IV	0,8875097	0,9370335	0,8024434	0,8914741	5%
	0,8800044	0,9423466	0,7698350	0,879212	25%
	0,8778067	0,9372094	0,7770936	0,8775432	50%

Entropy	ACC	SENS	SPEC	PREC	MS
E_I	0,8875097	0,9370335	0,8024434	0,8914741	5%
	0,8800044	0,9370166	0,7698350	0,879212	25%
	0,8778067	0,9370094	0,7770936	0,8775432	50%
E_{II}	0,8870261	0,9369867	0,8011517	0,8907949	5%
	0,8742604	0,9352522	0,7523640	0,8717101	25%
	0,8683938	0,9342521	0,7482776	0,864492	50%
E_{III}	0,8864288	0,9346241	0,8038857	0,8913553	5%
	0,8808355	0,9314817	0,777911	0,872423	25%
	0,8768056	0,9165073	0,8091392	0,8910009	50%

Wczesne wykrywanie ryzyka epizodów depresyjnych za pomocą autorskiego testu diagnostycznego

miary optymistyczne i pesymistyczne, czyli z wykorzystaniem nowych miar podobieństwa epistemicznego

Przetwarzanie obrazów

miary równoważności uwzględniające niepewność

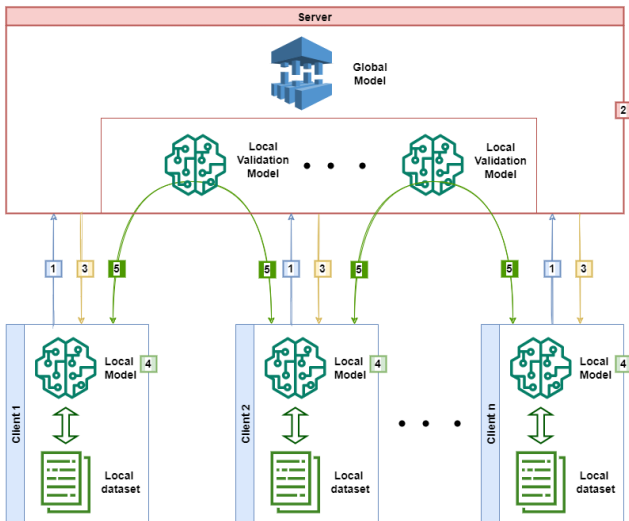
Detekcja upadków osób starszych

uogólnione wnioskowanie rozmyte i miara ilości informacji

Uczenie federacyjne

różne metody sztucznej inteligencji z wykorzystaniem miar z niepewnością dla różnych typów danych

Model uczenia federacyjnego



Dziękuję za uwagę