Holomorfne funkcije

Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta. Naj bo $f: U \to \mathbb{C}$ funkcija. Če za $a \in U$ obstaja

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

potem pravimo, da je f holomorfna v a, oz. da je odvedljiva v kompleksnem smislu v a. Zgornjo limito, če $\exists$, označimo s $f'(a)$. Če pišemo $z = a + ib$, potem dobimo ekvivalentno definicijo

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Če $f'(a)$ $\exists$ za $\forall a \in U$, potem je f holomorfna na U. Če je $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna, potem ji pravimo cela.

Primer: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$; $n \in \mathbb{N}$ je holomorfna.

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{z \to a} \frac{z^n - a^n}{z-a} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)(z^{n-1} + z^{n-2} a + \ldots + z a^{n-2} + a^{n-1})}{z-a} =$$

$$= \lim_{z \to a} (z^{n-1} + z^{n-2} a + \ldots + z \cdot a^{n-2} + a^{n-1}) = n \cdot a^{n-1}$$

Tudi konstantne funkcije so holomorfne z ničelnim odvodom

Primer: $f(z) = \bar{z}$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ker je $|f(z) - f(z')| = |\bar{z} - \bar{z}'| = |\overline{z - z'}| = |z - z'|$, preslikava f ohranja razdaljo $\Rightarrow$ f je zvezna. Ali je f holomorfna? Ali obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{a+h} - \bar{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

Poglejmo si smeri $h = x$ in $h = iy$ (limitiramo po realni in imaginarni osi)
V prvem primeru je limita enaka 1, v drugem pa dobimo -1. Torej limita ne $\exists$.

Trd: Naj bo U odprta v $\mathbb{C}$ in f, g funkciji na U, ki sta holomorfni v $a \in U$.
a) za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ je λf holomorfna v a in velja $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$
b) Funkcija $f+g$ je holomorfna v a in velja $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
c) Funkcija $f \cdot g$ je holomorfna v a in velja $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
d) če $g(a) \neq 0$, potem je f/g holomorfna v a in velja $(f/g)'(a) = (f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)) / g^2(a)$

DN: Formuliraj trditev za holomorfnost kompozituma.

Primer: Polinom $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je preslikava oblike $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Po zgornji trditvi so vsi polinomi holomorfni.

Primer: Racionalna funkcija f je funkcija oblike p/q, kjer sta p in q polinoma. f je holomorfna povsod, razen na končni množici ničel polinoma q.

Cauchy-Riemannove enačbe

$A \subseteq \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$, potem za $z \in A$ zapišemo $z = x + iy$.

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Im} f(z) \overset{z=x+iy}{\longleftrightarrow} f(z) = \operatorname{Re} f(x+iy) + i \cdot \operatorname{Im} f(x+iy)$$
$$\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x,y)$$
$$\operatorname{Im} f(x+iy) = v(x,y)$$

Zapis: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

Primer: $f(z) = z^3$; $z = (x+iy) \Rightarrow f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x^2 + 2ixy - y^2)(x+iy)$
$$= x^3 + 2ix^2y - xy^2 + ix^2y - 2xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i \cdot (3x^2y - y^3)$$
$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$
$$v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

Izrek: Naj bosta $u, v: U \to \mathbb{R}$ realni funkciji na $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

a) Če je $f := u + iv$ holomorfna, potem sta u, v parcialno odvedljivi in velja
$$u_x = v_y \quad \text{in} \quad v_x = -u_y$$

b) Če sta u in v diferenciabilni in če veljata zgornji enakosti, potem je f holomorfna in velja $f' = u_x + i \cdot v_x = v_y - i \cdot u_y$

Opomba: Enačbi $u_x = v_y$ in $v_x = -u_y$ se imenujeta Cauchy-Riemannovi enačbi.

Dokaz: a) Če je f holomorfna, potem $\exists$ kompleksen odvod:
$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Izberimo si dve posebni smeri. Izračunajmo limiti v smeri realne in imaginarne osi.

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}$$

$$f = u + iv \Rightarrow f'(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \left[\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i \cdot \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h}\right]$$

Ker $f'(z)$ $\exists$, $\exists$ posamezni limiti, kar pomeni, da $\exists$ u_x in v_y in velja $f'(z) = u_x(x,y) + i \cdot v_x(x,y)$. Na podoben način dobimo

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \left[\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i \cdot \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih}\right] = \frac{1}{i}\left[u_y(x,y) + i \cdot v_y(x,y)\right] =$$
$$= v_y(x,y) - i \cdot u_y(x,y)$$

$\Rightarrow u_x + i \cdot v_x = v_y - i \cdot u_y$. Če primerjamo realna in imaginarna dela, dobimo $u_x = v_y$ in $u_y = v_x$.

b) Izberimo $z=x+iy \in U$ in $h=h_1+ih_2$ tako majhen, da je v U. Dokazati moramo, da

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

obstaja in je enaka $u_x(x,y)+i\cdot v_x(x,y)$. Ker sta u,v diferenciabilni, lahko zapišemo

$$u(x+h_1,y+h_2)=u(x,y)+u_x(x,y)\cdot h_1+u_y(x,y)\cdot h_2+\sigma_1(h)$$
$$v(x+h_1,y+h_2)=v(x,y)+v_x(x,y)\cdot h_1+v_y(x,y)\cdot h_2+\sigma_2(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0}\frac{\sigma_1(h)}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{\sigma_2(h)}{|h|}=0$

$$\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) &= \overbrace{u(x+h_1,y+h_2)+i\cdot v(x+h_1,y+h_2)}^{f(z+h)}-\overbrace{u(x,y)-iv(x,y)}^{f(z)} = \\
&= \big(u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)\big)+i\big(v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y)\big) = \\
&= \big(u_x(x,y)\cdot h_1+u_y(x,y)\cdot h_2+\sigma_1(h)\big)+i\cdot\big(v_x(x,y)\cdot h_1+v_y(x,y)\cdot h_2+\sigma_2(h)\big) = \\
\text{Cauchy-Riemm.}\longrightarrow &= \big(u_x(x,y)\cdot h_1-v_x(x,y)\cdot h_2+\sigma_1(h)\big)+i\cdot\big(v_x(x,y)h_1+u_x(x,y)\cdot h_2+\sigma_2(h)\big) = \\
&= \big(u_x(x,y)+i\cdot v_x(x,y)\big)\cdot h_1+\underbrace{\big(i\cdot u_x(x,y)-v_x(x,y)\big)}_{i(u_x(x,y)+i\cdot v_x(x,y))}\cdot h_2+\big(\sigma_1(h)+i\cdot\sigma_2(h)\big) = \\
&= \big(u_x(x,y)+i\cdot v_x(x,y)\big)(h_1+ih_2)+\sigma(h)
\end{aligned}$$

Limita po definiciji: $\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\big(u_x(x,y)+i\cdot v_x(x,y)\big)\right|=\left|\frac{\sigma(h)}{h}\right|=\left|\frac{\sigma_1(h)+i\cdot\sigma_2(h)}{h}\right|$

$\xrightarrow[h\to 0]{} 0$, ker $\frac{\sigma_1(h)}{|h|}\to 0$ in $\frac{\sigma_2(h)}{|h|}\to 0$. $\square$

Primer: $f(z)=\bar z$ ni holomorfna. Če pišemo $z=x+iy \Rightarrow f(z)=\bar z=x-iy \Rightarrow u(x,y)=x, v(x,y)=-y$

Cauchy Riemannove enačbe: $u_x=v_y, v_x=-u_y$?

$v_x=1, v_y=-1 \Rightarrow u_x\neq v_y$, zato f ni holomorfna

Oglejmo si še alternativni pristop k Cauchy-Riemannovim enačbam:

$$z=x+iy,\ \bar z=x-iy \iff x=\frac{z+\bar z}{2},\ y=\frac{z-\bar z}{2i}$$

Ideja je, kako preveriti C-R enačbe brez u in v?

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2i}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Podobno izračunamo še

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \quad\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ in } \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(u_x+iv_x-iu_y+v_y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(u_x+iv_x+iu_y-v_y)$$

Opazimo: $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0 \iff (u_x-v_y)+i(v_x+v_y)=0 \iff u_x=v_y$ in $v_x=u_y$

Torej $\iff$ ko u,v rešita Cauchy-Riemannovi enačbi.

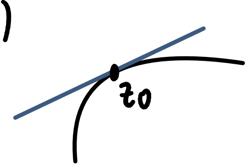
Po domače povedano: f je holomorfna $\Leftrightarrow$ $\bar z$ ne nastopa v predpisu f. V tem primeru je

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iv_x + u_x) = u_x + iv_x = f'(z)$$

Opomba: Če so parcialni odvodi u_x, v_x, u_y, v_y zvezne funkcije, potem sta po izreku funkciji u in v diferenciabilni $\Rightarrow$ $f=u+iv$ je holomorfna f.

Konformnost holomorfnih funkcij

Naj bo $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ (zvezno) odvedljiva pot, ki gre skozi točko $z_0\in\mathbb{C}$, zato $\exists t_0\in[0,1]$, da je $z_0=\gamma(t_0)$



Tangentni vektor na γ v točki $z_0=\gamma(t_0)$ je enak $\dot\gamma(t_0)$. Naj bo f holomorfna funkcija na nekem območju, ki vsebuje tir poti γ. Tir od γ ponavadi označimo z $\gamma^* = [\gamma] := \gamma[0,1]$. Tedaj je $f\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ tudi (zv.) odvedljiva pot, ki gre skozi točko $f(z_0) = f(\gamma(t_0)) = (f\circ\gamma)(t_0)$.

Trd: Za tangentni vektor na pot $f\circ\gamma$ v točki $f(z_0)$ velja $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t_0) = f'(z_0)\cdot\dot\gamma(t_0)$.

Dokaz: Točko $x+iy\in\mathbb{C}$ identificiramo s $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Naj bo $f=u+iv$.
$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$. Za izračun tangentnega vektorja na pot $f\circ\gamma$ v $f(z_0) = f(\gamma(t_0))$ si pomagamo s preslikavo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$
Tangentni vektor na $f\circ\gamma$ v $t_0 \longleftrightarrow F\circ\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}$ v t_0.

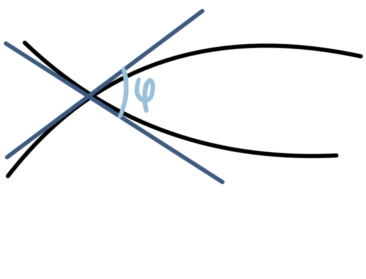
$$\frac{d}{dt}\left(F\circ\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot\gamma_1\\ \dot\gamma_2\end{bmatrix} \overset{C\text{-}R}{=} \begin{bmatrix}u_x & -v_x\\ v_x & u_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\gamma_1\\ \dot\gamma_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_x\cdot\dot\gamma_1 - v_x\dot\gamma_2\\ v_x\cdot\dot\gamma_1 + u_x\dot\gamma_2\end{bmatrix}$$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$

$$\text{Zato je } (f\circ\gamma)^{\cdot}(t_0) = u_x(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma_1(t_0) - v_x(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma_2(t_0) + i\cdot v_x(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma_1(t_0) + i\cdot u_x(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma_2(t_0) =$$
$$= \big(u_x(\gamma(t_0)) + iv_x(\gamma(t_0))\big)\big(\dot\gamma_1(t_0) + i\cdot\dot\gamma_2(t_0)\big) = f'(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma(t_0) = f'(z_0)\cdot\dot\gamma(t_0)$$

$\square$

Naj bosta dani odvedljivi poti γ_1, γ_2, ki se sekata v točki $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$



Kot med tangentnima vektorjema $\dot\gamma_1(t_1)$ in $\dot\gamma_2(t_2)$ imenujemo kot med krivuljama v presečišču. Če zapišemo

$$\dot\gamma_1(t_1) = |\dot\gamma_1(t_1)|\cdot e^{i\alpha_1} \text{ in } \dot\gamma_2(t_2) = |\dot\gamma_2(t_2)|e^{i\alpha_2},$$

potem je ta kot $\alpha_1 - \alpha_2$

Def: Preslikava $f: U_1\to U_2$ je konformna, če ohranja kote med krivuljami.

Izrek: Če je $f:U_1\to U_2$ holomorfna in je $f'(z)\neq 0$ $\forall z\in U_1$, potem je f konformna.

Dokaz: Naj bosta γ in δ odvedljivi poti z vrednostmi v U_1, ki se sekata v točki $z_0 = \gamma(t_0) = \delta(s_0)$ za neka parametra t_0 in s_0.
Izračunajmo tangentna vektorja na krivulji $f\circ\gamma$ in $f\circ\delta$ v t_0 in s_0.

$$(f\circ\gamma)^{\cdot}(t_0) = f'(z_0)\cdot\dot\gamma(t_0) \quad \text{in} \quad (f\circ\delta)^{\cdot}(s_0) = f'(z_0)\cdot\dot\delta(s_0)$$

Zapišimo $f'(z_0) = |f'(z_0)|\cdot e^{i\varphi}$, $\dot\gamma(t_0) = |\dot\gamma(t_0)|\cdot e^{i\alpha}$ in $\dot\delta(s_0) = |\dot\delta(s_0)|\cdot e^{i\beta}$

$$\Rightarrow (f\circ\gamma)^{\cdot}(t_0) = |f'(z_0)|\cdot e^{i\varphi}\cdot|\dot\gamma(t_0)|\cdot e^{i\alpha} = |f'(z_0)|\cdot|\dot\gamma(t_0)|\cdot e^{i(\varphi+\alpha)}$$

$$\text{in} \quad (f\circ\delta)^{\cdot}(s_0) = |f'(z_0)|\cdot e^{i\varphi}\cdot|\dot\delta(s_0)|\cdot e^{i\beta} = |f'(z_0)|\cdot|\dot\delta(s_0)|\cdot e^{i(\varphi+\beta)}$$

Ker je $f'(z_0) \neq 0$, je kot v presečišču enak $(\varphi+\alpha)-(\varphi+\beta) = \alpha-\beta$. $\square$

Potenčne vrste

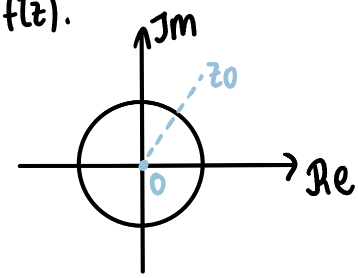
Potenčna vrsta je formalno podana kot

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Kdaj potenčna vrsta konvergira? Zagotovo ta vrsta konvergira za $z=0$.
Če vrsta konvergira v z, potem njeno vsoto označimo z $f(z)$.
Naj bo $\mathcal{D}$ konvergenčno območje vrste:

$$\mathcal{D} = \{z\in\mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergira}\}$$

Za $z\in\mathcal{D}$ označimo $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$



Izkaže se, da vsota konvergira na vsakem zaprtem krogu $\overline{D}(0,r)$, kjer je $r<|z_0|$.
Konvergenčno območje potenčne vrste bomo dobili/izrazili kot območje $\mathcal{D}$, ki zadošča

$$D(0,R) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \overline{D}(0,R).$$

Število R imenujemo konvergenčni polmer. To velja le, če $R>0$.
Izkazalo se bo, da velja

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ta formula se imenuje Cauchy-Hadamardeva formula.

„Število" $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$, kjer je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realno zaporedje, je „največje stekališče" zaporedja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Če je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno, potem je množica stekališč $\mathcal{E}$ zaporedja (b_n) neprazna in zato obstaja $\sup\mathcal{E}$. Da se videti, da je $\sup\mathcal{E}$ tudi stekališče.
(2) Če je zaporedje navzgor neomejeno, potem je $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
(3) Če je zaporedje navzgor omejeno in $\mathcal{E}\neq 0$, potem je $\sup\mathcal{E} = \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$
(4) Če je zaporedje navzgor omejeno in $\mathcal{E}=0$, potem je $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$