Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

THE POWER OF ADJACENT CHOICES

Finančni praktikum

Avtorja:
Maša Orelj, Justin Raišp

Ljubljana, 2022

Kazalo

1 Navodilo

Imamo n žog in n košev $b_1, \ldots, b_n$, ki so prazni. Koši so postavljeni v krogu: koš b_i ima soseda b_{i-1} in b_{i+1}, kjer zaradi krožnosti velja, da sta b_1 in b_n soseda. Opazujemo naslednji naključen proces: Za vsako žogo naključno izberemo koš b_i, pogledamo še oba soseda in damo žogo v koš z najmanjšim številom žog v tistem trenutku izmed teh treh. Zanima nas število žog v košu z največ žogami na koncu procesa. Ta proces potem razširimo na več načinov:

- za sosede štejemo koše, ki so na razdaljah največ $2, 3, \ldots,$
- za n košev vzamemo $2n, 3n, 4n, \ldots$ žog,
- iščemo koš z najmanjšim številom žog.

Opazujemo lahko tudi dvodimenzionalno mrežo košev s topologijo torusa. Torej imamo npr. n^2 košev $b_{i,j}$, kjer sta $i, j \in [n]$, kjer za soseda $b_{i,j}$ in $b_{k,l}$ velja $|i-k| + |j-l| = 1$. Soseda sta tudi $b_{1,i}$ in $b_{n,i}$ ter $b_{i,1}$ in $b_{i,n}$. Podobno lahko gledamo tudi tridimenzionalno verzijo.

2 Program za reševanje problema

Za reševanje opisanega problema sva uporabila programski jezik *Python*. Začela sva s pisanjem ustreznega programa za reševanje naloge v eni dimenziji, pri katerem je možno spreminjanje števila sosedov(razdalje), količine žog in količine košev. Pri tem sva privzela, da v primeru, ko je košev z najmanjšim številom žog med pregledanimi koši več, položimo žogo v koš z najmanjšim indeksom.

```
#ISKANJE SOSEDOV
def najdi_sosede_1d(kosi,izbrana_kosarica, razdalja=1):
    sosedi = {}
    st_kosev = len(kosi)
    for j in range((-razdalja),(razdalja+1)):
        najdi indeks soseda v listu s pomocjo modula, da velja
        ↪ kroznost
        v slovar sosedov dodaj njegov indeks kot kljuc in
        ↪ njegovo stevilo zog kot vrednost
    izmed sosedov poisi tistega z minimalno vrednost
    return sosedi, minimalna_vrednost
```

```
#ISKANJE MAKSIMALNEGA STEVILA ZOG
def maksimalno_stevilo_zogic(st_zogic, st_kosev, razdalja=1):
    zacetek merjenja casa
    kosi = [0]*st_kosev
    for i in range(st_zogic):
        nakljucno izberemo kosarico
        najdi_sosede_1d(kosi, izbrana_kosarica, razdalja)
        poisci vse kandidate, ki so sosedi in imajo minimalno
         ↪  vrednost
        izmed kandidatov izberi tistega z najnizjim indeksom
        kosi[minimalni_sosed] += 1
    poisci maksimalno stevilo zog v kosu
    prestej stevilo kosev z maksimalnim stevilom zog
    izracunaj delez kosev z maksimalnim stevilom zog
    konec merjenja casa
    izracunaj casovno zahtevnost algoritma
    return maksimalno_stevilo_zog, casovna_zahtevnost,
     ↪  delez_kosev
```

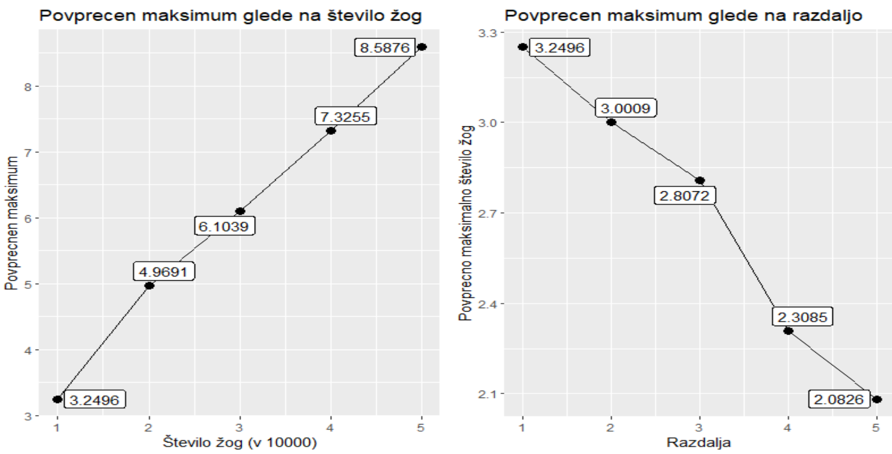
Funkcija *maksimalno_stevilo_zogic* torej sprejme izbrano število žog, število košar in razdalja, vrne pa vrednost maksimalnega število žog v košari, potreben čas za izvedbo funkcije in delež košar z maksimalnim številom žog. Program sva prilagodila tudi na dvodimenzionalno mrežo košev, ki deluje na podoben način.

Za boljši pregled nad dobljenimi rezultati sva jih želela generirati v veliki količini. Napisala sva program, ki je prej predstavljeno funkcijo izvedel 100-krat, preračunal povprečno vrednost maksimalnega števila žog, povprečen delež košev z maksimalno vrednostjo in povprečno časovno zahtevnost, nato pa postopek ponovil še 100-krat. Tako sva dobila željene podatke, ki so se zapisali v csv datoteke.

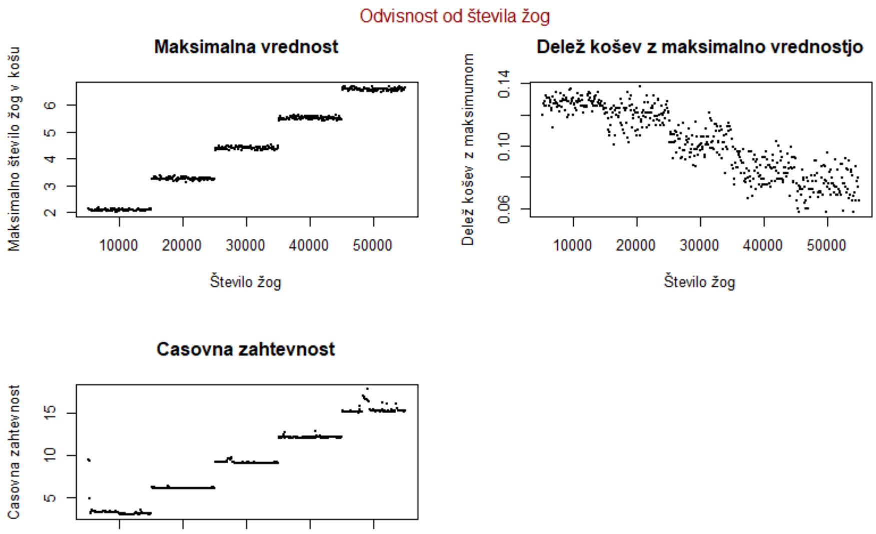
3 Analiza rezultatov

3.1 Enodimenzionalen problem

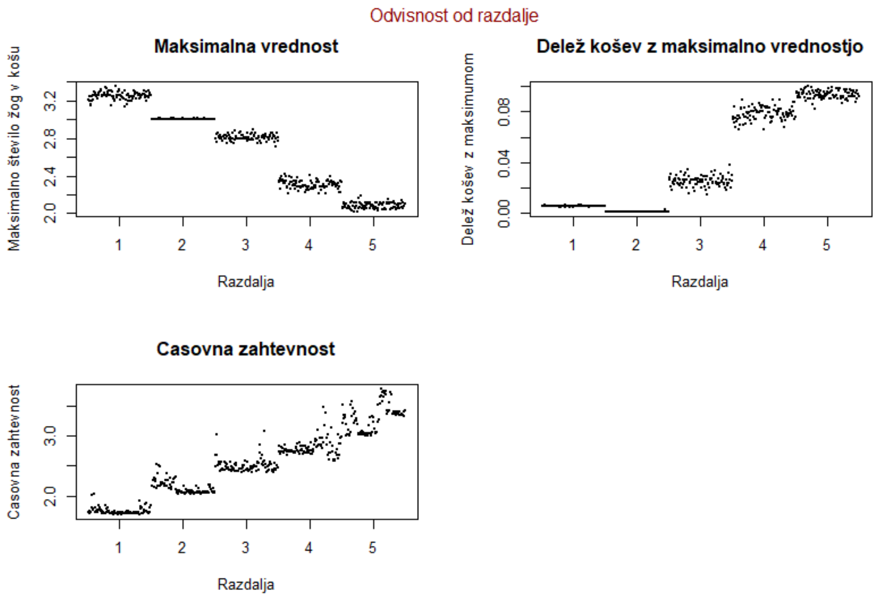
V naslednjem koraku sva se lotila analize rezultatov. Začela sva z opazovanjem podatkov v eni dimenziji in ugotavljala vpliv spreminjanja razdalje ter števila žog na opazovane tri vrednosti.



Na prvem grafu je prikazano spreminjanje povprečnega maksimalnega števila žog v košu v odvisnosti od števila žog oz. razdalje. Iz levega grafa je razvidno, da povprečna maksimalna vrednost raste s številom žog, skok pa je največji pri prvem prehodu. Na podlagi desnega grafa predvidevava, da bo povprečna maksimalna vrednost, pri nespremenjenem številu košev in žog, z večanjem razdalje padala, pri čemer se bo za velike n bližala vrednosti 1.



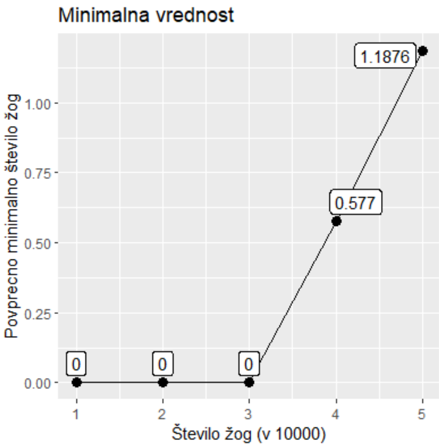
Zgornji graf prikazuje razpršenost in gibanje rezultatov glede na število žog. Vsaka pikica predstavlja povprečje opazovane vrednosti pridobljeno s 100-kratno ponovitvijo poskusa (prej omenjen postopek generiranja rezultatov). Razvidno je, da za nobeno izbrano količino žog povprečna maksimalna vrednost pretirano ne odstopa. Večje razlike pa so opazne pri deležu košar z maksimalno vrednostjo. Rezultati so bolj razpršeni za manjše količine žog, še posebaj zanimiv pa je rezultat pri količini 30000, kjer so odstopanja minimalna, torej so pri izvedbi poskusa rezultati skoraj enaki. Časovna zahtevnost dokaj enakomerno narašča, pri tem pa se razpršenost le minimalno spreminja.

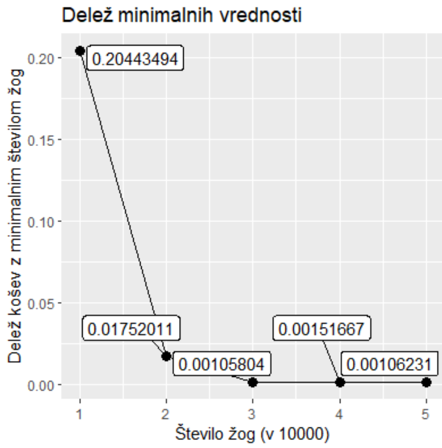


Druga sprmenljivka, ki naju je zanima je razdalja oz. število sosedov, njen vpliv pa je prikazan na zgornjem grafu. Tokrat opazimo, da se razpršenost deleža košev veča z razdalj. Predvidevava, da z večanjem števila sosedov raste delež košev z maksimalno vrendostjo, saj se žoge razporejajo bolj enakomerno. Časovna zahtevnost je veliko bolj razpršena, odstopanja se pojavljajo, ker z večanjem sosedov posledično vplivamo na večanje variabilnosti možnih kandidatov z minimalno vrednostjo žog v košari. Ob spreminjanju števila kandidatov pa se nato spreminja časovna zahtevnost.

3.1.1 Minimalna vrednost

Odločila sva se tudi za analizo minimalnega števila žog v koših in deleža košev z minimalnim številom žog.

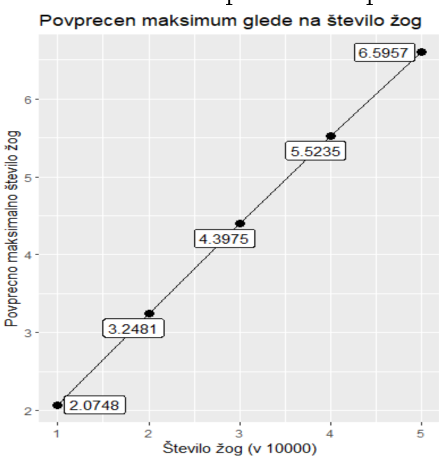


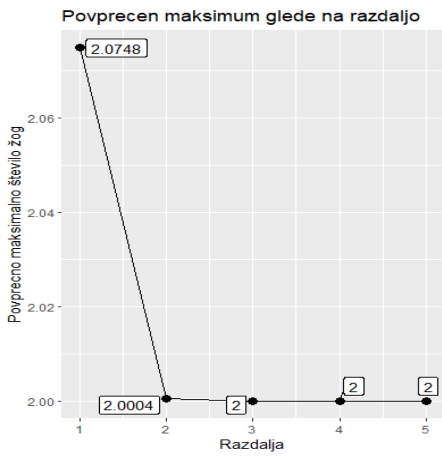


Opazimo, da se z večanjem števila žog minimalna vrednost hitro začne razlikovati od 0, hkrati pa lahko predvidevamo, da se delež košev asimptotsko približuje 0.

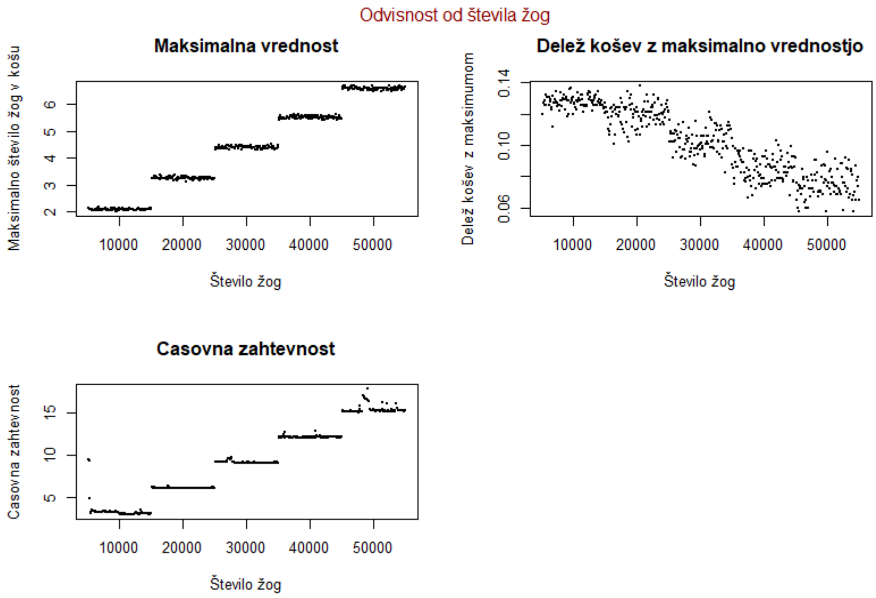
3.2 Dvodimenzionalen problem

V dvodimenzionalnem primeru sva poskuse izvajala na podoben način, zato sva tudi rezultate ponazorila podobno.

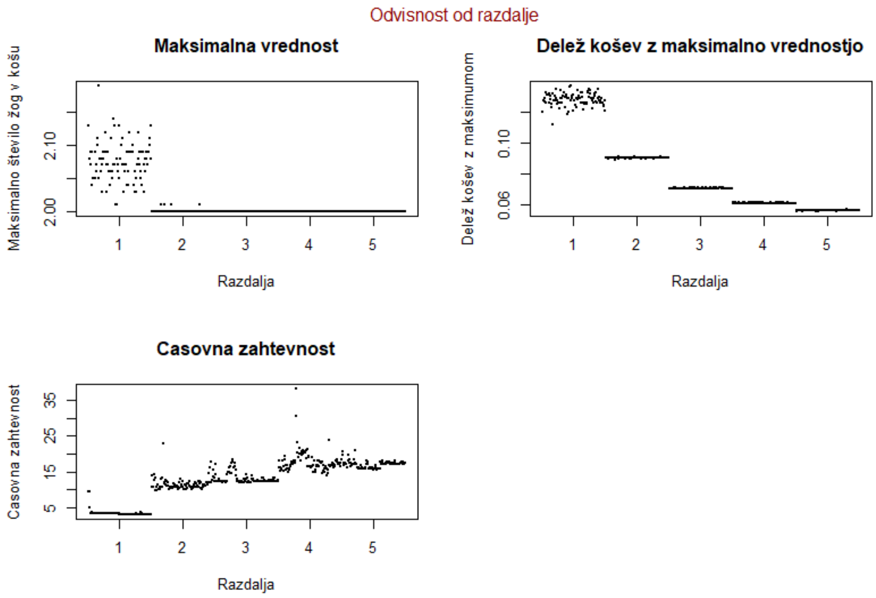




Povprečne maksimalne vrednoti so veliko manjše kot v enodimenzionalnem primeru, saj pride do večje prerazporeditve. Na desnem grafu vrendosti tudi veliko hitreje konvergirajo, kar je pričakovano, saj se število sosedov poveča za faktor +4 vsakič ko povečamo razdaljo, medtem ko se je v prejšnem primeru povečal le za +2.



Delež košev z maksimalno vrednostjo je veliko večji kot pri prejšnjem primeru, kar pomeni, da se žoge v dvodimenzionalnem modelu razporejajo veliko bolj enakomerno. Vidimo tudi, da delež pada z večanjem žog in predvidevava, da se delež premika proti 0.

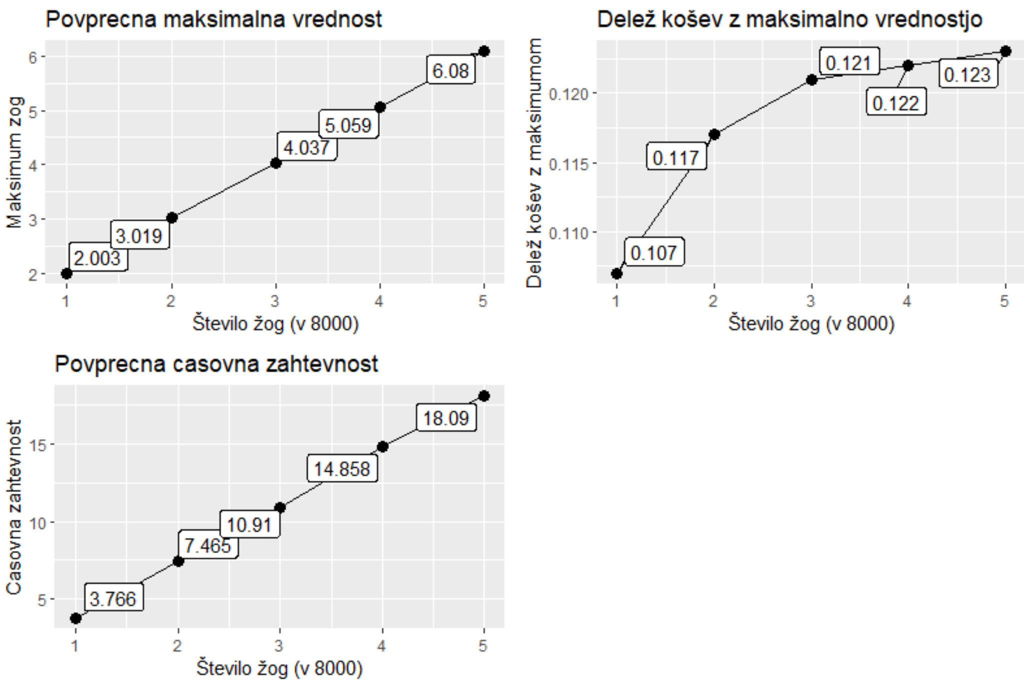


Takoj opazimo, da se rezultati na razdalji 1 na vseh treh grafih močno razlikujejo od ostalih. Delež od razdalje 2 dalje ni več razpršen, torej se rezultati dokaj ustalijo (vsakič dobimo zelo podobne vrednosti). Predvidevava, da bi delež z večanjem razdalje padal proti 0. Pri časovni zahtevnosti lahko razpršenost utemeljimo s podobnim argumentom kot v enodimenzionalnem primeru.

3.3 Tridimenzionalen problem

Lotila sva se tudi problema soseske, kjer so košare predstavljene v tridimenzionalnem formatu. V tem primeru sta $b_{i,j,k}$ in $b_{i',j',l'}$ soseda, ko velja $|i-i'|+|j-j'|+|l-l'|=1$, ter so sosedje $b_{1,j,k}$ in $b_{n,j,k}$, $b_{i,1,k}$ in $b_{i,n,k}$ ter $b_{i,j,1}$ in $b_{i,j,n}$ za $i,j,k \in [n]$.

Generirala sva 100 povprečij 100 naključnih poskusov, kjer imamo $k \cdot 8000$ žog in 8000 košar, $k = 1, 2, \ldots, 5$. V spodnjih grafih so prikazana povprečja posameznih rezultatov.



Glede na generirane podatke ocenjujeva, da se maksimalna vrednost žog v posamezni košari veča za približno $1,02$ z večanjem števila žog. Delež košov z maksimalno vrednostjo ima v prvem koraku malo večji skok, kjer se delež poveča za 0.01, potem pa se rast precej umiri, kjer so razlike med koraki približno 0.001. Časovna zahtevnost se z vsakim večanjem žog poveča za približno 3 do 4 sekunde.