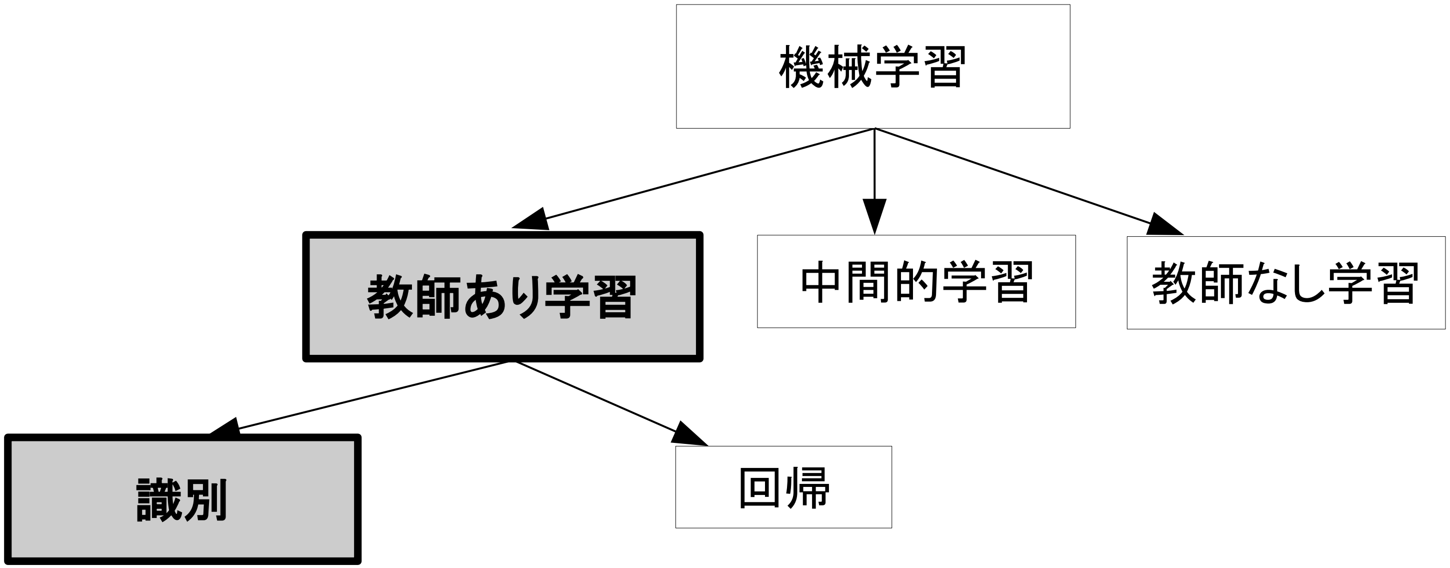
本日の予定

- 9:30-10:30　生成モデルと識別モデル（5 章）
- 10:45-11:45 サポートベクトルマシン (7 章)

　(昼休憩)

- 13:00-14:00 ニューラルネットワーク（8 章）
- 14:15-15:15 深層学習（9 章）
- 15:30-16:30 アンサンブル学習（10 章）

5. 識別　ー生成モデルと識別モデルー

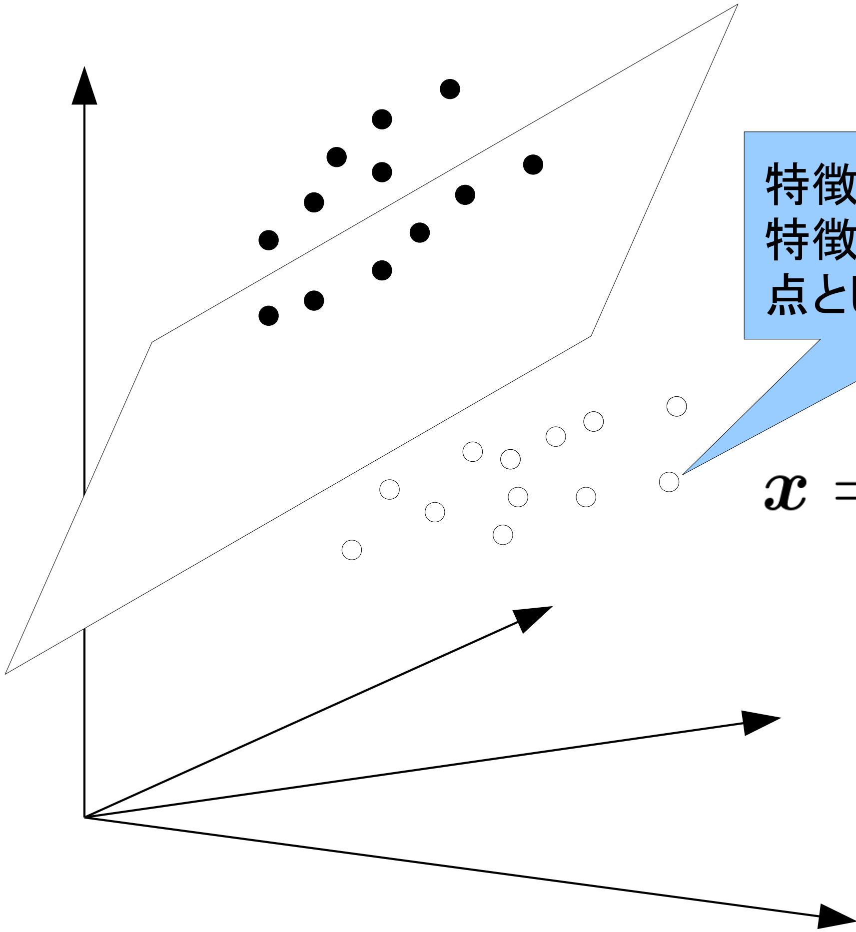


- ラベル特徴
- 数値特徴

気温 = 20
湿度 = 60
降水確率 = 0

Play = Yes

5.1 数値特徴に対する「教師あり・識別」問題の定義



特徴ベクトルは、
特徴空間上の
点として表現される

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)^T$$

比較的クラスが分離している

→ 小数のパラメータで各クラスを表現可能

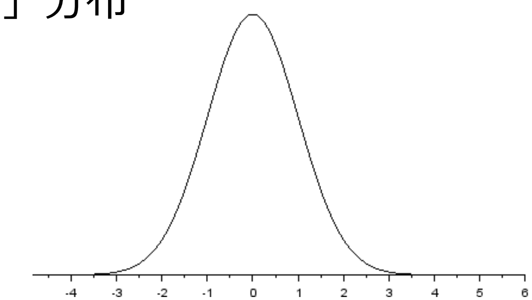
⇒ **統計的手法**

クラス境界が複雑

非線形識別面 ⇒ **ニューラルネット**

高次元へマッピング⇒ **SVM**

統計的識別手法の考え方 （復習）

	現実	モデル
未知	パターン認識の対象となる全データ［母集団］ モデル化	「真の」分布  例）母平均
既知	抽出 学習データ $\chi = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ 統計処理	推定 統計量 例）標本平均 $\boldsymbol{m} = \frac{1}{n} \sum_{\boldsymbol{x} \in \chi} \boldsymbol{x}$

統計的識別とは（復習）

- 最大事後確率則による識別

$$C_{MAP} = \arg\max_i P(\omega_i|\boldsymbol{x})$$

$\boldsymbol{x}$ ：特徴ベクトル

$\omega_i \quad (1 \leq i \leq c)$ ：クラス

- ベイズの定理 $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} C_{MAP} &= \arg\max_i P(\omega_i|\boldsymbol{x}) \\ &= \arg\max_i \frac{P(\boldsymbol{x}|\omega_i)P(\omega_i)}{P(\boldsymbol{x})} \\ &= \arg\max_i P(\boldsymbol{x}|\omega_i)P(\omega_i) \end{aligned}$$

尤度

事前確率 $P(\omega_i) = \frac{n_i}{N}$

尤度 $P(\boldsymbol{x} \mid \omega_i)$ の推定 （復習）

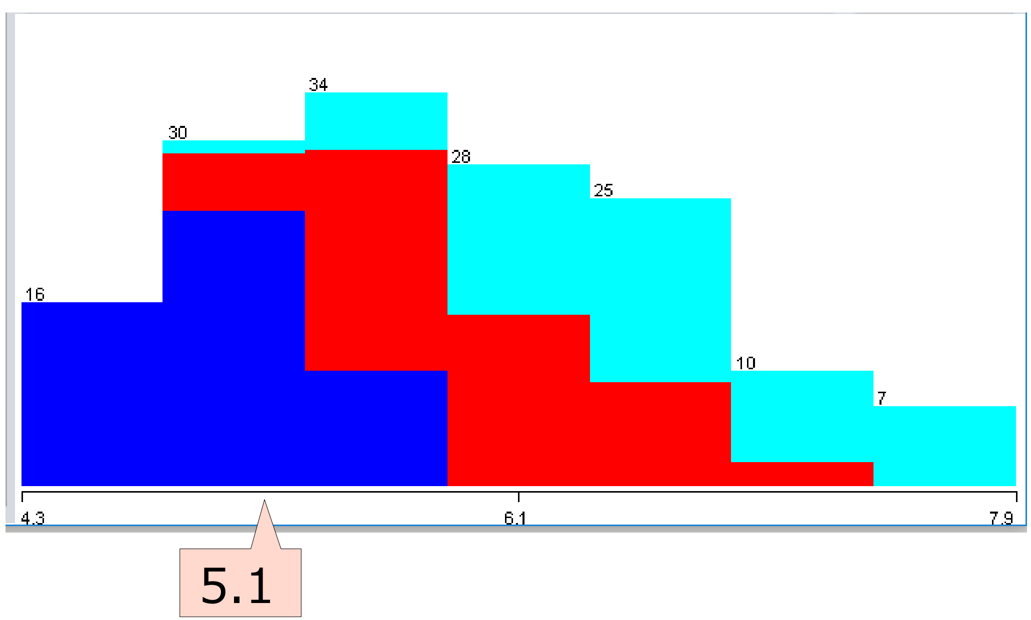
- カテゴリ特徴の場合
  - $P(\mathrm{sunny,hot,high,FALSE} \mid \mathrm{yes})$ などの値をすべての特徴・クラスの組合せについて求めるのは難しい
  - ナイーブベイズの近似

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{x}|\omega_i) &= P(x_1, \ldots, x_d|\omega_i) \\
&\approx \prod_{j=1}^{d} P(x_j|\omega_i)
\end{aligned}
$$

$P(\mathrm{sunny} \mid \mathrm{yes})$ などを求めて掛け合わせる

5.2 数値特徴に対するベイズ識別
5.2.1 数値特徴に対するナイーブベイズ識別

- 数値特徴の場合
  - $P(5.1, 3.5, 1.4. 0.2 \mid \text{iris-setosa})$ などの値をすべての特徴・クラスの組合せについて求めるのは**不可能**
  - ナイーブベイズの近似
    - $P(5.1 \mid \text{iris-setosa})$ の値をどうやって求める？



5.2.1 数値特徴に対するナイーブベイズ識別

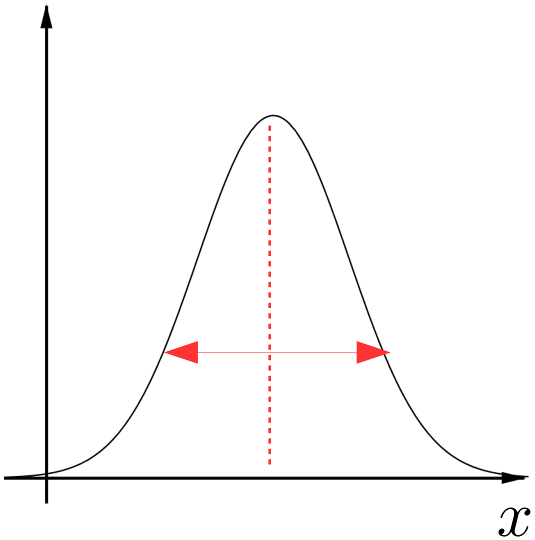
- 確率密度関数 $p(x_j|\omega_i)$ の推定
  - 正規分布を仮定

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

  - データから平均 μ と分散 σ^2 を最尤推定

P(sepallength | iris-setosa)
などが正規分布すると仮定する

データの平均と分散を
正規分布のパラメータとする



正規分布とは

- 離散型二項分布の例
  - n 枚のコインを投げた時の、表の枚数の度数
    - n=1 1 1
    - n=2 1 2 1
    - n=3 1 3 3 1
    - n=4 1 4 6 4 1
    - n=5 1 5 10 10 5 1

    …
  - $n \to \infty$ の時の分布が正規分布

5.2.2 生成モデルの考え方

- 事後確率を求めるにあたって、同時確率を求めている
  - データが生成される様子をモデル化していると見ることも出来る
    - 事前確率に基づいてクラスを選ぶ
    - そのもとで、特徴ベクトルを出力する

$$
\begin{aligned}
P(\omega_i|\boldsymbol{x}) &= \frac{p(\boldsymbol{x}|\omega_i)P(\omega_i)}{p(\boldsymbol{x})} \\
&= \frac{p(\omega_i, \boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x})}
\end{aligned}
$$

事後確率を求めるより、難しい問題を解いているのではないか？

5.3.3 識別モデルの考え方

- 事後確率を直接求める

正例で大きな値

負例で大きな値

あまり関係ない

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_d)$$

w_1 正の大きな値

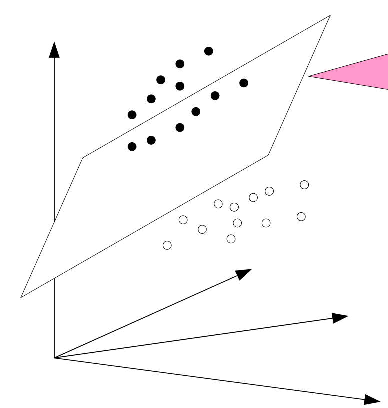
w_2 負の大きな値

w_3 小さな値

正例／負例の閾値

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \cdots + w_d x_d + w_0$$

この値が正なら正例、負なら負例となるように重み $\boldsymbol{w}$ を学習する



この平面を求めていることになる

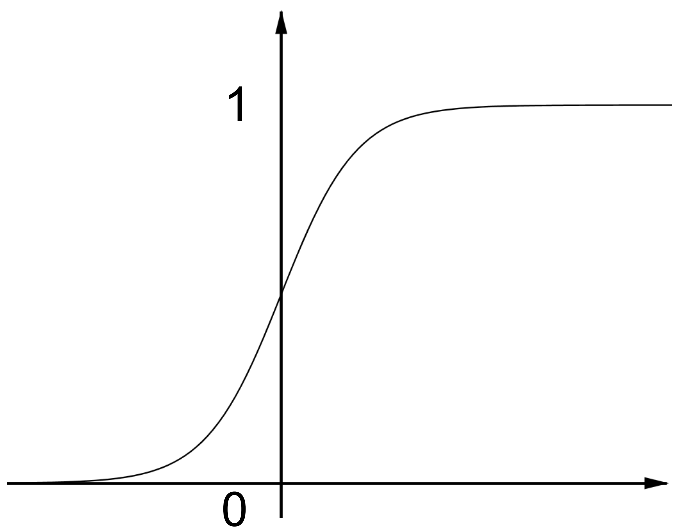
確率と対応づけるには？

5.3.4 ロジスティック識別

- ロジスティック識別
  - 入力が正例である確率

$$P(\oplus|\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 + \exp(-(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} + w_0))}$$

-∞ 〜 +∞ の値域を持つものを、順序を変えずに 0 〜 1 にマッピング



シグモイド関数

5.3.4 ロジスティック識別

- 最適化対象＝モデルが学習データを生成する確率

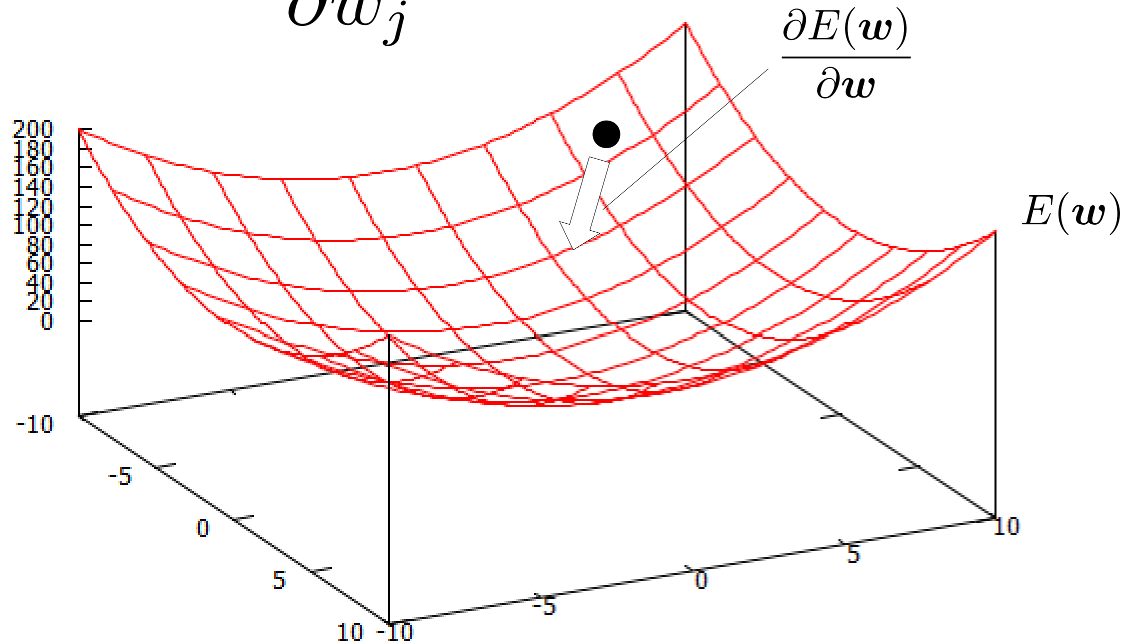
$$E(\boldsymbol{w}) = -\log P(D|\boldsymbol{w}) = -\log \prod_{\boldsymbol{x}_i \in D} o_i^{y_i}(1-o_i)^{(1-y_i)}$$

$$o = P(\oplus|\boldsymbol{x})$$
$$y = 0 \;\; or \;\; 1$$

正解ラベル

- $E(\boldsymbol{w})$ を最急降下法で最小化

$$w_j \leftarrow w_j - \eta \frac{\partial E(\boldsymbol{w})}{\partial w_j}$$



5.3.4 ロジスティック識別

- 重み更新量の計算

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{w})}{\partial w_j} = \sum_{\boldsymbol{x}_i \in D} \left(\frac{y_i}{o_i} - \frac{1-y_i}{1-o_i}\right) o_i (1-o_i) x_{ij}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x}_i \in D} (y_i - o_i) x_{ij}$$

- 重みの更新式

$$w_j \leftarrow w_j - \eta \sum_{\boldsymbol{x}_i \in D} (y_i - o_i) x_{ij}$$

この更新を全データ集合
ではなく、個別のデータ
に対して行うのが、
確率的最急降下法

まとめ

- Weka デモ
  - iris データ、 glass データ
  - NaiveBayes, SimpleLogistic
- ナイーブベイズ
  - 特徴の各次元に対して、 1 次元正規分布のパラメータ（平均・分散）を最尤推定
- ロジスティック識別
  - 特徴の重み付き和で得られる「そのクラスらしさ」を確率値に変換