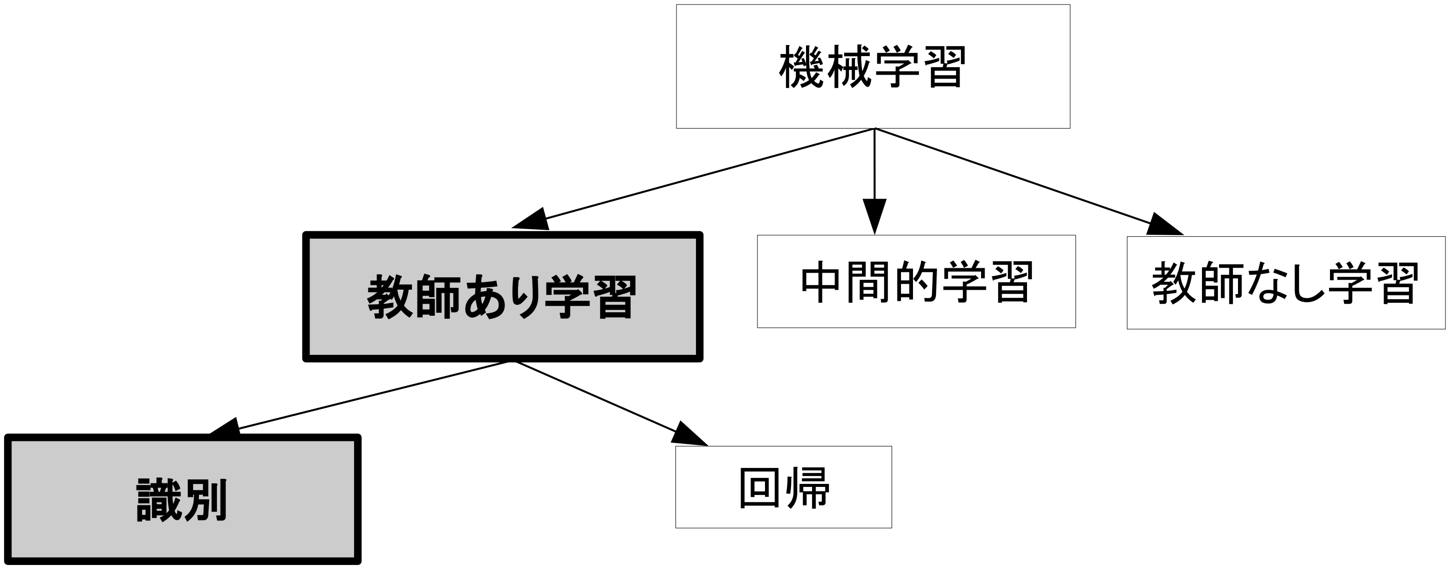
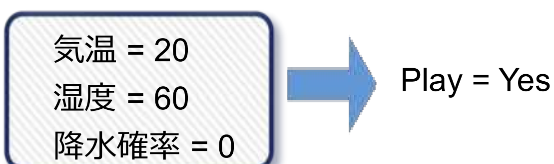
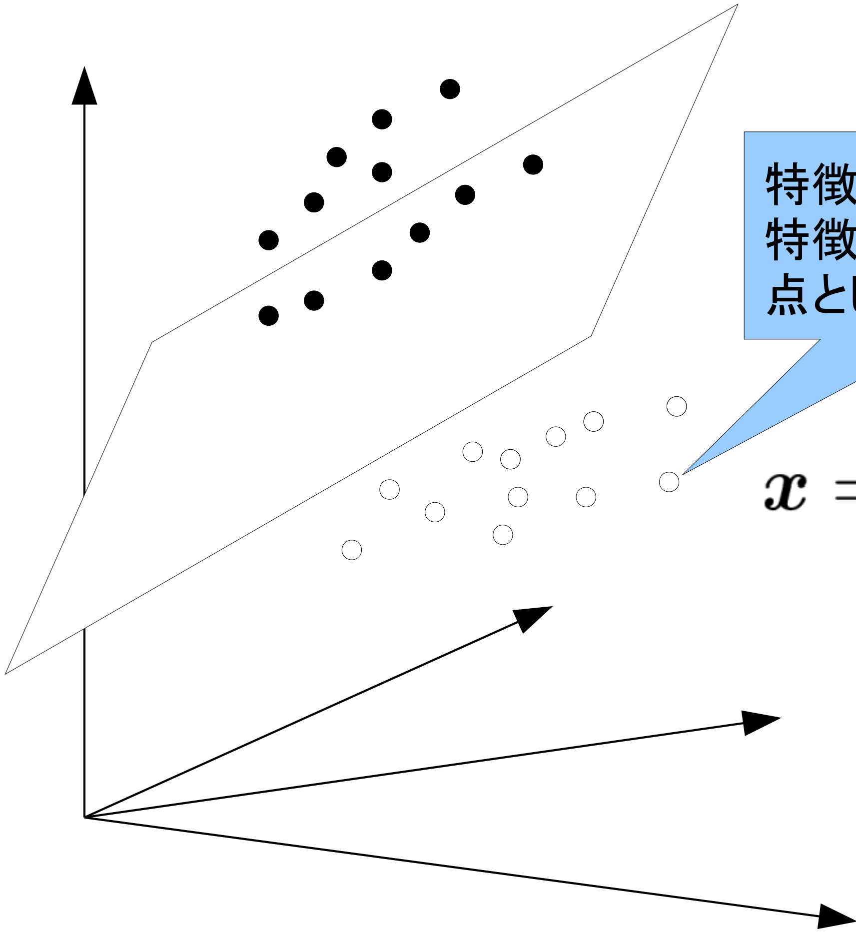
# 5. 識別　ー生成モデルと識別モデルー




- ラベル特徴
- 数値特徴



# 5.1 数値特徴に対する「教師あり・識別」問題の定義



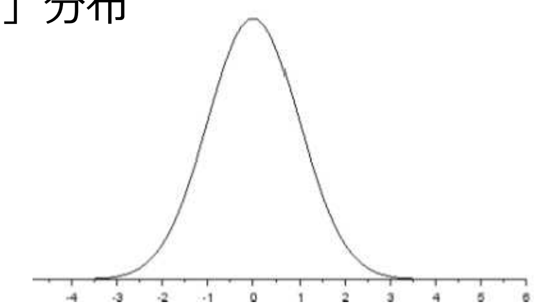
特徴ベクトルは、
特徴空間上の
点として表現される

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)^T$$

比較的クラスが分離している
→ 小数のパラメータで各クラスを表現可能
⇒ **統計的手法**

クラス境界が複雑
非線形識別面 ⇒ **ニューラルネット**
高次元へマッピング⇒ **SVM**

# 統計的識別手法の考え方

| | 現実 | モデル |
| --- | --- | --- |
| 未知 | パターン認識の<br>対象となる全データ<br>［母集団］<br>→ モデル化 | 「真の」分布<br><br>例）母平均 |
| | ↓ 抽出 | ↑ 推定 |
| 既知 | 学習データ<br>$\chi = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$<br>→ 統計処理 | 統計量<br>例）標本平均<br>$\boldsymbol{m} = \frac{1}{n} \sum_{\boldsymbol{x} \in \chi} \boldsymbol{x}$ |

# 統計的識別とは（復習）

- 最大事後確率則による識別

$$C_{MAP} = \arg\max_i P(\omega_i|\boldsymbol{x})$$

$\boldsymbol{x}$ ：特徴ベクトル

$\omega_i \quad (1 \leq i \leq c)$ ：クラス

- ベイズの定理 $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} C_{MAP} &= \arg\max_i P(\omega_i|\boldsymbol{x}) \\ &= \arg\max_i \frac{P(\boldsymbol{x}|\omega_i)P(\omega_i)}{P(\boldsymbol{x})} \\ &= \arg\max_i P(\boldsymbol{x}|\omega_i)P(\omega_i) \end{aligned}$$

尤度

事前確率 $P(\omega_i) = \dfrac{n_i}{N}$

# 尤度 $P(\boldsymbol{x} \mid \omega_i)$ の推定 （復習）

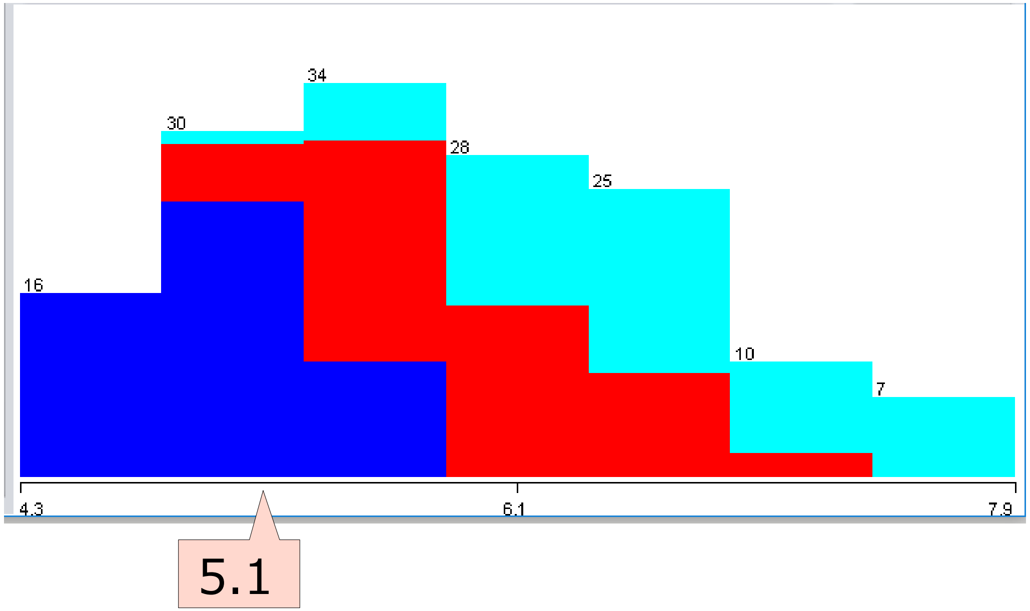
- カテゴリ特徴の場合
  - $P(\mathrm{sunny,hot,high,FALSE} \mid \mathrm{yes})$ などの値をすべての特徴・クラスの組合せについて求めるのは難しい
  - ナイーブベイズの近似

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{x}|\omega_i) &= P(x_1, \ldots, x_d|\omega_i) \\
&\approx \prod_{j=1}^{d} P(x_j|\omega_i)
\end{aligned}
$$

$P(\mathrm{sunny} \mid \mathrm{yes})$ などを求めて掛け合わせる

# 5.2 数値特徴に対するベイズ識別
## 5.2.1 数値特徴に対するナイーブベイズ識別

- 数値特徴の場合
  - $P(5.1, 3.5, 1.4, 0.2 \mid \text{iris-setosa})$ などの値をすべての特徴・クラスの組合せについて求めるのは**不可能**
  - ナイーブベイズの近似
    - $P(5.1 \mid \text{iris-setosa})$ の値をどうやって求める？



## 5.2.1 数値特徴に対するナイーブベイズ識別

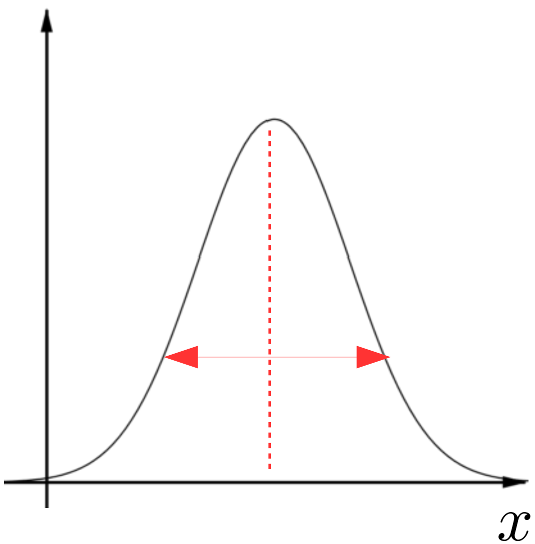
- 確率密度関数 $p(x_j|\omega_i)$ の推定
  - 正規分布を仮定

$P(\text{sepallength} \mid \text{iris-setosa})$
などが正規分布すると仮定する

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

  - データから平均 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ を最尤推定

データの平均と分散を
正規分布のパラメータとする



# 正規分布とは

- 離散型二項分布の例
  - n 枚のコインを投げた時の、表の枚数の度数
    - n=1　　1 1
    - n=2　　1 2 1
    - n=3　　1 3 3 1
    - n=4　　1 4 6 4 1
    - n=5　　1 5 10 10 5 1

    …
  - n→∞　の時の分布が正規分布

# 5.2.2 生成モデルの考え方

- 事後確率を求めるにあたって、同時確率を求めている
  - データが生成される様子をモデル化していると見ることも出来る
    - 事前確率に基づいてクラスを選ぶ
    - そのもとで、特徴ベクトルを出力する

$$
\begin{aligned}
P(\omega_i|\boldsymbol{x}) &= \frac{p(\boldsymbol{x}|\omega_i)P(\omega_i)}{p(\boldsymbol{x})} \\
&= \frac{p(\omega_i, \boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x})}
\end{aligned}
$$

事後確率を求めるより、
難しい問題を解いている
のではないか？

# 5.3.3 識別モデルの考え方

- 事後確率を直接求める

正例で大きな値

負例で大きな値

あまり関係ない

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_d)$$

$w_1$ 正の大きな値

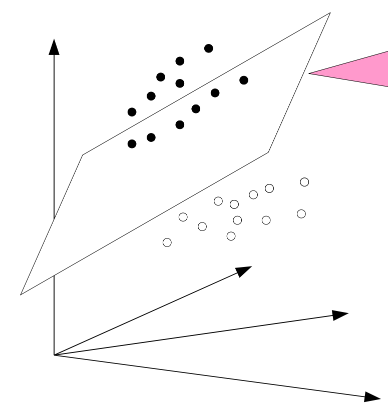
$w_2$ 負の大きな値

$w_3$ 小さな値

正例／負例の閾値

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \cdots + w_d x_d + w_0$$

この値が正なら正例、負なら負例となるように重み $\boldsymbol{w}$ を学習する



この平面を求めていることになる

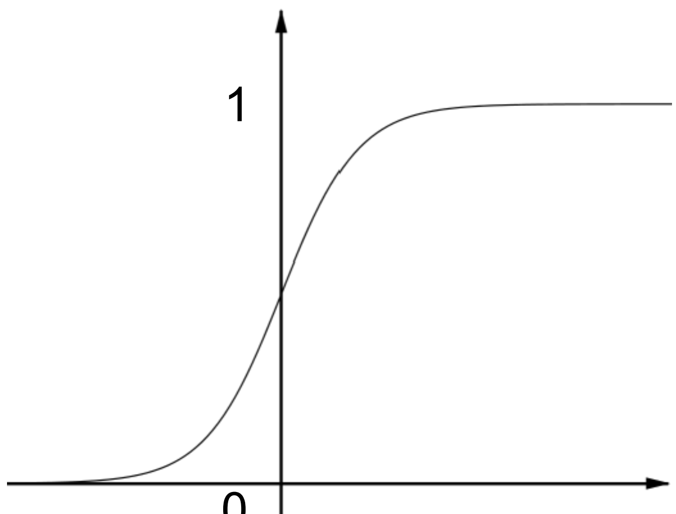
**確率と対応づけるには？**

# 5.3.4 ロジスティック識別

- ロジスティック識別
  - 入力が正例である確率

$$P(\oplus|\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1+\exp(-(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}+w_0))}$$

$-\infty$ 〜 $+\infty$ の値域を持つものを、順序を変えずに $0$ 〜 $1$ にマッピング




シグモイド関数

# 5.3.4 ロジスティック識別

- 最適化対象＝モデルが学習データを生成する確率

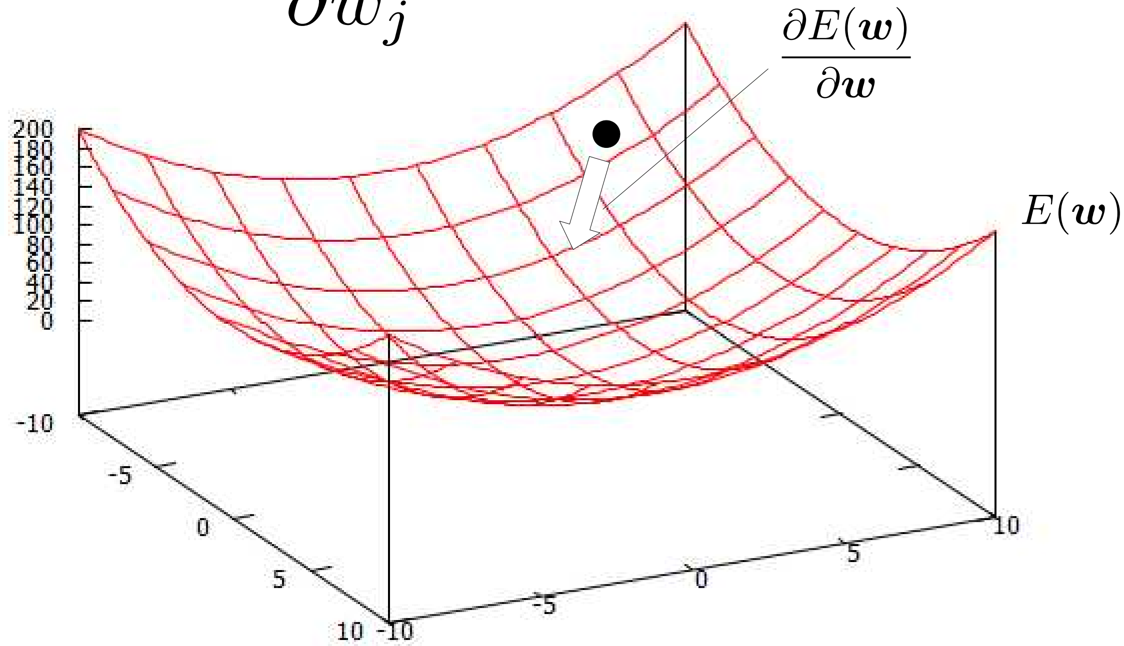
$$E(\boldsymbol{w}) = -\log P(D|\boldsymbol{w}) = -\log \prod_{\boldsymbol{x}_i \in D} o_i^{y_i}(1-o_i)^{(1-y_i)}$$

$$o = P(\oplus|\boldsymbol{x})$$
$$y = 0 \;\; or \;\; 1$$

正解ラベル

- $E(\boldsymbol{w})$ を最急降下法で最小化

$$w_j \leftarrow w_j - \eta \frac{\partial E(\boldsymbol{w})}{\partial w_j}$$



# 5.3.4 ロジスティック識別

- 重み更新量の計算

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{w})}{\partial w_j} = \sum_{\boldsymbol{x}_i \in D} \left(\frac{y_i}{o_i} - \frac{1-y_i}{1-o_i}\right) o_i(1-o_i) x_{ij}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x}_i \in D} (y_i - o_i) x_{ij}$$

- 重みの更新式

$$w_j \leftarrow w_j - \eta \sum_{\boldsymbol{x}_i \in D} (y_i - o_i) x_{ij}$$

この更新を全データ集合ではなく、個別のデータに対して行うのが、確率的最急降下法

# まとめ

- Weka デモ
  - iris データ、 glass データ
  - NaiveBayes, SimpleLogistic
- ナイーブベイズ
  - 特徴の各次元に対して、 1 次元正規分布のパラメータ（平均・分散）を最尤推定
- ロジスティック識別
  - 特徴の重み付き和で得られる「そのクラスらしさ」を確率値に変換

# 次回までの勉強

- Weka
  - インストールして、各章の例題・演習問題を実行
- Python
  - Google Colaboratory で各章の例題・演習問題を実行
    - Google アカウントが必要
- 余裕があれば
  - Chainer チュートリアル（1 ～ 6)

    https://tutorials.chainer.org/ja/tutorial.html