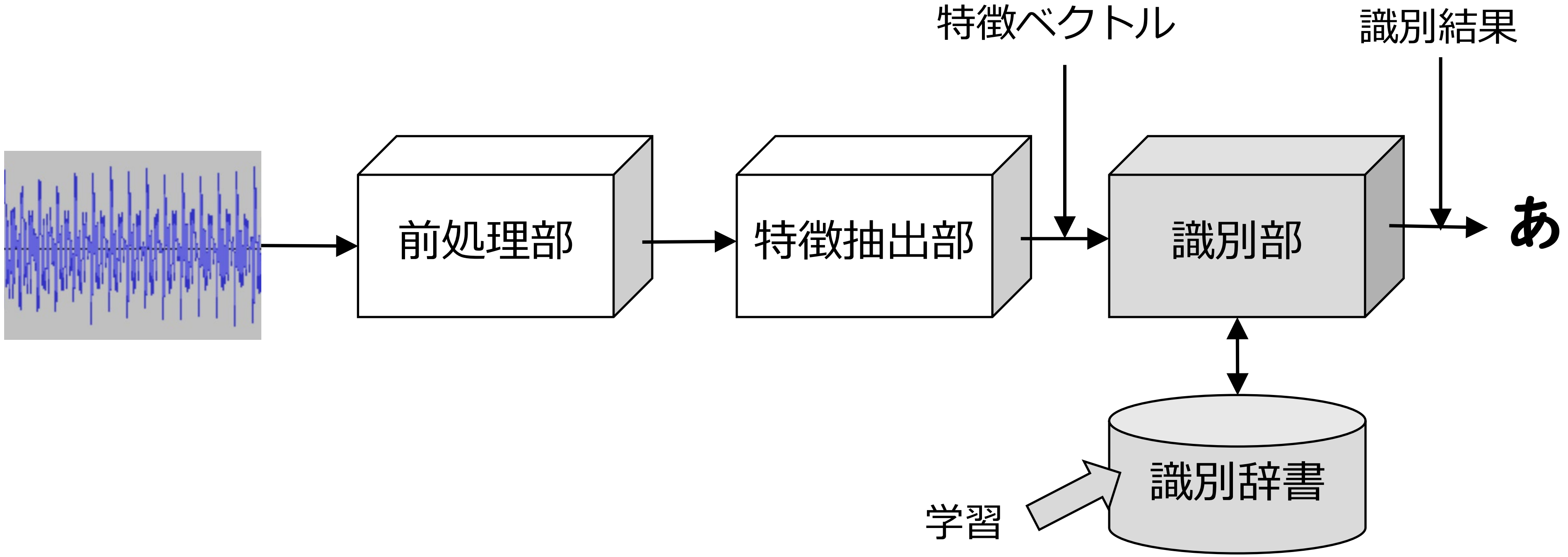
4. パターンを識別しよう



4.1 NN 法の定式化と問題設定

4.1.1「もっとも近い」の定義

- 識別対象のクラス：$\omega_1, \ldots, \omega_c$
- プロトタイプ
  - 各クラスの代表となる点

$$\boldsymbol{p}_i = (p_{i1}, \ldots, p_{id})^T \quad (i = 1, \ldots, c)$$

- 識別したい入力データ

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)^T$$

4.1.1「もっとも近い」の定義

- 入力ベクトルとプロトタイプとの距離

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_i) = \sqrt{(x_1 - p_{i1})^2 + \cdots + (x_d - p_{id})^2}$$

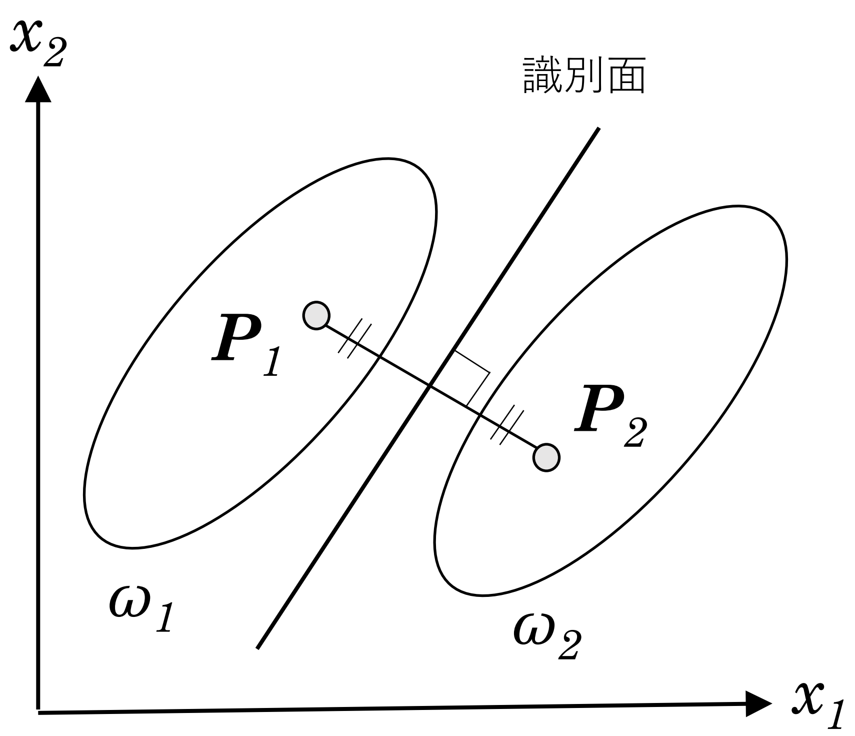
- NN法の判定式

$$\operatorname*{argmin}_i D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_i) = k \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \in \omega_k$$

4.1.2 プロトタイプと識別面の関係

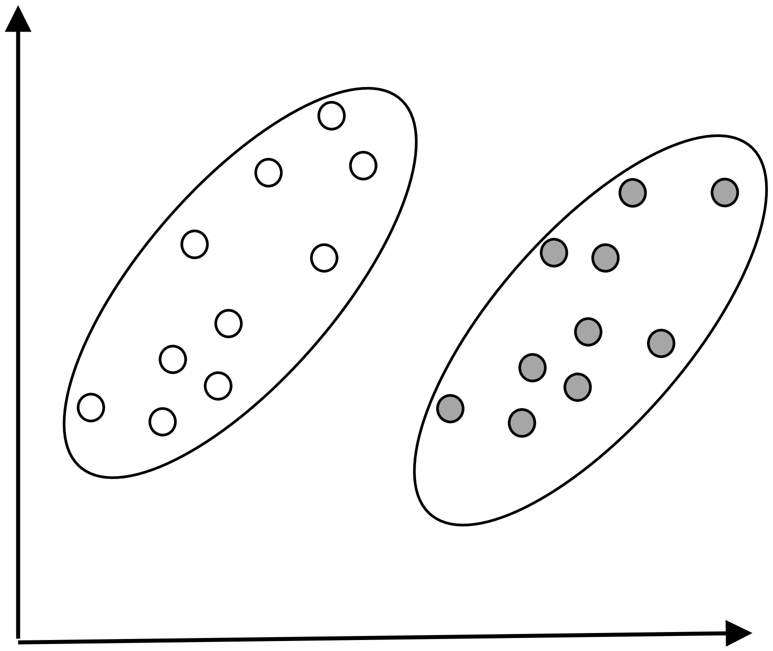
- 特徴空間の分割
  - ◆ 2次元特徴の2クラス問題（d=2, c=2）を考える
  - ◆ クラスを分離する境界

    ＝プロトタイプから等距離にある領域
    - 2次元のNN法では垂直2等分線
    - 多次元では超平面
    - 決定境界あるいは識別面とよぶ

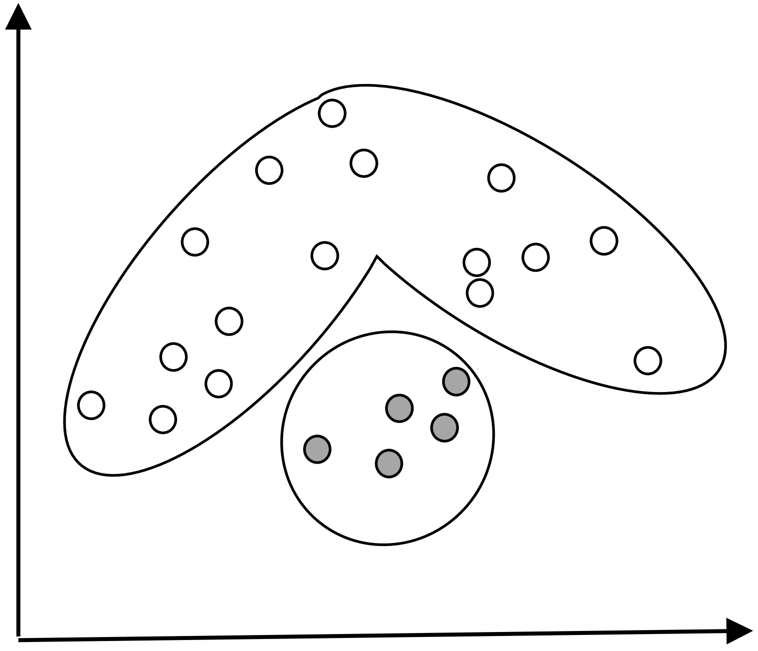


4.1.2 プロトタイプと識別面の関係

- 線形分離可能性
  - ◆ 直線（超平面）で2つのクラスが誤りなく分割できる場合を線形分離可能とよぶ



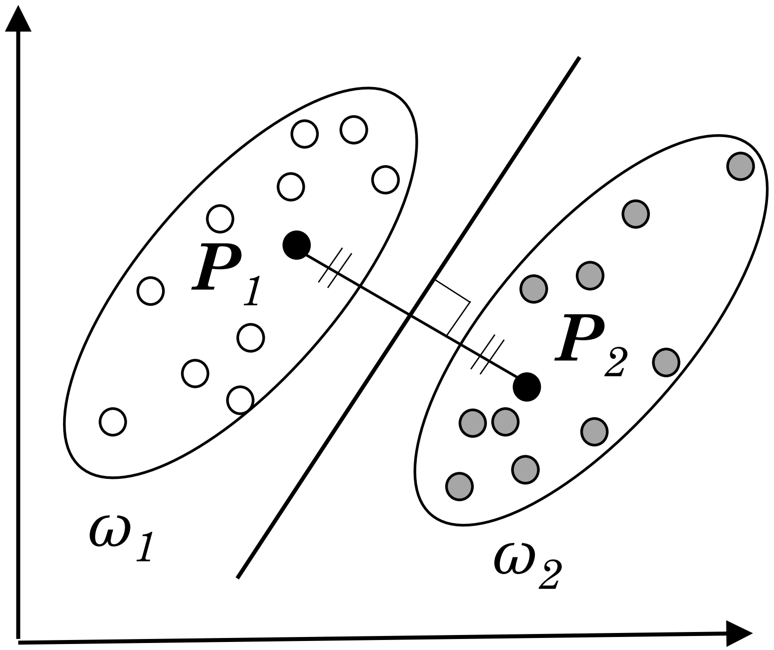
線形分離可能なデータ

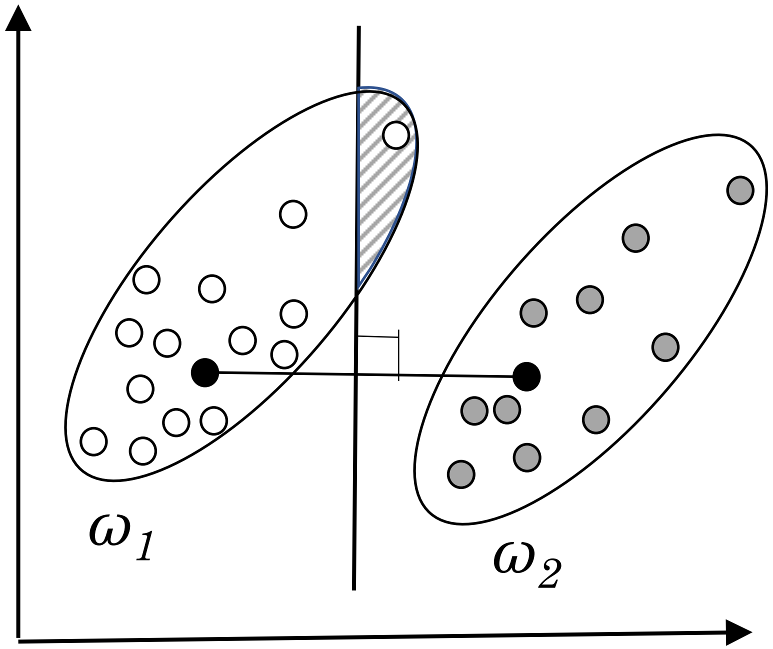


線形分離不可能なデータ

4.1.3 プロトタイプの位置の決め方

- クラスを代表するプロトタイプの設定法
  - ◆ 例：プロトタイプをクラスの重心にしたとき

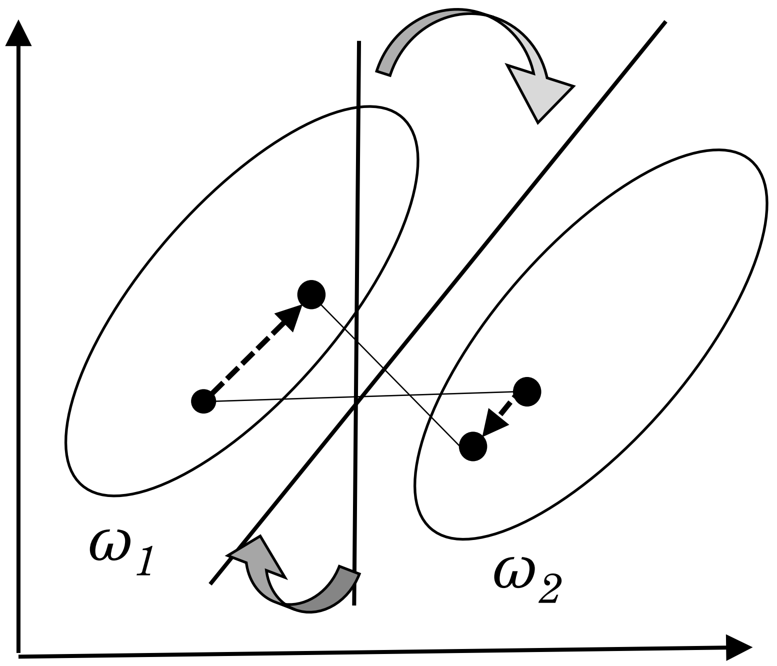




重心ではうまくゆかないことがある

4.2 パーセプトロンの学習規則

- 識別面の学習
  - ◆ 線形分離可能なデータに対して、識別誤りが生じない位置にプロトタイプを設定する



4.2 パーセプトロンの学習規則

- NN法における学習とは
  - ◆ プロトタイプの正しい位置を自動的に求めること
- 学習パターン
  - ◆ 識別部設計（特徴空間の分割）用に収集されたパターン
- 学習の手順
  - ◆ 学習パターンを用いて、学習パターンをすべて正しく識別できるような識別面を見いだすこと

4.2.1 識別関数の設定

- 1クラス1プロトタイプのNN法の定式化
  - クラス：$\omega_1,\dots,\omega_c$
  - プロトタイプ：$\boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_c$
  - 入力パターン：$\boldsymbol{x}$（特徴ベクトル）
  - NN法：$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}_i) = ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{P}_i||$ を最小にする i を探す

$$\rightarrow \quad ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{P}_i||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 - 2\boldsymbol{P}_i^T\boldsymbol{x} + ||\boldsymbol{P}_i||^2$$

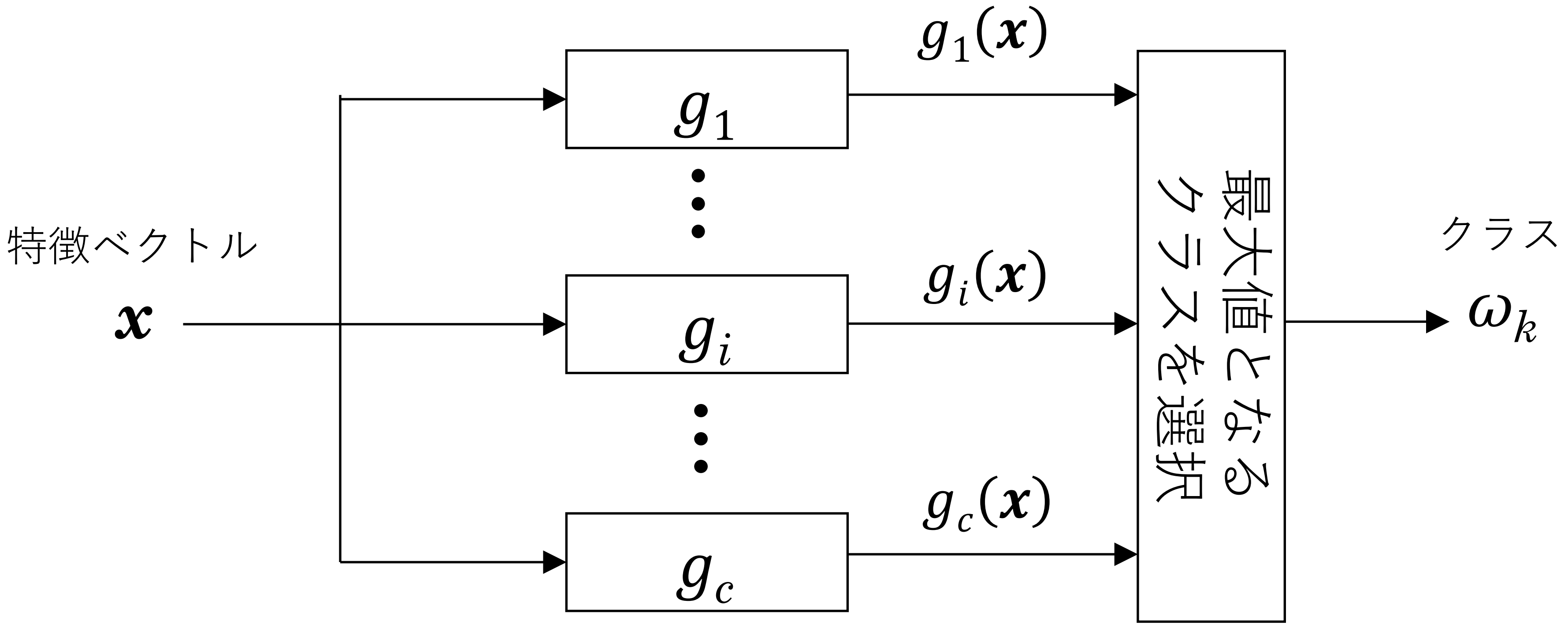
$$= ||\boldsymbol{x}||^2 - 2\underline{(\boldsymbol{P}_i^T\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}||\boldsymbol{P}_i||^2)}$$

iによって
変化する項

$\rightarrow$ 識別関数 $g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}_i^T\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}||\boldsymbol{P}_i||^2$ を最大にする i を探す

4.2.1 識別関数の設定

- NN法による識別部の実現



4.2.2 識別関数とパーセプトロン

- 線形識別関数
  - ◆ 識別関数の係数を

$$p_{ij} = w_{ij} \quad (j = 1, \ldots, d), \qquad -\frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}_i\|^2 = w_{i0}$$

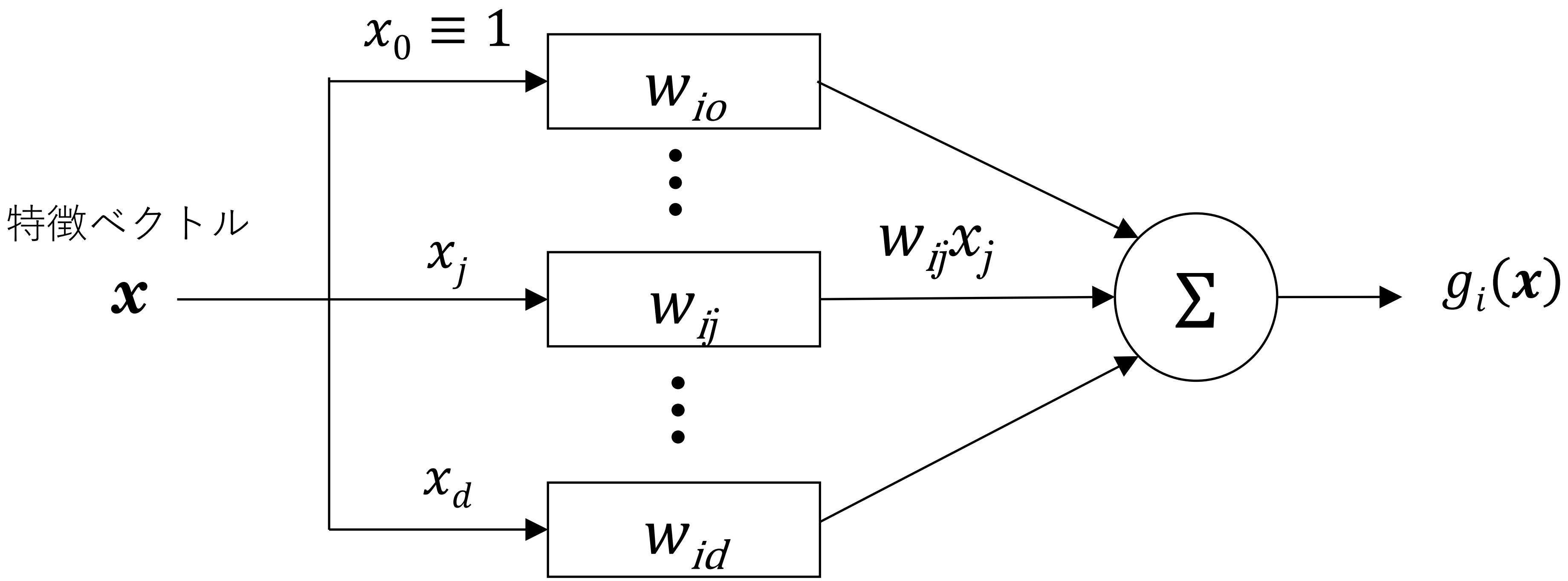
と置き換える

$$\begin{aligned} g_i(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^{d} w_{ij} x_j + w_{i0} \\ &= \sum_{j=0}^{d} w_{ij} x_j \quad (x_0 \equiv 1) \\ &= \boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{w}_i$, $\boldsymbol{x}$ は d+1 次元

4.2.2 識別関数とパーセプトロン

- 線形識別関数の計算法
  - ◆ この計算機構は神経細胞の振舞いを単純化したモデルであり、パーセプトロンとよばれる



4.2.3 2クラスの識別関数の学習

- 多クラスの線形識別関数の学習
  - ◆ 学習パターン全体：χ
  - ◆ クラス ω_i に属する学習パターンの集合 χ_i の全ての要素 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$g_i(\boldsymbol{x}) > g_j(\boldsymbol{x}) \quad (j = 1, \ldots, c,\ j \neq i)$$

が成り立つように重み $\boldsymbol{w}_i$ を決定する

4.2.3 2クラスの識別関数の学習

- 2クラスの場合
  - 1つの識別関数

$$g(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}$$

の正負を調べ、

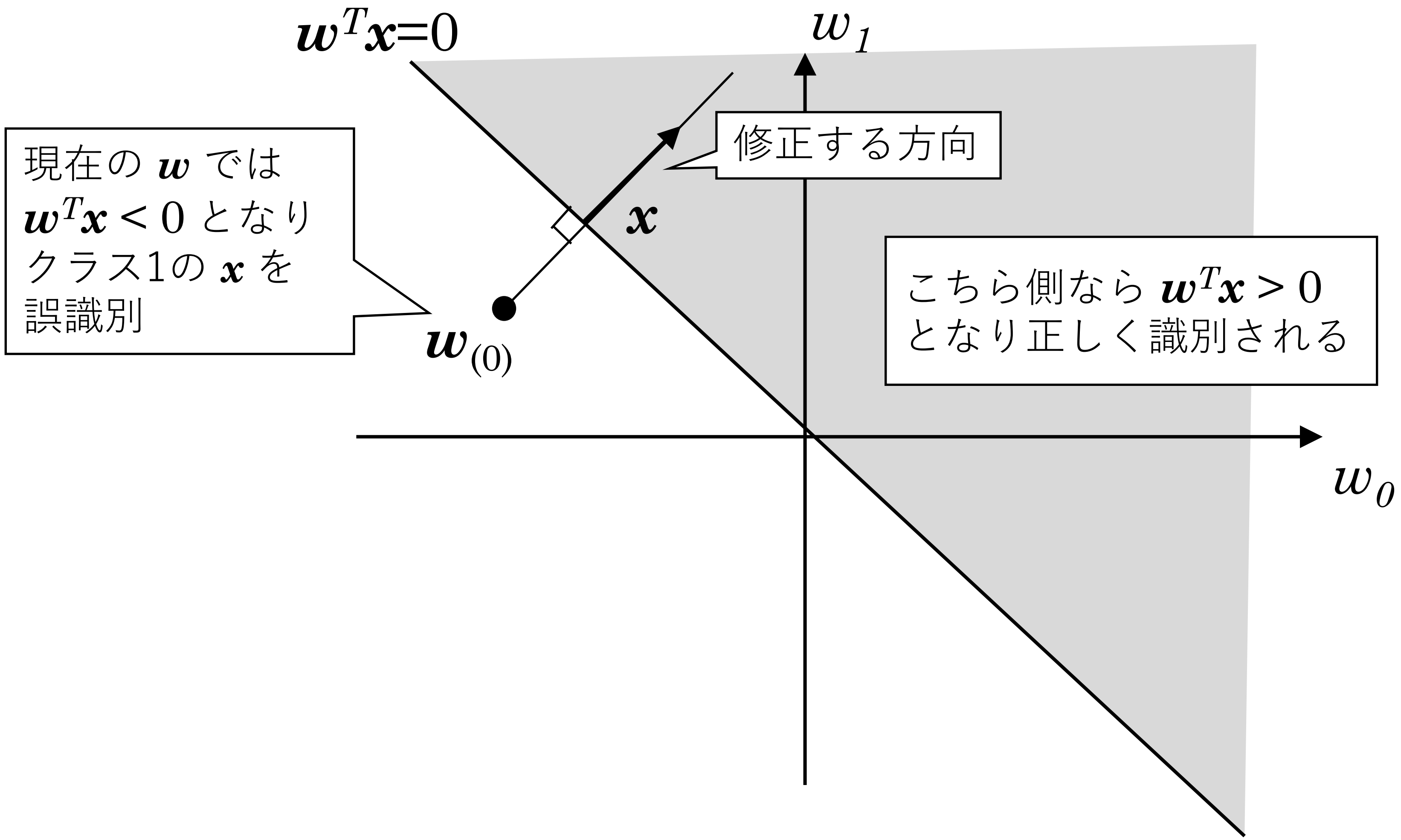
$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} \begin{cases} > 0 & (\boldsymbol{x} \in \chi_1) \\ < 0 & (\boldsymbol{x} \in \chi_2) \end{cases}$$

となる $\boldsymbol{w}$ を求める

  - クラス1を正例、クラス2を負例とよぶ

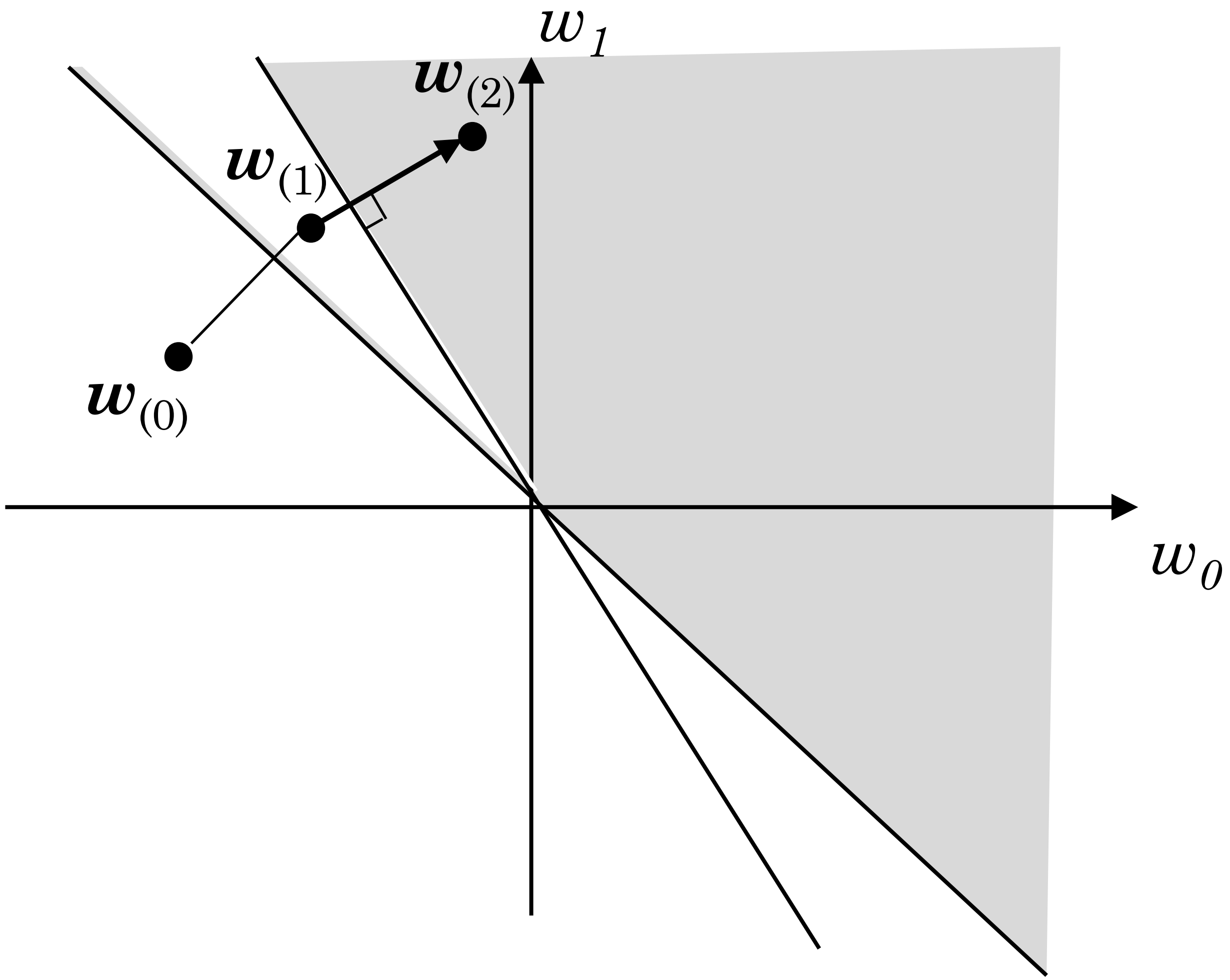
4.2.3 2クラスの識別関数の学習

- 重み空間での重みの修正



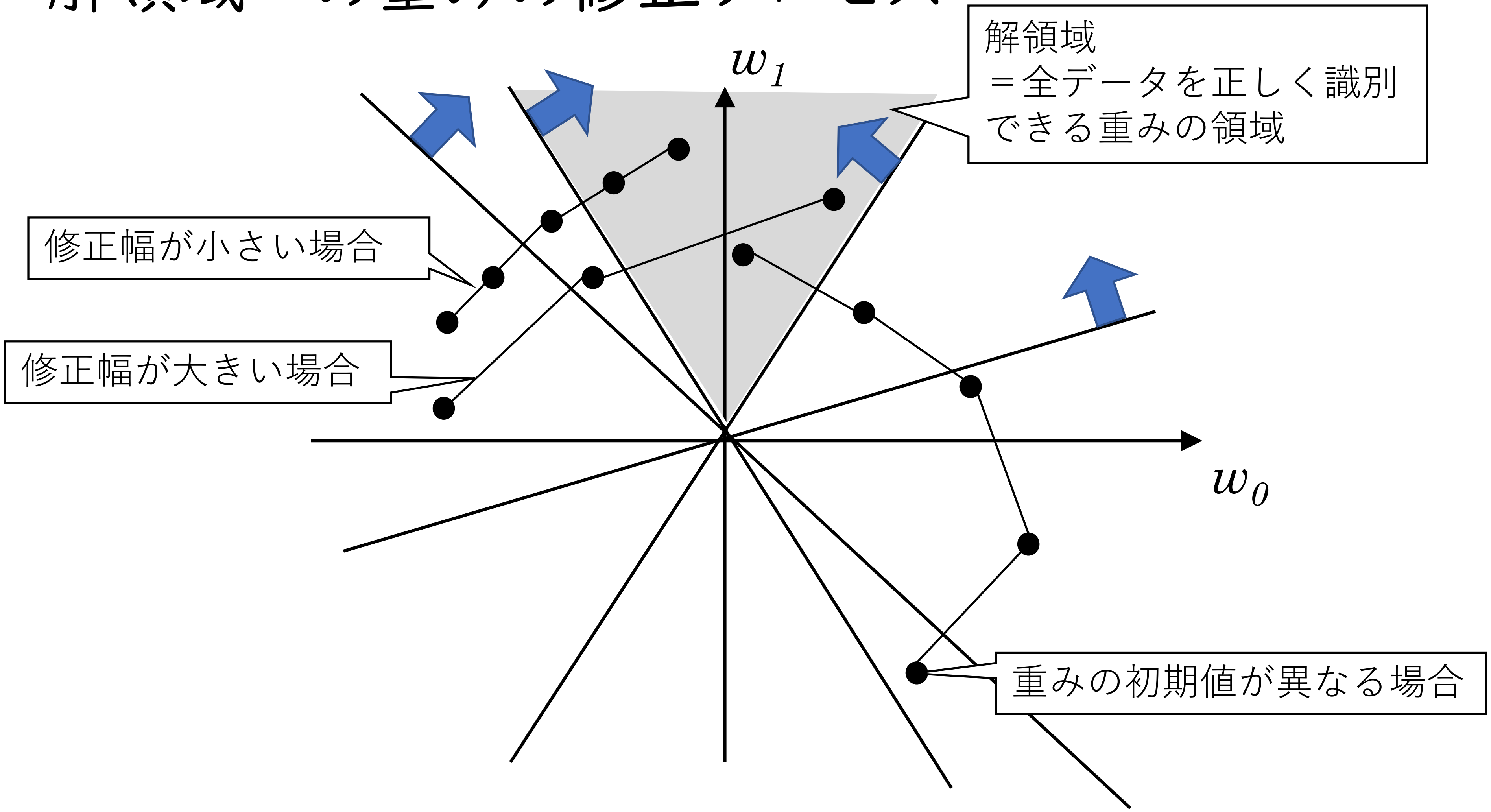
4.2.3 2クラスの識別関数の学習

- 別の学習データに対する重みの修正



4.2.3 2クラスの識別関数の学習

- 解領域への重みの修正プロセス



4.2.4 パーセプトロンの学習アルゴリズム

- パーセプトロンの学習規則

1. $\boldsymbol{w}$ の初期値を適当に決める
2. 学習データからひとつ $\boldsymbol{x}$ を選び、$g(\boldsymbol{x})$ を計算
3. 誤識別が起きたときのみ、$\boldsymbol{w}$ を修正する。ρ は学習係数

$$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w} + \rho\boldsymbol{x} \qquad \text{正例を負例と誤ったとき}$$

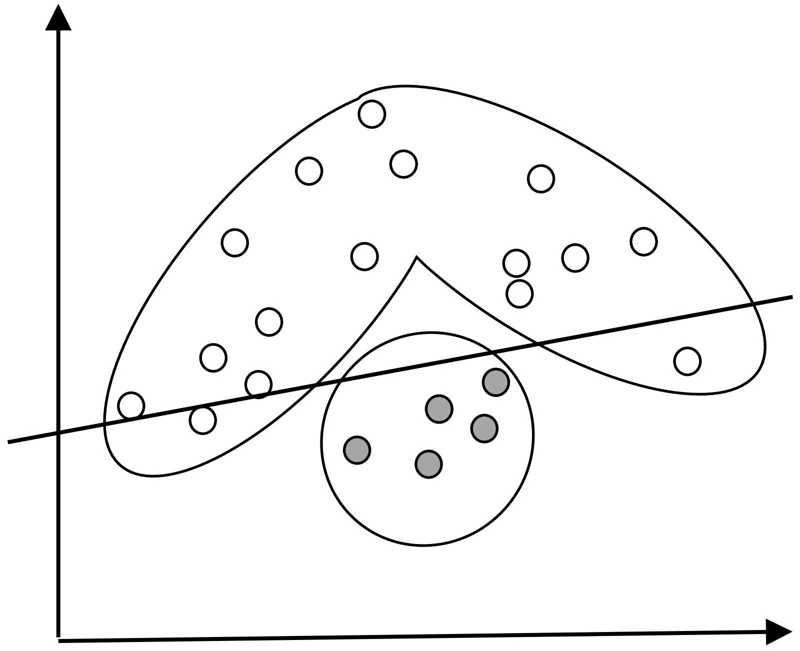
$$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w} - \rho\boldsymbol{x} \qquad \text{負例を正例と誤ったとき}$$

4. 2,3を全ての学習データについて繰り返す
5. すべて識別できたら終了。そうでなければ2へ

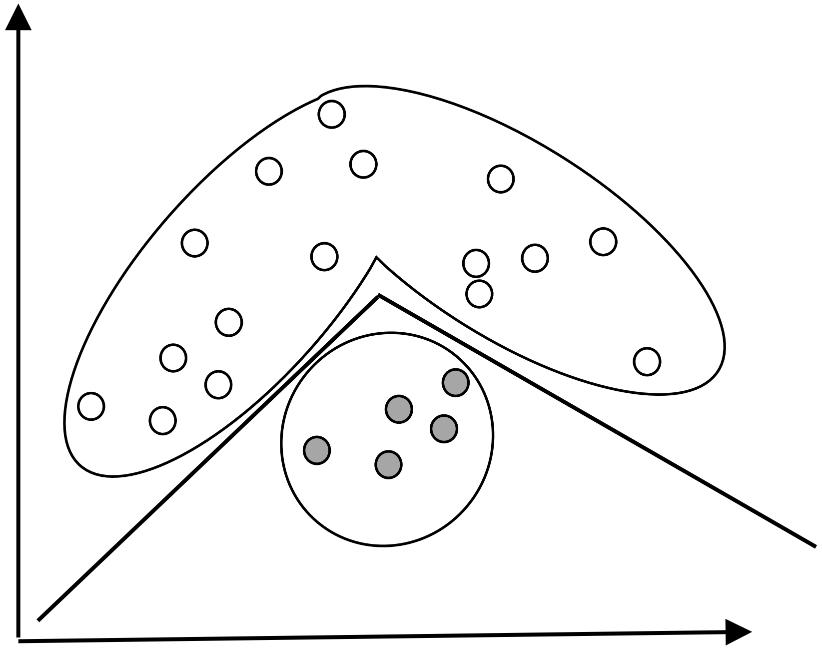
4.2.4 パーセプトロンの学習アルゴリズム

- パーセプトロンの収束定理
  - データが線形分離可能であれば、パーセプトロンの学習規則は有限回の繰り返しで終了する
- 学習係数 ρ の設定
  - 大きすぎると重みの値が振動する
  - 小さすぎると収束に時間がかかる

4.3 区分的線形識別関数とk-NN法
4.3.1 平面で区切れない場合



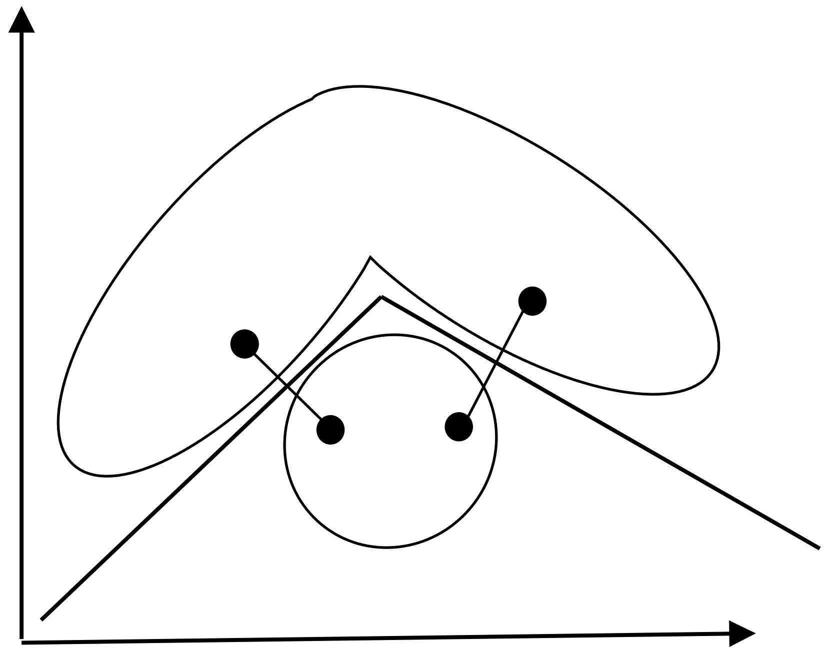
線形分離不可能なデータ



区分的線形識別関数を用いた場合

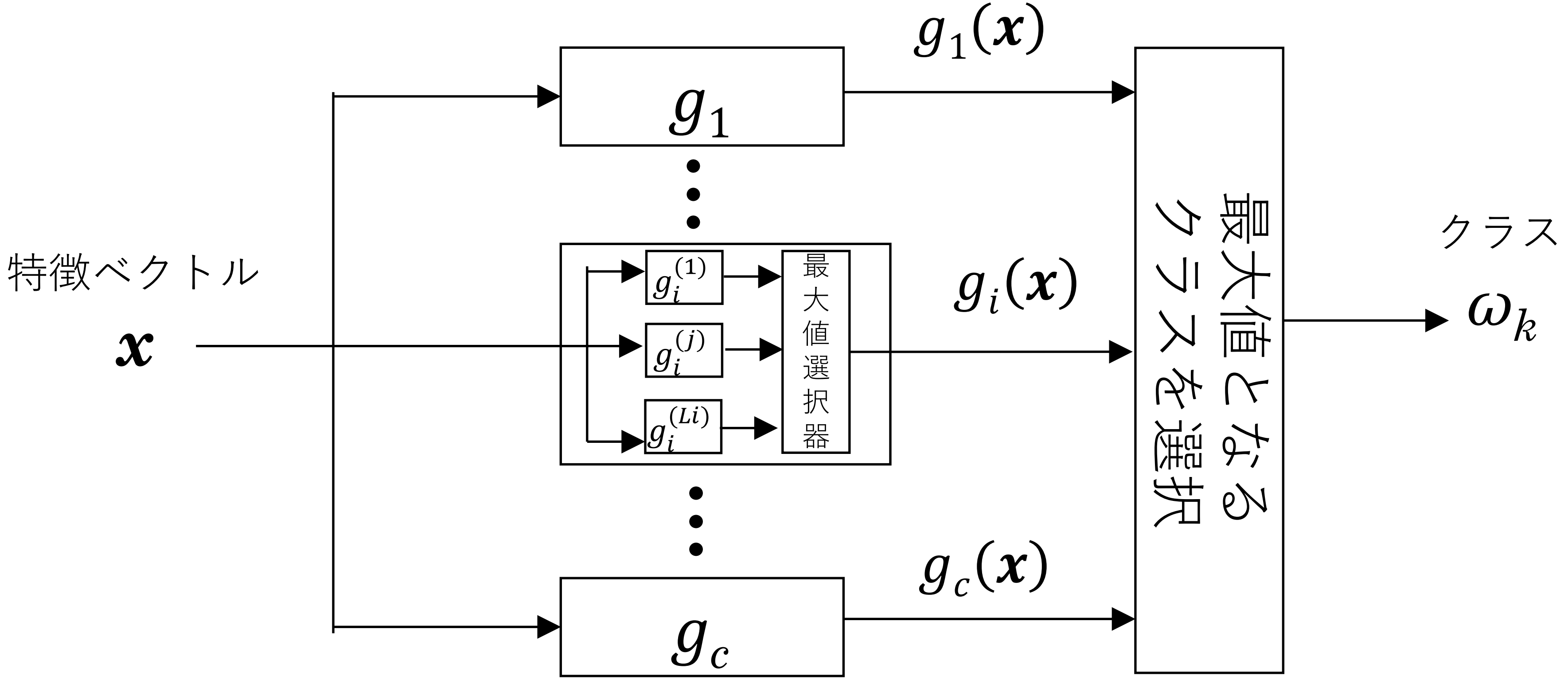
4.3.2 区分的線形識別関数の実現

- 区分的線形識別関数の決め方
  - ◆ 各クラス複数のプロトタイプを設定



4.3.2 区分的線形識別関数の実現

- 区分的線形識別関数の定義
  - ◆ クラス ω_i の識別関数 $g_i(\boldsymbol{x})$ を L_i 個の副次(線形)識別関数 $g_i^{(l)}(\boldsymbol{x})$ (l=1,...,L_i) の最大値としてあらわす

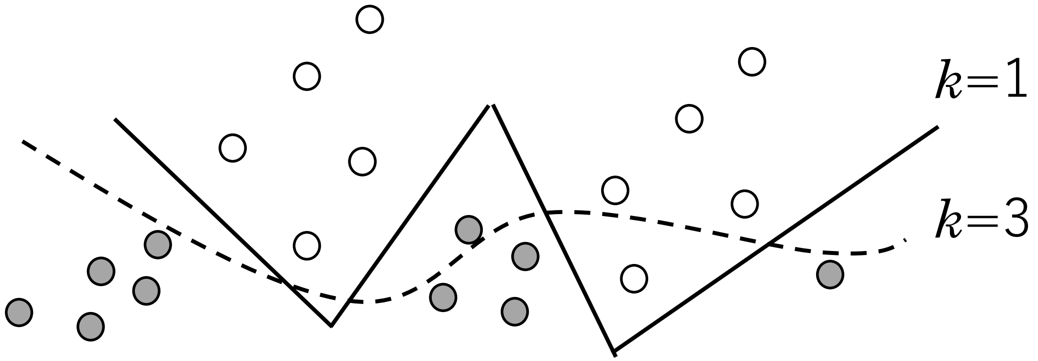


4.3.3 区分的線形識別関数の識別能力と学習

- 能力
  - ◆ 複雑な非線形決定境界でも、任意の精度で近似可能
- 学習
  - ◆ 副次識別関数の個数と、各関数の重みの両方を学習しなければならない
  - ◆ パーセプトロンの学習規則が適用できず、一般に学習は難しい

4.3.4 学習をあきらめるのも一手 k-NN法

- k-NN法とは
  - ◆ 全ての学習データをプロトタイプとする
  - ◆ 入力に近い順からk個のプロトタイプのクラスを調べ、多数決を取る
    - kが大きいと識別面がなめらかになる
  - ◆ 実験の際のベースラインとして用いられる



4.3.4 学習をあきらめるのも一手 k-NN法

- k-NN法の特徴
  - 非線形性を示すデータにも対処できる可能性がある
  - k を大きくすると識別境界が滑らかになる
- k-NN法の（かつての）問題点
  - 記憶容量
  - 計算時間

  → 現在ではあまり問題にならない